UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Tjaša Mehle

Boltzmann-Gibbsova porazdelitev denarja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2020

Kazalo

Boltzmann-Gibbsova porazdelitev denarja

Povzetek

To delo obravnava uporabo metod fizike na statističnih modelih za porazdelitev denarja, kot primer pristopa ekonofizike. V zaprtem gospodarskem sistemu se denar ohranja. Po analogiji z energijo mora ravnotežje verjetnostne porazdelitve denarja slediti Boltzmann-Gibbsovem zakonu, pri čemer je efektivna temperatura enaka povprečnemu znesku denarja na agenta. Numerične simulacije kažejo, da to drži vsaj takrat, ko je število agentov in povprečni znesek denarja na agenta velik. Glavni cilj diplomskega dela je ta rezultat dokazati.

The Boltzmann-Gibbs distribution of money

Abstract

This paper is concerned with the application of the methods of physics to statistical models for money distribution as an example of the approach of econophysics. In a closed economic system, money is conserved. By analogy with energy, the equilibrium probability distribution of money must follow the exponential Boltzmann-Gibbs law characterized by an effective temperature equal to the average amount of money per economic agent. Numerical simulations suggest that at least when the number of agents and the average amount of money per agent are large, this is true. The main objective of this paper is to give a rigorous proof of this result.

Math. Subj. Class. (2020): 82-10, 60J10

Ključne besede: statistična mehanika, Boltzmann-Gibbsov zakon, gospodarstvo, verjetnostna porazdelitev, stacionarna porazdelitev, simetrija obrata časa, ohranitveni zakon, Markovske verige

Keywords: statistical mechanics, Boltzmann-Gibbs law, economy, probability distribution, stationary distribution, time-reversal symmetry, conservation law, Markov chains

1. Uvod

Ekonofizika je raziskovalno področje, ki si prizadeva uporabiti metode zlasti statistične mehanike in teoretične fizike na splošno, za študij in modeliranje (zapletenih) ekonomskih pojavov in finančnih sistemov. Uporablja matematične metode, razvite v statistični fiziki za preučevanje zapletenih sistemov, sestavljenih iz velikega števila medsebojno vplivajočih gospodarskih dejavnikov (posamezniki, korporacije,...). V tem smislu bi ekonofiziko lahko šteli za uporabno vejo teorije verjetnosti. Po drugi strani (z vidika ekonomistov) je ekonofizika bližja ekonometriji, ne pa dobesednemu slogu klasične politične ekonomije. Poudarek je na kvantitativni analizi velikih količin ekonomskih in finančnih podatkov.

Njeni začetki segajo v sredino devetesetih let. Takrat so fiziki, nezadovoljni s tradicionalnimi razlagami in pristopi ekonomistov, ki so ponavadi dajali prednost poenostavljenim pristopom, začeli aplicirati orodja in metode iz fizike. Sprva so poskušali uskladiti nabore finančnih podatkov, nato pa še pojasniti več splošni ekonomski pojavov.

V nadaljevanju bom obravnavala uporabo metod statistične fizike pri študiji porazdelitve denarja v družbi medsebojno vplivajočih gospodarskih dejavnikov. Za razliko od številnih prispevkov v ekonomski literaturi, ki uporabljajo stohastični pristop za pridobivanje porazdelitve bogastva in dohodka ločeno za vsakega agenta posebej (kar bi lahko imenovali "eno-delčni pristop"), ekonofizika uvaja alternativni pristop ("dvo-delčni pristop"). V tem primeru imajo agenti dvostranske interakcije, pri čemer se denar prenese iz enega agenta na drugega.

Poglavja 2. in 3. sta namenjena neformalni ekspoziciji. Obravnavala bom Bolzmann-Gibbsov zakon, njegovo neformalno izpeljavo in razširitev na gospodarstvo. Predstavila bom modele v katerih so s pomočjo simulacij potrdili konvergenco k Boltzmann-Gibbsovi porazdelitvi. Na koncu poglavja bom obravnavala razliko med aditivnimi in multiplikativnimi modeli. V 4. in 5. poglavju sledi rigorozni del. Na kratko bom predstavila Markovske verige v diskretnem času in se lotila dokaza konvergence k Boltzmann-Gibbsovem zakonu.

2. Boltzmann-Gibbsova porazdelitev energije

V fiziki je temeljni zakon ravnotežne statistične mehanike Boltzmann-Gibbsov zakon. Ta pravi, da je pod predpostavkama, da imamo opravka z velikim številom članov in da je povprečna energija sistema skozi čas konstantna, verjetnostna gostota energije ϵ posameznega člana enaka:

$$P(\epsilon) = Ce^{\frac{-\epsilon}{k_B T}}. \tag{1}$$

Faktor k_B je Boltzmannova konstanta, T temperatura in C normirna konstanta. Enačbo (1) lahko izpeljemo na več načinov. Ključni komponenti pri izpeljavi sta statistični značaj sistema in ohranjanje energije.

Boltzmann je pri izpeljavi uporabil koncept entropije. V statistični mehaniki je entropija S sistema določena z naravnim logaritmom Ω, pri čemer je Ω število vseh možnih (mikroskopskih) stanj, ki ustrezajo realnemu (makroskopskemu) stanju sistema, določenem z makroskopskimi omejitvami (npr. skupno energijo W):

$$S = k_B \ln \Omega. \tag{2}$$

Sorazmernostni faktor k_B je Boltzmannova konstanta.

Poglejmo si neformalno izpeljavo (1). Vzemimo N delcev s skupno energijo W. Energijsko os razdelimo na manjše intervale velikosti Δ_ϵ in preštejemo število delcev N_k, ki imajo energijo med ϵ_k in $\epsilon_k+\Delta_\epsilon$. Verjetnost, da ima delec energijo ϵ_k, je potem enaka $P_k = \frac{N_k}{N}$. Izračunamo Ω, ki je število permutacij delcev med energijskimi intervali, kjer se zasedenost intervalov (N_k) ne spreminja, in dobimo kombinatorično formulo

$$\Omega = \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!\cdots}. \tag{3}$$

V limiti, ko so števila N_k velika in lahko uporabimo Stirlingov približek $\ln N! \approx N \ln N$, lahko entropijo na delec zapišemo v obliki

$$\frac{S}{k_B N} = -\sum_k \frac{N_k}{N} \ln \frac{N_k}{N} = -\sum_k P_k \ln P_k. \tag{4}$$

Radi bi ugotovili, katera porazdelitev delcev med različnimi energijskimi intervali ima največjo entropijo, torej želimo najti največjo množico, če ima skupna energija sistema $W = \sum_k N_k \epsilon_k$ fiksno vrednost. Rešitev tega problema je mogoče dobiti z metodo Lagrangeovih množiteljev (Wannier, 1987), odgovor pa daje eksponentna porazdelitev (1).

Ker so izpeljave porazdelitve (1) zelo splošne, je bilo pričakovano, da se to razširi na druge sisteme z ohranjeno količino.

3. Boltzmann-Gibbsova porazdelitev denarja

Gospodarstvo je velik statistični sistem z milijoni sodelujočih agentov, zato je obetaven cilj za uporabo statistične mehanike. Drăgulescu in Yakovenko (2000) sta trdila, da je v zaprtem gospodarskem sistemu denar (m) ohranjena količina in tako sklepala, da mora biti ravnotežna verjetnostna porazdelitev denarja $P(m)$ v skladu z Boltzmann-Gibbsovim zakonom (1). Predstavila sta verjetnostno porazdelitev funkcije denarja $P(m)$, ki je definirana tako, da je število agentov z denarjem med m in $m + dm$ enako $NP(m)dm$, kjer je N število vseh agentov in velja $N \gg 1$. Zanima nas stacionarna porazdelitev $P(m)$, ki ustreza stanju termodinamičnega ravnovesja.

Ravnotežno porazdelitveno funkcijo $P(m)$ lahko neformalno izpeljemo podobno kot enačbo (1) v fiziki. Eden od krajših načinov je, da sistem razdelimo na podsistema 1 in 2. Pri tem upoštevamo, da se denar ohranja in je aditiven: $m = m_1 + m_2$, medtem ko je verjetnost multiplikativna: $P = P_1 P_2$. Sklepamo, da je $P(m_1 + m_2) = P(m_1)P(m_2)$. Rešitev te enačbe je $P(m) = Ce^{\frac{-m}{T}}$ in posledično ima stacionarna porazdelitev denarja Boltzmann-Gibbsovo obliko. Iz pogojev $\int_0^\infty P(m)dm = 1$ in $\int_0^\infty mP(m)dm = E[m] = \frac{M}{N}$ dobimo, da je $C = \frac{1}{T}$ in $T = \frac{M}{N}$, kjer je M ves denar v sistemu. Tako je efektivna temperatura T enaka povprečni količini denarja na agenta. Lahko bi jo izpeljali tudi z maksimiziranjem entropije na podoben način, kot je izpeljana enačba (1) v 2. poglavju. Drăgulescu in Yakovenko (2000) sta tako zagovarjala, da je stacionarna porazdelitev denarja $P(m)$ podana z Boltzmann-Gibbsovo eksponentno funkcijo, analogno enačbi (1)

$$P(m) = Ce^{\frac{-m}{T_m}}. \tag{5}$$

Tu je C normirna konstanta in T_m "denarna temperatura", ki je enaka povprečnemu znesku denarja na agenta.

Za potrditev domneve sta opravila računalniške simulacije prenosa denarja med agenti v različnih modelih.

3.1. **Predpostavke v modelu.** Agenti lahko denar samo dajo ali dobijo od drugih agentov. Ni jim dovoljeno izdelovati svojega denarja (tj. ni tiskanja denarja). Ko agent i izplača denar Δm agentu j za blago ali storitev, se denarna sredstva agentov spremenijo, kot

$$\begin{aligned} m_i &\to m_i' = m_i - \Delta m \\ m_j &\to m_j' = m_j + \Delta m. \end{aligned} \tag{6}$$

Skupni znesek denarja obeh agentov pred in po transakciji ostane enak

$$m_i + m_j = m_i' + m_j' \tag{7}$$

torej imamo lokalni zakon o ohranjanju denarja.
Pravilo (6) za prenos denarja je analogno prenosu energije iz ene molekule na drugo pri molekularnih trkih v plinu, pravilo (7) pa je analogno ohranjanju energije v takih trkih.

