Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Peter Škvorc

Inverzni problem lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik

DIPLOMSKO DELO

UNIVERZITETNI INTERDISCIPLINARNI ŠTUDIJ
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: izred. prof. dr. Gašper Jaklič

Ljubljana 2015

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Evklidsko razdaljne matrike so poseben razred matrik, katerih elementi so kvadrati razdalj med točkami. Inverzni problem lastnih vrednosti je konstruirati ali dokazati obstoj matrike z določenimi lastnostmi in predpisanimi lastnimi vrednostmi. Za evklidsko razdaljne matrike je inverzni problem lastnih vrednosti še vedno odprt problem. V diplomskem delu preglejte in opišite znane rezultate. Posebej se osredotočite na problem za majhne dimenzije matrik.

Izjava o avtorstvu diplomskega dela

Spodaj podpisani Peter Škvorc, z vpisno številko **63080199**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Inverzni problem lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Gašperja Jakliča,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 29. junija 2015 Podpis avtorja:

Hvala mentorju izred. prof. dr. Gašperju Jakliču za nasvete in popravke.

Da ne bi koga pozabil, hvala VSEM za pomoč in vzpodbudo!

Kazalo

Povzetek

Abstract

1 Uvod **1**

2 Evklidsko razdaljne matrike **3**

3 Inverzni problem lastnih vrednosti **9**

3.1 IEP za simetrično nenegativne matrike 12

4 Inverzni problem lastnih vrednosti za evklidsko razdaljne matrike **15**

4.1 Konstrukcija rešitve za EDM 15

4.2 IEP za EDM velikosti 3 26

4.3 Hadamardove matrike in IEP za EDM 36

Povzetek

V diplomskem delu predstavimo znane rezultate inverznega problema lastnih vrednosti za evklidsko razdaljne matrike.

Najprej pokažemo kako iz podanih lastnih vrednosti, od katerih je samo ena pozitivna in katerih vsota je nič, konstruirati simetrično nenegativno matriko z ničlami po diagonali. S tem si kasneje pomagamo pri reševanju inverznega problema lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik. V drugem delu podrobneje pogledamo inverzni problem lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik velikosti tri, na koncu pa podamo še povezavo med Hadamardovimi matrikami in inverznim problemom lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik.

Ključne besede: Evklidsko razdaljne matrike, inverzni problem lastnih vrednosti, inverzni problem lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik, Hadamardove matrike.

Abstract

The objective of the thesis is to present various results of an inverse eigenvalue problem for Euclidean distance matrices.

The first part describes the construction of a non-negative symmetrical matrix with zeros on the diagonal with given eigenvalues, one of which is positive and the sum of which equals zero. This is of help when solving the inverse eigenvalue problem of Euclidean distance matrices. The second part of the thesis focuses on the inverse eigenvalue problem of 3x3 Euclidean distance matrices. Lastly, the connection between Hadamard matrices and the inverse eigenvalue problem for Euclidean distance matrices, is explained.

Keywords: Euclidean distance matrix, inverse eigenvalue problem, inverse eigenvalue problem for Euclidean distance matrix, Hadamard matrix.

Poglavje 1

Uvod

Matrika $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je evklidsko razdaljna, če obstajajo točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^r$ za nek r, tako da za vse $i, j = 1, 2, \ldots, n$ velja

$$d_{i,j} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2.$$

Evklidsko razdaljne matrike imajo ničle po diagonali, so simetrične, nenegativne, njihovi elementi pa predstavljajo kvadrate razdalj med točkami v evklidskem prostoru. Imajo natanko eno pozitivno lastno vrednost, vsota vseh lastnih vrednosti pa je enaka 0.

Inverzni problem lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik je konstruirati tako evklidsko razdaljno matriko D, ki bo za podana realna števila $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, katerih vsota je 0, imela spekter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Za $n = 2$ je rešitev problema enostavno

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podali bomo rešitev za $n = 3$ in pokazali, da jih obstaja neskončno mnogo.

S pomočjo konstrukcije simetrično nenegativnih matrik z ničlami po diagonali in podanim spektrom, bomo pogledali rešitev inverznega problema lastnih vrednosti za evklidsko razdaljne matrike.

Na koncu bomo definirali še Hadamardove matrike in pogledali kako so le-te povezane z inverznim problemom lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik.

Najmanjši odprti inverzni problem lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik je primer, ko je n enak 7.

Poglavje 2

Evklidsko razdaljne matrike

V tem poglavju bomo povedali nekaj o evklidsko razdaljnih matrikah ter o njihovih lastnih vrednostih. Povzeto je po [2, 7, 8].

Definicija 2.1 *Matrika $D = [d_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je **evklidsko razdaljna**, če obstajajo točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^r$ za nek r, tako da za vse $i, j = 1, 2, \ldots, n$ velja*

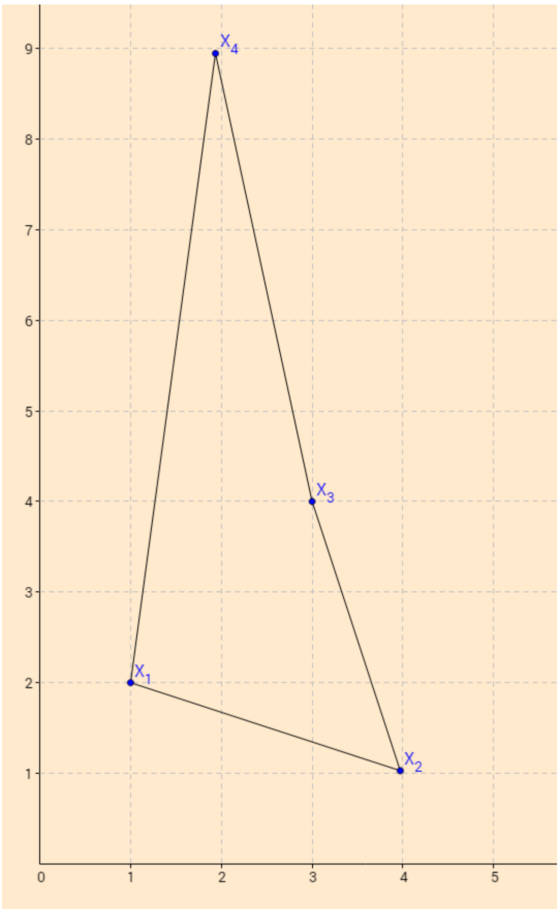
$$d_{i,j} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2.$$

Oznaka $\|\cdot\|$ pomeni evklidsko normo, r pa je dimenzija najmanjšega prostora, v katerega lahko vložimo točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Velja $r \leqslant n-1$, saj lahko z n točkami opišemo prostor, ki je dimenzije največ $n-1$.

Za vsak element $d_{i,j}$ evklidsko razdaljne matrike D mora veljati:

1. $d_{i,j} \geqslant 0, \quad i \neq j$
2. $d_{i,j} = 0, \quad i = j$
3. $d_{i,j} = d_{j,i}$
4. $\sqrt{d_{i,j}} \leqslant \sqrt{d_{i,k}} + \sqrt{d_{k,j}}, \quad i \neq j \neq k.$

Matrika D je torej simetrična, nenegativna, njeni elementi pa predstavljajo kvadrate razdalj med točkami v evklidskem prostoru.



Slika 2.1: Točke v ravnini, ki jim pripada razdaljna matrika D.

Primer 2.1 *Točke* $x_1 = (1, 2)$*,* $x_2 = (4, 1)$*,* $x_3 = (3, 4)$*,* $x_4 = (2, 9)$ *v ravnini generirajo evklidsko razdaljno matriko*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} \\ d_{2,1} & 0 & d_{2,3} & d_{2,4} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & 0 & d_{3,4} \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 8 & 50 \\ 10 & 0 & 10 & 68 \\ 8 & 10 & 0 & 26 \\ 50 & 68 & 26 & 0 \end{bmatrix}.$$

Glej sliko 2.1.

Opazimo, da vsak vzporedni premik, vrtenje ali zrcaljenje štirikotnika, ki ga določajo točke iz primera 2.1, ne spremeni matrike D.

Evklidsko razdaljne matrike (*angl.: Euclidian distance matrix*), v nadaljevanju EDM, točk v evklidskem prostoru ne določajo enolično.

Poglejmo si trditev o evklidsko razdaljnih matrikah in izrek, ki ga bomo uporabili v naslednjem poglavju.

Definicija 2.2 *Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je reducibilna, če in samo če obstaja permutacijska matrika P, tako da je matrika $P^T AP$ bločno zgornje trikotna. Če matrika ni reducibilna, rečemo da je ireducibilna.*

Trditev 2.1 *Neničelne EDM so ireducibilne.*

Dokaz. Naj bo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ neničelna EDM. Predpostavimo, da je $n > 1$, saj bi za $n = 1$ matrika A bila ničelna. Poglejmo poljuben element matrike

$$\begin{aligned} B = (I + A)^{n-1} &= I + (n-1)A + \binom{n-1}{2}A^2 \\ &+ \binom{n-1}{3}A^3 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}A^{n-1}. \end{aligned}$$

Ker je A nenegativna in ima ničle po diagonali, sledi

$$\begin{aligned} (B)_{ij} &= (n-1)(A)_{ij} + \binom{n-1}{2}(A^2)_{ij} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}(A^{n-1})_{ij} \\ &\geqslant (n-1)a_{ij} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

za različna indeksa $i, j = 1, 2, \ldots, n$, ter

$$\begin{aligned} (B)_{ii} &= 1 + (n-1)(A)_{ii} + + \binom{n-1}{2}(A^2)_{ii} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}(A^{n-1})_{ii} \\ &\geqslant 1 > 0, \end{aligned}$$

za enaka. Če ima matrika A izvendiagonalne elemente a_{ij} neničelne, je $(B)_{ij} > 0$. Prepostavimo, da za nek par različnih indeksov i in j velja $(B)_{ij} = 0$. Ker so vsi členi v vsoti (2.1) nenegativni, sledi

$$(A)_{ij} = (A^2)_{ij} = \cdots = (A^{n-1})_{ij} = 0. \tag{2.2}$$

Iz pogoja (2.2) vidimo, da je razdalja med točkama $\mathbf{x}_i$ in $\mathbf{x}_j$ enaka 0, kar pomeni, da sta točki enaki, zato sta vrstici i in j v matriki A enaki. Elementi matrike A so nenegativni, zato iz $(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = 0$ sledi $a_{ik}a_{kj} = 0$ za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$. Zaradi enakosti i-te in j-te vrstice, sta potem celi vrstici ničelni. To je mogoče le, če je cela matrika A ničelna, kar pa je v protislovju s predpostavko. $\square$

Za dokaz izreka bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 2.1 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ neničeln vektor. Velja*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \geqslant \lambda_n,$$

kjer sta λ_1 in λ_n največja in najmanjša lastna vrednost matrike A.

