УДЕ 512.554

Функции роста кодлины неассоциативных алгебр

М. В. Зайцев, Д. Д. Реповш

Рассматриваются числовые характеристики тождеств неассоциативных алгебр. Построена серия алгебр с субэкспоненциальной функцией роста кодлины.

1. Введение

Применение асимптотических методов в различных областях алгебры и дискретной математики является общепринятой практикой современных исследований. В качестве примеров можно привести изучение разнообразных функций роста в теории формальных языков [1], в теории групп [2], а также в теории полиномиальных тождеств [3]. В теории тождественных соотношений линейных алгебр изучение количественных характеристик играет в последние годы все более значительную роль (см., например, работу [4] и библиографию в ней). Важнейшими из таких характеристик являются так называемые последовательности коразмерностей $\{c_n A\}$ и кодлин $\{l_n A\}$ заданной алгебры A (основные определения и понятия мы напомним в следующем разделе).

Первая из упомянутых характеристик исследована гораздо детальнее. Тем не менее, к настоящему моменту появилось достаточно много работ, анализирующих поведение последовательности $\{l_n(A)\}$ для различных алгебр A . Одной из первых работ в указанном направлении была публикация [5], в которой доказано, что последовательность $\{l_n(A)\}$ растет полиномиально для любой ассоциативной алгебры с нетривиальным тождеством, т.е. PI-алгебры. Важность этого результата обусловлена тем, что многие другие характеристики растут экспоненциально и влиянием роста кодлины можно пренебречь. Заметим также, что если A – свободная ассоциативная алгебра, то рост $\{l_n(A)\}$ сверхэкспоненциален.

Работа первого автора поддержана грантом „Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем“ Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ им. М.В.Ломоносова, работа второго автора поддержана грантом Словенского исследовательского агентства P1-0292.

В случае алгебр Ли последовательность $\{l_n(A)\}$ демонстрирует более сложное поведение. С одной стороны, класс алгебр Ли L с полиномиальным ростом $\{l_n(L)\}$ достаточно широк. В него входят все конечномерные алгебры, алгебры Ли с нильпотентным коммутантом, аффинные алгебры Каца - Муди и ряд других. С другой стороны, известны примеры (см. [6]) алгебр Ли L с $l_n(L) \sim (\sqrt{b})^n$ для любых целых $b \geq 2$, и даже алгебр со сверхэкспоненциальным ростом кодлин. Например, если L – свободная разрешимая степени три алгебра Ли счетного ранга, то

$$l_n(L) \sim \frac{n!}{(\ln n)^n},$$

(см. [6]). Есть и примеры промежуточного роста, но их немного. Приведем один из них: если L порождает многообразие $\mathbf{AN}_2$, то согласно [7]

$$l_n(L) \sim \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

В общем неассоциативном случае имеется лишь ряд разрозненных результатов. Так, если A – конечномерная алгебра произвольной сигнатуры, $\dim A = d$, то

$$l_n(A) \leq d(n+1)^{d^2+d},$$

как доказано в [8]. В работах [8], [9] построено семейство примеров бесконечномерных двуступенно левонильпотентных алгебр с полиномиальным ростом последовательностей $\{l_n\}$. Приведем еще один любопытный пример. В работе [10] показано, что существует ровно три многообразия $\mathbf{V} = \text{var } A$, для которых $l_n(\mathbf{V}) = 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Одно из них порождено ассоциативно-коммутативной алгеброй многочленов $F[t]$, другое – двумерной метабелевой алгеброй Ли, а третье – бесконечномерной йордановой алгеброй J , построенной И.П. Шестаковым [11; стр. 104, пример 2].

Основная цель данной статьи – построение семейства примеров с субэкспоненциальным ростом последовательности $\{l_n(A)\}$ (теорема 1 и ее следствия). При этом характер асимптотического поведения $\{l_n(A)\}$ может быть как монотонным, так и сильно осциллирующим. Примеры базируются на новом подходе к построению неассоциативных алгебр при помощи бесконечных двоичных слов, предложенном в [12], [13] и развитом в [14], [15]. Вновь предложенная конструкция позволяет связать числовые инварианты алгебр с комбинаторными характеристиками бесконечных слов и использовать результаты хорошо развитой теории формальных языков.