Model Drăgulescuja in Yakovenka (2000) samo sledi denarju, ne spremlja pa, kakšno blago in storitev dostavljamo. Eden od razlogov za to je, da veliko blaga, npr. hrana in druge potrebščine ter večina storitev, ni oprijemljivega in po porabi izgine. Ker ni ohranjeno in se meri v različnih fizikalnih enotah, ga težko spremljamo. V nasprotju s tem se denar meri v isti enoti (znotraj določene države z enotno valuto) in se ohrani v lokalnih transakcijah (pravilo (7)), zato je preprosto slediti denarnemu stanju. Pomembno je tudi vedeti, da povečanje materialne proizvodnje ne prinaša samodejnega povečanja denarne ponudbe. Agenti lahko gojijo jabolka na drevesih, vendar ne morejo gojiti denarja na drevesih. Samo centralna banka ima monopol spreminjanja denarne osnove (M_b) (McConnell in Brue, 1996).
V nasprotju z agenti pa centralna banka ali centralna vlada lahko doda denar v gospodarstvo in tako spremeni celoten znesek denarja v sistemu. Ta postopek je analogen dotoku energije v sistem iz zunanjih virov, npr. Zemlja prejema energijo od Sonca. Obravnavanje teh situacij fiziki začnejo z idealizacijo zaprtega sistema v toplotnem ravnotežju in to nato posplošijo na odprt sistem, ki je podvržen energijskemu toku. Dokler je dotok denarja iz centralnih virov počasen v primerjavi s sprostitvenimi procesi v gospodarstvu in ne povzroča hiperinflacije, je sistem v kvazistacionarnem statističnem ravnovesju s počasi spreminjajočimi se parametri. To stanje je podobno počasnem ogrevanju kotlička na plinskem štedilniku, kjer ima kotliček v določenem času dobro določeno, a počasi naraščajočo temperaturo.
Denarni tok se lahko ustvari tudi z mednarodnimi prenosi denarja. Ta postopek vključuje zapletene izdaje več valut na svetu in njihove menjalne tečaje (McCauley, 2008), zato v modelu uporabljamo idealizacijo zaprtega gospodarstva za eno državo z eno samo valuto.

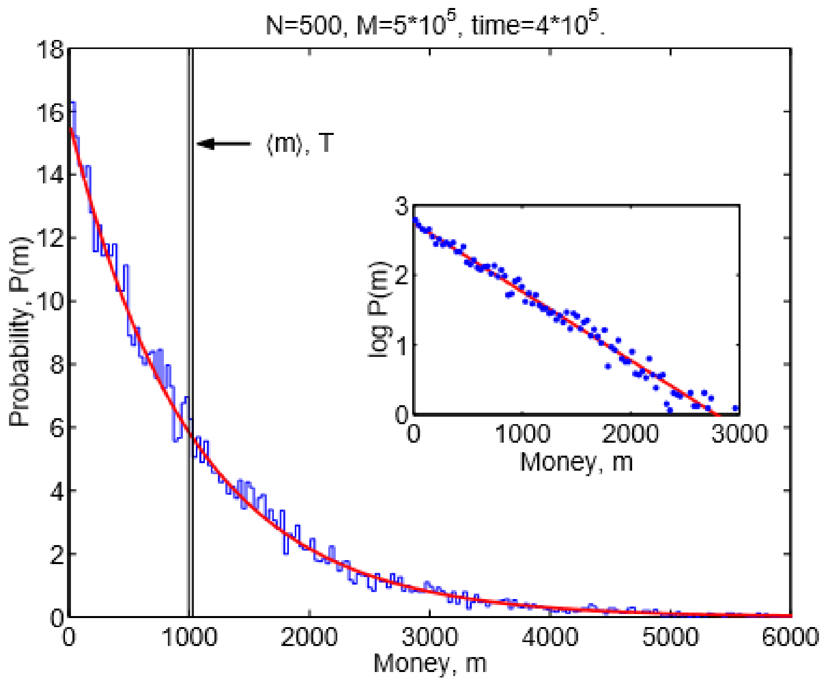
3.2. **Model brez dolga.** Najprej si oglejmo model, kjer dolg ni dovoljen.
Sprva vsi agenti dobijo enako količino denarja $P(m) = \delta(m - \frac{M}{N})$, ki je na sliki 1 prikazana kot dvojna navpična črta. Nato je naključno izbran par agentov (i, j). Eden od para je naključno izbran za "zmagovalca"(drugi agent postane "poraženec"). Znesek $\Delta m \geq 0$ se prenese od poraženca do zmagovalca. Če poraženec nima dovolj

denarja za plačilo ($m_i < \Delta m$), se transakcija ne izvede in nadaljujemo k drugemu paru agentov. Tako agenti ne smejo imeti negativnega denarja. Ta mejni pogoj je ključen pri vzpostavljanju stacionarne porazdelitve, sicer verjetnostna porazdelitev denarja ne bi dosegla mirujočega stanja. Ko agenti izmenjujejo denar, se začetna porazdelitev najprej razširi na simetrično Gaussovo krivuljo, nato se gostota verjetnosti začne nabirati na neprehodni meji $m = 0$. Porazdelitev postane asimetrična (nagnjena) in na koncu doseže stacionarno eksponentno obliko, prikazano na sliki 1. Pri simulacijah sta Drăgulescu in Yakovenko uporabila več pravil trgovanja:

(1) izmenjava majhnega konstantnega zneska $\Delta m = 1$;

(2) izmenjava naključnega deleža povprečnega denarja para agentov: $\Delta m = \nu(\frac{m_i+m_j}{2})$, kjer je ν enakomerno porazdeljeno naključno število med 0 in 1;

(3) izmenjava naključnega deleža ν povprečnega denarja v sistemu: $\Delta m = \nu(\frac{M}{N})$, kjer je ν enakomerno porazdeljeno naključno število med 0 in 1.

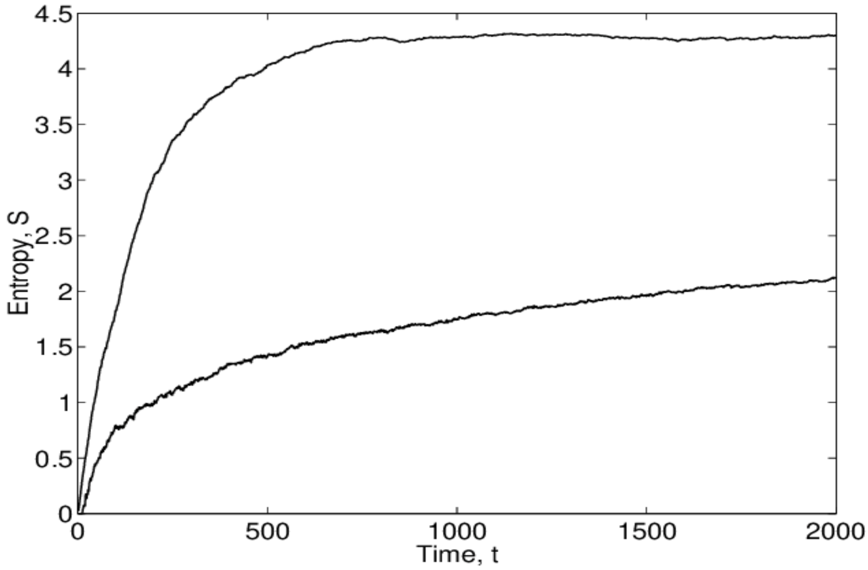


Slika 1. Stacionarna verjetnostna porazdelitev denarja $P(m)$, dobljena z računalniškimi simulacijami (modri histogram). Porazdelitev je enaka, ne glede na tri različna pravila za Δm. Rdeči krivulji ustrezata zakonu Boltzmann-Gibbsa (5), navpični črti pa kažeta na začetno porazdelitev denarja $\delta(m - \frac{M}{N})$. Slika pridobljena iz [2].

Naključna porazdelitev Δm naj bi predstavljala široko paleto cen različnih izdelkov v realni ekonomiji. Odraža dejstvo, da agenti kupujejo in uživajo različne vrste izdelkov, od katerih so nekateri preprosti in poceni, nekateri sofisticirani in dragi. Pri vseh pravilih je bilo ugotovljeno, da končna stacionarna porazdelitev ustreza

Boltzmann-Gibbsovem zakonu.

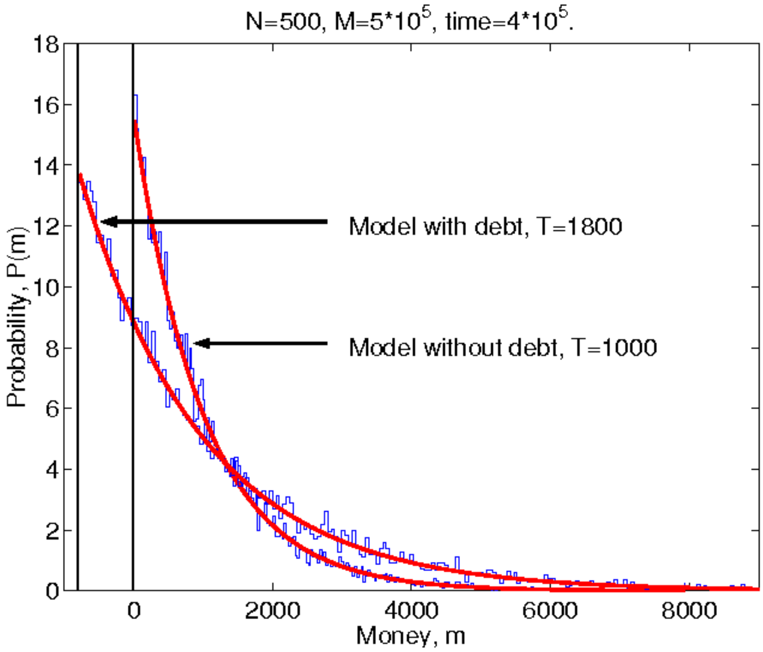
V procesu evolucije se entropija S povečuje s časom in nasiči pri največji vrednosti Boltzmann-Gibbsove porazdelitve. To ponazarja zgornja krivulja na sliki 2, izračunana za tretje pravilo trgovanja. Spodnja krivulja na sliki 2 prikazuje časovni razvoj entropije za prvo pravilo trgovanja. Časovna lestvica te krivulje je 500-krat večja od zgornje, zato se spodnja krivulja dejansko konča v času 10^6. Graf kaže, da je pri prvem pravilu mešanje veliko počasnejše kot pri tretjem. Kljub temu pa tudi za prvo pravilo sistem sčasoma doseže Boltzmann-Gibbsovo stanje največje entropije, čeprav v času, ki je precej daljši, kot je prikazano na sliki 2.



