This postprint is published in:
Sibirskij matematičeskij žurnal, Volume 61, Number 2, 2020, 322-329
DOI: 10.33048/smzh.2020.61.207

Теория формальных языков и тождества неассоциативных алгебр

Зайцев Михаил Владимирович, Реповш Душан Душанович

В статье рассматриваются числовые характеристики тождеств неассоциативных алгебр. Предложен метод построения по двоичному слову w алгебры $A(w)$ с заданными свойствами функции роста коразмерностей. При этом рост коразмерностей алгебры $A(w)$ полностью определяется комбинаторной сложностью языка подслов слова w.

В работе используются результаты теории формальнных языков для решения целого ряда проблем PI-теории, т.е. теории тождественных соотношений в алгебрах. Комбинаторные свойства языков, состоящих из подслов бесконечного слова, неоднократно использовались для построения различных примеров асимптотического поведения количественных характеристик, связанных с тождествами (см., например, [4, 5]). Альтернативная конструкция построения алгебры по бесконечному двоичному слову была предложена в работе [11]. Мы модернизируем подход работы [11], что позволяет нам связать числовые инварианты тождеств построенной алгебры с комбинаторной сложностью языка, задаваемого изначальным словом.

Сначала напомним необходимые понятия из PI-теории. Пусть Φ — поле нулевой характеристики и A — некоторая (не обязательно ассоциативная) алгебра над Φ. Обозначим через $\Phi\{X\}$ абсолютно свободную алгебру над Φ с бесконечным множеством порождающих X. Тогда совокупность всех тождеств алгебры A образует двусторонний идеал $\mathrm{Id(A)}$ в $\Phi\{X\}$. Хорошо известно, что идеал $\mathrm{Id(A)}$ полностью определяется своими полилинейными компонентами, т.е. совокупностью подпространств $\mathrm{Id(A)} \cap \mathrm{P_n}, \mathrm{n} = 1, 2, \ldots$, где P_n — подпространство полилинейных полиномов от $x_1, \ldots, x_n$ в $\Phi\{X\}$. Все необходимые определения и понятия из PI-теории можно найти в [8]. Обозначим

$$P_n(A) = \frac{P_n}{\mathrm{Id(A)} \cap \mathrm{P_n}}, \quad c_n(A) = \dim P_n(A). \tag{1}$$

Величина $c_n(A)$ называется n-й коразмерностью алгебры A. В работе [12] было установлено, что последовательность $\{c_n(A)\}$ экспоненциально ограничена для любой ассциативной PI-алгебры. В конце 80-х годов прошлого века Амицур выдвинул гипотезу, что последовательность $\sqrt[n]{c_n(A)}$ имеет предел, который является неотрицательным целым числом. Позже Регев выдвинул более сильное предположение, что $c_n(A) \sim Cn^t d^n$, где C — константа, соотношение $f(n) \sim g(n)$ означает, что $\lim_{n\to\infty}(f(n)/g(n)) = 1$. Более того, число d должно быть целым, а t — полуцелым. Гипотеза Регева означает, что сущесвуют три предела

$$d = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}\ , \ t = \lim_{n\to\infty} \log_n \frac{c_n(A)}{d^n}\ , \quad C = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(A)}{n^t d^n}\ , \tag{2}$$

которые можно назвать 1-м, 2-м и 3-м приближениями соответственно. Число $exp(A) = d$ при этом называется PI-экспонентой алгебры A. Отметим, что для ассоциативных алгебр гипотеза Регева в 1-м и 2-м приближениях подтвердилась [2, 6, 7, 9], а вопрос о третьем приближении до сих пор открыт. Более того, оказалось, что в случае $exp(A) = 1$ последовательность $\{c_n(A)\}$ полиномиально ограничена, т.е. не может иметь промежуточный рост.

