UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Miha Avsec

KUBIČNE KRIVULJE V KRIPTOGRAFIJI

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Anita Buckley
Somentor: pred. mag. Matjaž Praprotnik

Ljubljana, 2020

Kazalo

Program dela

Magistrsko delo

Kubične krivulje v kriptografiji

naj predstavi strukturo Abelove grupe na ravninskih kubičnih krivuljah definiranimi nad končnimi polji. Delo naj obravnava uporabo eliptičnih krivulj v kriptografiji.

Osnovna literatura

[21] L. C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography, Second Edition*, Chapman & Hall/CRC, 2 izd., 2008

[16] J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2009

Podpis mentorja:

Kubične krivulje v kriptografiji

Povzetek

Skozi delo bomo spoznali osnovne pojme in definicije kubičnih krivulj, ter si ogledali nekaj načinov njihove uporabe v kriptografiji. V primerjavi z drugimi kriptosistemi, kubične krivulje veljajo za bolj varne. Predstavili bomo različne napade na krivulje in na podlagi napadov ocenili, katere krivulje niso oziroma so primerna izbira.

Elliptic curves in cryptography

Abstract

Cubic curves in cryptography offer some advantages compared to the other cryptosystems, and they are considered safer if using the same length key. In the master thesis we will first learn some basic definitions and theorems about cubic curves. Then we will present the uses of cubic curves in cryptography, where we will study some cryptosystems and analyze their weaknesses. An important topic discussed will also be safety, which will be studied with multiple attacks on curves. This way we will get a basic idea of which curves are (not) suitable for the use in cryptography.

Math. Subj. Class. (2010): 11T71, 94A60, 14H52, 11G20

Ključne besede: kubična krivulja, kriptografija, Weilovo parjenje, anomalne krivulje, supersingularne krivulje, MOV napad, izračun indeksa, Millerjev algoritem, torzijske točke

Keywords: cubic curve, cryptography, Weil pairing, anomalous curves, supersingular curves, MOV attack, Index calculus, Miller's algorithm, torsion points

1 Uvod

Kubične krivulje imajo v kriptografiji velik pomen, saj zagotavljajo enako varnost kot drugi klasični kriptosistemi, obenem pa potrebujejo manjšo velikost ključa. Njihovo uporabo je prvi predlagal Victor S. Miller leta 1985 [13], a v širšo rabo so vstopile šele okoli leta 2004. Razliko v potrebni dolžini ključa lahko opazujemo na dveh klasičnih zgledih. Kriptosisteme delimo na simetrične in asimetrične. Simetrični kriptosistemi uporabljajo isti ključ za šifriranje in dešifriranje. Pri asimetričnih kriptosistemih pa uporabljamo različna ključa za šifriranje in dešifriranje. Najpogosteje uporabljen asimetrični kriptosistem je RSA. Ime je dobil po svojih avtorjih Rivest, Shamir in Adleman. RSA temelji na problemu faktorizacije števil [8]. Ocenjuje se, da je 2048 bitni ključ v RSA algoritmu enako varen kot 224 bitni ključ nad eliptičnimi krivuljami. Eden najpogosteje uporabljenih simetričnih kriptosistemov pa je AES [8]. Podrobnejšo primerjavo pa lahko razberemo iz spodnje tabele.

AES	***ECC***	***RSA***
80	160	1024
112	224	2048
128	256	3072
192	384	7680
256	521	15360

Tabela 1: V tabeli so v posamezni vrstici dolžine ključev v bitih, ki zagotavljajo enako varnost, glede na AES, kriptosisteme z uporabo kubičnih krivulj ter RSA [6].

Tu je potrebno dodati, da imajo simetrični kriptosistemi pomankljivost pri dogovoru ključa, saj se ne moremo varno dogovoriti za začetni ključ. Klasično se za izmenjavo ključa uporablja npr. RSA ali kriptosistemi nad eliptičnimi krivuljami (na kratko ECC), nato pa se komunikacija nadaljuje s pomočjo simetričnih kriptosistemov. Krajši ključi predstavljajo veliko prednost v okoljih s slabšo procesorsko močjo in/ali omejenim pomnilnikom. Naprave z zgornjimi omejitvami pa so v današnjem svetu kljub hitrim tehnološkim napredkom zelo pogoste. Med njih bi lahko umestili IoT(Internet of Things), pametne kartice, pametne USB ključke, itd. Zgodovinsko gledano sega uporaba kubičnih krivulj za kriptografske namene v konec 20. stoletja. Uporaba kubičnih krivulj pa ni omejena le na kriptosisteme, kubične krivulje namreč lahko služijo tudi kot orodje za napade na klasične kriptosisteme. Tako lahko kubične krivulje uporabljamo za faktorizacijo števil, s katero lahko razbijemo vse algoritme, ki temeljijo na faktorizaciji. Pod določenimi pogoji z uporabo kubičnih krivulj dobimo enega najhitrejših poznanih algoritmov za razcep števil [12]. S pomočjo tega lahko napademo vse kriptosisteme, katerih varnost temelji na problemu faktorizacije.