SLIKA 2. Časovni razvoj entropije. Zgornja krivulja: izmenjava naključnega deleža povprečnega denarja v sistemu $\Delta m = \nu(\frac{M}{N})$. Spodnja krivulja: izmenjava majhnega konstantnega zneska $\Delta m = 1$. Časovna lestvica spodnje krivulje je 500-krat večja, kot je navedeno, tako da se dejansko konča v času 10^6. Slika pridobljena iz [2].

Da bi naredila model še bolj realen, sta Drăgulescu in Yakovenko (2000) obravnavala model s podjetji. Na vsakem koraku en agent postane podjetje. Podjetje si sposodi kapital K pri drugem agentu in ga vrne z obrestmi hK, najame L agentov in jim izplača plačo w, izdela Q izdelkov in jih proda Q agentom po ceni p ter prejme dobiček $F = pQ - wL - hK$. Vsi agenti so izbrani naključno. Parametri modela so optimizirani po postopku iz učbenikov ekonomije (McConnell in Brue, 1996). Krivulja povpraševanja po izdelku je v obliki $p(Q) = \frac{v}{Q_\eta}$, kjer je Q količina, ki bi jo kupili kupci po ceni p, η in v pa sta neka parametra. Proizvodna funkcija podjetja ima tradicionalno Cobb-Douglasovo obliko: $Q(L, K) = L^\chi K^{1-\chi}$, kjer je χ parameter. Potem je dobiček podjetja F maksimalen glede na K in L.
Neto rezultat dejavnosti podjetja je prenos denarja z več teles, ki še vedno izpolnjuje zakon o ohranitvi. Računalniška simulacija tega modela ustvari enako eksponentno porazdelitev, neodvisno od parametrov modela. Razlogi za univerzalnost Boltzmann-Gibbsove porazdelitve in njene omejitve so obravnavani v razdelku 3.4.

3.3. **Model z dolgom.** Zdaj poglejmo model, kjer je dolg dovoljen. S stališča posameznih gospodarskih agentov lahko dolg gledamo kot negativni denar. Obravnavamo, da je banka zunaj sistema, sestavljenega iz navadnih agentov. Ker nas zanima distribucija denarja med agenti, na banko gledamo kot na velik rezervoar denarja. Ko si agent izposodi denar pri banki, se njegovo denarno stanje poveča, vendar pa agent pridobi tudi dolžniško obveznost, torej skupno stanje (neto vrednost) ostaja enako. Vidimo, da možnost izposoje denarja še vedno izpolnjuje splošni zakon o ohranitvi celotnega denarja, ki je zdaj definiran kot vsota pozitivnega (denar M) in negativnega (dolg D) dela: $M_b = M - D$. Ko agent porabi nekaj denarja v binarnih transakcijah, mu še vedno ostane dolžniška obveznost in tako njegovo denarno stanje m_i postane negativno. Sledi, da $m_i \geq 0$ ni več mejni pogoj. Za preprostost predvidevamo, da banka za posojanje denarja ne zaračuna nobenih obresti.
Zdaj ponovimo simulacijo z večimi pravili trgovanja, opisano v razdelku 3.2, brez mejnega pogoja, tako da lahko agenti zapadejo v dolg. Ko želi agent kupiti izdelek po ceni, ki je višja od njegovega denarnega stanja m_i, mu je dovoljeno, da si pri banki izposodi razliko in s tem kupi izdelek. Kot rezultat te transakcije novo stanje agenta postane negativno: $m_i' = m_i - \Delta m < 0$. Upoštevamo, da je lokalni zakon o ohranitvi (7) še vedno izpolnjen, vendar vključuje negativne vrednosti m.

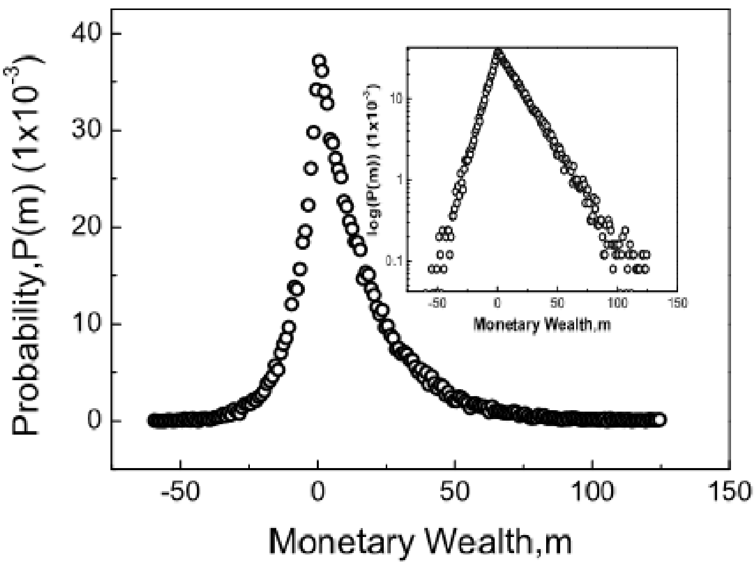


Slika 3. Histograma: Stacionarna porazdelitev denarja brez in z dolgom ($m_d = 800$), pridobljena preko računalniške simulacije. Rdeči krivulji ustrezata zakonu Boltzmann-Gibbsa (5) z denarnima temperaturama $T_m = 1000$ in $T_m = 1800$. $M = 5^*10^5$ je celoten denar v sistemu, ki je v tem razdelku označen z M_b. Slika pridobljena iz [2].

Če simulacijo nadaljujemo naprej brez kakršnih koli omejitev dolga agentov, se verjetnostna porazdelitev denarja $P(m)$ nikoli ne stabilizira in sistem nikoli ne doseže mirujočega stanja. S časom se $P(m)$ širi na Gaussov način proti $m = +\infty$ in $m = -\infty$. Zaradi zgoraj omenjenega splošnega zakona o ohranitvi prvi moment denarja $E[m] = \frac{M_b}{N}$ ostane konstanten. To pomeni, da nekateri agenti postanejo bogatejši (s pozitivnim denarjem) na račun drugih agentov, ki gredo čedalje bolj v dolg, tako da je $M = M_b + D$.

Zdrav razum nam pove, da gospodarski sistem ne more biti stabilen, če je dovoljen neomejen dolg. V tem primeru lahko agenti kupijo katero koli blago, brez da bi kaj proizvedli v zameno, tako da preprosto zaidejo v neomejen dolg. Drăgulescu in Yakovenko (2000) sta obravnavala preprost model, kjer je največji dovoljen dolg agenta enak m_d. Nov mejni pogoj je tako enak $P(m < -m_d) = 0$. Rezultati so prikazani na sliki 3. $P(m)$ je zopet podana z Boltzmann-Gibbsovim zakonom, vendar z višjo denarno temperaturo $T_d = \frac{M_b}{N} + m_d$, ker morata pogoja $\int_{-m_d}^{\infty} P(m)dm = 1$ in $\int_{-m_d}^{\infty} mP(m)dm = \frac{M_b}{N}$, zadoščati tudi za populacijo z negativnim denarjem. Višja temperatura naredi porazdelitev denarja širšo, kar pomeni, da dolg povečuje neenakost med agenti.

Postaviti rez na m_d ni najbolj realno. V praksi bi se lahko mejo razširilo na neko območje, odvisno od natančnih pravil za stečaj. V tem območju bi bila Boltzmann-Gibbsova porazdelitev razmazana, zato bi zakon Boltzmann-Gibbsa videli le dovolj daleč od reznega območja. Podobno so v poskusih opazili nekatera odstopanja od eksponentnega zakona blizu spodnje meje porazdelitve. Na koncu porazdelitve namreč število dogodkov postane majhno, statistika pa slaba, zato zakon Boltzmann-Gibbsa izgubi uporabnost. Tako pričakujemo, da bo zakon veljal le za vmesni obseg denarja, ki ni preblizu spodnji meji niti zelo visokemu koncu. Vendar je ta obseg najpomembnejši, saj zajema veliko večino prebivalstva.



Slika 4. Stacionarna porazdelitev denarja za obvezno rezervno razmerje $R = 0,8$. Porazdelitev je eksponentna za pozitiven in negativen denar z različnima temperaturama $T_+ = \frac{M_b}{RN}$ in $T_- = \frac{M_b(1-R)}{RN}$. Slika pridobljena iz [3].