2. Основные понятия и определения

Пусть F – поле нулевой характеристики. Обозначим через $F\{X\}$ абсолютно свободную алгебру над F с бесконечным множеством порождающих X . Если A – F -алгебра, то полином $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\{X\}$ называется *тождеством* алгебры A , $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых $a_1, \dots, a_n \in A$. Все необходимые сведения по теории тождественных соотношений можно найти в [3] или в [16]. Совокупность всех тождеств алгебры A образует идеал $Id(A)$ в $F\{X\}$ устойчивый относительно всех эндоморфизмов $F\{X\}$, т.е. T -идеал. Обозначим через P_n подпространство всех полилинейных многочленов в $F\{X\}$ от $x_1, \dots, x_n$. Тогда $P_n \cap Id(A)$ – это совокупность

всех полилинейных тождеств алгебр A степени n . Хорошо известно, что в случае поля нулевой характеристики любой T -идеал однозначно определяется своими полилинейными компонентами. Поэтому изучение тождеств алгебры A во многом сводится к исследованию семейства подпространств $P_n \cap Id(A)$, $n = 1, 2, \dots$. Как правило, удобнее рассматривать семейство факторпространств

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}.$$

При исследовании полилинейных тождеств важную роль играет теория представлений симметрической группы S_n . Действие S_n на полилинейных одночленах задается соотношением

$$\sigma \circ f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

превращающее P_n в FS_n -модуль. Пространство $P_n \cap Id(A)$ инвариантно относительно действия S_n , поэтому структурой FS_n -модуля наделено и пространство $P_n(A)$. Его характер $\chi(P_n(A))$ называется n -м кохарактером A и обозначается как $\chi_n(A)$. Необходимые сведения по теории представлений симметрических групп можно найти в монографии [17]. Разложение $P_n(A)$ в сумму неприводимых слагаемых удобно записывать в терминах характеров как

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad (2.1)$$

где χ_λ – неприводимый характер, соответствующий разбиению λ числа n , а неотрицательное целое m_λ – кратностью вхождения χ_λ в $\chi_n(A)$. Необходимо напомнить, что разбиением λ числа n называется набор целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, такой, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Размерность соответствующего неприводимого представления (или степень характера) обозначается как d_λ или $\deg \chi_\lambda$. Величина

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

называется n -й кодлинной A . Другими словами, $l_n(A)$ – количество слагаемых в разложении FS_n -модуля $P_n(A)$ в сумму неприводимых компонент.

Нам потребуется еще одна количественная характеристика, связанная с тождествами алгебры A . Напомним, что n -й коразмерностью тождеств алгебры A называется величина

$$c_n(A) = \dim P_n(A).$$

Очевидно, что

$$c_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \deg \chi_\lambda, \quad (2.2)$$

в котором m_λ – те же, что и в (2.1).

Поскольку мы рассматриваем неассоциативные алгебры, важную роль играет расстановка скобок на одночленах различных алгебр. Обозначим через T одну из расстановок скобок на слове длины n , а через $[a_1 \cdots a_n]_T$ – произведение n элементов неассоциативной алгебры с этой расстановкой скобок. Например, если $n = 4$, а $T = (\cdot)(\cdot)$, то $[x_1, \dots, x_4]_T = (x_1 x_2)(x_3 x_4)$. Алгебру A с тождеством

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) \equiv 0 \quad (2.3)$$

мы будем называть *метабелевой*.

При фиксированной расстановке скобок T можно рассматривать в P_n подпространство P_n^T , порожденное всеми одночленами $[x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}]_T$, $\sigma \in S_n$. Ясно, что

$$P_n = \bigoplus_T P_n^T, \quad (2.4)$$

где сумма берется по всем возможным расстановкам скобок т.е. содержит

$$\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

слагаемых. Каждое из подпространств P_n^T является FS_n -подмодулем в P_n , как и $P_n \cap Id(A)$. Поэтому структурой FS_n -модуля наделен и фактормодуль

$$P_n^T(A) = \frac{P_n^T}{P_n^T \cap Id(A)}, \quad (2.5)$$

характер которого мы будем обозначать как $\chi_n^T(A)$.