V tem magisterskem delu bomo (enako kot v literaturi) gladkim kubičnim krivuljam pogosto rekli eliptične krivulje, saj so nad poljem $\mathbb{C}$ vse definicije ekvivalentne. Najprej bomo spoznali osnovne definicije in izreke o kubičnih krivuljah definiranimi nad končnimi polji. Za tem pa se bomo posvetili problemu diskretnega logaritma nad eliptičnimi krivuljami. Nato bomo spoznali nekaj napadov na eliptične krivulje, ter analizirali primerno izbiro krivulj za kriptografske namene. Pri tem bomo uvedli

tudi parjenje nad eliptičnimi krivuljami in spoznali učinkovit algoritem za izračun le tega. Za vse skupaj pa bomo napisali tudi programsko kodo. Del kode bo napisan v programskem jeziku Python. Nekaj kode pa bomo zaradi lažje implementacije, prihranili si bomo implementacijo različnih algebraičnih objektov, napisali v prosto dostopnem programskem okolju SAGE [18].

2 Končna polja

Skozi celotno delo se bomo ukvarjali s končimi polji in njihovimi razširitvami. Navedimo najprej definicije in lastnosti, ki jih bomo potrebovali.

Končna polja ali *Galoisova polja*, so polja s končnim številom elementov. Najosnovnejši primer takih polj so števila modulo p, kjer je p praštevilo. Polje s q elementi označimo z $\mathbb{F}_q$, v literaturi pa se pojavlja tudi oznaka $GF(q)$. Z $\mathbb{F}_q^\times$ pa bomo označili multiplikativno grupo obrnljivih elementov v $\mathbb{F}_q$. Poglejmo si nekaj pomembnih lastnosti takih polj, ki so povzeta po [3].

Trditev 2.1.

- *Končno polje s q elementi obstaja natanko tedaj, ko velja $q = p^k$, za nek $k \in \mathbb{N}$ in neko praštevilo p.*
- *Vsa končna polja reda q so si izomorfna.*
- *Vsak element polja $\mathbb{F}_q$ zadošča enačbi $x^q - x = 0$.*
- *Multiplikativna grupa končnega polja je ciklična.*

Poglejmo si, kako konstruiramo polje s $q = p^n$ elementi. Najprej izberemo nerazcepni polinom P v $\mathbb{F}_p[X]$ stopnje n. Potem velja, da je kvocientni prostor polinomov nad $\mathbb{F}_p$ z idealom generiranim s P

$$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(P),$$

polje reda q. Bolj natančno so torej elementi $\mathbb{F}_q$ polinomi nad poljem $\mathbb{F}_p$ modulo P, torej so stopnje strogo manjše kot n. Seštevanje in odštevanje poteka na standardni način. Produkt dveh elementov dobimo, kot ostanek pri deljenju s P produkta polinomov v $\mathbb{F}_p[X]$. Inverzne elemente pa lahko poiščemo s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma [2].

Primer 2.2. Poglejmo si polje $\mathbb{F}_4$. Vzemimo nerazcepni polinom v $\mathbb{F}_2[x]$

$$X^2 + X + 1.$$

Velja torej

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1) = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\},$$

kjer je α ničla zgornjega polinoma v $\mathbb{F}_4$. Vse operacije na elementih $\mathbb{F}_4$ bi lahko zapisali s tabelami

$+$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	1	α	$1+\alpha$
1	1	0	$1+\alpha$	α
α	α	$1+\alpha$	0	1
$1+\alpha$	$1+\alpha$	α	1	0

$\times$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$1+\alpha$
α	0	α	$1+\alpha$	1
$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	1	α

x/y	0	1	α	$1+\alpha$
0	/	0	0	0
1	/	1	$1+\alpha$	α
α	/	α	1	$1+\alpha$
$1+\alpha$	/	$1+\alpha$	α	1