В общем неассоциативном случае для любого вещественного $\alpha > 1$ есть примеры алгебр, у которых $c_n(A)$ растет асимптотически как α^n [5]. Кроме того, есть примеры, когда последовательность $\{c_n(A)\}$ экспоненциально ограничена, но первого предела из (2) не существует [14]. Во втором приближении в случае отсутствия ассоциативности гипотеза Регева тоже не подтвердилась [10]. Есть и примеры алгебр с промежуточным ростом последовательности коразмерностей [4]. Но во всех этих примерах $c_n(A)$ асимптотически растет как n^{n^β} с $0 < \beta < 1$.

Основная цель настоящей работы — показать, что класс функций промежуточного роста, реализуемых в виде последовательностей $\{c_n(A)\}$, гораздо шире и что в третьем приближении (при условии существования 1-го и 2-го пределов в (2) гипотеза Регева также неверна.

Перейдем к реализации основной конструкции, т.е. к построению алгебры по заданному бесконечному двоичному слову. Напомним, что формальным языком, задаваемым словом w, называется совокупность всех конечных подслов w, а комбинаторной сложностью этого языка и самого слова w называется функция $Comp_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $Comp_w(n)$ — число различных подслов длины n в w.

Пусть $w = w_1w_2\ldots$ — бесконечное слово в алфавите $\{0; 1\}$. Обозначим через $A(w)$ алгебру, порожденную двумя элементами a и b_0, с базисом $\{a, b_0, b_1, \ldots\}$, умножение в котором задается следующим образом. Если $w_1 = 1$, то $b_1 = ab_0$, если же $w_1 = 0$, то $b_0a = b_1$. Пусть $b_1, \ldots, b_{k-1}$ уже определены. Тогда

$$b_k = \begin{cases} ab_{k-1}, & \text{если} \quad w_k = 1, \\ b_{k-1}a, & \text{если} \quad w_k = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Все остальные произведения базисных элементов равны нулю. При любом w алгебра $A(w)$ удовлетворяет тождеству

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0, \tag{4}$$

поэтому коразмерности можно считать не в $\Phi\{X\}$, а в свободной метабелевой алгебре $M\{X\}$, т.е. в относительно свободной алгебре многообразия, заданного тождеством (4).

Для элемента x метабелевой алгебры обозначим через R_x и L_x операторы правого и левого умножения на x соответственно. И тот и другой операторы будем писать справа, т.е. $yR_x = yx, yL_x = xy$. Для произвольного двоичного слова $u = u_1 \ldots u_m$ и для $y, x_1, \ldots, x_m \in X \subset M\{X\}$ обозначим через $yu(x_1, \ldots, x_m)$ одночлен $yT_1 \cdots T_m$, где $T_i = R_{x_i}$, если $u_i = 0$, либо $T_i = L_i$, если $u_i = 1$. Заметим, что любой полилинейный одночлен от $x_1, \ldots, x_n$ в $M\{X\}$ однозначно записывается в виде

$$(x_ix_j)u(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-2}}), \tag{5}$$

где u — двоичное слово длины $n-2$, а $\{i_1,\ldots,i_{n-2}\}=\{1,\ldots,n\}\setminus\{i,j\}$. Однозначность вытекает из следующей леммы.

Лемма 1 *Элемены вида (5) линейно независимы.*

Доказательство. Для бесконечного двоичного слова w наряду с алгеброй $A(w)$ рассмотрим алгебру $C(w)$ с базисом $\{c_0,c_1,\ldots,c_m,\cdots\}$ и таблицей умножения

$$c_k=\begin{cases} c_kc_{k-1}, & \text{если} \quad w_k=1,\\ c_{k-1}c_k, & \text{если} \quad w_k=0.\end{cases} \tag{6}$$

для всех $k\geq 1$. Все остальные произведения базисных элементов считаем равными нулю. Зафиксируем элемент z вида (5) и рассмотрим слово w, у которого начальное подслово длины $n-1$ равно $1u$. Тогда подстановка φ, для которой

$$\varphi(x_i)=c_1,\varphi(x_j)=c_0,\varphi(x_{i_1})=c_2,\ldots,\varphi(x_{i_{n-2}})=c_{n-1}, \tag{7}$$

дает нам ненулевое значение на z:

$$\varphi(z)=\varphi((x_ix_j)u(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-2}}))=c_{n-1}, \tag{8}$$

тогда как

$$\varphi((x_kx_l)u'(x_{t_1},\ldots,x_{t_{n-2}}))=0, \tag{9}$$

если $(k,l,t_1,\ldots,t_{n-2})\neq(i,j,i_1,\ldots,i_{n-2})$, либо $u\neq u'$. □

Подслово u бесконечного слова w будем называть собственным, если хотя бы одно из его вхождений в w начинается с k-й позиции, $k\geq 3$.