Xi, Ding in Wang (2005) so obravnavali še en, bolj realističen mejni pogoj, kjer omejitev ni določena za posamezni dolg vsakega agenta, temveč za skupni dolg vseh agentov v sistemu. To dosežemo z zahtevanim razmerjem rezerve R (McConnell in

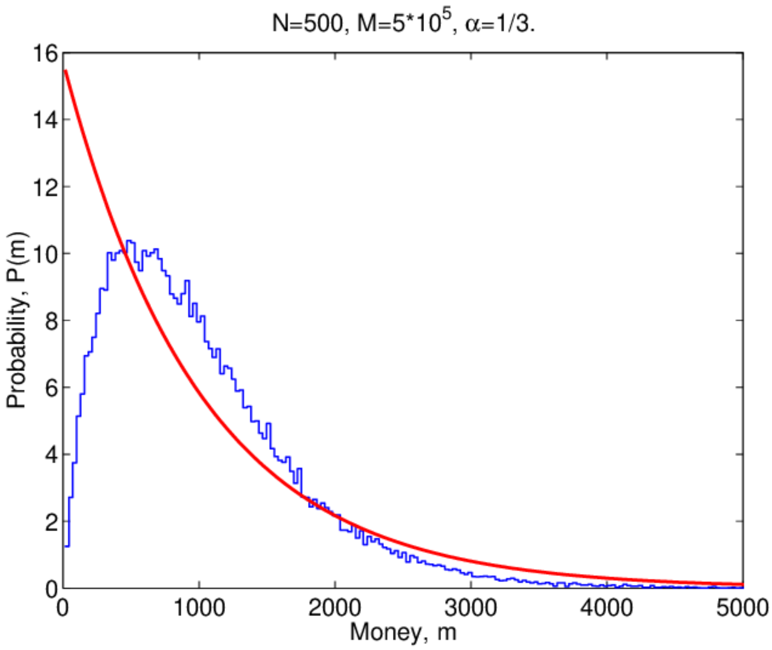
Brue, 1996). Banka mora po zakonu del denarja, položenega na bančne račune, dati na stran (R) preostali del $(1-R)$ pa je mogoče še naprej posojati. Če označimo z M_b začetni znesek denarja v sistemu (denarna osnova), potem se s ponavljajočimi posojili in zadolževanjem skupni znesek pozitivnega denarja, ki je na voljo agentom, poveča na $M = \frac{Mb}{R}$, kjer je $\frac{1}{R}$ denarni multiplikator (McConnell in Brue, 1996). Maksimalen skupni dolg je podan z $D = \frac{M_b}{R} - M_b$ in je omejen s faktorjem R. Ko je dolg največji, skupna zneska pozitivnega ($\frac{M_b}{R}$) in negativnega ($\frac{M_b(1-R)}{R}$) denarja krožita med agenti v sistemu, zato sta v obravnavanem modelu dve omejitvi. Tako pričakujemo eksponentno porazdelitev pozitivnega in negativnega denarja, z različnima temperaturama: $T_+ = \frac{M_b}{RN}$ in $T_- = \frac{M_b(1-R)}{RN}$. Prav to so ugotovili v računalniških simulacijah, kot prikazuje slika 4.

3.4. **Aditivni in multiplikativni modeli.** V modelih prenosa denarja, obravnavanih v prejšnjih razdelkih, je preneseni znesek Δ običajno neodvisen od denarnega stanja vpletenih agentov ali pa je odvisen simetrično. Drugačen model so že prej predstavili Ispolatov, Krapivsky in Redner (1998) in ga imenovali multiplikativni model izmenjave premoženja. Tudi ta model ustreza zakonu ohranitve, vendar je preneseni znesek denarja fiksni del γ plačnikovega denarja v enačbi (6):

$$\Delta m = \gamma m_i. \tag{8}$$

Stacionarna porazdelitev denarja v tem modelu, primerjana z eksponentno funkcijo na sliki 5, je podobna, vendar ne povsem enaka distribuciji Gama:

$$P(m) = C m^{\beta} e^{\frac{-m}{T}}. \tag{9}$$



Slika 5. Histogram: stacionarna porazdelitev denarja za multiplikativni model izmenjave sredstev z $\gamma = \frac{1}{3}$ pridobljen z računalniškimi simulacijami. Rdeča krivulja je eksponentni Boltzmann-Gibbsov zakon 5. Slika pridobljena iz [2].

Zgornja enačba se razlikuje od enačbe (5) za multiplikativni faktor m^{β}. Iz Boltzmannove kinetične enačbe so Ispolatov, Krapivsky in Redner (1998) dobili formulo, ki se nanaša na parametra γ in β v enačbah (8) in (9):

$$\beta = -1 - \frac{\ln 2}{\ln(1-\gamma)}. \tag{10}$$

Ko plačniki porabijo razmeroma majhen del svojega denarja $\gamma < \frac{1}{2}$, enačba (10) daje $\beta > 0$. V tem primeru se populacija z nizko bilanco denarja zmanjša in $P(0) = 0$, kot prikazuje slika 5.
Stacionarna porazdelitev denarja v tem modelu se razlikuje od preproste eksponentne formule (5), ki jo najdemo za modele, opisane v prejšnjih razdelkih.

Izvor te razlike lahko razberemo iz Boltzmannove kinetične enačbe (Lifshitz in Pitaevskii, 1981; Wannier, 1987). Ta enačba opisuje časovni razvoj porazdelitvene funkcije $P(m)$ zaradi parnih interakcij:

$$\begin{aligned}\frac{dP(m)}{dt} = \iint &\{-f_{[m,m']\to[m-\Delta,m'+\Delta]}P(m)P(m')+ \\ &f_{[m-\Delta,m'+\Delta]\to[m,m']}P(m-\Delta)P(m'+\Delta)\}dm'd\Delta.\end{aligned} \tag{11}$$

Tu je $f_{[m,m']\to[m-\Delta,m'+\Delta]}$ verjetnost prenosa denarja Δ iz agenta z denarjem m na agenta z denarjem m' na enoto časa. Ta verjetnost, pomnožena s številoma zasedenosti $P(m)$ in $P(m')$, daje hitrost prehoda iz stanja $[m,m']$ v stanje $[m-\Delta, m'+\Delta]$. Prvi izraz v enačbi (11) poda stopnjo depopulacije stanja m. Drugi izraz pa opisuje obratni proces, kjer se število zasedenosti $P(m)$ poveča. Ko sta oba izraza enaka, se direktni in obratni prehodi izničijo in verjetnostna porazdelitev je stacionarna: $\frac{dP(m)}{dt} = 0$. To je načelo podrobnega ravnotežja.
V fiziki temeljne mikroskopske enačbe gibanja upoštevajo simetrijo obrata časa. To pomeni, da so verjetnosti direktnih in obratnih procesov popolnoma enake:

$$f_{[m,m']\to[m-\Delta,m'+\Delta]} = f_{[m-\Delta,m'+\Delta]\to[m,m']} \tag{12}$$

Ko velja enačba (12), se ravnotežni pogoj za (11) zreducira na enačbo $P(m)P(m') = P(m-\Delta)P(m'+\Delta)$, ker se faktorji f izničijo. Edina rešitev te enačbe je $P(m) = Ce^{\frac{-m}{T_m}}$, zato je Boltzmann-Gibbsova porazdelitev stacionarna rešitev Boltzmannove kinetične enačbe (11). Prehodne verjetnosti (12) so določene z dinamičnimi pravili modela, ravnotežna Boltzmann-Gibbsova porazdelitev pa je od njih neodvisna. To je izvor njene univerzalnosti.
Modeli, obravnavani v prejšnjih razdelkih, imajo simetrijo obrata časa. V zgornjem modelu pa je simetrija obrata časa porušena. Ko agent i da fiksen del γ svojega denarja m_i agentu z denarjem m_j, njuni stanji postaneta $(1-\gamma)m_i$ in $m_j + \gamma m_i$. Če poskušamo ta postopek obrniti in imenovati agenta j kot plačnika in dodeliti del njegovega denarja $\gamma(m_j + \gamma m_i)$ agentu i, se sistem ne vrne v prvotno konfiguracijo $[m_i, m_j]$. Ker pravilo sorazmerja po navadi krši simetrijo obrata časa, stacionarna porazdelitev $P(m)$ v multiplikativnih modelih po navadi ni eksponentna.

Vidimo, da porazdelitev Boltzmann-Gibbsa ne drži nujno za vsak konzervativni model, vendar je univerzalna v omejenem smislu. Pri širokem razredu modelov, ki imajo simetrijo obrata časa, je stacionarna porazdelitev eksponentna in ni odvisna od podrobnosti modela. Ko je simetrija obrata časa prekršena, je lahko porazdelitev odvisna od podrobnosti modela. Razlika med tema dvema razredoma modelov je precej tanka. Odstopanja od zakona Boltzmann-Gibbsa se lahko pojavijo le, če so prehodne stopnje f v enačbi (12) izrecno odvisne od denarja m ali m' agentov na asimetričen način.

Drăgulescu in Yakovenko (2000) sta izvedla računalniško simulacijo, kjer je bila smer plačila naključno določena vnaprej za vsak par agentov (i, j). V tem primeru se denar giblje vzdolž usmerjenih povezav med agenti: $i \to j \to k$ in je simetrija obrata časa lahko močno kršena. Ta model je bližje realnemu gospodarstvu, kjer navadno denar prejme delojemalec in ga plača v trgovini. Kljub temu so lahko v tem modelu še vedno našli porazdelitev Boltzmann-Gibbsa, ker hitrosti prehoda f niso bile izrecno odvisne od m in m' in niso kršile enačbe (12).

Zaradi pomanjkanja podrobnega znanja o resnični mikroskopski dinamiki gospodarskih izmenjav, je poluniverzalna Boltzmann-Gibbsova porazdelitev naravno izhodišče in tako dober začetni približek. Poleg tega se zdi domneva Drăgulescuja in Yakovenka (2000), da agenti plačujejo enake cene Δm za iste izdelke, neodvisno od njihovega denarnega stanja m, zelo primerna za sodobno anonimno gospodarstvo, zlasti za nakupe prek interneta. Razlika med aditivno (5) in multiplikativno (9) porazdelitvijo pa morda ni tako ključna. Pri velikih m se $P(m)$ v obeh modelih eksponentno zmanjšuje. Z nadaljnjim spreminjanjem pravil prenosa denarja in uvedbo več parametrov v modele je mogoče dobiti še bolj zapletene porazdelitve (Saif in Gade, 2007; Scafetta in West, 2007). Vendar pa je mogoče trditi, da je skopost vrlina dobrega matematičnega modela, za razliko od številnih dodatnih predpostavk in parametrov, katerih skladnost z resničnostjo je težko preveriti.

4. Markovske verige v diskretnem času s končno zalogo vrednosti

Za lažje razumevanje dokaza Boltzmann-Gibbsove porazdelitve denarja so v tem poglavju na kratko in brez dokazov predstavljene verige Markova v diskretnem času s končno zalogo vrednosti. Dokaze lahko bralec najde v [4].

V nadaljevanju je ξ števna množica stanj, ki je opremljena z diskretno σ-algebro $\mathcal{P}(\xi) = 2^{\Omega}$.

