This postprint is published in:

Doklady Akademii nauk, Volume 489, Number 5, 2019, 449-451

DOI: 10.31857/S0869-56524895449-451

УДК 512.572

Тождества в алгебрах и комбинаторные свойства двоичных слов

Зайцев М.В., Реповш Д.Д.

Предложен подход к построению примеров неассоциативных алгебр по бескоонечному двоичному слову. При этом числовые характеристики, связанные с тождествами получаемой алгебры, полностью определяются комбинаторной сложностью формального языка, состоящего из всех конечных подслов исходного слова. Предложенный метод позволяет принципиально расширить класс функций, реализуемых как функции роста коразмерностей тождеств неассоциативных алгебр.

В работе изучаются числовые характеристики тождеств неассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики. Пусть A - алгебра над полем Φ, а $\Phi\{X\}$ - абсолютно свободная алгебра над Φ с бесконечным множеством порождающих X. Совокупность $Id(A)$ всех тождеств алгебры A является идеалом в $\Phi\{X\}$. Если P_n - подпространство всех полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ в $\Phi\{X\}$, то последовательность коразмерностей $c_n(A) = \mathrm{codim}(\mathrm{P_n} : \mathrm{P_n} \cap \mathrm{Id(A)}), \mathrm{n} = 1, 2, \ldots$, является важной числовой характеристикой семейства тождеств алгебры A. Для широкого класса алгебр рост последовательности $\{c_n(A)\}$, называемой последовательностью коразмерностей A, ограничен экспоненциальной функцией. Например, если $\dim A = d < \infty$, то $c_n(A) \le d^{n+1}$ [1], [2]. Аналогичное ограничение выполняется для любой ассоциативной PI-алгебры [3]. А.Регев выдвинул предположение, что в ассоциативном случае $c_n(A) \sim Cn^t d^n$, где C - константа, t - полуцелое, а d - неотрицательное целое число. Более точно гипотеза Регева означает существование трех пределов

$$d = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}\ , \ t = \lim_{n\to\infty} \log_n \frac{c_n(A)}{d^n}\ , \quad C = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(A)}{n^t d^n}\ , \tag{1}$$

которые можно назвать 1-м, 2-м и 3-м приближениями. Первое приближение известно также как гипотеза Амицура.

Существование и целочисленность 1-го из пределов (1) доказаны в [4], [5]. Во втором приближении гипотеза Регева также подтвердилась [6], [7], а вопрос о третьем приближении до сих пор открыт. В неассоциативном случае 1-й из пределов (1) может быть дробным [8], а может вообще отсутствовать [9] даже в случае экспоненциальной ограниченности роста коразмерностей. Возможен также и промежуточный рост типа $n^{n^\beta}, 0 < \beta < 1$, как показано в [10].

Цель настоящей работы – расширение класса функций промежуточного роста, реализуемых как функции роста коразмерностей тех или иных алгебр, а также построение примера алгебры A, у которой 1-й и 2-й пределы (1) существуют, а 3-й отсутствует. Построение новых примеров базируется на результатах комбинаторной теории формальных языков.

Комбинаторные свойства двоичных слов неоднократно использовались для построения различных примеров асмптотического поведения коразмерностей (см., например, [8],[10]). В работе [11] был предложен альтенативный подход к построению алгебр по двоичным словам, которому мы и будем следовать ниже.

Пусть $w_1 w_2 \ldots$ - бесконечное двоичное слово. Коомбинаторной сложностью w называется функция $Comp_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $Comp_w(n)$ - число различных подслов длины

n в w. Подслово u в w будем называть собственным, если хотя бы одно из его вхождений в w начинается с k-й позиции, где $k \geq 3$. Разделим собственные подслова в w на две категории. Подслово u назовем подсловом 1-го типа, если оно встречается в w только после нуля, либо только после единицы. Если же u встречается в w и после 0 и после 1, то назовем его подсловом 2-го типа.

Рассмотрим алгебру $A(w)$ с базисом $\{a, b_0, b_1, \ldots\}$, в которой умножение задано следующим образом. Для любого $i \geq 0$ положим $b_{i+1} = ab_i$, если $w_{i+1} = 1$, и $b_{i+1} = b_i a$, если $w_{i+1} = 0$. Все остальные произведения базисных элементов положим равными нулю. Обозначим через w^* бесконечное подслово $w_3 w_4 \ldots$ в w. Комбинаторная сложность w и коразмерности $A(w)$ связаны следующим соотношением.

Теорема 1 *Для алгебры $A(w)$ n-я коразмерность при $n \geq 3$ равна*

$$c_n(A(w)) = k_{n-2}^{(1)} n + k_{n-2}^{(2)} (2n-1),$$

где $k_m^{(1)}, k_m^{(2)}$ - количество подслов 1-го и 2-го типов длины m в w. В частности, $Comp_{w*}(n-2) \leq c_n(A(w)) \leq 2Comp_{w*}(n-2)$.