Primer 2.3. Poglejmo si še en zanimiv primer. Naj bo $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^2}$, kjer je p praštevilo, za katero velja $p \equiv 3 \pmod 4$. Polinom oblike $X^2 - r$ je nerazcepen natanko tedaj, ko r ni kvadratični ostanek po modolu p. Po Eulerjevem kriteriju [1] je r kvadratični ostanek natanko tedaj, ko je $r^{(p-1)/2} \equiv 1$. V primeru ko je $p \equiv 3 \pmod 4$, pa $p-1$ ni kvadratični ostanek, saj je $(p-1)/2 \equiv 1 \pmod 4$. To pomeni, da je potenca liha, kar pa nam pove, da $p-1$ ni kvadratični ostanek. Torej lahko za nerazcepni polinom izberemo $X^2 + 1$. Elementi polja $\mathbb{F}_q$ so torej oblike

$$a + b\alpha,$$

$a, b \in \mathbb{F}_p$, α pa je število, za katero velja $\alpha^2 = -1$. Ta zapis nas močno spominja na kompleksna števila. Tudi računske operacije se obnašajo enako kot pri kompleksnih številih. V takih poljih lahko torej namesto s polinomi računamo kar s kompleksnimi števili.

V nadaljevanju se bo pogosto pojavljal tudi pojem algebraičnega zaprtja polja $\mathbb{F}_q$ z oznako $\overline{\mathbb{F}_q}$. Spomnimo se potrebnih pojmov za razumevanje le tega.

Definicija 2.4. Naj bo polje $\mathcal{E}$ razširitev polja $\mathcal{F}$. Pravimo, da je element $a \in \mathcal{E}$ *algebraičen* nad $\mathcal{F}$, če obstaja neničelni polinom $f(X) \in \mathcal{F}[X]$, za katerega velja f(a) = 0.

Definicija 2.5. Polje $\mathcal{E}$ je *algebraična razširitev* polja $\mathcal{F}$, če je vsak element iz $\mathcal{E}$ algebraičen nad $\mathcal{F}$.

Definicija 2.6. Polje $\mathcal{F}$ je *algebrično zaprto*, če ima vsak nekonstanten polinom iz $\mathcal{F}[X]$ vsaj eno ničlo v $\mathcal{F}$.

Definicija 2.7. Polje $\mathcal{A}$ se imenuje *algebraično zaprtje* poja $\mathcal{F}$, če je algebraično zaprto in je algebraična razširitev $\mathcal{F}$.

Primer 2.8. Kompleksna števila $\mathbb{C}$ so algebraično zaprtje $\mathbb{R}$, niso pa algebraično zaprtje $\mathbb{Q}$, saj $\mathbb{C}$ ni algebraična razširitev $\mathbb{Q}$.

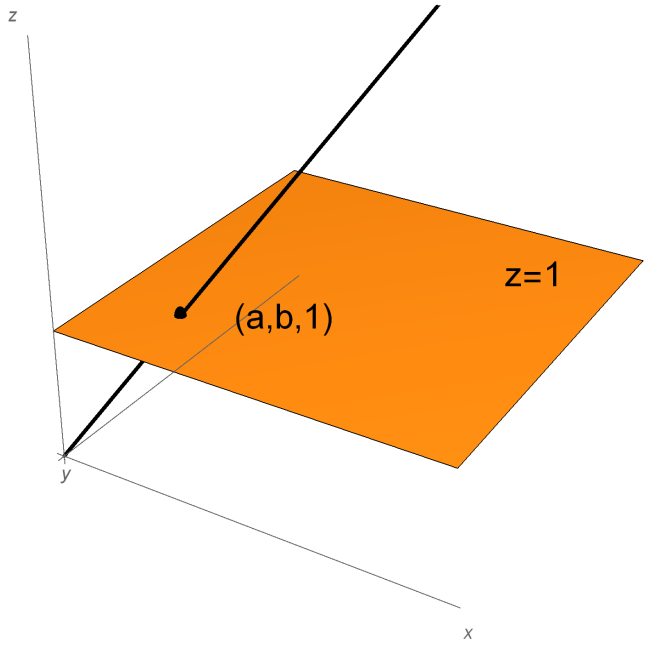
3 Kubične krivulje

3.1 Točke na krivulji

Podpoglavji 3.1 in 3.3 sta povzeti po [5].