Нам потребуется следующий результат из работы [12]. Обозначим через M_1 свободную метабелеву алгебру с одним порождающим z . Тогда

$$\chi_n^T(M_1) = \chi_n + 2\chi_{(n-1,1)} \quad (2.6)$$

для любой расстановки скобок T , для которой $[z_1 \cdots z_n]_T \neq 0$ в M_1 .

3. Основные результаты

Напомним конструкцию алгебры ассоциированной с бесконечным двоичным словом. Пусть $w = w_1 w_2 \dots$, где все w_i равны 0 или 1. *Комбинаторной сложностью* слова w называется функция $Comp_w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где $Comp_w(n)$ – число различных подслов в w длины n .

Пусть теперь w – бесконечное слово в алфавите $\{0; 1\}$. Обозначим через $A(w)$ неассоциативную алгебру с базисом $\{a, b_0, b_1, \dots\}$, умножение в котором задается соотношением

$$b_k = \begin{cases} ab_{k-1}, & \text{если } w_k = 1, \\ b_{k-1}a, & \text{если } w_k = 0 \end{cases}$$

для всех $k \geq 1$, а все остальные произведения равны нулю. При любом слове w алгебра $A(w)$ удовлетворяет тождеству (2.3), поэтому все FS_n -разложения для $P_n(A)$ можно рассматривать по модулю соотношения (2.3), т.е. не в самой алгебре $F\{X\}$, а в свободной метабелевой алгебре $M\{X\}$.

Для элемента x любой метабелевой алгебры обозначим через R_x и L_x операторы правого и левого умножения на x соответственно. И тот и другой операторы удобно писать справа, т.е. $yR_x = yx$, $yL_x = xy$. Для любого двоичного слова $u = u_1 \dots u_m$ и для $y, x_1, \dots, x_m \in X \subset M\{X\}$ обозначим через $yu(x_1, \dots, x_m)$ одночлен $yT_1 \cdots T_m$, где $T_i = R_{x_i}$, если $u_i = 0$, или $T_i = L_{x_i}$, если $u_i = 1$, $i = 1, \dots, m$. Нетрудно заметить, что любой одночлен степени n в $M\{X\}$ записывается в виде

$$(x_i x_j)u(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2}}), \quad (3.1)$$

где u – двоичное слово длины $n - 2$.

Пусть $w = w_1 w_2 \dots$ – бесконечное двоичное слово. Конечное слово u мы будем называть *собственным подсловом* w , если u – подслово слова $w_2 w_3 \dots$.

ЛЕММА 1. *Полилинейный одночлен $(y_1 y_2)u(x_1, \dots, x_m)$ не является тождеством алгебры $A(w)$ тогда и только тогда, когда u – собственное подслово w .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = w_i \dots w_{i+m-1}$ и $i \geq 2$. Тогда $b_{i-2} T_a u(a, \dots, a) = b_{i+m-1} \neq 0$, где $T_a = R_a$, если $w_{i-1} = 0$, либо $T_a = L_a$, если $w_{i-1} = 1$. Следовательно, $(y_1 y_2)u(x_1, \dots, x_m) \notin Id(A(w))$. С другой стороны, $y_1 y_2$ на базисных элементах алгебры $A(w)$ принимает только значения $b_1, b_2, \dots$. Но тогда при $k \geq 1$ произведение $b_k u(a, \dots, a) \neq 0$ только для $u = w_{k+1} \dots w_{k+m}$.

Поскольку $A(w)$ не порождается одним элементом, мы не можем непосредственно воспользоваться соотношением (2.6), чтобы ограничить кодлину этой алгебры. Обозначим через $\tilde{A}(w)$ ее подалгебру, порожденную элементом $a + b_0$.