Опираяь на результаты работы [12] и теорему 1 можно получить новый широкий класс алгебр с промежуточным ростом коразмерностей.

Теорема 2 *Пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ - дифференцируемая на $(0;\infty)$ функция, такая, что (i) $\varphi(t) >> \log_2 t$; (ii) $\varphi'(t) << t^{-\beta}$ для некоторой константы $\beta > 0$; (iii) φ' - убывающая функция. Тогда существует двоичное слово u, для которого $\log_2 Comp_u(n) \sim \varphi(n)$. В частности, существует алгебра A, для которой $c_n(A) \sim 2^{\varphi(n)}$.*

Используя результаты работы [13] можно получить примеры алгебр и с более резкими колебаниями функции коразмерностей.

Теорема 3 *Существует алгебра A, для которой можно выбрать возрастающую последовательность $n_k, k = 1, 2, \ldots$, так, что (a) $c_{n_k}(A) < n_k + \ln\ln n_k$, если k нечетно, (b) $c_{n_k} > 2^{\frac{n_k}{\ln\ln n_k}}$, если k четно.*

Теорема 1 позволяет построить пример алгебры, для которой существуют 1-й и 2-й пределы (1), но отсутствует 3-й предел. В теории формальных языков хорошо известен язык E_0, состоящий из всех слов в двухбуквенном алфавите $\{a, b\}$, которые не содержат подслов a^2, b^4 и ab^2a. Нетрудно построить бесконечное бинарное слово w_0, для которого язык всех конечных подслов и слова w_0, и слова w_0^* совпадает с E_0. Тогда для алгебры $A(w_0)$ первый и второй пределы (1) равны соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A(w))} = \sqrt{\varphi}, \quad \lim_{n\to\infty} \log_n \frac{c_n(A(w))}{\sqrt{\varphi}^n} = 1,$$

где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - золотое сечение. В то же время

$$\lim_{n=2t\to\infty} \log_n \frac{c_n(A(w))}{n\sqrt{\varphi}^n} = \frac{\varphi^2+\varphi+2}{\varphi(2\varphi-1)}, \quad \lim_{n=2t+1\to\infty} \log_n \frac{c_n(A(w))}{n\sqrt{\varphi}^n} = \frac{\varphi^3+\varphi+2}{\varphi(2\varphi-1)}.$$

Работа первого автора поддрержана Российским научным фондом, грант No 16-11-10013.

Работа второго автора поддрержана Словенским исследовательским агенством, грант No P1-0292.

Московский государственный университет имени М.В.Лолоносова
Люблянский университет, Словения

Зайцев Михаил Владимирович: 119992, Москва, Ленинские горы, 1. МГУ, механико-математический факультет, тел.: 8(495)939-16-11 (сл.); 8(495)367-21-78 (дом.); 8-910-404-88-53 (моб.)

Реповш Душан Душанович: 1000, Любляна, Ядранска 19, Люблянский университет, математическо-физический факультет, тел.: 386(1)589-23-23 (сл.); 386(4)170-66-44 (моб.)

Список литературы

[1] *Bahturin Yu.A., Drensky V.*// Linear Algebra Appl. 2002. V.357. P.15-34.

[2] *Giambruno A., Zaicev M.*// Trans. Amer. Math. Soc. 2010. V.362. No 6. P.3107-3123.

[3] *Regev A.*// Israel J. Math. 1972. V.11. P.131-152.

[4] *Giambruno A., Zaicev M.*// Adv. Math. 1998. V.140. P.145-155.

[5] *Giambruno A., Zaicev M.V.*// Adv. Math. 1999. V.142. P.221-243.

[6] *Berele A.*// Adv. Appl. Math. 2008. V.41. No 1. P.52-75.

[7] *Giambruno A., Zaicev M.*// Bull. Lond. Math. Soc. 2014. V.46. No 4. P.771-778.

[8] *Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M.* // Adv. Math. 2008. V.217. No 3. P.1027-1052.

[9] *Zaicev M.*// Electr. Res. Announc. in Math. Sci. 2014. V.21. P.113-119.

[10] *Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M.*// Adv. Appl. Math. 2006. V.37. No 3. P. 360-377.

[11] *Мищенко С.П., Панов Н.П.*// Вестник Моск. Ун-та. Сер.1. Матем., Механ. 2017. No 6. C. 55-59.

[12] *Cassaigne J.* // Lect. Notes Comp. Sci. 2003. V.2450. P.173-184.

[13] *Balogh J., Bollobas B.*// Theor. Inform. Appl. 2005. V.39. No. 1. P.49-65.