Definicija 3.1. *Projektivna ravnina* $\mathbb{P}^2$ nad poljem $\mathbb{F}$ je kvocientni prostor $\mathbb{F}^3 - \{0\}/\sim$, kjer je ekvivalenčna relacija $\sim$ podana z $(a,b,c) \sim (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ za vsak neničelni $\alpha \in \mathbb{F}$. Točke v $\mathbb{P}^2$ so torej podane s homogenimi koordinatami $[a,b,c] = [\alpha a, \alpha b, \alpha c]$ za vse $\alpha \neq 0$.

Točko projektivne ravnine si lahko predstavljamo kot premico skozi izhodišče, kot prikazuje slika 1.



Slika 1: Točka [a,b,1] v projektivni ravnini.

Definicija 3.2. Polinom P je *homogen* stopnje d, če velja

$$P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x,y,z) \text{ za vse } \lambda \in \mathbb{F}.$$

.

Definicija 3.3. *Algebraična krivulja*, podana s homogenim polinomom P, je množica točk

$$\mathcal{C}_P = \{A \in \mathbb{P}^2, P(A) = 0\}.$$

Kubična krivulja je algebraična krivulja, podana s homogenim polinomom stopnje 3. V splošnem je polinom oblike

$$a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{201}x^2z + a_{120}xy^2 + a_{102}xz^2 + \\ + a_{012}yz^2 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 + a_{111}xyz + a_{021}y^2z,$$

kjer so $a_{ijk} \in \mathbb{F}$. Ta zapis vsebuje 10 koeficientov, vendar se lahko v gladkih primerih polinom poenostavi z ustrezno zamenjavo spremenljivk.

Definicija 3.4. Algebraična krivulja je *gladka*, če nima singularne točke.

Izrek 3.5 ([9], Izrek 15.2)**.** *Enačbo gladke kubične krivulje nad algebraično zaprtim poljem lahko zapišemo v Weierstrassovi obliki*

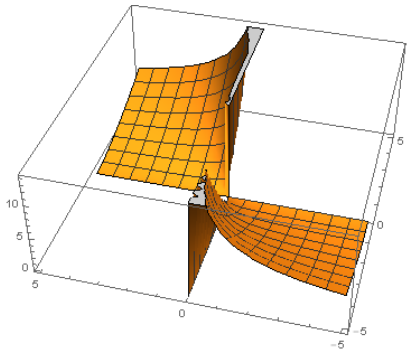
$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

Trditev 3.6 ([16], Trditev 1.4)**.** *Kubična krivulja v Weierstrassovi obliki je gladka natanko tedaj, ko velja*

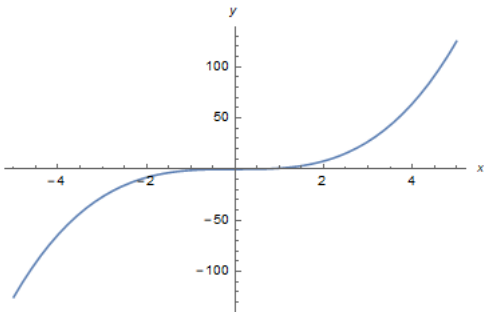
$$\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0.$$

Opomba 3.7. Gladki kubični krivulji velikokrat rečemo tudi *eliptična krivulja*.

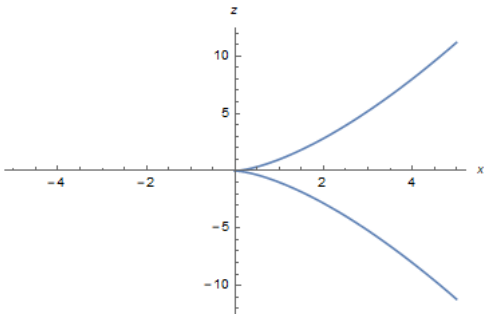
Primer 3.8. Polinom $P(x, y, z) = z^2y - x^3$ je homogen polinom stopnje 3. Rešitve enačbe $z^2y - x^3 = 0$ pa podajajo točke na kubični krivulji.