ЛЕММА 2. *Алгебры $A(w)$ и $\tilde{A}(w)$ удовлетворяют одним и тем же тождествам, т.е. $Id(A(w)) = Id(\tilde{A}(w))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что $\tilde{A}(w)$ – линейная оболочка элементов $a + b_0, b_1, b_2, \dots$. Поскольку характеристика поля F равна нулю, достаточно сравнить полилинейные тождества двух алгебр. Включение $Id(A(w)) \subseteq Id(\tilde{A}(w))$ очевидно, поскольку $\tilde{A}(w)$ – подалгебра $A(w)$.

Покажем теперь, что любой полилинейный многочлен $f = f(x_1, \dots, x_n)$ не являющийся тождеством $A(w)$, не равен нулю тождественно и в $\tilde{A}(w)$. Поскольку обе алгебры метабелевы, можно считать f полиномом свободной метабелевой алгебры $M\{X\}$. В этом случае f можно записать в виде линейной комбинации

$$f = \sum_{i,k} \sum_J \sum_u \alpha_{i,k,J,u} (x_i x_k) u(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}), \quad (3.2)$$

где $J = \{j_1, \dots, j_{n-2}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{1, 2\}$, u – двоичное слово длины $n - 2$, в соответствии с (3.1).

Если f не является тождеством $A(w)$, то существует подстановка

$$\varphi : X \rightarrow \{a, b_0, b_1, \dots\},$$

такая, что $\varphi(f) \neq 0$.

Ясно, что при этом $\varphi(x_{i_0}) = b_m$ ровно для одного из индексов i_0 и $\varphi(x_r) = a$ для всех остальных r . При этом ровно одно из двух произведений $x_{i_0} x_k, x_k x_{i_0}$ принимает ненулевое значение b_{m+1} . Пусть, например, $b_m a = b_{m+1}, a b_m = 0$. Тогда при подстановке φ в ноль переходят все одночлены $(x_i x_k)u(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}})$ с $i \neq i_0$. Далее, в ноль переходят все $(x_{i_0} x_k)u(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}})$ с $u \neq u_0$, где $u_0 = w_{m+2} \dots w_{n+m-1}$ – подслово w , начинающееся с $m + 2$ -й буквы. Запишем f в виде суммы двух слагаемых $f = f_0 + f_1$, где

$$f_0 = \sum_k \sum_J \alpha_{i_0,k,J,u_0} (x_{i_0} x_k) u_0(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}),$$

$$f_1 = \sum_{i \neq i_0} \sum_k \sum_J \sum_u \alpha_{i,k,J,u} (x_i x_k) u(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}) +$$

$$+ \sum_k \sum_J \sum_{u \neq u_0} \alpha_{i_0, k, J, u}(x_{i_0} x_k) u(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}).$$

Тогда $\varphi(f_1) = 0$, а $\varphi(f_0) = \lambda(b_m a)u_0(a, \dots, a) = \lambda b_{m+n-1}$, где

$$\lambda = \sum_k \sum_J \alpha_{i_0, k, J, u_0} \neq 0.$$

Теперь заменим подстановку φ на $\tilde{\varphi}$, такую что $\tilde{\varphi}(x_i) = a + b_0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $\tilde{\varphi}(x_{i_0} x_k) = b_m a = b_{m+1}$, $\tilde{\varphi}(x_i x_j) = 0$ для всех $i \neq i_0$. В частности, $\tilde{\varphi}(f_1) = 0$ и $\tilde{\varphi}(f_0) = \varphi(f_0)$, т.е. $\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f) \neq 0$. Поскольку $\tilde{\varphi}(x_i) \in \tilde{A}(w)$ для всех $i = 1, \dots, n$, то f не является тождеством $A(w)$, и лемма доказана.