Dokaz. Naj bodo $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ lastni vektorji simetrične matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ki pripadajo lastnim vrednostim $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ in naj tvorijo ortonormirano bazo. Vzemimo poljuben neničeln vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in ga zapišimo po izbrani bazi

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n,$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Velja

$$\frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{\alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \cdots + \alpha_n^2\lambda_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} \leqslant \frac{\lambda_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} \leqslant \lambda_1$$

in

$$\frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{\alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \cdots + \alpha_n^2\lambda_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} \geqslant \frac{\lambda_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} \geqslant \lambda_n,$$

s tem pa je dokaz končan. $\square$

Izrek 2.1 *Naj bo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ireducibilna simetrična nenegativna matrika. Potem velja naslednje:*

(1) Obstaja t.i. ***Perronova lastna vrednost*** *r za matriko A, za vse preostale lastne vrednosti λ matrike A pa velja $|\lambda| \leqslant r$.*

(2) Obstaja t.i. ***Perronov lastni vektor*** $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *matrike A, ki pripada lastni vrednosti r in ima vse komponente pozitivne.*

Dokaz. Ker je A simetrična, ima realne lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ki jih lahko uredimo po velikosti $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Zaradi nenegativnosti matrike A velja

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geqslant 0,$$

iz česar sledi $r := \lambda_1 \geqslant |\lambda_i|$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Pokazati moramo še, da ima lastni vektor $\mathbf{v}$, ki pripada lastni vrednosti r, vse komponente pozitivne. Najprej pokažimo, da ima vse komponente nenegativne. Naj bo $A\mathbf{v} = r\mathbf{v}$ in $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Velja $\frac{\mathbf{v}^T A\mathbf{v}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = r$. Definirajmo še vektor $\mathbf{u}$ s komponentami $u_i = |v_i|$. Velja $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ in

$$r \leqslant \frac{\mathbf{v}^T A\mathbf{v}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j = \frac{\mathbf{u}^T A\mathbf{u}}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} \leqslant r. \tag{2.3}$$

Prva neenakost v (2.3) sledi iz trikotniške neenakosti, druga pa iz leme 2.1. Iz tega sledi, da je $\frac{\mathbf{u}^T A\mathbf{u}}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = r$, kar pomeni, da je $\mathbf{u}$ lastni vektor matrike A, ki pripada največji lastni vrednosti r. Recimo, da za $i = 1, 2, \ldots, k$, $k < n$, velja $v_i = 0$, za $k + 1 \leqslant i \leqslant n$ pa $v_i > 0$. Potem za vse $i = 1, 2, \ldots, n$ velja

$$(r\mathbf{v})_i = (A\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} v_j = 0,$$

od koder sledi $a_{i,k+1} = a_{i,k+2} = \cdots = a_{i,n} = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je A ireducibilna matrika. Zato so vse komponente vektorja $\mathbf{v}$ pozitivne. $\square$

Poglavje 3

Inverzni problem lastnih vrednosti

V tem poglavju bomo govorili o inverznem problemu lastnih vrednosti. Povzeto je po [1].

Lastne vrednosti se uporabljajo v fizikalnih sistemih, inženirstvu, gradbeništvu. Dinamika fizikalnega sistema in njegov odziv sta dostikrat odvisna od lastnih frekvenc. Lastne vrednosti določajo lastne frekvence nihanja, lastni vektorji pa smer in amplitudo.

Kadar iz že znanih parametrov nekega fizikalnega sistema (masa, dolžina, prostornina itd.) analiziramo njegovo dinamično obnašanje s pomočjo spektralnih podatkov, govorimo o **direktnem problemu**. Pri **inverznem problemu** pa skušamo z opazovanjem in pričakovanim obnašanjem sistema oceniti njegove parametre. V fizikalnih sistemih se srečujemo z obema problemoma. Inverzni problemi so v večini primerov zelo zahtevni in nimajo samo ene rešitve.

V kontekstu matrik **inverzni problem lastnih vrednosti** pomeni konstruirati matriko iz podanega spektra. Za matrike, katerih struktura ni omejena, je ta problem trivialen, saj je rešitev kar diagonalna matrika s spektrom po diagonali. Postane pa težek, kadar so za matriko predpisane dodatne zahteve kot so simetričnost, predpisana diagonala, nenegativni elementi, tako da je problem matematično in fizikalno smiseln. V tem primeru govorimo o **strukturiranem inverznem problemu lastnih vrednosti**. Tukaj mora matrika ustrezati spektralnim (imeti mora predpisan spekter) ter strukturnim (ustrezati mora predpisanim omejitvam) zahtevam.

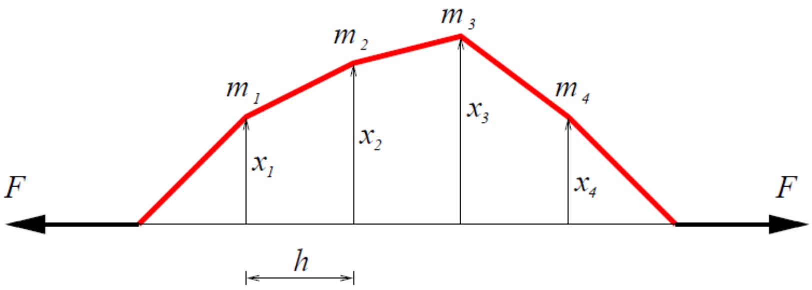
Inverzni problem lastnih vrednosti (*angl.: inverse eigenvalue problem*) bomo v nadaljevanju označevali s kratico IEP.

Definicija 3.1 *Inverzni problem lastnih vrednosti je konstruirati matriko* $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, ki ima za spekter podano množico* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$*. Števila* λ_i *so lahko realna ali kompleksna.*

Pri snovanju in študiju inverznega problema lastnih vrednosti moramo upoštevati štiri stvari. **Rešljivost**, kjer je potrebno določiti potrebne in zadostne pogoje, pri katerih ima inverzni problem rešitev. **Občutljivost**, kjer obravnavamo numerično stabilnost sistema, če spremenimo spektralne podatke oz. so nam znani samo približki spektra, izračunani z raznimi numeričnimi metodami. **Izračunljivost**, kjer nas zanima, kako konstruirati matriko na numerično stabilen način, če vnaprej vemo, da so podani spektralni podatki možni. **Uporabnost**, kjer se ukvarjamo s tem, ali so podani podatki točni ali približni, popolni ali nepopolni in ali je potrebna točna vrednost parametrov, ali pa zadostuje le približna.

Določanje naravnih frekvenc vibrirajočega telesa je eden od osnovnih problemov na področju analize klasičnih vibracij. Rešitev inverznega problema, konstrukcija modela/sistema iz podanih frekvenc, bi bila zelo dobrodošla v tej veji uporabne mehanike. Poglejmo si primer inverznega problema.

Primer 3.1 *Naj bodo* 4 *kroglice, vsaka z maso* m_i*, nataknjene na napeto vrv z enako medsebojno razdaljo* h*. Vrv je napeta horizontalno s silo* F*. Opazujemo vibracije teh kroglic. Glej sliko 3.1.*



Slika 3.1: Vibracije štirih kroglic na napeti vrvi.

Enačbe gibanja sistema za štiri kroglice so:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -F\frac{x_1}{h} + F\frac{x_2 - x_1}{h},$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -F\frac{x_2 - x_1}{h} + F\frac{x_3 - x_2}{h},$$
$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = -F\frac{x_3 - x_2}{h} + F\frac{x_4 - x_3}{h},$$
$$m_4\frac{d^2x_4}{dt^2} = -F\frac{x_4 - x_3}{h} + F\frac{x_4}{h}.$$

Če imamo na vrvi n kroglic, lahko te enačbe predstavimo z matrično formo:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -DJ_0\mathbf{x},$$

kjer je $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, D diagonalna matrika $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ z elementi $d_i = \frac{F}{m_i h}$, J_0 pa Jacobijeva matrika

$$J_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Naravne frekvence sistema so koreni lastnih vrednosti produkta DJ_0. Inverzni problem lastnih vrednosti v tem primeru je takšna postavitev kroglic, da bo sistem imel predpisane naravne frekvence.

Inverzni problem lastnih vrednosti uporabljamo v seizmologiji, uporabni mehaniki, geofiziki, ipd. V gradbeništvu ga uporabljajo pri simulacijah potresov in njihovem vplivu na zgradbe. Predstavljajmo si, da imamo v vsakem nadstropju stavbe vpeto vzmet z različnim prožnostnim koeficientom, vsako nadstropje pa ima neko maso. Iz znanih lastnih frekvenc nihanja bi radi predvideli obnašanje sistema glede na zunanje parametre, tako da bo stavba čim bolj varna.

V praksi nas zanimajo predvsem konstruktivni dokazi.

3.1 IEP za simetrično nenegativne matrike

V tem razdelku bomo za podana števila $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, za katera velja $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, skonstruirali simetrično nenegativno matriko z ničelno diagonalo in lastnimi vrednostmi λ_i. S tem si bomo kasneje pomagali pri iskanju rešitve IEP za EDM. Povzeto je po [3, 5].

Podajmo najprej t.i. Fiedlerjevo lemo, ki nam bo kasneje v pomoč. Dokaz leme si bralec lahko pogleda v [3].

Lema 3.1 *Naj bo A simetrična $m \times m$ matrika z lastnimi vrednostmi $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in $\mathbf{u}$ lastni vrednosti α pripadajoči normiran lastni vektor. Naj bo B simetrična $n \times n$ matrika z lastnimi vrednostmi $\beta, \beta_2, \ldots, \beta_n$ in $\mathbf{v}$ lastni vrednosti β pripadajoči normiran lastni vektor. Potem ima za vsak ρ matrika*

$$C = \begin{bmatrix} A & \rho \mathbf{u}\mathbf{v}^T \\ \rho \mathbf{v}\mathbf{u}^T & B \end{bmatrix}$$

lastne vrednosti $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2$, kjer sta γ_1 in γ_2 lastni vrednosti matrike

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \alpha & \rho \\ \rho & \beta \end{bmatrix}.$$

Po definiciji 2.1 so EDM simetrične in nenegativne, so pa tudi ireducibilne (trditev 2.1), zato po Perron-Forbeniusovem izreku 2.1 za lastne vrednosti

$\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ EDM $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\lambda_1 \geqslant |\lambda_i|$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Dominantna lastna vrednost je Perronova lastna vrednost, pripadajoči lastni vektor z nenegativnimi elementi pa je Perronov lastni vektor.

Naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ realna števila, katerih vsota je 0 in

$$\lambda_1 > 0 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{l-1} > \lambda_l \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n, \quad 2 \leqslant l \leqslant n. \tag{3.1}$$

Za $l = 2$ velja $\lambda_i < 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Naj bo

$$\mathbf{v}_l := \left[\frac{1}{\sqrt{l-1}}\mathbf{e}^T, 1\right]^T \in \mathbb{R}^l$$

in

$$\rho_k := \sqrt{\lambda_k \sum_{i=l}^{k} \lambda_i}, \quad k = l, l+1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{v}_k := \left[-\frac{\rho_k}{\lambda_k}\mathbf{u}_{k-1}^T, 1\right]^T, \quad k = l+1, l+2, \ldots, n,$$

kjer je $\mathbf{e}$ vektor samih enic ustrezne dimenzije ter

$$\mathbf{u}_k := \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|_2}, \quad k = l, l+1, \ldots, n.$$

Konstruiramo sedaj družino simetričnih nenegativnih matrik $M_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ takole

$$M_l := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\lambda_l}{\sqrt{l-1}}\mathbf{e} \\ -\frac{\lambda_l}{\sqrt{l-1}}\mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_k := \begin{bmatrix} M_{k-1} & \rho_k \mathbf{u}_{k-1} \\ \rho_k \mathbf{u}_{k-1}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad k = l+1, l+2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Matrika M_n je rešitev IEP simetrično nenegativnih matrik za nabor (3.1).