Лемма 2 *Полилинейный одночлен $(y_1y_2)u(x_1,\ldots,x_m)$ не является тождеством алгебры $A(w)$ тогда и только тогда, когда u — собственное подслово в w.*

Доказательство. Если $u=w_i\ldots w_{i+m-1}$ и $i\geq 3$, то

$$b_{i-2}T_au(a,\ldots,a)=b_{i+m-1}\neq 0, \tag{10}$$

где $T_a=R_a$ при $w_{i-1}=0$, либо $T_a=L_a$ при $w_{i-1}=1$. Еси же u не является собственным подсловом в w, то любая подстановка базисных элементов $A(w)$ вместо $y_1,y_2,x_1,\ldots,x_m$ дает нулевое значение. □

Лемма 3 *Для любого двоичного слова u и для любой подстановки $\sigma\in S_m$ в $A(w)$ выполняется тождество*

$$(y_1y_2)u(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})-(y_1y_2)u(x_1,\ldots,x_m)\equiv 0. \tag{11}$$

Доказательство. Если u не является собственным подсловом в w, то оба одночлена в (11) тождественно равны нулю в $A(w)$ согласно лемме 2. Если же u — собственное подслово в w, то каждый из одночленов в (11) может принимать ненулевое значение только при $x_1=\cdots=x_m=a$. □

Разделим собственные подслова в w на две категории. Подслово u называется подсловом 1-го типа, если оно встречается в w только после нуля, либо только после единицы. Если же u встречается в w и после 0 и после 1, то назовем его подсловом 2-го типа.

Лемма 4 *Пусть u — подслово 1-го типа в w. Если u следует всегда после нуля, то в $A(w)$ выполняются тождества*

$$(x_i x_j)u(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-2}}) \equiv (x_i x_1)u(x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{12}$$

при $i > 1$ и $\{i_1, \ldots, i_{n-2}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$, а также

$$(x_1 x_i)u(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-2}}) \equiv (x_1 x_2)u(x_3, \ldots, x_n), \tag{13}$$

где $\{i_1, \ldots, i_{n-2}\} = \{2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Если u следует всегда после единицы, то в $A(w)$ выполняются тождества

$$(x_j x_i)u(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-2}}) \equiv (x_1 x_i)u(x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{14}$$

при $i > 1$ и $\{i_1, \ldots, i_{n-2}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$, а также

$$(x_i x_1)u(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-2}}) \equiv (x_2 x_1)u(x_3, \ldots, x_n), \tag{15}$$

где $\{i_1, \ldots, i_{n-2}\} = \{2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. При этом элементы из правой части (12), $2 \leq i \leq n$, и элелент из правой части (13) линейно независимы. Такая же независимость выполняетя для правых частей (14), (15).

Доказательство. Докажем соотношение (12). Пусть $\varphi : X \to A(w)$ — подстановка базисных элементов $A(w)$ вместо порождающих. В силу тождества (4) и левая и правая части (12) переходят в ноль, если хотя бы два порождающих переходят в $\{b_0, b_1, \ldots\}$. Если $\varphi(x_i) = a$, то $\varphi(x_i x_j) = 0$ для всех $j \neq i$, т.к. слову u всегда предшествует ноль в w. Значение φ на правой и левой частях (12) может быть ненулевым только если $\varphi(x_i) = b_k$ и $\varphi(x_s) = a$ для всех остальных s. Но при этом обе части (12) принимают значение b_{k+n-1}, что доказывает тождество (12). Соотношения (13), (14), (15) доказываются аналогично.