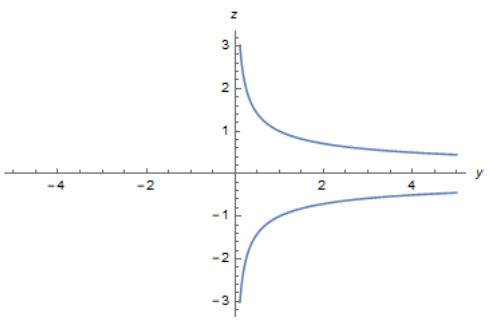
Slika 2: Algebraična krivulja $\mathcal{C}$ podana s polinomom $z^2y - x^3$.



Slika 3: Presek $\mathcal{C}$ z ravnino $z = 1$.



Slika 4: Presek $\mathcal{C}$ z ravnino $y = 1$.



Slika 5: Presek $\mathcal{C}$ z ravnino $x = 1$.

Na zgornjih slikah lahko vidimo, kako krivuljo predstavimo v projektivni ravnini, ter njene preseke z različnimi afinimi ravninami.

V nadaljevanju nas bodo zanimale predvsem kubične krivulje v končnem polju $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$, za neko praštevilo p.

Definicija 3.9. Za dani števili a, $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ je *kubična krivulja* nad poljem $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ množica točk

$$E_{(a,b)}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) : y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\right\}.$$

Drugače povedano, afina kubična krivulja je množica rešitev Weierstrassove enačbe

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

pri čemer upoštevamo zvezo med afinimi in projektivnimi koordinatami točk:

$$(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \Leftrightarrow [x, y, 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

3.2 Tonelli-Shanks

V algoritmih bomo velikokrat potrebovali vsaj eno točko na krivulji. S pomočjo algoritma Tonelli-Shanks [19] bomo točko na krivulji lahko učinkovito poiskali. Naj bo p modul po katerem računamo. Če privzamemo, da lahko naključno izberemo število $0 \leq x < p$, potem nas zanima, kako učinkovito izberemo točko (x, y) na krivulji podani z enačbo $y^2 = x^3 + ax + b \bmod p$. Ideja je preprosta. Naključno generirajmo koordinato x in nato poizkusimo rešiti enačbo $y^2 = X \bmod p$, če tak y obstaja. V nasprotnem primeru generiramo novo x koordinato in poizkusimo ponovno. Problem se torej skriva le v reševanju kvadratne enačbe. Tu pa nam pomaga Tonneli-Shankov algoritem, ki učinkovito reši zgornjo enačbo.

Trditev 3.10. *Naj bo $p > 2$ praštevilo. Če je $n \in \mathbb{F}_p$ kvadratični ostanek po modulu p, potem nam Tonelli-Shanks algoritem vrne $r \in \mathbb{F}_p$, tako da velja $n = r^2$.*

Algoritem 1 Tonelli-Shanks

Vhod: praštevilo p, $n \in \mathbb{F}_p$.
Izhod: $r \in \mathbb{F}_p$, za katerega velja $r^2 = n$, če ta obstaja
Najdi tak $z \in F_p$, da z ni kvadratični ostanek
Poišči s, Q, tako da $p - 1 = Q2^s$
$M = s, c = z^Q, t = n^Q, R = n^{\frac{Q+1}{2}}$
while True **do**
  if $t = 0$ **then**
    return $r = 0$
  else if $t = 1$ **then**
    return $r = R$
  else
    Poišči $0 < i < M$, da velja $t^{2^i} = 1$
    $M = i, c = b^2, t = tb^2, R = Rb$
  end if
end while

Opomba 3.11. V algoritmu 1 lahko prvi korak izvedemo tako, da preiskušamo naključne $z \in \mathbb{F}_p$, dokler ne velja $z^{(p-1)/2} = -1$. To pa po Eulerjevem kriteriju [1] pomeni, da z ni kvadratični ostanek po modulu p.

Opomba 3.12. Števili s, Q iz algoritma poiščemo tako, da število $p-1$ razpolavljamo dokler ne dobimo števila, ki ni deljivo z dva. To število je Q. Število korakov, ki smo jih naredili pa je s.

Algoritem 1 v povprečju potrebuje

$$2N + 2K + \frac{s(s-1)}{4} + \frac{1}{2^{s-1}} - 9$$

množenj. Tu N predstavlja število binarnih števk števila p, K pa predstavlja število enic v binarnem zapisu [20].