Перейдем к доказательству основного результата статьи. Разделим собственные подслова в w на две категории. Подслово u назовем *подсловом 1-го типа*, если оно встречается в w только после нуля, либо только после единицы. Если u встречается в w и после 0 и после 1, то назовем его *подсловом 2-го типа*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $w = w_1 w_2 \dots$ – бесконечное двоичное слово. Тогда

$$l_n(A(w)) = 2k_{n-2}^{(1)} + 3k_{n-2}^{(2)}, \quad (3.3)$$

где $k_m^{(1)}, k_m^{(2)}$ – количество собственных подслов 1-го и 2-го типов длины m в w соответственно. В частности,

$$2 \text{Comp}_{w^*}(n-2) \leq l_n(A(w)) \leq 3 \text{Comp}_{w^*}(n-2), \quad (3.4)$$

где $w^* = w_2 w_3 \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала уточним строение $P_n^T(A)$ из (2.5) и разложение пространства $P_n(A)$ в сумму таких $P_n^T(A)$ в случае $A = A(w)$. Заметим, что все полилинейные одночлены вида (3.1) с одним и тем же двоичным словом u имеют одинаковую расстановку скобок и не равны нулю в свободной метабелевой алгебре $M\{X\}$. Кроме того, различным u соответствуют различные расстановки скобок. В частности, пространство $P_{n,u}$ – линейная оболочка полилинейных одночленов (3.1) с фиксированным u в $F\{X\}$ – совпадает с одним из подпространств P_n^T из (2.4), причем для такой расстановки скобок T , что $P_n^T \not\subseteq \text{Id}(M\{X\})$. И наоборот, если $P_n^T \not\subseteq \text{Id}(M\{X\})$, то для такой расстановки скобок T найдется слово u , при котором $P_n^T = P_{n,u}$. С учетом леммы 1, мы приходим к выводу, что

$$P_n \equiv \sum_u P_{n,u} \pmod{\text{Id}(A(w))},$$

где сумма берется по всем собственным подсловам u слова w .

Пусть $u_1, \dots, u_N$ – все собственные подслова w длины $n-2$. Докажем, что

$$P_n \cap \text{Id}(A(w)) = P_{n,u_1} \cap \text{Id}(A(w)) \oplus \dots \oplus P_{n,u_N} \cap \text{Id}(A(w)) + \sum_{T'} P_n^{T'}, \quad (3.5)$$

где T' пробегает все расстановки скобок, для которых $P_n^{T'} \subset \text{Id}(A(w))$. Очевидно, что правая часть (3.5) лежит в левой. Поэтому достаточно доказать, что если $f_1 + \dots + f_N \equiv 0$ – тождество алгебры $A(w)$, то и все $f_1, \dots, f_N$ – тоже тождества $A(w)$.

Пусть, например, $u_1 = w_{k+1} \dots w_{k+n-2}$, $k \geq 1$. Тогда при любой подстановке $\varphi : X \rightarrow \{a, b_0, b_1, \dots\}$, такой, что $\varphi(x_{i_0}) = b_{k-1}$ для некоторого i_0 , $\varphi(x_t) = a, t \neq i_0$, все элементы (3.1) с $u \neq u_1$ переходят в ноль поскольку $b_k u_1(a, \dots, a) = b_{k+n-1}$, а $b_k u(a, \dots, a) = 0$. В частности, $\varphi(f_2) = \dots = \varphi(f_N) = 0$. Следовательно, и $\varphi(f_1) = 0$. Если же φ' – другая подстановка, у которой $\varphi'(x_0) = b_{m-1}$, $m \geq 1$, а $u_1 \neq u_{m+1} \dots u_{m+n-2}$, то также $\varphi'(f_1) = 0$. Следовательно, $f_1 \in Id(A(w))$. Аналогично, $f_2, \dots, f_N$ – тождества $A(w)$, и соотношение (3.5) доказано.