Покажем, что одночлены $f_1 = (x_1 x_2)u(x_3, \ldots, x_n)$ и

$$f_i = (x_i x_1)u(x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),\ 2 \leq i \leq n, \tag{16}$$

линейно независимы по модулю идеала тождеств алгебры $A(w)$, если u всегда следует за нулем в w. Предположим, что $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n \equiv 0$ — тождество. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда для любого вхождения u в w существует такое $k \geq 0$, что подстановка

$$\varphi(x_1) = b_k, \varphi(x_2) = \cdots = \varphi(x_n) = a \tag{17}$$

дает значения

$$\varphi(f_1) = b_{k+n-1}, \varphi(f_2) = \cdots = \varphi(f_n) = 0, \tag{18}$$

а это противоречит предположению что f — тождество нашей алгебры. Аналогично, для любого $i > 1$ можно найти подстановку φ, для которой $\varphi(f_i) \neq 0$, тогда как $\varphi(f_j) = 0$ для всех $j \neq i$. Независимость правых частей (14) и (15) доказывается аналогично. □

Лемма 5 *Пусть u — подслово 2-го типа в w. Тогда линейная оболочка одночленов*

$$f_{ij} = (x_i x_j)u(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-2}}), i \neq j, l_1 < \dots < l_{n-2}, \{l_1, \dots, l_{n-2}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\} \tag{19}$$

в $M\{X\}$ по модулю тождеств алгебры $A(w)$ имеет размерность r_n, где r_n — ранг системы $2n$ уравнений на $n^2 - n$ неизвестных $z_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq n$,

$$\sum_i z_{ij} = 0, \qquad 1 \leq j \leq n, \qquad \sum_j z_{ij} = 0, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{20}$$

Доказательство. Покажем, что линейная комбинация $f = \sum_{i,j} \lambda_{ij} f_{ij}$ — тождество $A(w)$ тогда и только тогда, когда набор коэффициентов $\{\lambda_{ij}\}$ является решением системы (20). Пусть сначала одно из равенств не выполняется, например, $\lambda = \lambda_{i1} + \dots + \lambda_{in} \neq 0$. По определению u в w найдется начальное подслово вида $w_1 \dots w_{k+1}u$, в котором $w_{k+1} = 0$, а $w_{k+2} \dots w_{k+n-1} = u$. Обозначим $w_1 \dots w_k$ через v. Тогда по определению умножения в $A(w)$ имеем:

$$b_0 v(a, \dots, a) a u(a, \dots, a) = b_{k+n-1}. \tag{21}$$

Рассмотрим подстановку $\varphi : \varphi(x_i) = b_k, \varphi(x_t) = a$ для всех $t \neq i$. Тогда

$$\varphi((x_i x_j)u(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-2}})) = b_{k+n-1} \tag{22}$$

для любого $j \neq i$, а $\varphi(f) = \lambda b_{k+n-1} \neq 0$. Аналогично, $\lambda_{1j} f_{1j} + \dots + \lambda_{nj} f_{nj}$ не является тождеством, если $\lambda_{1j} + \dots + \lambda_{nj} \neq 0$.

Теперь покажем, что $f \in \mathrm{Id(A(w))}$, если $\{\lambda_{ij}\}$ — решение системы (20). Значения всех одночленов f_{ij} равны нулю при любой подстановке φ, у которой среди $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ нет ни одного базиисного вектора b_k, либо не менее двух b_r, b_m. Предположим, что $\varphi(x_i) = b_k, \varphi(x_j) = a$ для всех $i \neq j$. Пусть снова $u = w_{k+2} \cdots w_{k+n-1}$. Если $w_{k+1} = 0$ в слове w, то $b_k a = b_{k+1}, a b_k = 0$. Поэтому

$$\varphi(x_i x_1) = \ldots = \varphi(x_i x_n) = b_k a = b_{k+1} \tag{23}$$

и $\varphi(f_{ij}) = b_{k+n-1}$ для всех $j \neq i$. В то же время $\varphi(f_{rt}) = 0$ при $r \neq i$. Следовательно,