Izrek 3.1 *Matrika M_n, definirana v (3.2), ima lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in normiran Perronov lastni vektor $\mathbf{u}_n$.*

Opomba 3.1 *Zgornji izrek velja tudi za vse matrike M_k, kjer je $k = l, l+1, \ldots, n$. Matrika M_k ima namreč lastne vrednosti $-\sum_{i=l}^{k} \lambda_i, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ in normiran Perronov lastni vektor $\mathbf{u}_k$.*

Dokaz. Poglejmo najprej matriko M_l. Matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix}$$

ima lastni vrednosti $\pm\sqrt{l-1}$ in pripadajoča lastna vektorja $\left[\pm\frac{\mathbf{e}^T}{\sqrt{l-1}}, 1\right]^T$. Ker ima matrika M_l ničelno diagonalo in je njen rang enak 2, sledi, da so njene lastne vrednosti enake $-\lambda_l, 0, \ldots, 0, \lambda_l$, normiran Perronov lastni vektor pa $\mathbf{u}_l = \frac{\mathbf{v}_l}{\sqrt{2}}$.

Sedaj uporabimo matematično indukcijo. Naj bo $l < k \leqslant n$. Predpostavimo, da ima matrika M_{k-1} lastne vrednosti $-\sum_{i=l}^{k-1}\lambda_i, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}$ ter normiran Perronov lastni vektor $\mathbf{u}_{k-1}$. Po Fiedlerjevi lemi 3.1 ima za $A = M_{k-1}$, $\alpha = -\sum_{j=l}^{k-1}\lambda_j$, $\alpha_i = \lambda_i$, $i = 2, 3, \ldots, k-1$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k-1}$, $B = 0$, $\beta = 0$, $\mathbf{v} = 1$ in $\rho = \rho_k$ matrika M_k lastne vrednosti $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}, \gamma_1, \gamma_2$, kjer sta γ_1 in γ_2 lastni vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=l}^{k-1}\lambda_i & \rho_k \\ \rho_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Hitro lahko pokažemo, da je $\gamma_1 = -\sum_{i=l}^{k}\lambda_i$ in $\gamma_2 = \lambda_k$. Da je $\mathbf{u}_k$ normiran Perronov lastni vektor matrike M_k pa drži, če velja $M_k\mathbf{v}_k = -\sum_{i=l}^{k}\lambda_i\mathbf{v}_k$. Utemeljimo torej prejšnjo enakost:

$$M_k\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} -\frac{\rho_k}{\lambda_k}M_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \rho_k\mathbf{u}_{k-1} \\ -\frac{\rho_k^2}{\lambda_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\sum_{i=l}^{k}\lambda_i)(-\frac{\rho_k}{\lambda_k})\mathbf{u}_{k-1} \\ -\sum_{i=l}^{k}\lambda_i \end{bmatrix} = -\sum_{i=l}^{k}\lambda_i\mathbf{v}_k.$$

Če vzamemo $k = n$ in upoštevamo, da je vsota lastnih vrednosti enaka 0, končamo z dokazom. $\square$

Poglavje 4

Inverzni problem lastnih vrednosti za evklidsko razdaljne matrike

IEP za EDM je konstruirati tako EDM D, ki bo za podana realna števila $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, katerih vsota je 0, imela spekter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Za $n = 2$ je rešitev enostavno

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.1 Konstrukcija rešitve za EDM

V tem razdelku bomo pogledali konstrukcijo rešitve IEP za EDM. Povzeto je po [4, 5].

Izrek 4.1 *Naj bo $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ neničelna EDM s Perronovo lastno vrednostjo r in pripadajočim normiranim Perronovim lastnim vektorjem $\mathbf{u}$. Naj bo $D\mathbf{w} = \mathbf{e}$, $\mathbf{w}^T\mathbf{e} \geqslant 0$ in $\rho > 0$. Potem je obrobljena matrika*

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D & \rho\mathbf{u} \\ \rho\mathbf{u}^T & 0 \end{bmatrix}$$

EDM, če in samo če je $\rho \in [\alpha^-, \alpha^+]$, kjer je

$$\alpha^{\pm} := \frac{r}{(\mathbf{u}^T\mathbf{e} \mp \sqrt{r\mathbf{e}^T\mathbf{w}})}. \tag{4.1}$$

Opomba 4.1 *Če je $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{n}}$, je imenovalec v (4.1) enak 0, zato tedaj vzamemo $\alpha^+ = \infty$.*

Opomba 4.2 *Ker je pri konstrukciji uporabljen Perronov lastni vektor $\mathbf{u}$, dobimo posebne EDM. V splošnem naj bi vzeli poljuben nenegativen vektor.*

Pred dokazom si poglejmo še izrek, na katerega se bomo sklicevali v tem poglavju. Dokaz tega izreka si bralec lahko pogleda v [4].

Izrek 4.2 *Naj bo $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ neničelna matrika z ničelno diagonalo. Matrika D je EDM, če in samo če ima samo eno pozitivno lastno vrednost in obstaja tak vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, da je $D\mathbf{w} = \mathbf{e}$ in $\mathbf{w}^T\mathbf{e} \geqslant 0$.*

Dokaz. [Izrek 4.1]. Z izrekom 4.2 so avtorji pokazali, da je matrika $\hat{D}$ EDM, če ima natanko eno pozitivno lastno vrednost in obstaja vektor $\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, tako da je $\hat{D}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{e}$ in $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{e} \geqslant 0$. Po Fiedlerjevi lemi 3.1 spekter matrike $\hat{D}$ sestoji iz $n-1$ nepozitivnih lastnih vrednosti matrike D in dveh lastnih vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} r & \rho \\ \rho & 0 \end{bmatrix},$$

ki sta $\frac{r\pm\sqrt{r^2+4\rho^2}}{2}$. Ker je $\sqrt{r^2+4\rho^2} > r$, ima matrika $\hat{D}$ samo eno pozitivno lastno vrednost. Naj bo

$$\hat{\mathbf{w}} := \begin{bmatrix} \mathbf{w} - (\frac{\mathbf{u}^T\mathbf{e}}{r} - \frac{1}{\rho})\mathbf{u} \\ \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}^T\mathbf{e} - \frac{r}{\rho}) \end{bmatrix}.$$

Potem je $\hat{D}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{e}$. Določiti moramo še vrednosti ρ, da bo veljalo $\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} \geqslant 0$, kjer je

$$\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{e}^T\mathbf{w} - \frac{1}{r}(\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2 + \frac{2}{\rho}(\mathbf{u}^T\mathbf{e}) - \frac{r}{\rho^2}. \tag{4.2}$$

Če je $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{n}}$, potem je $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{e}}{r}$ in $\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} = \frac{2\rho\sqrt{n}-r}{\rho^2}$. Torej je $\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} \geqslant 0$ če in samo če je $\rho \geqslant \frac{r}{s\sqrt{n}}$. Ker je $\alpha^{\pm} = \frac{r}{\sqrt{n}\mp\sqrt{n}}$, je $\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} \geqslant 0$ samo takrat, ko je $\rho \in [\alpha^-, \alpha^+] = [\frac{r}{2\sqrt{n}}, \infty]$.

Naj bo

$$\kappa := -\frac{1}{r\rho^2((\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2 - r(\mathbf{e}^T\mathbf{w}))}.$$

Potem lahko za $\mathbf{u} \neq \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{n}}$, enačbo (4.2) zapišemo kot

$$\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} = \kappa\left(\rho - \frac{r}{\mathbf{u}^T\mathbf{e} - \sqrt{r(\mathbf{e}^T\mathbf{w})}}\right)\left(\rho - \frac{r}{\mathbf{u}^T\mathbf{e} + \sqrt{r(\mathbf{e}^T\mathbf{w})}}\right).$$

Neenakost $\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} \geqslant 0$ velja, če ρ leži med ničlama α^- in α^+ dobljene kvadratne enačbe.

Interval $[\alpha-, \alpha+]$ je za ρ dobro definiran. Iz $D\mathbf{w} = \mathbf{e}$ sledi, da je $\mathbf{u}^T D\mathbf{w} = \mathbf{u}^T\mathbf{e}$, iz $\mathbf{u}^T D = r\mathbf{u}^T$ pa $\mathbf{u}^T D\mathbf{w} = r\mathbf{u}^T\mathbf{w}$. Torej je $r\mathbf{u}^T\mathbf{w} = \mathbf{u}^T\mathbf{e}$. Naj bodo $r > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ lastne vrednosti EDM D in $\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n$ pripadajoči normirani lastni vektorji. Iz spektralne dekompozicije matrike D, to je

$$D = r\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \lambda_2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \lambda_3\mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T,$$

sledi

$$\mathbf{w}^T\mathbf{e} = r(\mathbf{w}^T\mathbf{u})^2 + \lambda_2(\mathbf{w}^T\mathbf{u}_2)^2 + \cdots + \lambda_n(\mathbf{w}^T\mathbf{u}_n)^2 \leqslant r(\mathbf{w}^T\mathbf{u})^2 = \frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2}{r}.$$

Zato je

$$(\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2 \geqslant r\mathbf{w}^T\mathbf{e}. \tag{4.3}$$

Ker je $\mathbf{u}$ Perronov lastni vektor, je $\mathbf{u}^T\mathbf{e} > 0$, zato je tudi $\mathbf{u}^T\mathbf{e} \geqslant \sqrt{r\mathbf{w}^T\mathbf{e}}$. Sledi $\mathbf{u}^T\mathbf{e} \pm \sqrt{r\mathbf{w}^T\mathbf{e}} \geqslant 0$ in $\alpha^+ \geqslant 0$. $\square$

Naslednji izrek je posplošitev prejšnjega.