Из (3.5) с учетом (2.5) получаем разложение

$$P_n(A(w)) = \bigoplus_u P_{n,u}(A(w)), \quad (3.6)$$

в котором суммирование ведется по всем собственным подсловам u слова w длины $n - 2$, а

$$P_{n,u}(A(w)) = \frac{P_{n,u}}{P_{n,u} \cap Id(A(w))}.$$

Таким образом, чтобы вычислить длину FS_n -модуля $P_n(A(w))$, т.е. $l_n(A(w))$, достаточно подсчитать и просуммировать величины

$$l_{n,u}(A(w)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda}^{(u)},$$

где

$$\chi(P_{n,u}(A(w))) = \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda}^{(u)} \chi_{\lambda}.$$

Согласно лемме 1 и соотношению (2.6), имеем:

$$\chi(P_{n,u}(A(w))) = r\chi_{(n)} + s\chi_{n-1,1},$$

где $r = 0$ или 1 , $s = 0, 1$ или 2 для любого собственного подслова u в w . При этом выполняется равенство

$$\dim P_{n,u}(A(w)) = r + s(n - 1), \quad (3.7)$$

поскольку $\deg \chi_{(n)} = 1, \deg \chi_{n-1,1} = n - 1$.

В лемме 4 работы [15] показано, что $\dim P_{n,u}(A(w)) = n$, если u – собственное подслово 1-го типа. Легко заметить, что равенство (3.7) возможно лишь при $r = s = 1$, а значит $l_{n,u}(A(w)) = 2$. Для подслова u второго типа в той же статье (см. лемму 5 и замечание 1) доказано, что $\dim P_{n,u}(A(w)) = 2n - 1$, что влечет равенства $r = 1, s = 2$ и $l_{n,u}(A(w)) = 3$. Отсюда следует соотношение (3.3), а из него – равенство (3.4), поскольку $k_{n-2}^{(1)} + k_{n-2}^{(2)} = \text{Comp}_{w^*}(n - 2)$.

Полученный результат позволяет реализовать широкий класс функций в качестве функций роста кодлыны. Приведем несколько примеров субэкспоненциального роста.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – такая функция, что

- 1) $\varphi(t) \gg \log_2(t)$;
- 2) φ дифференцируема на $(0; \infty)$;
- 3) $\varphi'(t) \ll t^{-\beta}$ для некоторой константы $\beta > 0$;

4) φ – убывающая функция.

Тогда существует алгебра A , для которой $l_n(A) \sim 2^{\varphi(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [18] доказано, что для любой $\varphi(t)$ с условиями (1) – (4) существует двоичное слово w , для которого $Comp_w(n) \sim 2^{\varphi(n)}$. Теперь достаточно применить теорему 1 к алгебре $A(w)$.

В формулировке следствия 1 соотношение $f(t) \ll g(t)$ означает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Следствие 1 реализует как монотонные субэкспоненциальные функции, например, 2^{n^α} или n^{n^α} с $\alpha \in (0; 1)$, так и слабоосциллирующие функции. Более экзотический пример, приведенный в [18], соответствует функции

$$\varphi(t) = (t + 10)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos(\ln \ln(t+1))},$$

которая медленно осциллирует между $n^{1/2}$ и $n^{3/4}$.

Используя другие результаты теории формальных языков мы можем строить примеры алгебр с гораздо более резкими колебаниями последовательности $\{l_n(A)\}$. Так, в работе [19] (теорема 3) предъявлен пример двоичного слова w , у которого комбинаторная сложность колеблется от „почти линейной“ до „почти экспоненциальной“. Используя упомянутый пример, получаем такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует алгебра A вида $A(w)$, для которой можно выбрать возрастающую последовательность n_k , $k = 1, 2, \dots$, так, что

(a) $l_{n_k} < n_k + \ln \ln n_k$, если k четно;

(b) $l_{n_k} > 2^{\frac{n_k}{\ln \ln n_k}}$, если k нечетно.

Кроме реализации функций с экзотической асимптотикой теорема 1 позволяет в ряде случаев вычислять точные значения кодлин. В теории факториальных языков хорошо известен язык E_0 , который состоит из всех слов в двухбуквенном алфавите $\{a, b\}$, не содержащих в качестве подслов a^2, b^4 и $abba$ (см., например, [1]). Несложно построить бинарное слово $\bar{w}$, у которого множество собственных подслов совпадает с языком E_0 . Один из таких примеров приведен в [15]. Там же для слова $\bar{w}$ показано, что

$$k_{n-2}^{(1)} = \begin{cases} F_{k-1} + F_{k+1} & \text{при } n = 2k, \\ F_{k-1} + F_{k+2} & \text{при } n = 2k + 1, \end{cases}$$