Definicija 4.1. Zaporedje $(X_n)_{n\geq 0}$ slučajnih spremenljivk na verjetnostnem prostoru (Ω, F, P) z vrednostmi v ξ je diskretna Markovska veriga (s tem prostorom stanj), če velja

$$E[f(X_{n+1})|X_0, X_1, \ldots, X_n] = E[f(X_{n+1})|X_n] \text{ s.g. za vsako omejeno } f : \xi \to \mathbb{R}.$$

Definicija 4.2. Proces $(X_n)_{n\geq 0}$ je homogena Markovska veriga s prehodno verjetnostjo $(p_{x,y})_{x,y\in\xi}$, če obstajajo prehodne verjetnosti $p_{x,y} \geq 0$ za vsak $x, y \in \xi$, $\sum_{y\in\xi} p_{x,y} = 1$, da velja

$$p_{x,y} = P(X_{t+1} = y|X_t = x) \text{ za vsak } t \in \mathbb{N}_0.$$

Trditev 4.3. *Naj bo $\Omega^c = \{\omega = (x_0, x_1, \dots), x_i \in \xi\}$, $X_n^c(\omega) = x_n$, $F_n^c = \sigma - (X_0^c, \dots, X_n^c)$ za $n \geq 0$ in F^c najmanjša σ-algebra, generirana z vsemi F_n^c. Naj bo dana prehodna verjetnost $(p_{x,y})_{x,y\in\xi}$ na prostoru stanj ξ. Potem za vsako stanje $z \in \xi$ obstaja natanko ena verjetnostna mera $\mathbb{P}_z$ na (Ω^c, F^c) glede na katero je $(X_n^c)_{n\geq 0}$ homogena Markovska veriga s prehodno verjetnostjo $(p_{x,y})_{x,y\in\xi}$ in začetno porazdelitvijo δ_z.*
Za vsako drugo verjetnostno porazdelitev μ na ξ je s predpisom

$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{z\in\xi} \mu(z)\mathbb{P}_z$$

dana verjetnost na (Ω^c, F^c), glede na katero je $(X_n^c)_{n\geq 0}$ Markovska veriga s prehodno verjetnostjo $(p_{x,y})_{x,y\in\xi}$ in začetno porazdelitvijo μ.

4.1. **Klasifikacija stanj.** Za $x \in \xi$ definiramo čas zadetja

$$\widetilde{T}_x = \inf\{k \geq 1, X_k = x\}.$$

To je tudi čas ustavljanja.

Definicija 4.4. $\rho_{x,y} = \mathbb{P}_x[\widetilde{T}_y < \infty], \ x, y \in \xi.$
Stanje x je povrnljivo, če velja $\rho_{x,x} = \mathbb{P}_x[\widetilde{T}_x < \infty] = 1$ in minljivo, če velja $\rho_{x,x} = \mathbb{P}_x[\widetilde{T}_x < \infty] < 1$.

Definicija 4.5. Povrnljivo stanje $x \in \xi$ je pozitivno povrnljivo, če velja $\mathbb{E}_x[\widetilde{T}_x] < \infty$.

Definicija 4.6. Za $x \in \xi$ naj bo $N_x = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}}$ število vseh zadetij stanja x.

Trditev 4.7. *Naj bo $y \in \xi$. Če je y povrnljivo stanje, je $N_y = \infty$ $\mathbb{P}_y$-s.g. Če je y minljivo stanje, potem za vsak $x \in \xi$ velja*

$$\mathbb{E}_x[N_y] = \frac{\rho_{x,y}}{1 - \rho_{y,y}} < \infty.$$

4.2. **Dekompozicija prostora stanj.**

Definicija 4.8. Stanje $x \in \xi$ doseže stanje $y \in \xi$ (oznaka $x \rightsquigarrow y$), če velja

$$\mathbb{P}_x[\widetilde{T}_y < \infty] > 0.$$

Opomba 4.9. Potreben in zadosten pogoj za to je, da obstaja $n \geq 1$, tak da je $p_{x,y}(n) > 0$.

Definicija 4.10. Stanji x in y komunicirata (oznaka $x \leftrightsquigarrow y$), če velja bodisi $x = y$ ali $x \rightsquigarrow y$ in $y \rightsquigarrow x$.

Opomba 4.11. Relacija $\leftrightsquigarrow$ je ekvivalenčna relacija.

Definicija 4.12. Markovska veriga je ireducibilna, kadar tvorijo stanja iz ξ en sam ekvivalenčni razred glede na relacijo komuniciranja $\leftrightsquigarrow$.

Izrek 4.13. *Naj bo $(X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilna Markovska veriga. Potem je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i=x\}}}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\widetilde{T}_x]} \ \mathbb{P}_x - s.g.$$

4.3. **Stacionarna porazdelitev.**

Definicija 4.14. Verjetnostna porazdelitev π na ξ je stacionarna porazdelitev za homogeno Markovsko verigo s prostorom stanj ξ in prehodno verjetnostjo $P = (p_{x,y})_{x,y\in\xi}$, če velja za vsak $y \in \xi$

$$\pi(y) = \sum_{x\in\xi} \pi(x) p_{x,y},$$

tj. π je leva lastna vrstica za matriko $P = (p_{x,y})_{x,y\in\xi}$ pri lastni vrednosti 1 ($\pi P = \pi$).

Trditev 4.15. *Porazdelitev π je stacionarna natanko tedaj, ko je*

$$(X_n^c)_\star \mathbb{P}_\pi = \mathbb{P}_\pi \ \text{za vsak } n \geq 0.$$

tj. zakon X_n^c pod $\mathbb{P}_\pi$ ne zavisi od n.

Definicija 4.16. Porazdelitev π na ξ je reverzibilna porazdelitev (za Markovsko verigo), če velja pogoj točne izravnave:

$$\pi(x)p_{x,y} = \pi(y)p_{y,x} \text{ za vsak } x, y \in \xi.$$

Trditev 4.17. *Reverzibilna porazdelitev, če obstaja, je stacionarna.*

Izrek 4.18. *Naj bo $(X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilna Markovska veriga s prostorom stanj ξ. Potem so ekvivalentne naslednje trditve:*

- *Obstaja pozitivno povrnljivo stanje $x \in \xi$.*
- *Vsa stanja iz ξ so pozitivno povrnljiva.*
- *Obstaja stacionarna porazdelitev π na ξ.*

Če katerakoli trditev velja (torej vse), je

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tilde{T}_x]}, \ x \in \xi.$$

Opomba 4.19. Če je ξ končna je $(X_n)_{n\geq 0}$ pozitivno povrnljiva (če je seveda tudi ireducibilna).

Posledica 4.20. *Posledično je ta stacionarna porazdelitev tudi enolična.*

4.4. **Asimptotsko vedenje.**

Definicija 4.21. Za stanje $x \in \xi$ definirajmo periodo

$$d(x) = \gcd\{k \in \mathbb{N}; p_{x,x}(k) > 0\}.$$

Opomba 4.22. Pri tem je $I(x) = \{k \in \mathbb{N}; p_{x,x}(k) > 0\}$ zaprta za seštevanje (numerična polgrupa).

Trditev 4.23. *Če je $d(x) = 1$, potem obstaja nek n_0, da velja: $n \in I(x), \forall n \geq n_0$.*

Trditev 4.24. *Če dve stanji komunicirata ($x \leftrightsquigarrow y$), potem imata isto periodo $d(x) = d(y)$.*

Definicija 4.25. Ireducibilna Markovska veriga je aperiodična, če velja $d(x) = 1, \forall x \in \xi$.

Izrek 4.26. *Naj bo $(X_n)_{n\geq 1}$ ireducibilna, aperiodična in naj obstaja stacionarna porazdelitev π. Potem velja za $x, y \in \xi$*

$$\lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = \pi(y).$$

5. Dokaz Boltzmann-Gibbsove porazdelitve denarja na povezanih grafih

Numerične simulacije modelov so potrdile, da vsaj ko sta število agentov in povprečen denar na agenta velika, porazdelitev denarja konvergira k eksponentni porazdelitvi, podobni Boltzmann-Gibbsovi porazdelitvi energije. V tem poglavju je glavni cilj natančno dokazati te rezultate in pokazati, da je konvergenca k eksponentni porazdelitvi univerzalna v smislu, da drži bolj splošno, ko so agenti na vozliščih povezanega grafa in imajo medsebojne interakcije lokalno s svojimi sosedi, namesto globalno z vsemi ostalimi agenti.

5.1. **Opis modela.** Naj bo $G = (V, E)$ končen, povezan graf.

- Vsako vozlišče predstavlja agenta in z $N = |V|$ označimo število vseh agentov, prisotnih v sistemu.

- Množico povezav obravnavamo kot interakcijsko mrežo. Tako modeliramo, kako agenti medsebojno komunicirajo in za dva agenta rečemo, da sta najbližja soseda, če sta ustrezni vozlišči v grafu povezani.

- Vsak agent je karakteriziran z zneskom denarja, ki ga ima v lasti (predpostavimo, da je to celo število, merjeno naprimer v dolarjih), in z M označimo skupno število dolarjev v sistemu.

Model, ki nas zanima, je Markovska veriga v diskretnem času, ki spremlja količino denarja, ki ga ima vsak od agentov. Po naši predpostavki, da je ta znesek denarja celo število, je stanje v času $t \in \mathbb{N}_0$ prostorska konfiguracija

$$\xi_t : V \to N \text{ kjer je } \xi_t(x) \text{ število dolarjev agenta } x \text{ ob času } t.$$

Ker bo dinamika (opisana spodaj) ohranjala skupni znesek denarja v sistemu, prostor stanj Markovske verige sestavlja naslednja podmnožica prostorskih konfiguracij:

$$A_{N,M} = \{\xi \in \mathbb{N}_0^V : \sum_{x \in V} \xi(x) = M\}. \tag{13}$$

Dinamika sistema je sestavljena iz premika enega dolarja iz naključno izbranega vozlišča na naključno izbranega soseda na vsakem koraku. Natančneje mislimo na graf kot usmerjen graf, kjer ima lahko vsaka povezava $\{x, y\}$ dve različni usmeritvi $\vec{xy}$ ali $\vec{yx}$. Na vsakem koraku sistem skoči iz konfiguracije ξ na eno od konfiguracij

$$\xi^{\vec{xy}}(z) = \begin{cases} \xi(z) - \mathbb{1}_{\{z=x\}} + \mathbb{1}_{\{z=y\}}, & \text{če} \quad \xi(x) \neq 0 \\ \xi(x), & \text{če} \quad \xi(x) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

za nek $\{x, y\} \in E$.