Izrek 4.3 *Naj bosta $D_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}$ in $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times l}$ neničelni EDM. Naj velja $D_1\mathbf{u} = r_1\mathbf{u}$ in $D_2\mathbf{v} = r_2\mathbf{v}$, kjer sta r_1 in r_2 Perronovi lastni vrednosti za matriki D_1 in D_2, $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ pa pripadajoča normirana Perronova lastna vektorja.*

Naj bosta $\mathbf{w}_1$ *in* $\mathbf{w}_2$ *taka vektorja, da velja* $D_1\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}$, $\mathbf{w}_1^T\mathbf{e} \geqslant 0$ *in* $D_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}$, $\mathbf{w}_2^T\mathbf{e} \geqslant 0$. *Za* $\rho > 0$, $\rho^2 \neq r_1r_2$ *in skonstruiramo matriko*

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D_1 & \rho\mathbf{u}\mathbf{v}^T \\ \rho\mathbf{v}\mathbf{u}^T & D_2 \end{bmatrix}.$$

Če je $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{k}}$ *in* $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{l}}$, *potem je matrika* $\hat{D}$ *EDM natanko takrat, ko je* $\rho^2 > r_1r_2$ *in*

$$\rho \geqslant \frac{r_2}{2}\sqrt{\frac{k}{l}} + \frac{r_1}{2}\sqrt{\frac{l}{k}}.$$

Sicer je matrika $\hat{D}$ *EDM natanko takrat, ko je* $\rho^2 > r_1r_2$,

$$\beta := \big((\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2 - r_1\mathbf{w}_1^T\mathbf{e} - r_1\mathbf{w}_2^T\mathbf{e}\big)\big((\mathbf{v}^T\mathbf{e})^2 - r_2\mathbf{w}_1^T\mathbf{e} - r_2\mathbf{w}_2^T\mathbf{e}\big) \geqslant 0$$

in ρ *leži na intervalu* $[\alpha^-, \alpha^+]$, *kjer je*

$$\alpha^{\pm} := \frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e}) \pm \sqrt{\beta}}{\frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2}{r_1} + \frac{(\mathbf{v}^T\mathbf{e})^2}{r_2} - \mathbf{e}^T\mathbf{w}_1 - \mathbf{e}^T\mathbf{w}_2}.$$

Dokaz. Vzemimo vektor $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^k$, tako da velja $D_1\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}$, $\mathbf{w}_1^T\mathbf{e} \geqslant 0$ in vektor $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^l$, tako da velja $D_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}$, $\mathbf{w}_2^T\mathbf{e} \geqslant 0$. Naj bo ρ tako pozitivno število, da je $\rho^2 \neq r_1r_2$. Po izreku 4.2 je matrika $\hat{D}$ EDM natanko tedaj, ko ima samo eno pozitivno lastno vrednost in obstaja vektor $\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{k+l}$, tako da je $\hat{D}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{e}$ in $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{e} \geqslant 0$.

Pokažimo najprej, da ima matrika $\hat{D}$ eno samo pozitivno lastno vrednost, če in samo če je $\rho^2 > r_1r_2$. Po Fiedlerjevi lemi 3.1 so lastne vrednosti $\hat{D}$ nepozitivne lastne vrednosti matrik D_1 in D_2 ter lastni vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} r_1 & \rho \\ \rho & r_2 \end{bmatrix},$$

ki sta

$$\frac{r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4(\rho^2 - r_1r_2)}}{2}. \tag{4.4}$$

Če je $\rho^2 - r_1 r_2 > 0$, potem je

$$\sqrt{(r_1+r_2)^2 + 4(\rho^2 - r_1 r_2)} > r_1 + r_2$$

in matrika $\hat{D}$ ima samo eno pozitivno lastno verdnost. Obratno, če ima $\hat{D}$ samo eno pozitivno lastno vrednost, je

$$r_1 + r_2 - \sqrt{(r_1+r_2)^2 + 4(\rho^2 - r_1 r_2)} \leqslant 0.$$

Iz tega sledi $(r_1+r_2)^2 \leqslant (r_1+r_2)^2 + 4(\rho^2 - r_1 r_2)$ in $\rho^2 - r_1 r_2 \geqslant 0$. Ker pa $\rho^2 - r_1 r_2 \neq 0$, je $\rho^2 > r_1 r_2$.

Pokažimo sedaj, da obstaja tak vektor $\hat{\mathbf{w}}$, za katerega je $\hat{D}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{e}$ in $\hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{e} \geqslant 0$. Naj bo

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 + \frac{\rho}{r_1 r_2 - \rho^2}\left(\frac{\rho}{r_1}(\mathbf{u}^T\mathbf{e}) - \mathbf{v}^T\mathbf{e}\right)\mathbf{u} \\ \mathbf{w}_2 + \frac{\rho}{r_1 r_2 - \rho^2}\left(\frac{\rho}{r_2}(\mathbf{v}^T\mathbf{e}) - \mathbf{u}^T\mathbf{e}\right)\mathbf{v} \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \hat{D}\hat{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e} + \rho\left(\mathbf{v}^T\mathbf{w}_2 - \frac{r_1}{r_1 r_2 - \rho^2}(\mathbf{v}^T\mathbf{e}) + \frac{\rho^2}{r_2(r_1 r_2 - \rho^2)}(\mathbf{v}^T\mathbf{e})\right)\mathbf{u} \\ \mathbf{e} + \rho\left(\mathbf{u}^T\mathbf{w}_1 - \frac{r_1}{r_1 r_2 - \rho^2}(\mathbf{u}^T\mathbf{e}) + \frac{\rho^2}{r_1(r_1 r_2 - \rho^2)}(\mathbf{u}^T\mathbf{e})\right)\mathbf{v} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e} + \rho\left((\frac{1}{r_2}D_2\mathbf{v})^T\mathbf{w}_2 - \frac{1}{r_2}(\mathbf{v}^T\mathbf{e})\right)\mathbf{u} \\ \mathbf{e} + \rho\left((\frac{1}{r_1}D_1\mathbf{u})^T\mathbf{w}_1 - \frac{1}{r_1}(\mathbf{u}^T\mathbf{e})\right)\mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Označimo

$$\varphi := \frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2}{r_1} + \frac{(\mathbf{v}^T\mathbf{e})^2}{r_2} - \mathbf{e}^T\mathbf{w}_1 - \mathbf{e}^T\mathbf{w}_2.$$

Iz dokaza izreka 4.1 sledi

$$(\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2 \geqslant r_1 \mathbf{e}^T\mathbf{w}_1 \text{ in } (\mathbf{v}^T\mathbf{e})^2 \geqslant r_2 \mathbf{e}^T\mathbf{w}_2, \tag{4.5}$$

torej je $\varphi \geqslant 0$. Sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{e}^T\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}^T\mathbf{w}_2 + \frac{\rho}{r_1 r_2 - \rho^2}\left(\frac{\rho}{r_1}(\mathbf{u}^T\mathbf{e})^2 + \frac{\rho}{r_2}(\mathbf{v}^T\mathbf{e})^2 - 2(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})\right) \\ &= \frac{1}{r_1 r_2 - \rho^2}\big(\varphi\rho^2 - 2(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})\rho + r_1 r_2(\mathbf{e}^T\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}^T\mathbf{w}_2)\big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Če je $\varphi > 0$, potem je (4.6) kvadratna enačba v spremenljivki ρ in jo lahko zapišemo kot

$$\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{r_1r_2-\rho^2}\left(\rho - \frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})+\sqrt{\beta}}{\varphi}\right)\left(\rho - \frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})-\sqrt{\beta}}{\varphi}\right).$$

Očitno je $\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} \geqslant 0$, če in samo če je $\beta \geqslant 0$ in

$$\frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})-\sqrt{\beta}}{\varphi} \leqslant \rho \leqslant \frac{(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})+\sqrt{\beta}}{\varphi},$$

oz. $\rho \in [\alpha^-, \alpha^+]$.

Ostane nam samo še primer, ko je $\varphi = 0$. To se lahko zgodi le v primeru, ko sta v neenakostih (4.5) doseženi enakosti, kar pa je mogoče samo v primeru, ko je $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{k}}$ in $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{l}}$. Takrat sta $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{e}}{r_1}$ in $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{e}}{r_2}$, kvadratna enačba (4.6) pa postane linearna,

$$\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{\rho^2 - r_1r_2}\big(2(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})\rho - r_1r_2(\mathbf{e}^T\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}^T\mathbf{w}_2)\big).$$

Torej je $\mathbf{e}^T\hat{\mathbf{w}} \geqslant 0$ če in samo če

$$\rho \geqslant \frac{r_1r_2(\mathbf{e}^T\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}^T\mathbf{w}_2)}{2(\mathbf{u}^T\mathbf{e})(\mathbf{v}^T\mathbf{e})} = \frac{r_2}{2}\sqrt{\frac{k}{l}} + \frac{r_1}{2}\sqrt{\frac{l}{k}}.$$

S tem je dokaz končan. □

Opomba 4.3 *V primeru $\rho = \sqrt{r_1r_2}$ vzamemo*

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{e}}{r_1+r_2}\mathbf{u} \\ \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{e}}{r_1+r_2}\mathbf{v} \end{bmatrix},$$

tako da je $\hat{D}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{e}$ natanko tedaj, ko je $\sqrt{r_2}\mathbf{u}^T\mathbf{e} = \sqrt{r_1}\mathbf{v}^T\mathbf{e}$. Potem je $\hat{D}$ EDM za tak $\hat{\mathbf{w}}$, če in samo če je $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{e} \geqslant 0$.

Po izreku 3.1 ima simetrična nenegativna matrika M_n z ničelno diagonalo lastne vrednosti

$$\lambda_1^{(n)} := -\sum_{i=2}^{n}\lambda_i, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n,$$

od katerih je natanko ena pozitivna. Poglejmo, kaj so potrebni in zadostni pogoji za matriko M_n, da je EDM. Za začetek naj bo M_n nesingularna.

Lema 4.1 *Naj bo matrika M_n nesingularna. Potem je*

$$M_2^{-1} = -\frac{1}{\lambda_2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_k^{-1} = \begin{bmatrix} M_{k-1}^{-1} + \frac{\lambda_{k-1}}{\rho_{k-1}^2}\mathbf{u}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}^T & \frac{1}{\rho_k}\mathbf{u}_{k-1} \\ \frac{1}{\rho_k}\mathbf{u}_{k-1}^T & \frac{\rho_{k-1}^2}{\rho_k^2\lambda_{k-1}} \end{bmatrix}, k = 3, 4, \ldots, n.$$

Dokaz. Z uporabo enakosti

$$\frac{\lambda_{k-1}}{\rho_{k-1}^2} = -\frac{1}{\lambda_1^{(k-1)}}, \quad M_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} = \lambda_1^{(k-1)}\mathbf{u}_{k-1}, \quad \mathbf{u}_{k-1}^T M_{k-1}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1^{(k-1)}}\mathbf{u}_{k-1}^T, \tag{4.7}$$

lahko izračunamo, da je $M_k M_k^{-1} = I$. □

Tako pridemo do naslednjega rezultata.