$$\varphi(f) = (\sum_j \lambda_{ij}) b_{k+n-1} = 0. \tag{24}$$

Аналогично, если $w_{k+1} = 1$, то

$$\varphi(x_1 x_i) = \ldots = \varphi(x_n x_i) = a b_k = b_{k+1} \tag{25}$$

и

$$\varphi(f) = (\sum_j \lambda_{ji}) b_{k+n-1} = 0. \tag{26}$$

Пространство, порожденное всеми f_{ij} из (19) в $M\{X\}$, имеет размерность $n^2 - n$. Их линейные комбинации, являющиеся тождествами $A(w)$, образуют пространство размерности $n^2 - n - r_n$, следовательно, коразмерность его пересечения с $\mathrm{Id(A(w))}$ и есть r_n. □

Замечание 1 *Несложным упражнением из линейной алгебры является доказательство того, что* $r_n = 2n - 1$.

Теорема 1 *Для алгебры* $A(w)$ n*-я коразмерность при* $n \geq 3$ *равна*

$$c_n(A(w)) = k^{(1)}_{n-2}n + k^{(2)}_{n-2}(2n-1), \tag{27}$$

где $k^{(1)}_m, k^{(2)}_m$ *— количество подслов 1-го и 2-го типов длины* m *в* w. *В частности,*

$$Comp_{w*}(n-2) \leq c_n(A(w)) \leq 2Comp_{w*}(n-2), \tag{28}$$

где $w* = w_3w_4\ldots$.

Доказательство. Обозначим через $P_{n,u}$ линейную оболочку в $M\{X\}$ всех одночленов (5) для любого двоичного слова u длины $n-2$. Тогда

$$P_n(M\{X\}) = \bigoplus_{|u|=n-2} P_{n,u}. \tag{29}$$

Из леммы 2 следует, что по модулю идеала Id(A(w)) пространство $P_n(M\{X\})$ содержит лишь те слагаемые из (29), у которых u — собственные подслова в w. Пусть $u_1, \ldots, u_t$ — все собственные подслова длины $n-2$, и $f_1 \in P_{n,u_1}, \ldots, f_t \in P_{n,u_t}$. Нетрудно заметить, что если $f_1 + \cdots + f_t$ — тождество $A(w)$, то и все $f_1, \ldots, f_t$ — тоже тождества. Теперь соотношение (27) следует из лемм 3, 4, 5, а (27) следует из очевидного соотношения $k^{(1)}_{n-2} + k^{(2)}_{n-2} = Comp_{w*}(n-2)$. $\square$

Теорема 1 позволяет существенно расширить класс алгебр с промежуточным ростом коразмерностей. Например, в работе [3] для любой функции $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такой, что

(i) $\varphi(t) >> \log t$;

(ii) $\varphi(t)$ диффернцируема на $(0, \infty)$;

(iii) $\varphi'(t) << t^{-\beta}$ для некоторой константы $\beta > 0$;

(iv) φ' — убывающая функция

существует двоичное слово u, для которого $\log Comp_u(n) \sim \varphi(n)$. Здесь соотношение $f(t) << g(t)$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(f(t)/g(t)) = 0, \tag{30}$$

а под log подразумевается двоичный логарифм. С учетом теоремы 1 получаем следующую серию примеров.

Теорема 2 *Для любой функции* $\varphi(t)$, *удовлетворяющей условиям (i) - (iv), существует алгебра* A, *для которой* $c_n(A) \sim 2^{\varphi(n)}$. $\square$

Новый класс функций промежуточного роста, реализуемых как рост коразмерностей, включает в себя, например, все функции $a^{\sqrt{n}}, a > 1$. Более экзотический пример, приведенный в [3], соответствует функции

$$\varphi(t) = (t+10)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos(\ln\ln(t+1))}, \tag{31}$$

которая очень медленно осциллирует между $n^{1/4}$ и $n^{3/4}$.

Опираясь на другие результаты теории формальных языков можно построить примеры алгебр и с более резкими колебаниями функции коразмерностей (см. [1, теорема 9]).