Model 1 Na vsakem koraku izberemo naključno usmerjeno povezavo, recimo $\vec{xy}$, in če je na vozlišču x vsaj en dolar, ga premaknemo iz vozlišča x na vozlišče y. To je formalno zapisano z diskretno Markovsko verigo s prehodnimi verjetnostmi

$$p(\xi, \xi^{\vec{xy}}) = \frac{1}{2|E|} \quad \text{za vse} \quad \{x, y\} \in E. \tag{15}$$

Opomba 5.1. Modeli, predstavljeni v poglavju 3, so samo poseben primer, ki ga dobimo s predpostavko, da je povezani graf G z N vozlišči poln. Kot vidimo v (15) enakomerno slučajno izberemo povezavo in nato še njeno orientacijo.

Model 2 Na vsakem koraku naključno izberemo en dolar v sistemu in ga naključno premaknemo k enemu od najbližjih sosedov. To je zdaj formalno zapisano z diskretno Markovsko verigo s prehodnimi verjetnostmi

$$p(\xi, \xi^{\vec{xy}}) = \frac{\xi(x)}{M \deg(x)} \quad \text{za vse} \quad \{x, y\} \in E, \tag{16}$$

kjer je ciljna konfiguracija znova opredeljena kot konfiguracija (14), z $\deg(x)$ pa označimo stopnjo vozlišča x, tj. število sosedov vozlišča x.

5.2. **Glavni rezultati.** Za oba modela najprej preučimo limitno vedenje za vse vrednosti števila N, ko gre čas v neskončno, in potem poenostavimo verjetnost, da ima posamezni agent d dolarjev v ravnotežju v meji velike populacije $N \to \infty$.

Model 1 Ker je osnovna mreža interakcij končen povezan graf, je model končna ireducibilna diskretna Markovska veriga. Ker se izkaže, da je proces tudi aperiodičen, po izreku 4.26 sledi, da obstaja enolična stacionarna porazdelitev, h kateri proces konvergira ne glede na začetno konfiguracijo. Z uporabo simetrije obrata časa in kombinatorike, lahko stacionarno porazdelitev izračunamo izrecno za vse N. Za $N \to \infty$ lahko izražanje stacionarne porazdelitve poenostavimo z uporabo naslednjega izreka.

Izrek 5.2 (Eksponentna porazdelitev)**.** *Naj bo $d \in \mathbb{N}_0$. Potem za $N \geq 2$ velja*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\xi_t(x) = d) = \frac{\binom{M+N-d-2}{N-2}}{\binom{M+N-1}{N-1}}.$$

V posebnem je za nek $T > 0$

$$\lim_{\substack{M,N\to\infty \\ \frac{M}{N}=T}} \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\xi_t(x) = d) = \frac{e^{\frac{-d}{T}}}{T} + o\left(\frac{1}{T}\right).$$

Opomba 5.3. Opazimo, da drugi del izreka implicira, da ko je denarna temperatura, tj. povprečen znesek denarja na agenta, velik, je stacionarna porazdelitev dobro aproksimirana z eksponentno porazdelitvijo (5), kar dokazuje rezultate dobljenih simulacij. Še več, rezultat se lahko razširi na prostorske modele, pri katerih agenti na splošnem povezanem grafu komunicirajo lokalno, namesto globalno.

Model 2 Tako kot prvi model, je tudi ta model končna ireducibilna diskretna Markovska veriga. Po izreku 4.18 to implicira, da obstaja univerzalna stacionarna porazdelitev in da delež časa, ko ima posameznik določeno količino denarja, konvergira k ustrezni koordinati stacionarne porazdelitve. Proces sicer na splošno ni aperiodičen, vendar aperiodičnost velja v določenih primerih, recimo če ima graf lih cikel. Z uporabo simetrije obrata časa bomo dokazali, da je stacionarna porazdelitev binomska.

Izrek 5.4 (Poissonova porazdelitev)**.** *Naj bo $d \in \mathbb{N}_0$. Potem je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{1}_{\{\xi_s(x)=d\}} = \binom{M}{d} \left(\frac{\deg(x)}{\sum_{z\in V} \deg(z)}\right)^d \left(1 - \frac{\deg(x)}{\sum_{z\in V} \deg(z)}\right)^{M-d}.$$

V posebnem je na vseh regularnih grafih (to so grafi brez zank in večkratnih povezav v katerih ima vsako vozlišče enako število sosednjih točk) za nek $T > 0$

$$\lim_{\substack{M,N\to\infty \\ \frac{M}{N}=T}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{1}_{\{\xi_s(x)=d\}} = \frac{T^d}{d!} e^{-T}.$$

Drugi del izreka pove, da se čas, ko ima posameznik v lasti d dolarjev, poenostavi in konvergira k Poissonovi porazdelitvi s parametrom T, ko gre N proti neskončnosti.

5.3. **Dokaz izreka 5.1.** Najprej dokažemo, da ima model enolično stacionarno porazdelitev, h kateri proces konvergira, ne glede na začetno porazdelitev in uporabimo simetrijo obrata časa, da pokažemo, da je ta porazdelitev enakomerno porazdeljena naključna spremenljivka na prostoru stanj $A_{N,M}$.
Prvi del izreka nato preprosto sledi iz tega, da računamo skupno število konfiguracij z M dolarji. Drugi del lahko izpeljemo iz prvega.
Za vsak $\xi : V \to \mathbb{N}$ in $x \in V$, naj bo

$$\xi^x(z) = \xi(z) + \mathbb{1}_{\{z=x\}}$$

konfiguracija dobljena iz ξ z dodanim dolarjem na vozlišče x. Ker je vsaka konfiguracija z M dolarji lahko dobljena iz konfiguracije z $M-1$ dolarji z dodanim enim dolarjem na določeno vozlišče, imamo

$$A_{N,M} = \{\xi^x : \xi \in A_{N,M-1} \text{ in } x \in V\},$$

kar bomo uporabljali skozi celoten dokaz. Prav tako velja

$$(\xi^x)^{\vec{xy}} = \xi^y \in A_{N,M} \text{ za vse } \xi \in A_{N,M-1} \text{ in } \{x,y\} \in E.$$

Da ima model enolično stacionarno porazdelitev, h kateri proces konvergira ne glede na začetno porazdelitev, dokažemo z naslednjo lemo.

Lema 5.5. *Model ima enolično stacionarno porazdelitev π in*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_{\xi_0}(\xi_t = \xi) = \pi(\xi) \text{ za vse konfiguracije } \xi, \xi_0 \in A_{N,M}.$$

Dokaz. Glavno je pokazati, da je diskretna Markovska veriga ireducibilna in aperiodična.
Ireducibilnost sledi iz dejstva, da je graf G povezan. Za vsak par vozlišč (x,y) tako obstaja pot

$$x = x_0, x_1, \dots, x_t = y, \text{ taka, da je } \{x_i, x_{i+1}\} \in E \text{ za vse } i = 0, 1, \dots, t-1.$$

V posebnem, za vse $\xi \in A_{N,M-1}$,

$$\begin{aligned} p_t(\xi^x, \xi^y) &= \mathbb{P}(\xi_t = \xi^y | \xi_0 = \xi^x) \\ &\geq p(\xi^{x_0}, \xi^{x_1}) p(\xi^{x_1}, \xi^{x_2}) \cdots p(\xi^{x_{n-1}}, \xi^{x_n}) \\ &= p(\xi^{x_0}, (\xi^{x_0})^{\vec{x_0 x_1}}) p(\xi^{x_1}, (\xi^{x_1})^{\vec{x_1 x_2}}) \cdots p(\xi^{x_{n-1}}(\xi^{x_{n-1}})^{\vec{x_{n-1} x_n}}) > 0 \end{aligned}$$

kaže, da konfiguraciji ξ^x in ξ^y komunicirata. Z indukcijo sklepamo, če dovolimo, da je $\xi \in A_{N,0}$ konfiguracija samih ničel in

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_M), (y_1, y_2, y_3, \dots, y_M) \in V^M,$$

da konfiguraciji

$$(\dots((\xi^{x_1})^{x_2})^{x_3} \dots)^{x_M} \text{ in } (\dots((\xi^{y_1})^{y_2})^{y_3} \dots)^{y_M}$$

tudi komunicirata. Ker so lahko vse konfiguracije iz $A_{N,M}$ dobljene iz konfiguracije samih ničel z dodajanjem M dolarjev, sklepamo, da vse konfiguracije komunicirajo, kar po definiciji 4.12 pomeni, da je proces ireducibilen.
Aperiodičnost. Za vsak $\xi \in A_{N,M}$ z $\xi(x) = 0$, je

$$\xi^{\vec{xy}} = \xi \text{ za vsak } \{x,y\} \in E.$$

V posebnem, za $\xi \in A_{N,M}$, tak da je $\xi(z) = 0$ za nek z,

$$p(\xi, \xi) = \frac{\sum_{z \in V} \deg(z) \mathbb{1}_{\{\xi(z)=0\}}}{2|E|} > 0,$$

kar nam pove, da imajo konfiguracije, ki imajo vsaj eno vozlišče z nič dolarji, periodo ena. Ker je proces ireducibilen, morajo imeti po trditvi 4.24 vse konfiguracije periodo ena. Iz definicije 4.25 sledi, da je proces aperiodičen. Ireducibilnost in dejstvo, da je prostor stanj $A_{N,M}$ končen, po izreku 4.18 implicirajo obstoj in enoličnost stacionarne porazdelitve π. Aperiodičnost prav tako pomeni, da ne glede na začetno konfiguracijo, verjetnost, da je proces v konfiguraciji ξ, konvergira k $\pi(\xi)$.

■

Naslednja lema nam pove, da je enolična stacionarna porazdelitev π enakomerna porazdelitev na prostoru stanj $A_{N,M}$.

Lema 5.6. *Imamo* $\pi \sim Enak(A_{N,M})$.