Lema 4.2 *Rešitev enačbe $M_k\mathbf{w}_k = \mathbf{e}$ je*

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k-1} + \left(\frac{\lambda_{k-1}}{\rho_{k-1}^2}\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{1}{\rho_k}\right)\mathbf{u}_{k-1} \\ \frac{1}{\rho_k}\left(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{\rho_{k-1}^2}{\rho_k\lambda_{k-1}}\right) \end{bmatrix}, k = l+1, l+2, \ldots, n,$$

z $\mathbf{w}_l = \left[-\frac{\sqrt{l-1}}{\lambda_l}, 0, \ldots, 0, -\frac{\sqrt{l-1}}{\lambda_l}\right]^T \in \mathbb{R}^l$. *Tu je*

$$\mathbf{u}_l^T\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{l-1}),$$

$$\mathbf{u}_k^T\mathbf{e} = \left(1 - \frac{\rho_k}{\lambda_k}\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e}\right)\frac{1}{\|\mathbf{v}_k\|}, \quad \|\mathbf{v}_k\| = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^{(k)}}{\lambda_k}}. \tag{4.8}$$

Dokaz. Za nesingularno matriko M_k uporabimo lemo 4.1. Z enakostmi (4.7) pa dokažemo zgornjo lemo tudi za singularno matriko M_k. □

Ker je vektor $\mathbf{u}_{k-1}$ Perronov, velja $\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} > 0$. Vemo pa tudi, da je $\mathbf{w}_l^T\mathbf{e} = -\frac{2\sqrt{l-1}}{\lambda_l} > 0$. Zato sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k^T\mathbf{e} &= \mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{e} + \mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e}\left(\frac{\lambda_{k-1}}{\rho_{k-1}^2}\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{2}{\rho_k}\right) + \frac{\rho_{k-1}^2}{\rho_k^2\lambda_{k-1}} \\ &= \mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{\lambda_{k-1}}{\rho_{k-1}^2}\left(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{\rho_{k-1}^2}{\rho_k\lambda_{k-1}}\right)^2 \\ &= -2\frac{\sqrt{l-1}}{\lambda_l} + \sum_{j=l+1}^{k}\frac{\lambda_{j-1}}{\rho_{j-1}^2}\left(\mathbf{u}_{j-1}^T\mathbf{e} + \frac{\rho_{j-1}^2}{\rho_j\lambda_{j-1}}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tukaj lahko upoštevamo še enakosti (4.7) in (4.8).

Matrika M_l je torej EDM za vsak $\lambda_l < 0$. Da pa bo M_k EDM za $k > l$, mora biti izraz (4.9) nenegativen.

Izrek 4.4 *Naj bodo $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, lastne vrednosti matrike M_n, definirane v (3.2). Matrika M_n je EDM, če in samo če je $\mathbf{w}_n^T\mathbf{e}$ iz (4.9) nenegativen.*

Dokaz. Matrika M_n je simetrična z ničelno diagonalo in ima po izreku 3.1 natanko eno pozitivno lastno vrednost λ_1. Po izreku 4.2 je dovolj pokazati, da obstaja vektor $\mathbf{w}_n \in \mathbb{R}$, da je $M_n\mathbf{w}_n = \mathbf{e}$ in $\mathbf{w}_n^T\mathbf{e} \geqslant 0$. Tak vektor pa je podan z lemo 4.2. □

Opomba 4.4 *Zahteva $\mathbf{w}_n^T\mathbf{e} \geqslant$, izražena v (4.9), nam da nelinearne pogoje za dane λ_i. Vključuje tudi dejstvo, da mora biti vsaka glavna podmatrika matrike M_n EDM.*

Lema 4.3 *Naj bo $\lambda_{l+1} \leqslant \lambda_l$. Potem je matrika M_{l+1} EDM natanko tedaj, ko $\lambda_{l+1} \in [b_l^-, \lambda_l]$, kjer je*

$$b_l^{\pm} := \frac{4}{(x_l \pm 1)^2\big((x_l \pm 1)^2 + \sqrt{8 + (x_l \pm +1)^4}\big)}\lambda_l,$$

in $x_l := \sqrt[4]{l+1}$.

Dokaz. S pomočjo izrekov 4.1 in 3.1, ter izraza (4.9) lahko izračunamo meje $\alpha^{\mp}$ za parameter ρ_{l+1}. Nadaljnje računanje in analiza nas pripelje do pogoja

$$\lambda_{l+1} \in [b_l^-, b_l^+].$$

Sedaj ni težko preveriti, da je $\lambda_l \leqslant b_l^+$, s čimer je dokaz končan. □

Opomba 4.5 *Omejitve v lemi 4.3 so odvisne od l. Če je $\lambda_{l+1} = \lambda_l$, potem je $\rho_{l+1} = \sqrt{2}\rho_l = -\sqrt{2}\lambda_l$. Tako je matrika M_{l+1} EDM samo za $l \leqslant 17$.*

Prejšnji rezultat je precejšnja omejitev pri konstrukcijah EDM, kjer na vsakem koraku dodajamo najmanjšo lastno vrednost. Taka konstrukcija se lahko na nekem koraku hitro konča, brez možnosti nadaljevanja. Konstrukcijo pa lahko izboljšamo, če ta pogoj izpustimo in lastne vrednosti dodajamo v drugačnem vrstnem redu.

Izrek 4.5 *Za λ_k obstaja tak dopustni interval $[b_k^-, b_k^+] \subset (-\infty, 0)$, kjer je*

$$b_k^{\mp} := -\frac{2\lambda_1^{(k-1)}}{\left(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} \pm \sqrt{\lambda_1^{(k-1)}\mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{e}}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{4}{\left(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} \pm \sqrt{\lambda_1^{(k-1)}\mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{e}}\right)^2}}},$$

da je $\phi_k(\lambda_k) := \mathbf{w}_k^T\mathbf{e} \geqslant 0$.

Dokaz. Funkcija ϕ_k je zvezna na intervalu $(-\infty, 0)$ in vsota v izrazu (4.9) je negativna. Velja

$$\mathbf{w}_k^T\mathbf{e} = \mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{\lambda_{k-1}}{\rho_{k-1}^2}\left(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{\rho_{k-1}^2}{\rho_k\lambda_{k-1}}\right)^2 \to \mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{e} - \frac{(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e})^2}{\lambda_1^{(k-1)}}, \qquad (4.10)$$

ko gre $\lambda_k \to -\infty$. Ker pa je $\mathbf{u}_{k-1}$ nekolinearen z $\mathbf{e}$, ter zaradi neenakosti (4.3), velja tudi

$$\mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{e} - \frac{(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e})^2}{\lambda_1^{(k-1)}} < 0.$$

Iz (4.10) se vidi, da gre $\mathbf{w}_k^T\mathbf{e} \to -\infty$ ko $\lambda_k \uparrow 0$ in da je

$$\frac{d}{d\lambda_k}\phi_k = -\frac{1}{\rho_k^3}\left(\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e} + \frac{\rho_{k-1}^2}{\rho_k\lambda_{k-1}}\right)(-\lambda_1^{(k-1)} + 2\lambda_k).$$

Torej ima funkcija ϕ_k natanko en lokalni maksimum na intervalu $(-\infty, 0)$, ki je dosežen pri

$$\lambda_k^* = -\frac{2\lambda_1^{(k-1)}}{\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e}\left(\lambda_1^{(k-1)} + \sqrt{(\lambda_1^{(k-1)})^2 + 4\frac{\lambda_1^{(k-1)}}{\mathbf{u}_{k-1}^T\mathbf{e}}}\right)}.$$

Ker je $\phi_k(\lambda_k^*) = \mathbf{w}_{k-1}^T \mathbf{e} \geqslant 0$, obstaja dopustni interval $[b_k^-, b_k^+] \subset (-\infty, 0)$ za λ_k, določen z ničlami funkcije ϕ_k. Z nekaj računanja lahko enačbo $\phi_k(\lambda_k) = 0$ zapišemo kot kvadratno enačbo v spremenljivki λ_k, kjer moramo zaradi kvadriranja enačbe med reševanjem obravnavati dve možnosti. Pri vsaki od teh dobimo 2 rešitvi, skupaj torej 4, vendar lahko dve zavržemo, saj sta pozitivni. S preostalima dvema, $b_k^{\mp}$, pa smo pokazali, da obstaja interval znotraj $(-\infty, 0)$, na katerem je funkcija ϕ nenegativna. $\square$

Opomba 4.6 *Dopustni interval se v primeru, ko je $\mathbf{w}_{k-1}^T \mathbf{e} = 0$, skrči v točko λ_k^*. Ker pa je vsota v (4.9) negativna, se dolžina intervala $[b_k^-, b_k^+]$ z večanjem parametra k manjša proti 0.*

Če zahtevamo, da je $\lambda_k \leqslant \lambda_{k-1}$, je zgornja meja za izbiro λ_k nenaraščajoča funkcija parametra k. Pri predstavljeni konstrukciji EDM se težava pojavi, če je $b_k^- > \lambda_{k-1}$. V takem primeru je potrebna sprememba prejšnjih lastnih vrednosti, tako da so izpolnjeni pogoji izreka 4.4. Na ta način lahko sicer konstruiramo večje EDM, vendar se izgubi smisel reševanja IEP za EDM.

Če so zaporedne vrednosti λ_k neurejene glede na velikost, lahko konstruiramo poljubno velike EDM. Paziti moramo le, da lastne vrednosti λ_k izbiramo iz intervala $[b_k^-, b_k^+]$, definiranega v (4.5).

Glavna omejitev konstrukcije (omenjeno v opombi 4.2) je zahteva, da v izreku 4.1 za konstrukcijo obrobljene matrike uporabimo Perronov lastni vektor. Da bi rešili ta problem v splošnem, bi morali izbrati drugačen pristop. Izbran spekter bi lahko razdelili na dva dela in tako konstruirali matriki D_1 in D_2 z izbranima spektroma. Po izreku 4.3 bi dobili EDM s predpisanimi lastnimi vrednostmi ter novo negativno lastno vrednost in pripadajoči Perronov lastni vektor (glej 4.4).

Poglejmo si še nekaj primerov.

Skonstruirajmo najprej simetrično nenegativno matriko z ničlami po diagonali in lastnimi vrednostmi $-1, -200, -3000, -40000, -500000, 543201$ z uporabo (3.2):

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 141.774 & 1551.37 & 14952 & 135074 \\ 1 & 0 & 141.774 & 1551.37 & 14952 & 135074 \\ 141.774 & 141.774 & 0 & 2188.5 & 21092.7 & 190547 \\ 1551.37 & 1551.37 & 2188.5 & 0 & 28913.9 & 261203 \\ 14952 & 14952 & 21092.7 & 28913.9 & 0 & 361352 \\ 135074 & 135074 & 190547 & 261203 & 361352 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika D ni EDM, saj je $\mathbf{w}^T\mathbf{e} = -0.00049$, njena glavna podmatrika velikosti 4 pa je.

Kot drugi primer skonstruirajmo EDM s pozitivno lastno vrednostjo $\frac{k(k+1)}{2}$ ter negativnimi lastnimi vrednostmi $-1, -2, \ldots, -k$. Opazimo, da lahko konstrukcijo izvajamo le do $k = 14$. Vrednosti $\mathbf{w}_j^T\mathbf{e}$ so prikazane v tabeli 4.1.

λ_j	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14
$\mathbf{w}_j^T\mathbf{e}$	2.00	0.98	0.64	0.46	0.34	0.27	0.21	0.16	0.13	0.10	0.07.	0.05	0.03	0.01

Tabela 4.1: Vrednosti $\mathbf{w}_j^T\mathbf{e}$ pri konstrukciji EDM z lastnimi vrednostmi $-1, -2, \ldots, -l$.