Теорема 3 *Существует алгебра A, для которой можно выбрать возрастающую последовательность $n_k, k = 1, 2, \ldots$, так, что*

(a) $c_{n_k}(A) < n_k + \ln\ln n_k$, *если k нечетно,*

(b) $c_{n_k} > 2^{\frac{n_k}{\ln\ln n_k}}$, *если k четно.* □

Теорема 1 позволяет построить пример алгебры, для которой существуют 1-й и 2-й пределы (2), но отсутсвует 3-й предел, т.е. опровергает гипотезу Регева в 3-м приближении. Для этого рассмотрим язык E_0, состоящий из всех слов в двухбуквенном алфивите $\{a, b\}$, не содержащих подслов a^2, b^4, ab^2a.

В работе [13] вычислена комбинаторная сложность языка E_0:

$$Comp_{E_0} = \begin{cases} 2F_{k+2}, & \text{если} \quad n = 2k, \\ F_{k+4}, & \text{если} \quad n = 2k+1, \end{cases} \tag{32}$$

где F_m–m-е число Фибоначчи. Построим слово w, у которого язык всех подслов совпадает с E_0. Для этого выпишем последовательно все слова из E_0 длины 1, затем длины 2, и т.д. Кроме того, слова с началом ba повторим дважды.

Далее, чтобы избежать появления запрещенных подслов, вставим при необходимости между соседними словами промежуточные слова длины не более 3-х. Например, между a и b^2a можно вставить b, а между ab и ba–a или ab^2. Более того, так как слова с префиксом ba встречаются дважды, можно сделать дополнительные вставки таким образом, чтобы в одном случае такому слову v предшествовала буква a, а в другом b.

Это возможно, поскольку между a и ba можно вставить и ba и bab^2, между ab и ba–a и ab^2, между ab^2 и ba — пустое слово или ba, а между ab^3 и ba–a или ab^2. Это позволяет построить слово w, язык которого совпадает с E_0 и все слова с началом ba относятся к подсловам 2-го типа. Слова с началом a, b^2a и b^3a не могут быть подсловами 2-го типа, т.е. имеют тип 1.

Заметим, что $w* = w_3w_4\ldots$ по построению содержит все слова из E_0, поэтому чтобы применить теорему 1 достаточно подсчитать количесво подслов 1-го и 2-го типов в самом слове w.

Обозначим число подслов длины k в w, начинающихся с a через α_k. Тогда любое такое подслово имеет вид $abav$, либо ab^3au. Поэтому $\alpha_k = \alpha_{k-2} + \alpha_{k-4}$ при $k \geq 5$. Учитывая, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 1, 1, 2, 2$, мы видим, что $\alpha_{2k} = \alpha_{2k-1} = F_{k+1}$ для всех $k \geq 1$.

Обозначим через $\beta_m, \gamma_m, \delta_m$ количество подслов длины m в w с началом ba, b^2a, b^3a соответственно. Тогда для четных индексов

$$\beta_{2k} = \alpha_{2k-1} = F_{k+1}, \quad \gamma_{2k} = \alpha_{2k-2} = F_k, \quad \delta_{2k} = \alpha_{2k-3} = F_k, \tag{33}$$

а для нечетных

$$\beta_{2k+1} = \alpha_{2k} = F_{k+1}, \quad \gamma_{2k+1} = \alpha_{2k-1} = F_{k+1}, \quad \delta_{2k+1} = \alpha_{2k-3} = F_k. \tag{34}$$

Отсюда

$$k_{n-2}^{(1)} = \begin{cases} F_{k-1} + F_{k+1} & \text{при} \quad n = 2k, \\ F_{k-1} + F_{k+2} & \text{при} \quad n = 2k+1, \end{cases} \tag{35}$$