а

$$k_{n-2}^{(2)} = F_k$$

и при $n = 2k$ и при $n = 2k + 1$, где

$$F_t = \frac{\varphi^t + (-\varphi)^{-t}}{2\varphi - 1} \quad - \quad \text{числа Фибоначчи, } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Применяя теорему 1, получаем еще одно следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для алгебры $A(\bar{w})$ выполняются равенства

$$l_n(A(\bar{w})) = 2F_{t+1} + F_{t+3}$$

при четном $n = 2t$ и

$$l_n(A(\bar{w})) = F_{t+1} + 2F_{t+3}$$

при нечетном $n = 2t + 1$.

Наряду с точным значением можно оценить и асимптотику последовательности $l_n(A(\bar{w}))$. Если ввести на вещественных функциях отношение

$$f(x) \simeq g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

то

- $l_n(A(\bar{w})) \simeq C_0(\sqrt{\varphi})^n$ при четных n ,
- $l_n(A(\bar{w})) \simeq 2C_0(\sqrt{\varphi})^n$ при нечетных n ,

где

$$C_0 = \frac{\varphi^2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}.$$

НИЕНОЕ ЦЕОЕ?ОВАННОЙ ЛЕОА?АОУ?U

- [1] А. М. Шур, “О вычислении параметров и типов поведения комбинаторной сложности регулярных языков”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **16**:2 (2010), 270–287.
- [2] Р. И. Григорчук, “Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **84**:3 (1984), 939–985.
- [3] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, American Mathematical Society, Providence, 2005.
- [4] М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, “Последовательности коразмерностей тождеств и их асимптотическое поведение”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **22**:4 (2019), 115–127.
- [5] A. Berele, A. Regev, “Applications of hook Young diagrams to P.I. algebras”, *J. Algebra*, **82** (1983), 559–567.
- [6] S. P. Mishchenko, M. V. Zaicev, “Asymptotic behaviour of colength of varieties of Lie algebras”, *Serdica Math. J.*, **26**:2 (2000), 45–154.
- [7] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “On colength of a variety of Lie algebras”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **9**:5 (1999), 483–491.
- [8] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Algebras with intermediate growth of the codimensions”, *Adv. Appl. Math.*, **37**:3 (2006), 360–377.
- [9] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Codimensions of Algebras and Growth Functions”, *Adv. Math.*, **217**:3 (2008), 1027–1052.
- [10] С. П. Мищенко, “Многообразия линейных алгебр кодлинны один”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, 2010, № 1, 25–30.
- [11] К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978.
- [12] С. П. Мищенко, А. Б. Веревкин, “О многообразиях с тождествами одно-порожденной свободной метабелевой алгебры”, *Чебышевский сборник*, **17**:2 (2016), 21–55.

- [13] С. П. Мищенко, “Бесконечные периодические слова и почти нильпотентные многообразия”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, 2017, № 4, 62–66.
- [14] М. В. Зайцев, Д. Д. Реповш, “Тождества в алгебрах и комбинаторные свойства двоичных слов”, *Доклады Академии наук*, **489**:5 (2019), 449–451.
- [15] М. В. Зайцев, Д. Д. Реповш, “Теория формальных языков и тождества неассоциативных алгебр”, *Сиб. мат. журн.*, **61**:2 (2020), 322–329.
- [16] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [17] Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп*, Мир, М., 1982.
- [18] J. Cassaigne, “Constructing infinite words of intermediate complexity”, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **2450** (2003), 173–184.
- [19] J. Balogh, B. Bollobas, “Hereditary properties of words.”, *Theor. Inform. Appl.*, **39**:1 (2005), 49–65.

М. В. Зайцев

Механико-математический факультет, Московский
центр фундаментальной и прикладной математики
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
E-mail: zaicevmv@mail.ru

Д. Д. Реповш

Педагогический факультет, Факультет математики и
физики университета Любляны, Институт
математики, физики и механики, г. Любляна,
Словения
E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si