Če v spekter dodamo -15, matrika ni več EDM, saj je $\mathbf{w}_{16}^T\mathbf{e} = -0.001$. Lahko pa z nekaj permutacijami lastnih vrednosti sestavimo tudi večjo EDM, na primer za $k = 19$, če uredimo negativne lastne vrednosti v vrstnem redu $-1, -2, -10, -3, -4, -18, -6, -19, -8, -11, -17, -5, -9, -7, -16, -15, -12, -14, -13$.

Lahko pa konstruiramo matriki D_1 z lastnimi vrednostmi $-1, -3, \ldots, -15$ ter D_2 z lastnimi vrednostmi $-2, -4, \ldots, -14$. Tedaj je $\mathbf{w}^T\mathbf{e}(D_1) = 0.07$ in $\mathbf{w}^T\mathbf{e}(D_2) = 0.11$. Če vzamemo $\rho = 83.85 \in [\alpha^-, \alpha^+] = [59.89, 120.37]$ in uporabimo izrek 4.3, je dobljena matrika EDM z lastnimi vrednostmi $-1, -2, \ldots, -15$ ter -23.95 in 143.95.

Podobno lahko konstruiramo tudi tri matrike D_1 z lastnimi vrednostmi $-1, -4, \ldots, -19$, D_2 z lastnimi vrednostmi $-2, -5, \ldots, -20$ ter D_3 z lastnimi vrednostmi $-3, -6, \ldots, -18$. Če uporabimo izrek 4.3 in vzamemo prvič $\rho = 85.74 \in [73.6, 137.5]$ in drugič $\rho = 108.39 \in [101.9, 123.8]$, dobimo EDM z lastnimi vrednostmi $-1, -2, \ldots, -20$ ter $-7.45, -12.31$ in 229.76.

Poglejmo še primer konstrukcije EDM, kjer vsako naslednjo lastno vrednost $\lambda_k \in [b_k^-, b_k^+]$ izbiramo naključno. V tabeli 4.2 so prikazane izbrane vrednosti λ_k, vrednosti $\mathbf{w}_k^T\mathbf{e}$ ter pripadajoči dopustni intervali $[b_k^-, b_k^+]$. Začne se z $l = 50$. Vidimo, da svoboda izbire naslednje λ_k postaja vedno bolj omejena, saj se dopustni intervali vedno bolj krčijo.

k	λ_k	$\mathbf{w}_k^T\mathbf{e}$	$[b_k^-, b_k^+]$
50	-10	1.4	$[-2.22931, -0.111956]$
51	-1.075960	0.638181	$[-1.09134, -0.15639]$
52	-0.313009	0.635631	$[-1.08586, -0.156395]$
53	-0.251166	0.568287	$[-0.987141, -0.161144]$
54	-0.545484	0.410772	$[-0.828302, -0.179206]$
55	-0.437008	0.363314	$[-0.785359, -0.186227]$
56	-0.584940	0.187426	$[-0.613773, -0.220174]$
57	-0.504901	0.0977203	$[-0.522209, -0.249657]$
58	-0.415578	0.0773968	$[-0.500496, -0.259432]$
59	-0.478392	0.0171767	$[-0.41584, -0.305288]$
60	-0.373645	0.0151735	$[-0.412289, -0.308296]$

Tabela 4.2: Konstrukcija EDM z neurejenimi in naključno izbranimi lastnimi vrednostmi.

4.2 IEP za EDM velikosti 3

Tukaj bomo najprej podali rešitev IEP za EDM velikosti 3, kasneje pa pokazali, da jih obstaja neskončno mnogo. Povzeto je po [6, 8, 9].

Podajmo najprej lemo, ki nam bo v pomoč pri dokazovanju naslednjega izreka.

Lema 4.4 *Naj bodo $\lambda_1 \geqslant 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ poljubna realna števila, za katere velja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Potem je $(n-1)|\lambda_n| \geqslant \lambda_1$ in $(n-1)|\lambda_2| \leqslant \lambda_1$.*

Dokaz. Ker je $\lambda_1 = \sum_{i=2}^n |\lambda_i|$ in $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n|$, velja

$$\lambda_1 = \sum_{i=2}^n |\lambda_i| \leqslant \sum_{i=2}^n |\lambda_n| = |\lambda_n|(n-1),$$

po drugi strani pa velja tudi

$$\lambda_1 = \sum_{i=2}^n |\lambda_i| \geqslant \sum_{i=2}^n |\lambda_2| = |\lambda_2|(n-1).$$

□

Izrek 4.6 *Naj bo $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset \mathbb{R}$ in naj velja $\lambda_1 \geqslant 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ ter $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Potem obstaja EDM $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ s spektrom σ.*

Dokaz. Če je $\lambda_1 = 0$, je tudi $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ in je pripadajoča EDM ničelna. V primeru $\lambda_1 > 0$ pa skonstruirajmo enokrak trikotnik z vrhom v izhodišču in ogliščema

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{4} + \sqrt{\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_3}{2}}}, \pm\frac{\sqrt{-\lambda_2}}{2}\right).$$

Pripadajoča EDM je sedaj

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2 & \sqrt{\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_3}{2}} \\ -\lambda_2 & 0 & \sqrt{\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_3}{2}} \\ \sqrt{\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_3}{2}} & \sqrt{\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_3}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom p matrike D je

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^3 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)x - \lambda_2\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3) \\ &= -(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x+\lambda_2+\lambda_3), \end{aligned}$$

torej je σ res spekter skonstruirane EDM.

Preverimo še, če so oglišča dobro definirana. Po lemi 4.4 je $2|\lambda_3| = 2(-\lambda_3) \geqslant \lambda_1$ oziroma $-\lambda_3 \geqslant \frac{\lambda_1}{2}$, zato velja

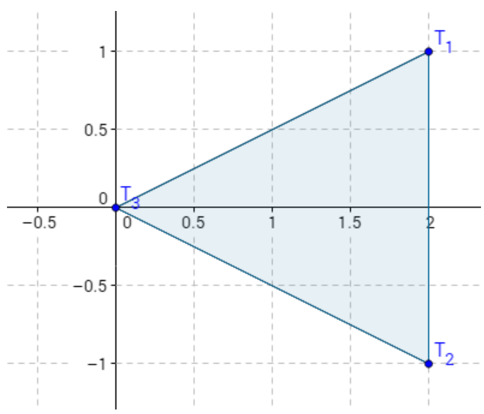
$$\begin{aligned}\frac{\lambda_2}{4} + \sqrt{\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_3}{2}} &= \frac{\lambda_2}{4} + \sqrt{\frac{-\lambda_1\lambda_3}{2}} \geqslant \frac{\lambda_2}{4} + \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4}} \\ &= \frac{\lambda_2 + 2\lambda_1}{4} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{4} \geqslant 0,\end{aligned}$$

iz česar sledi, da so oglišča dobro definirana. □

Primer 4.1 *Naj bo podan spekter števil* $\sigma = \{2-3\sqrt{6}, -4, 2+3\sqrt{6}\}$. *Matrika*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

je EDM s podanim spektrom. Na sliki 4.1 so točke $T_1 = (2,1)$, $T_2 = (2,-1)$ *in* $T_3 = (0,0)$, *ki določajo matriko* D.



Slika 4.1: Trikotnik, ki ga določajo točke matrike D.

Naj bodo $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, tako da velja $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Za točke $\mathbf{x}_i$, ki ustrezajo EDM D, lahko brez škode za splošnost vzamemo kar $(0,0)$, $(a,0)$

in (b, c), kjer velja $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, saj je EDM invarianta za vzporedne premike, vrtenja in zrcaljenja. Tako dobimo matriko

$$D = \begin{bmatrix} 0 & a^2 & b^2+c^2 \\ a^2 & 0 & (a-b)^2+c^2 \\ b^2+c^2 & (a-b)^2+c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom te matrike je

$$\begin{aligned} p_D(\lambda) = & -\lambda(\lambda^2 - ((a-b)^2+c^2)^2) - a^2(-\lambda a^2 - ((b^2+c^2)((a-b)^2+c^2))) \\ & + (b^2+c^2)(a^2((a-b)^2+c^2) + \lambda(b^2+c^2)) = -\lambda^3 + 2\lambda((a^2-ab+b^2)^2 \\ & + ((a-b)^2+b^2)c^2 + c^4) + 2a^2((a-b)^2+c^2)(b^2+c^2). \end{aligned}$$

Če ga zapišemo faktorizirano, dobimo

$$\begin{aligned} p_D(\lambda) = & -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = -\lambda^3 + \lambda^2\lambda_2 + \lambda^2\lambda_1 \\ & - \lambda\lambda_1\lambda_2 + \lambda^2\lambda_3 - \lambda\lambda_2\lambda_3 - \lambda\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Po primerjavi koeficientov ter upoštevanju enakosti $\lambda_1 = -(\lambda_2+\lambda_3)$, dobimo sistem dveh nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} 2a^2((a-b)^2+c^2)(b^2+c^2) &= -\lambda_2\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3), \\ 2((a^2-ab+b^2)^2 + ((a-b)^2+b^2)c^2 + c^4) &= \lambda_2^2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Imamo torej trikotnike, katerih najdaljše stranice so dolžine a, $\sqrt{b^2+c^2}$ in $\sqrt{(b-a)^2+c^2}$. Če vsakega od njih zrcalimo preko navpične osi, dobimo 6 možnih trikotnikov. Ker pa je lahko vsak od njih v vsakem kvadrantu, je vseh možnih rešitev 24.

Elemente matrike D lahko izrazimo z a, saj izbiri $a = \sqrt{b^2+c^2}$ in $a = \sqrt{(b-a)^2+c^2}$ predstavljata isti trikotnik, samo v drugem položaju.

Rešimo sistem (4.11) za neznanki b in c in dobimo

$$b = \frac{a^5 + \sqrt{-a^4(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}}{2a^4}, \tag{4.12}$$

$$c = \frac{\sqrt{2a^3\sqrt{-(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)} + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - a^2(\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2)}}{2a^2}, \tag{4.13}$$

ter

$$\begin{aligned} d_{12} &= d_{12}(a) := a^2, \\ d_{13} &= d_{13}(a) := b^2 + c^2 \\ &= \frac{\sqrt{-(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)} - \sqrt{-(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}}{2a}, \\ d_{23} &= d_{23}(a) := (b-a)^2 + c^2 \\ &= \frac{\sqrt{-(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)} + \sqrt{-(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}}{2a}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Pogoj $d_{13} \geqslant 0$ je izpolnjen zaradi $2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \geqslant 0$. Tudi zadnji izraz je nenegativen. Tako lahko napišemo naslednji izrek.