а

$$k_{n-2}^{(2)} = \beta_{n-2} = F_k \tag{36}$$

и при $n = 2k$ и при $n = 2k + 1$. Из (35), (36) и теоремы 1 следует что для слова w и построенной по нему алгебры $A(w)$ мы имеем

$$c_n(A(w)) = n(F_{t-1} + F_{t+1}) + (2n-1)F_t \tag{37}$$

при $n = 2t$ и

$$c_n(A(w)) = n(F_{t-1} + F_{t+2}) + (2n-1)F_t \tag{38}$$

при $n = 2t + 1$. Поскольку

$$F_t = \frac{\varphi^t + (-\varphi)^{-t}}{2\varphi - 1} \sim \frac{\varphi^t}{1+\sqrt{5}}, \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{39}$$

а коэффициент при n у $c_n(A(w))$ равен $F_{t-1} + 2F_t + F_{t+1}$ при $n = 2t$ и $F_{t-1} + 2F_t + F_{t+2}$ при $n = 2t + 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A(w))} = \sqrt{\varphi}, \quad \lim_{n\to\infty} \log_n \frac{c_n(A(w))}{\sqrt{\varphi}^n} = 1. \tag{40}$$

В то же время 3-го предела в (2) не существует, поскольку

$$\lim_{n=2t\to\infty} \log_n \frac{c_n(A(w))}{n\sqrt{\varphi}^n} = \frac{\varphi^2+\varphi+2}{\varphi(2\varphi-1)}, \quad \lim_{n=2t+1\to\infty} \log_n \frac{c_n(A(w))}{n\sqrt{\varphi}^n} = \frac{\varphi^3+\varphi+2}{\varphi(2\varphi-1)}. \tag{41}$$

Основные результаты статьи анонсированы в [15].

Работа первого автора поддержана Российским научным фондом, грант No 16-11-10013. Работа второго автора поддержана Словенским исследовательским агенством, грант No P1-0292.

Список литературы

[1] J. Balogh, B. Bollobas, Hereditary properties of words, Theor. Inform. Appl. 39 (2005), no. 1, 49-65.

[2] A. Berele, Properties of hook Schur functions with applications to p.i. algebras, Adv. Appl. Math. 41 (2008), no. 1, 52-75.

[3] J. Cassaigne, Constructing infinite words of intermediate complexity, Lect. Notes Comp. Sci. **2450** (2003), 173-184.

[4] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, Algebras with intermediate growth of the codimensions, Adv. Appl. Math. 37 (2006), no. 3, 360-377.

[5] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, Codimensions of algebras and growth functions, Adv. Math. 217 (2008), no 3, 1027-1052.

[6] A. Giambruno, M. Zaicev. On codimension growth of finitely generated associative algebras, Adv. Math. 140 (1998), no. 2, 145-155.

[7] A. Giambruno, M.V. Zaicev, Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate, Adv. Math. 142 (1999), 221-243.

[8] A. Giambruno, M. Zaicev, Polynomial Identities and Asymptotic Methods, Mathematical Surveys and Monographs. **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[9] A. Giambruno, M. Zaicev, Growth of polynomial identities: is the sequence of codimensions eventually non-decreasing? Bull. Lond. Math. Soc. 46 (2014), no. 4, 771-778.

[10] A. Giambruno, M. Zaicev, Anomalies on codimension growth of algebras, Forum Math. 28 (2016), no. 4. 649-656.

[11] С.П. Мищенко, Н.П. Панов. Слова Штурма и несчетное множество почти нильпотентных многообразий квадратичного роста, Вестник Моск. Ун-та, Сер.1, Матем., Механ, 2017, No. 6, С. 55-59.

[12] A. Regev, Existence of identities in $A \otimes B$, Israel J. Math. 11 (1972), 131-152.

[13] А. М. Шур, О вычислении параметров и типов поведения комбинаторной сложности регулярных языков, Тр. ИММ УрО РАН, 2010, том 16, номер 2, 270-287.

[14] M. Zaicev, On existence of PI-exponents of codimension growth, Electr. Researh Announ. Math. Sci. 21 (2014), 113-119.

[15] М.В. Зайцев, Д.Д. Реповш, Тождества в алгебрах и комбинаторные свойства двоичных слов. Доклады академии наук, 2019, том 489, номер 5, 449-451.