3.3 Struktura grupe na kubičnih krivuljah

Za definicijo grupe na kubičnih krivuljah nad $\mathbb{C}$ najprej uvedimo pomožno operacijo

$$* : \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P \to \mathcal{C}_P,$$

tako da za poljubni točki A, B na krivulji velja:

$$A * B = \begin{cases} A & \text{če je } A = B \text{ prevoj,} \\ C & \text{če je } \overline{AB} \cap \mathcal{C}_P = \{A, B, C\}, \\ A & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } A, \text{ ter } A \neq B, \\ B & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } B, \text{ ter } A \neq B, \\ C & \text{če je } A = B \text{ in } \{\text{tangenta v A}\} \cap \mathcal{C}_P = \{A, C\}. \end{cases}$$

Intuitivno operacija $*$ vrne tretjo točko v preseku premice skozi A in B in $\mathcal{C}_P$, kar lahko vidimo na sliki 6. Poglejmo si še nekaj lastnosti operacije $*$. Dokaze sledečih trditev najdemo v [9, Poglavje 17.3].

Trditev 3.13. *Operacija $*$ ima naslednje lastnosti:*

- *komutativnost:* $A * B = B * A$,
- *absorpcija:* $(A * B) * A = B$,
- $((A * B) * C) * D = A * ((B * D) * C)$.

Izrek 3.14. *Kubična krivulja ($\mathcal{C}_P$,+) je Abelova grupa za operacijo*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P & \to & \mathcal{C}_P \\ & (A, B) & \mapsto & (A * B) * O \end{array},$$

kjer je O poljubna izbrana točka na krivulji $\mathcal{C}_P$.

Dokaz. S pomočjo trditve 3.13 dokažimo, da je ($\mathcal{C}_P$,+) res Abelova grupa.

- Operacija + je komutativna:

$$A + B = (A * B) * O = (B * A) * O = B + A.$$

- Točka O je nevtralni element:

$$A + O = (A * O) * O = A.$$

- Nasprotni element A definiramo kot $-A = A * (O * O)$ in preverimo:

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (A * (A * (O * O))) * O \\ &= (O * O) * O \\ &= O, \end{aligned}$$

  kjer smo uporabili absorbcijo.

- Asociativnost $(A + B) + C = A + (B + C)$ dokažemo z računom:

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ((A + B) * C) * O \\ &= (((A * B) * O) * C) * O \\ &= (A * ((B * C) * O)) * O \\ &= (A * (B + C)) * O = A + (B + C). \end{aligned}$$ □

Ta definicija operacije nudi eleganten geometrijski opis strukture grupe, za numerično računanje pa ni primerna. Možno pa je izpeljati formule, s katerimi eksplicitno izračunamo vsoto dveh točk, v kolikor imamo kubično krivuljo v Weierstrassvi obliki.

Lema 3.15 (Seštevanje točk na Weierstrassovi kubični krivulji)**.** *Naj bo $\mathcal{C}_P$ afina krivulja v Weierstrassovi obliki $y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ter O prevoj v neskončnosti. Če sta $A_1 = (a_1, b_1)$ in $A_2 = (a_2, b_2)$ točki na afinem delu $\mathcal{C}_P$, potem za $A_3 = A_1 + A_2 = (a_3, b_3)$ velja*

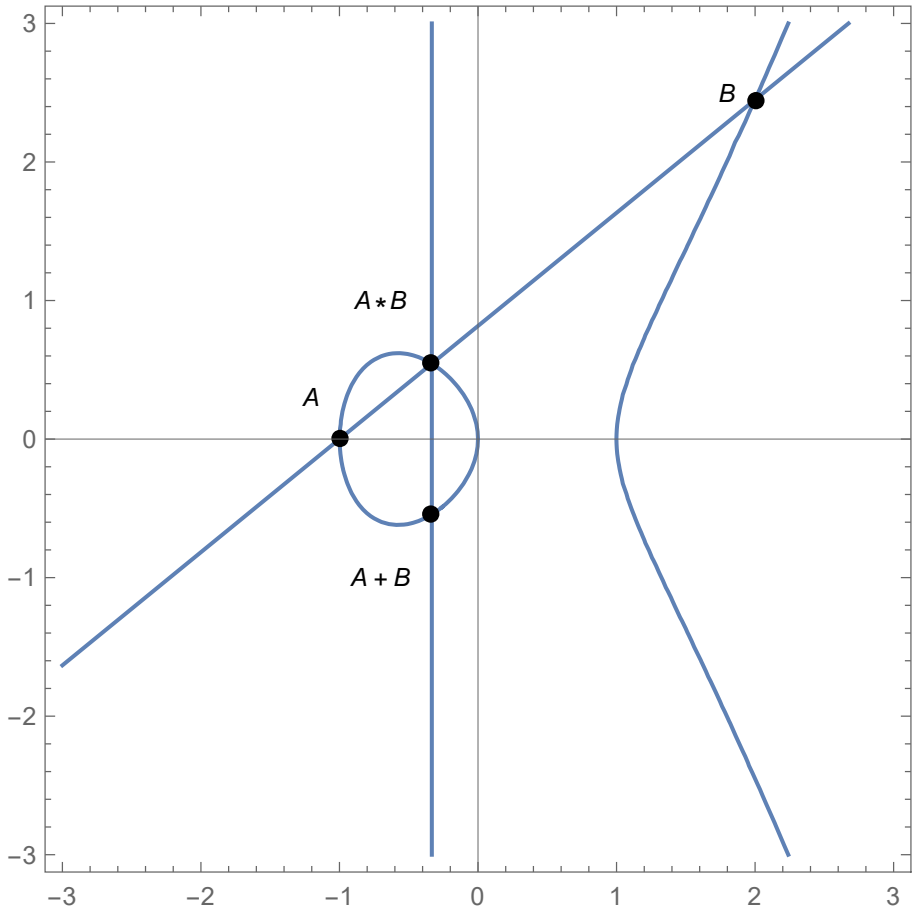
$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda^2 - \alpha - a_1 - a_2, \\ b_3 &= -\lambda a_3 - \mu, \end{aligned}$$