Izrek 4.7 *Matrika*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

s členi iz (4.14) je nenegativna, ima ničle po diagonali, ter ima predpisane lastne vrednosti $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, kjer je $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, če in samo če so njeni elementi dobro definirani, kar pomeni

$$-\lambda_2 \leqslant a^2 \leqslant -\lambda_3. \tag{4.15}$$

Da bo matrika D EDM, mora biti izpolnjen še en pogoj: točke $\mathbf{x}_1 = (0,0)$, $\mathbf{x}_2 = (a,0)$, $\mathbf{x}_3 = (b,c)$ morajo obstajati. Označimo $\mathbf{I} := [\sqrt{-\lambda_2}, \sqrt{-\lambda_3}]$. Glede na (4.13), iščemo torej take parametre $a \in \mathbf{I}$, da bo

$$\begin{aligned} f(a) :=& 2a^3\sqrt{-(a^2+\lambda_2+\lambda_3)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)} \\ &- (\lambda_2+\lambda_3)\lambda_2\lambda_3 - a^2(\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Če za a vstavimo $\sqrt{-\lambda_2}$, dobimo rešitev iz dokaza izreka 4.6. Obstaja torej vsaj en $a \in \mathbf{I}$, saj je

$$f(\sqrt{-\lambda_2}) = \lambda_2^2(\lambda_2 + 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)}) \geqslant \lambda_2^2(\lambda_2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2\lambda_2^2}) = -3\lambda_2^3 \geqslant 0.$$

Z izbiro $a = \sqrt{-\lambda_3}$ dobimo

$$f(\sqrt{-\lambda_3}) = \lambda_3^2(\lambda_3 + 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)}).$$

Ta vrednost je nenegativna za $\lambda_3 \in [2(2+\sqrt{6})\lambda_2, \lambda_2]$. Za izbran λ_3 na tem intervalu vsak $a \in \mathbf{I}$ pripelje do rešitve IEP za EDM.

Naj bo $t := \lambda_3/\lambda_2$ za $t \in [1, \infty)$ in $\lambda_2 = -1$. Funkcija f je tedaj

$$f(a) := 2a^3\sqrt{(-a^2+t+1)(a^2+t)(a^2+1)} + t(t+1) - a^2(t^2+t+1).$$

Vemo, da je f nenegativna na intervalu $t \in [1, 2(2+\sqrt{6})] \doteq [1, 8.9]$. Opazujmo sedaj obliko funkcije f za $t \in [1, 2(2+\sqrt{6}))$, $t = 2(2+\sqrt{6})$ ter za $t > 2(2+\sqrt{6})$. Na sliki 4.2 vidimo, da je f za majhne t pozitivna za vse vrednosti intervala $\mathbf{I} = [1, \sqrt{t}]$. Prav tako je pozitivna za $t = 2(2+\sqrt{6})$, razen v ničli $\sqrt{t}$ na robu intervala $\mathbf{I}$, ter v drugi ničli $a_z := \frac{\sqrt{t}}{2}$. Kot vidimo na sliki 4.3, je a_z tudi lokalni minimum f na tem intervalu. Pri velikih t se ničla a_z razcepi v dve ničli z_1 in z_2, nastane pa še ena ničla $z_3 < \sqrt{t}$. Na sliki 4.4 vidimo, da je funkcija f sedaj nenegativna na intervalu $[1, z_1] \cup [z_2, z_3]$, rešitev IEP za EDM pa obstaja samo za vrednosti a iz tega intervala.

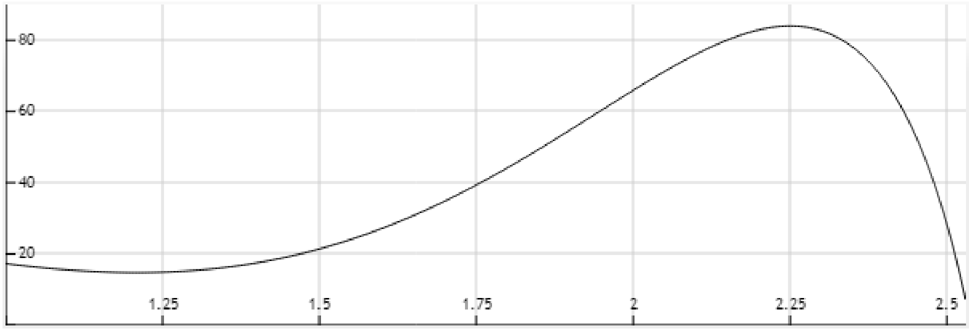
Povzemimo zgornje rezultate v naslednjem izreku.

Izrek 4.8 *Naj bo* $\mathbf{I} := [\sqrt{-\lambda_2}, \sqrt{-\lambda_3}]$ *in naj bo funkcija* f *definirana s predpisom v (4.16). Če je*

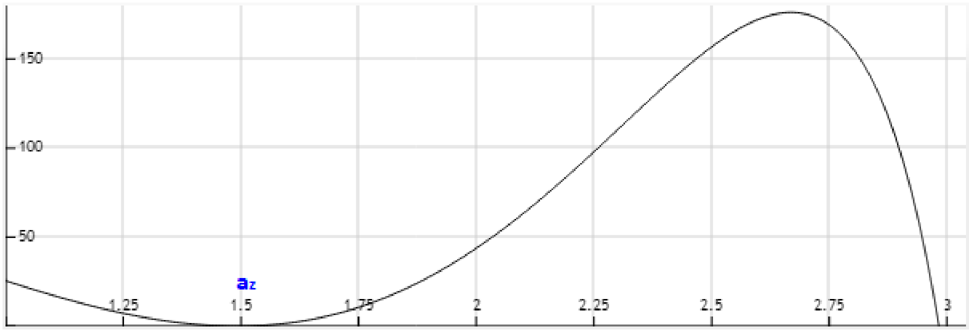
(1) $\lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant 2(2+\sqrt{6})\lambda_2$ *in* $a \in \mathbf{I}$ *ali*

(2) $\lambda_3 < 2(2+\sqrt{6})\lambda_2$ *in* $a \in [\sqrt{-\lambda_2}, z_1] \cup [z_2, z_3]$, *kjer so* z_1, z_2, z_3 *ničle funkcije* f *na* $\mathbf{I}$,

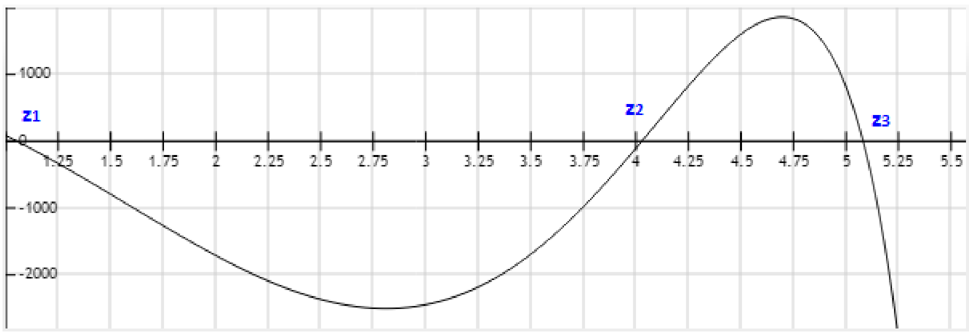
potem je matrika D *iz izreka 4.7 EDM.*



Slika 4.2: Oblika funkcije f za $t = 6$. Funkcija je pozitivna na intervalu $[1, \sqrt{t}]$.



Slika 4.3: Oblika funkcije f za $t = 2(2 + \sqrt{6})$. Na intervalu $[1, \sqrt{t}]$ je nenegativna in ima dve ničli.



Slika 4.4: Oblika funkcije f za $t = 30$. Funkcija ni več nenegativna na celotnem intervalu $[1, \sqrt{t}]$.

Območje za parameter a je veliko in pokriva vse možne trikotnike, ki določajo matriko D. Tako je en trikotnik opisan trikrat (a je enak dolžini vsake stranice posebej). Za bolj natančno množico rešitev pa moramo obravnavati nekaj dodatnih lastnosti funkcije f.

Lema 4.5 *Lokalni maksimum funkcije f na intervalu $\mathbf{I}$ za $\lambda_3 < 2(2+\sqrt{6})\lambda_2$ je dosežen pri*

$$l_M = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{6}(\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2)}{Z(\lambda_2,\lambda_3)} + Z(\lambda_2,\lambda_3)}, \tag{4.17}$$

kjer je

$$Z(\lambda_2,\lambda_3) := \sqrt[3]{-9\lambda_2\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)+W(\lambda_2,\lambda_3)}$$

in

$$W(\lambda_2,\lambda_3) := \sqrt{3}\sqrt{-(\lambda_2^2-2\lambda_2\lambda_3-2\lambda_3^2)(2\lambda_2^2+2\lambda_2\lambda_3-\lambda_3^2)(\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2)}.$$

Njen lokalni minimum na $\mathbf{I}$ pa pri

$$l_m = \sqrt{-\frac{\lambda_2}{6\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{k}{\sqrt[3]{r}}} - \sqrt{-\sqrt[3]{r} + \frac{54\sqrt{2}t(1+t)}{\sqrt{\frac{k}{\sqrt[3]{r}}}} + 20u - \frac{49u^2}{\sqrt[3]{r}}}\right)},$$

kjer je

$$\begin{aligned}
t &= \lambda_3/\lambda_2,\\
u &= 1+t+t^2,\\
s &= \sqrt{578+1734t+4197t^2+5504t^3+4197t^4+1734t^5+578t^6},\\
p &= 235+705t+2139t^2+3103t^3+2139t^4+705t^5+235t^6,\\
r &= p+i3\sqrt{3}s(-2-3t+3t^2+2t^3),\\
k &= \sqrt[3]{r^2}+10\sqrt[3]{r}(1+t+t^2)+49(1+t+t^2)^2.
\end{aligned}$$

Lema 4.6 *Funkcija f doseže svoj lokalni maksimum (4.17) na $\mathbf{I}$ pri parametru a, za katerega točke $(0,0)$, $(a,0)$, (b,c) matrike D tvorijo pravokotni trikotnik s pravim kotom pri oglišču (b,c).*

Dokaz. Točke $(0,0)$, $(a,0)$ in (b,c) tvorijo pravokotni trikotnik s pravim kotom pri (b,c), če in samo če velja $a^2 = (\sqrt{b^2+c^2}^2 + \sqrt{(a-b)^2+c^2}^2)$. To pomeni, da mora za elemente matrike D iz (4.14) veljati $d_{12} = d_{13} + d_{23}$ oziroma

$$a^3 = \sqrt{-(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)}. \tag{4.18}$$

Če funkcijo f odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned} f'(a) =& 2a\Bigg(3a\sqrt{-(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)} \\ &- \frac{a^3(3a^4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{-(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3}} - (\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2)\Bigg). \end{aligned}$$

Zvezo (4.18) uporabimo v odvodu in dobimo $f' = 0$. Lokalni ekstrem je torej dosežen za a, ki ustreza pogoju (4.18). Rešitev enačbe $f' = 0$ pa je ravno lokalni maksimum (4.17). $\square$

Lema 4.7 *Generirajoče točke matrike D tvorijo enakokraki trikotnik za*

$$a = \sqrt{-\lambda_2}, \quad b = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda_2}, \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_2 + 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)}}. \tag{4.19}$$

Dolžine stranic trikotnika so

$$\sqrt{-\lambda_2}, \quad \sqrt[4]{\frac{\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)}{2}}, \quad \sqrt[4]{\frac{\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)}{2}}. \tag{4.20}$$

Ta izbira da rešitev iz dokaza izreka 4.6.