Dokaz. Odvisno od tega, ali se usmerjena povezava začne v vozlišču z nič dolarji ali ne, konfiguracija ostane nespremenjena ali pa je pridobljena iz konfiguracije prejšnjega koraka s premikom enega dolarja po usmerjeni povezavi. V enačbi to pomeni, če je prehodna verjetnost $p(\xi, \xi') > 0$, da imamo naslednji možnosti:

- $\xi = \xi'$ z $\xi(z) = 0$ za nek $z \in V$, v tem primeru
$$p(\xi, \xi') = p(\xi, \xi) = \frac{\sum_{z \in V} \deg(z) \mathbb{1}_{\{\xi(z)=0\}}}{2|E|} > 0,$$
- $\xi = \eta^x$ in $\xi' = \eta^y$ za nek $\eta \in A_{N,M-1}$ in $\{x, y\} \in E$, v tem primeru
$$p(\xi, \xi') = p(\eta^x, \eta^y) = \frac{1}{2|E|}.$$

Iz tega sledi

$$p(\xi, \xi') \neq 0 \text{ natanko tedaj, ko } p(\xi', \xi) \neq 0. \tag{17}$$

Prav tako, ko $p(\xi, \xi') \neq 0$ z $\xi \neq \xi'$ in $\pi \sim Enak(A_{N,M})$,
$$\pi(\xi) p(\xi, \xi') = \frac{1}{2|E||A_{N,M}|} = \pi(\xi') p(\xi', \xi).$$
Leva in desna stran sta trivialno enaki, kadar je $\xi = \xi'$, medtem ko iz enačbe (17) sledi, da velja enakost tudi, kadar je $p(\xi, \xi') = 0$. To pomeni, da je postopek časovno reverzibilen in da je enakomerna porazdelitev π res stacionarna porazdelitev, ker
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\pi(\xi_1 = \xi) &= \sum_{\xi' \in A_{N,M}} \pi(\xi') p(\xi', \xi) = \sum_{\xi' \in A_{N,M}} \pi(\xi) p(\xi, \xi') \\ &= \pi(\xi) \sum_{\xi' \in A_{N,M}} p(\xi, \xi') = \pi(\xi).\end{aligned}$$

■

Iz prejšnje leme sledi, da je
$$\pi(\xi) = \frac{1}{|A_{N,M}|} \text{ za vse } \xi \in A_{N,M}.$$
Za pridobitev bolj eksplicitnega izraza stacionarne porazdelitve, je dovolj, da izračunamo število konfiguracij. To se naredi v naslednji lemi.

Lema 5.7. *Za vsa pozitivna števila* $N \in \mathbb{N}$ *in* $M \in \mathbb{N}_0$ *je*
$$|A_{N,M}| = \binom{M + N - 1}{N - 1}.$$

Dokaz. Za $M = 0$ je trivialno. Naj bo $M > 0$. Pišemo $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ in za vsak $\xi \in A_{N,M}$, naj bo

$$\phi(\xi) = \{\xi(x_1) + 1, \xi(x_1) + \xi(x_2) + 2, \ldots, \xi(x_1) + \cdots + \xi(x_{N-1}) + N - 1\}.$$

To definira funkcijo $\phi : A_{N,M} \to B_{N,M}$ kjer

$$B_{N,M} = \text{ množica podmnožic iz } \{1, 2, \ldots, M + N - 1\} \text{ z } N - 1 \text{ elementi.}$$

Zdaj dokažemo, da je funkcija bijektivna.
Injektivnost. Naj bosta $\xi, \xi' \in A_{N,M}$ z $\phi(\xi) = \phi(\xi')$. Potem

$$\xi(x_i) = \xi'(x_i) \text{ za vse } i = 1, 2, \ldots, N - 1.$$

Ker obe konfiguraciji vsebujeta M dolarjev, imamo tudi

$$\xi(x_N) = M - \xi(x_1) - \cdots - \xi(x_{N-1}) = M - \xi'(x_1) - \cdots - \xi'(x_{N-1})$$

kar nam pove, da je $\xi = \xi'$ in ϕ je injektivna.
Surjektivnost. Naj bo $B \in B_{N,M}$ in pišemo

$$B = \{n_1, n_2, \ldots, n_{N-1}\} \text{ z } 1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{N-1} \leq M + N - 1.$$

Potem definiramo konfiguracijo $\xi : V \to \mathbb{N}$ kot

$$\xi(x_1) = \begin{cases} n_1 - 1 & \text{za } i = 1 \\ n_i - n_{i-1} - 1 & \text{za } i = 2, 3 \ldots, N - 1 \\ M + N - n_{N-1} - 1 & \text{za } i = N. \end{cases}$$

Preprosto lahko preverimo, da je $\xi \in A_{N,M}$ in $\phi(\xi) = B$, kar nam da surjektivnost.
Sklep: Imamo

$$|A_{N,M}| = |B_{N,M}| = \binom{M + N - 1}{N - 1},$$

kjer prvi del sledi iz bijektivnosti ϕ, medtem ko je drugi del očiten iz definicije množice $B_{N,M}$.

■

Z uporabo lem lahko sedaj dokažemo Izrek 5.1.
Dokaz izreka 5.1. Iz lem 5.2 in 5.3 sledi

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\xi_t(x) = d) = \pi(\{\xi \in A_{N,M} : \xi(x) = d\})$$

(18) $$= \frac{|\{\xi \in A_{N,M} : \xi(x) = d\}|}{|A_{N,M}|}$$

za vse $(x, d) \in V \times \{0, 1, \ldots, M\}$, ne glede na začetno konfiguracijo. Poleg tega je število konfiguracij z natanko d dolarjev na vozlišču x podano z

(19) $$|\{\xi \in A_{N,M} : \xi(x) = d\}| = |A_{N-1,M-d}|.$$

Upoštevanje enačb (18) in (19) ter uporaba leme 5.4 nam da

(20) $$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\xi_t(x) = d) = \frac{|A_{N-1,M-d}|}{|A_{N,M}|} = \frac{\binom{M+N-d-2}{N-2}}{\binom{M+N-1}{N-1}},$$

kar dokaže prvi del izreka. Da dokažemo še drugi del izreka, najprej razpišemo desno stran enačbe (20), kot

$$\begin{aligned}
&\frac{(M+N-d-2)!}{(N-2)!(M-d)!}\frac{(N-1)!M!}{(M+N-1)!} \\
&= \frac{(N-1)!}{(N-2)!}\frac{M!}{(M-d)!}\frac{(M+N-d-2)!}{(M+N-1)!} \\
&= \frac{M(M-1)\cdots(M-d+1)(N-1)}{(M+N-1)(M+N-2)\cdots(M+N-d-1)}.
\end{aligned}$$

Naj bo $T = \frac{M}{N}$ povprečno število dolarjev na vozlišče (po analogiji s klasično fiziko je to denarna temperatura). Pošljimo $N, M \to \infty$, pri čemer držimo T konstanten. Ob upoštevanju, da sta števec in imenovalec produkt $(d+1)$ izrazov, za fiksni $d \in \mathbb{N}$, dobimo

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(\xi_t(x)=d) = \lim_{N\to\infty}\frac{NM^d}{(M+N)^{d+1}} \\
&= \left(\frac{1}{T+1}\right)\left(\frac{T}{T+1}\right)^d = \left(\frac{1}{T+1}\right)e^{-d\ln(1+\frac{1}{T})}.
\end{aligned}$$

V posebnem je za velike denarne temperature

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(\xi_t(x)=d) = \left(\frac{1}{T}+o\left(\frac{1}{T}\right)\right)e^{-d(\frac{1}{T}+o(\frac{1}{T}))} = \frac{e^{\frac{-d}{T}}}{T}+o\left(\frac{1}{T}\right),$$

kar nam pove, da se vsaj, kadar je temperatura visoka in v mejah velikega števila prebivalstva, število dolarjev v danem vozlišču v ravnotežju dobro približa eksponentno porazdeljeni naključni spremenljivki s parametrom $\frac{1}{T}$. S tem je dokaz zaključen.

■

5.4. **Dokaz izreka 5.2.** Za dokaz izreka, ki se osredotoča na drugi model, začnemo z dokazom obstoja in enoličnosti stacionarne porazdelitve. Ker proces ni nujno aperiodičen, imamo s.g. samo konvergenco deleža časa prebitega v posameznem stanju, namesto konvergence prehodnih verjetnosti. Za model 2 je stacionarna porazdelitev multinominalno porazdeljena slučajna spremenljivka, ki jo lahko uganemo iz stacionarne porazdelitve simetričnega naključnega sprehoda na povezanem grafu G.

Lema 5.8. *Model 2 ima univerzalno stacionarno porazdelitev π in*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{1}_{\{\xi_s(x)=d\}} = \sum_{\xi\in A_{N,M}}\pi(\xi)\mathbb{1}_{\{\xi(x)=d\}}\ \mathbb{P}_{\xi_0}-s.g.\ \text{za vse}\ \xi_0\in A_{N,M}. \tag{21}$$

Dokaz. Spet privzamemo, da je graf G povezan in podobno, kot pri dokazu leme 5.3, dokažemo, da je proces ireducibilen. Ker je prostor stanj končen, obstaja enolična stacionarna porazdelitev π in je po izreku 4.13

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{0}^{t-1}f(\xi_s) = \sum_{\xi\in A_{N,M}}f(\xi)\pi(\xi)\ \mathbb{P}_{\xi_0}-s.g.\ \text{za vse}\ \xi_0\in A_{N,M}$$

za vse omejene funkcije $f : A_{N,M} \to \mathbb{R}$. Če vzamemo

$$f(\xi) = \mathbb{1}_{\{\xi(x)=d\}}\ \text{za vse fiksne pare}\ (x,d)\in V\times\{0,1,\ldots,M\}$$

dobimo željeno enačbo.

$\blacksquare$

Opomba 5.9. Ko je graf aperiodičen, imamo tudi konvergenco

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_{\xi_o}(\xi_s(x) = d) = \sum_{\xi \in A_{N,M}} \pi(\xi)\mathbb{1}_{\{\xi(x)=d\}} \text{ za vse } \xi_0 \in A_{N,M}.$$

Sedaj moramo najti ekspliciten zapis porazdelitve π. Če gledamo na denar, ki kroži v sistemu, kot množico M eno-dolarskih plačil, potem proces (X_t), ki beleži lokacijo določenega plačila

- ostane pri miru na vsakem koraku z verjetnostjo $1 - \frac{1}{M}$ in
- skoči glede na simetrični naključni sprehod na grafu G z verjetnostjo $\frac{1}{M}$.

Ta proces je obrnljiv s stacionarno porazdelitvijo

$$\bar{\pi}(w) = \frac{\deg(w)}{\sum_{z\in V}\deg(z)} \quad \text{za vse} \quad w \in V.$$

Dober kandidat za stacionarno porazdelitev π je porazdelitev, v kateri je vsako plačilo neodvisno na vozlišču w z verjetnostjo $\bar{\pi}(w)$

$$\pi(\xi) = \binom{M}{\xi(1),\ldots,\xi(N)} \prod_{w\in V} (\bar{\pi}(w))^{\xi(w)}, \quad \text{kjer je} \quad \bar{\pi}(w) = \frac{\deg(w)}{\sum_{z\in V}\deg(z)} \tag{22}$$

za vse $\xi \in A_{N,M}$. To je dokazano v naslednji lemi.

Lema 5.10. *Porazdelitev π enačbe (22) je stacionarna za model 2.*

Dokaz. Najprej opazimo, da je za vse $\eta \in A_{N,M-1}$ in $\{x,y\} \in E$

$$p(\eta^x,\eta^y) = \mathbb{P}(\xi_{t+1} = \eta^y | \xi_t = \eta^x) = \frac{\eta^x(x)}{M\deg(x)} = \frac{\eta(x)+1}{M\deg(x)}.$$

Poleg tega je za vse $\eta \in A_{N,M-1}$ in $x \in V$

$$\pi(\eta^x) = \binom{M}{\eta^x(1),\ldots,\eta^x(N)} \prod_{w\in V} (\bar{\pi}(w))^{\eta^x(w)} =$$
$$\binom{M}{\eta(1),\ldots,\eta(N)} \left(\frac{1}{\eta(x)+1}\right) \left(\prod_{w\in V} (\bar{\pi}(w))^{\eta(w)}\right) \bar{\pi}(x).$$

Če to združimo, opazimo, da je za vsak $\{x,y\} \in E$

$$\frac{\pi(\eta^x)}{\pi(\eta^y)} = \frac{\eta(y)+1}{\eta(x)+1}\frac{\bar{\pi}(x)}{\bar{\pi}(y)} = \frac{\eta(y)+1}{\eta(x)+1}\frac{\deg(x)}{\deg(y)} = \frac{p(\eta^y,\eta^x)}{p(\eta^x,\eta^y)};$$

trivialno pa je

$$p(\xi,\xi') = 0 \text{ za vse } (\xi,\xi') \notin \{(\eta^x,\eta^y) : \eta \in A_{N,M-1} \text{ in } \{x,y\} \in E\}.$$

To nam pove, da ima proces simetrijo obrata časa in, kot smo dokazali v lemi 5.3, je porazdelitev dobljena v enačbi (22) res stacionarna porazdelitev za model 2.

$\blacksquare$

Z uporabo zgornjih lem lahko zdaj dokažemo izrek 5.2.

Dokaz izreka 5.2 Fiksiramo vozlišče $x \in V$ in zapišemo

$$V = \{x, w_1, w_2, \ldots, w_{N-1}\}.$$

Z uporabo leme 5.7 je za vsak $\xi \in A_{N,M}$, tak da je $\xi(x) = d$

$$
\begin{aligned}
\pi(\xi) &= \binom{M}{d, \xi(w_1), \ldots, \xi(w_{N-1})} \left(\prod_{w \neq x} (\bar{\pi}(w))^{\xi(w)} \right) (\bar{\pi}(x))^d \\
&= \binom{M}{d} \binom{M-d}{\xi(w_1), \ldots, \xi(w_{N-1})} \left(\prod_{i=1}^{N-1} (\bar{\pi}(w_i))^{\xi(w_i)} \right) (\bar{\pi}(x))^d.
\end{aligned}
$$

Če upoštevamo še multinomski izrek, desna stran enačbe (21) postane

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\xi \in A_{N,M}} \binom{M}{d} \binom{M-d}{\xi(w_1), \ldots, \xi(w_{N-1})} \left(\prod_{i=1}^{N-1} (\bar{\pi}(w_i))^{\xi(w_i)}) (\bar{\pi}(x) \right)^d \mathbb{1}_{\{\xi(x)=d\}} \\
&= \binom{M}{d} (\bar{\pi}(x))^d \sum_{\xi(w_1)+\cdots+\xi(w_{N-1})=M-d} \binom{M-d}{\xi(w_1), \ldots, \xi(w_{N-1})} \left(\prod_{i=1}^{N-1} (\bar{\pi}(w_i))^{\xi(w_i)} \right) \\
&= \binom{M}{d} (\bar{\pi}(x))^d \left(\sum_{i=1}^{N-1} \bar{\pi}(w_i) \right)^{M-d} = \binom{M}{d} (\bar{\pi}(x))^d (1 - \bar{\pi}(x))^{M-d}.
\end{aligned}
$$

Spomnimo se enačbe (22) in z uporabo leme 5.6 dobimo

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{1}_{\{\xi_s(x)=d\}} &= \binom{M}{d} (\bar{\pi}(x))^d (1 - \bar{\pi}(x))^{M-d} \\
&= \binom{M}{d} \left(\frac{\deg(x)}{\sum_{z \in V} \deg(z)} \right)^d \left(1 - \frac{\deg(x)}{\sum_{z \in V} \deg(z)} \right)^{M-d}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{P}_{\xi_o}$-s.g. za vse $\xi_0 \in A_{N,M}$. S tem je dokazan prvi del izreka. Za dokaz drugega dela uporabimo, da je za vsak regularen graf z N vozlišči

$$
\bar{\pi}(w) = \frac{\deg(w)}{\sum_{z \in V} \deg(z)} = \frac{1}{N} \text{ za vsak } w \in V.
$$

Če gledamo limito, ko gresta $N, m \to \infty$ in držimo konstanten $T = \frac{M}{N}$, dobimo

$$
\begin{aligned}
\lim_{N \to \infty} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{1}_{\{\xi_s(x)=d\}} &= \lim_{N \to \infty} \binom{NT}{d} \left(\frac{1}{N} \right)^d \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{NT-d} \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(\frac{NT(NT-1)\cdots(NT-d+1)}{d! N^d} \right) \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{NT} = \frac{T^d}{d!} e^{-T}.
\end{aligned}
$$

S tem je naš dokaz zaključen.

∎

6. Zaključek

Videli smo, da za določene tipe modelov porazdelitev denarja res konvergira k Boltzmann-Gibbsovem zakonu. Pri vseh omenjenih modelih smo predpostavili nekaj naključnosti pri izmenjavi denarja. V tradicionalnejših ekonomskih študijah sicer agenti denar ne izmenjajo naključno, ampak sledijo strategijam, kot je maksimizacija funkcije koristnosti. Koncept ravnotežja v takih modelih je podoben mehanskemu ravnotežju v fiziki, kar dosežemo z minimiziranjem akcije. Vendar pa je statistično ravnotežje za velike skupine pomembnejši koncept. Kadar veliko raznovrstnih agentov medsebojno vpliva in zapravljajo različne količine denarja, od zelo malih do zelo velikih, je izmenjavo denarja smiselno modelirati kot da je slučajna. Seveda ne trdimo, da je realno gospodarstvo v ravnotežju (tudi velika večina fizičnega sveta okoli nas ni nikoli v ravnotežju), je pa statistično ravnovesje zelo koristna izhodiščna točka za preučevanje nestacionarnih pojavov. Boltzmann-Gibbsov zakon je postal motivacija tudi za preučevanje porazdelitev bogastva in dohodka. Nadaljnje študije (bralec jih lahko najde v [3]) so razkrile podrobnejšo sliko dvorazredne porazdelitve v družbi. Čeprav so družbeni razredi v politični ekonomiji znani že od Karla Marxa, je spoznanje, da jih opisujemo s preprostimi matematičnimi porazdelitvami povsem novo.

Uporaba metod fizike v zadevah ekonomije in financ morda ni pričakovana. Navsezadnje je ekonomija znanost, ki se ukvarja s posamezniki in njihovih interakcijami in v tem smislu bolj spominja na psihologijo. Pa vendar je kvantitativna znanost tista, ki preučuje različne agregate (rast BDP, stopnje brezposelnosti, inflacija, denarni agregati itd.) velikega števila posameznikov. Pritoki novih idej iz drugega področja ponavadi ne rešijo starih problemov ampak pripomorejo pri postavljanju novih. Lahko bi trdili, da se veliko nesporazumov med ekonomisti in fiziki zgodi ne zato, ker se razlikujejo odgovori, ampak zato, ker odgovarjajo na različna vprašanja. Dejstvo pa je, da v ekonomiji slog političnega ekonomista ter natančnejši in bolj tehnični pristop fizika ne bosta dobro funkcionirala, če se ne upoštevata.

Slovar strokovnih izrazov

Boltzmann-Gibbs law Boltzmann-Gibbsov zakon
conservation law ohranitveni zakon
deviations odstopanja
econophysics ekonofizika – raziskovalno področje
entropy entropija
Markov chain Markovska veriga
normalizing constant normirna konstanta
probability distribution verjetnostna porazdelitev
stationary distribution stacionarna porazdelitev
statistical mechanics statistična mehanika
time-reversal symmetry simetrija obrata časa
transition matrix prehodna matrika
transition probability prehodna verjetnost

Literatura

[1] *Boltzmann distribution*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 12. 3. 2020], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_distribution.

[2] Vicztor M. Yakovenko in A. Drăgulescu. *Statistical mechanics of money*, verzija 4. 8. 2000, [ogled 1. 3. 2020], dostopno na https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0001432.pdf.

[3] Vicztor M. Yakovenko in J. Barkley Rosser, Jr. *Colloquium: Statistical Mechanics of Money, Wealth and Income*, verzija 24. 12. 2009, [ogled 1. 3. 2020], dostopno na https://arxiv.org/pdf/0905.1518.pdf.

[4] James R. Norris, *Markov Chains*, v: Cambridge University press, verzija "9. 2004, [15. 3. 2020], dostopno na www.statslab.cam.ac.uk/~james/Markov/.

[5] N. Lanchier *Rigorous proof of the Boltzmann-Gibbs distribution of money on connected graphs*, verzija 2017, [ogled 5. 5. 2020], dostopno na https://arxiv.org/pdf/1701.00889.pdf.

[6] M. Vidmar, *Statistical mechanics of money, wealth and income*, seminar, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2009.

[7] *Econophysics*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 21. 6. 2020], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Econophysics.