Dokaz. Da bo trikotnik enakokrak, mora veljati

$$\sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{(a-b)^2+c^2}.$$

Iz tega izraza sledi $b = a/2$. To vstavimo v enačbo (4.12) in vidimo, da je edina možna rešitev $a = \sqrt{-\lambda_2}$. Izračunamo še c in dolžine stranic. S tem je dokaz končan. $\square$

Spomnimo se, da če je a neka dopustna rešitev, potem sta tudi izbiri $a = \sqrt{b^2+c^2}$ in $a = \sqrt{(a-b)^2+c^2}$ dopustni rešitvi. Dovolj je, če študiramo primer za $a \in [\sqrt{-\lambda_2}, z_1]$, saj ostali dve izbiri ležita na $[z_2, z_3]$.

Ker je funkcija f v točkah z_1, z_2, z_3 enaka 0 in se po (4.13) c izraža kot $\frac{\sqrt{f(a)}}{2a^2}$, dobimo za $a = z_i$, $i = 1, 2, 3$ vrednost c enako 0 in generirajoče točke matrike D kolinearne: $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(b, 0)$. Tukaj je $a = z_i$, $b = b(a) = b(z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Dolžine stranic trikotnika a, $\sqrt{b^2 + c^2}$ in $\sqrt{(a-b)^2 + c^2}$ so zvezne funkcije parametra a na intervalu $\mathbf{I}$, zato se njegova oblika zvezno spreminja od izrojenega (ko je $f(z_1) = f(z_2) = f(z_3) = 0$) do enakokrakega (lema 4.7), ko parameter a pada od z_1 proti $\sqrt{-\lambda_2}$. Ostali dve stranici konvergirata od z_1 in z_2 v $\sqrt[4]{\frac{\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)}{2}}$.

Sedaj lahko podamo natančnejšo verzijo izreka 4.8.

Izrek 4.9 *Naj bo $\mathbf{I} := [\sqrt{-\lambda_2}, \sqrt{-\lambda_3}]$ in naj bo funkcija f definirana s predpisom v (4.16). Če je*

(1) $\lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant 2(2 + \sqrt{6})\lambda_2$ in $a \in \mathbf{I}$ ali

(2) $\lambda_3 < 2(2 + \sqrt{6})\lambda_2$ in $a \in [\sqrt{-\lambda_2}, z_1]$, kjer je z_1 prva ničla funkcije f na $\mathbf{I}$,

potem je matrika D iz izreka 4.7 EDM. S temi pogoji so določene vse možne različne konfiguracije generirajočih točk matrike D.

Iz neenakosti (4.15) sledi, da za $\lambda_3 = \lambda_2$ obstaja samo ena rešitev $a = \sqrt{-\lambda_2}$.

Ničle funkcije f so zvezne funkcije λ_2 in λ_3. Podamo lahko dobre meje za ničlo z_1 in pokažemo, da interval dopustnih rešitev za a konvergira k $\{\sqrt{-\lambda_2}\}$, ko se razdalja med λ_2 in λ_3 veča.

Izrek 4.10 *Naj bo $t := \lambda_3/\lambda_2$. Dobra spodnja in zgornja meja za z_1 ($a_1 < z_1 < a_2$ in $f(a_1) > 0$, $f(a_2) < 0$) sta enaki*

$$a_1 = \frac{t - \sqrt{2}}{t - 2\sqrt{2}}\sqrt{-\lambda_2}, \quad a_2 = \frac{5t - 11}{5t - 22}\sqrt{-\lambda_2}, \quad t \geqslant 2(2 + \sqrt{6}).$$

Ko gre $t \to \infty$, se interval dopustnih rešitev za a skrči iz $[\sqrt{-\lambda_2}, z_1]$ na $\{\sqrt{-\lambda_2}\}$.

Dokaz. Meji a_1 in a_2 lahko zapišemo kot

$$a_1 = \frac{1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{t}}}\sqrt{-\lambda_2}, \quad a_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{1 - \frac{22}{10t}}}\sqrt{-\lambda_2}.$$

Iz te oblike se lepo vidi, da meji konvergirata k $\sqrt{-\lambda_2}$, ko gre $t \to \infty$.
Če označimo $\gamma := \frac{a^2}{-\lambda_2}$, potem lahko funkcijo f zapišemo

$$f(a) = 2\gamma\sqrt{-\gamma(\gamma - 1 - t)(\gamma + 1)(\gamma + t)} - \lambda_2^3(t(t+1) - \gamma(t^2 + t + 1)),$$

kjer je $t = \lambda_3/\lambda_2$. Sedaj lahko hitro preverimo, da je $f(a_1)$ večje in $f(a_2)$ manjše od 0. □

4.3 Hadamardove matrike in IEP za EDM

V tem razdelku bomo povedali kaj so Hadamardove matrike in kako je njimi povezan IEP za EDM. Pokazali bomo, da za poljubna števila $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, za katera velja $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, obstaja EDM s spektrom $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, če za n obstaja Hadamardova matrika velikosti n. Povzeto je po [4].

Definicija 4.1 *Matrika H je* ***Hadamardova****, če je $h_{ij} = \pm 1$ za vse $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ter velja*

$$H^T H = nI = HH^T.$$

Stolpci in vrstice matrike H so paroma ortogonalni.

Opomba 4.7 *Obstoj Hadamardove matrike je do danes dokazan le za matrike reda $n = 1$, $n = 2$ ali $n \equiv 0 \pmod 4$, kjer je največji n enak 664 ter za nekatere $n \equiv 0 \pmod 4$ večje od 664.*

Podajmo sedaj izrek (dokaz si bralec lahko pogleda v [8]) ter lemo, na katera se bomo kasneje sklicevali.

Definicija 4.2 *Naj bo prostor M definiran s predpisom $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{x}^T\mathbf{e} = 0\}$. Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je negativno semidefinitna na M, če za vsak vektor $\mathbf{x}$ iz M velja $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leqslant 0$.*

Izrek 4.11 *Simetrična matrika $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z ničlami po diagonali je EDM natanko takrat, ko je negativno semidefinitna na M.*

Lema 4.8 *Naj bo matrika $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična in z ničlami po diagonali. Ima naj samo eno nenegativno lastno vrednost λ_1 in pripadajoči lastni vektor $\mathbf{e}$, kjer je $\mathbf{e}$ vektor samih enic. Potem je matrika D EDM.*

Dokaz. Naj bo matrika $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična, neničelna ter z ničlami po diagonali. Njene lastne vrednosti naj bodo $\lambda > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \dots \lambda_n$, pripadajoči lastni vektorji pa $\mathbf{e}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$. Zapišemo lahko

$$D = \lambda \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^T + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T.$$

Vzemimo vektor $\mathbf{x}$ iz prostora M, definiranega v izreku 4.11. Sledi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T D\mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x}^T\mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{x}^T\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T\mathbf{x} + \dots + \lambda_n \mathbf{x}^T\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T\mathbf{x} \\ &= \lambda_2(\mathbf{x}^T\mathbf{u}_2)^2 + \lambda_3(\mathbf{x}^T\mathbf{u}_3)^2 + \dots + \lambda_n(\mathbf{x}^T\mathbf{u}_n)^2 \leqslant 0,\end{aligned}$$

saj so $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ nepozitivne lastne vrednosti. Iz tega po istem izreku sledi, da je D EDM. □

Naj bo n tak, da za njega obstaja Hadamardova matrika. Naslednji izrek poda rešitev IEP za EDM velikosti n.

Izrek 4.12 *Izberimo tak n, za katerega obstaja Hadamardova matrika reda n. Če za $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ velja $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$ in je $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, potem obstaja neničelna EDM D z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.*

Dokaz. Naj bo $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Hadamardova matrika in $U = (\frac{1}{\sqrt{n}})H$. Matrika U je ortogonalna, saj velja

$$UU^T = \frac{HH^T}{n} = I = \frac{H^TH}{n} = U^TU.$$

Naj bo $\Lambda = \text{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, kjer je $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$. Potem ima matrika $D = U^T\Lambda U$ lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ker lahko za vsako

Hadamardovo matriko predpostavimo, da ima en stolpec enak $\mathbf{e}$, ima matrika D lastni vektor $\mathbf{e}$. Iz definicije matrike U sledi

$$D = U\Lambda U^T = \frac{H\Lambda H^T}{n} = \frac{(\lambda_1 \mathbf{h}_1\mathbf{h}_1^T + \lambda_2 \mathbf{h}_2\mathbf{h}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{h}_n\mathbf{h}_n^T)}{n},$$

kjer so $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$ stolpci matrike H. Vidimo, da so vsi diagonalni elementi matrike D enaki $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{n} = 0$. Po lemi 4.8 je torej D EDM. $\square$

Po izreku 4.13 vidimo, da obstaja rešitev IEP za EDM za vsak $n+1$, za katerega obstaja Hadamardova matrika reda n.

Če je $n = 4, 8, 12$ ali 16, pa obstaja rešitev tudi za $n+2$ (izrek 4.14). Dokaza obeh izrekov lahko najdemo v [4].

Izrek 4.13 *Izberimo tak n, za katerega obstaja Hadamardova matrika reda n. Če za $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ velja $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n+1}$ in je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$, potem obstaja neničelna $(n+1) \times (n+1)$ EDM D z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$.*

Izrek 4.14 *Naj bo $n = 4, 8, 12$ ali 16, za katerega obstaja Hadamardova matrika reda n. Če za $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}$ velja $\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n+2}$ in je $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0$, potem obstaja $(n+2) \times (n+2)$ EDM D z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}$.*

Najmanjši odprti inverzni problem lastnih vrednosti evklidsko razdaljnih matrik je torej za primer $n = 7$.

Literatura

[1] M. T. Chu in G. H. Golub. Structured inverse eigenvalue problems. *Acta Numerica*, 11:1–71, 1 2002.

[2] J. Dattorro. *Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry*. Meboo Publishing USA, 2005.

[3] M. Fiedler. Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 9:119–142, 1974.

[4] T. L. Hayden, R. Reams, in J. Wells. Methods for constructing distance matrices and the inverse eigenvalue problem. *Linear Algebra and its Applications*, 295(1–3):97 – 112, 1999.

[5] G. Jaklič in J. Modic. A note on "methods for constructing distance matrices and the inverse eigenvalue problem". *Linear Algebra and its Applications*, 437(11):2781 – 2792, 2012.

[6] G. Jaklič in J. Modic. Inverse eigenvalue problem for euclidean distance matrices of size 3. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 87:82–93, 2 2013.

[7] A. Jozelj in G. Jaklič. *Inverzni problem lastnih vrednosti za posebne matrike: delo diplomskega seminarja*. A. Jozelj, 2012.

[8] J. Modic in G. Jaklič. *Evklidsko razdaljne matrike: Prešernova nagrada študentom: diplomsko delo*. J. Modic, 2010.

[9] J. Modic in G. Jaklič. *Evklidsko razdaljne matrike grafov in inverzni problem lastnih vrednosti: doktorska disertacija.* J. Modic, 2014.