kjer sta

$$\lambda = \begin{cases} \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} & \text{če } a_1 \neq a_2, \\ \frac{3a_1^2 + 2\alpha a_1 + \beta}{2b_1} & \text{sicer} \end{cases} \qquad \text{in} \qquad \mu = b_1 - \lambda a_1.$$

Opomba 3.16. Če krivuljo $\mathcal{C}_P$ predstavimo v projektivni ravnini, torej kot ničle homogenega polinomoma $y^2z = x^3 + \alpha x^2 z + \beta x z^2 + \gamma z^3$, je prevoj $O = [0, 1, 0]$. Opazimo, da točke $O = [0, 1, 0]$ ni možno predstaviti v afini ravnini $z = 1$, zato bomo v nadaljevanju pisali $O = \infty$.

Primer 3.17. Na sliki 6 je v afini ravnini $z = 1$ prikazano kako grafično seštevamo točke na Weierstrassovi kubiki $y^2z - x(x - z)(x + z) = 0$. Sešteti želimo točki $A = [-1, 0, 1]$ in $B = [2, \sqrt{6}, 1]$.



Slika 6: Grafično seštevanje točk na kubični krivulji.

Primer 3.18. Seštejmo točki $A = (-1, 0), B = (2, \sqrt{6})$ na Weierstrassovi kubični krivulji $y^2z - x(x - z)(x + z) = 0$ v preseku z afino ravnino $z = 1$ še računsko z uporabo zgornje leme 3.15.

Dobimo $y^2 = x^3 - x$, torej je $\alpha = 0$, $\beta = -1$ in $\gamma = 0$. Izračunajmo sedaj λ in μ, pri čemer upoštevamo prvi predpis, saj sta x-koordinati točk različni:

$$\lambda = \frac{-\sqrt{6}}{-1-2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\mu = 0 - \frac{\sqrt{6}}{3}(-1) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Koordinati vsote $A + B = (x, y)$ sta torej enaki

$$x = \frac{6}{9} - 0 + 1 - 2 = -\frac{1}{3}$$

in

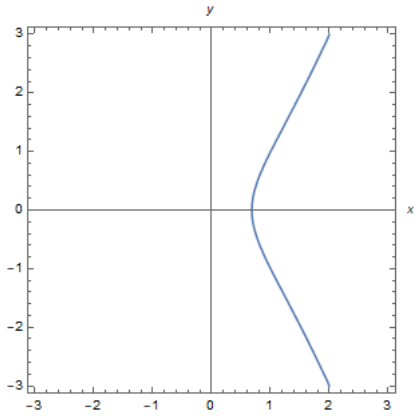
$$y = -\frac{\sqrt{6}}{3}(-\frac{1}{3}) - \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{2\sqrt{6}}{9} \doteq -0.5443.$$

Iskana točka $A+B \in \mathbb{P}^2$ je torej enaka $[-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{9}, 1]$. Dobljeni rezultat se ujema s točko, ki smo jo dobili z grafičnim seštevanjem.

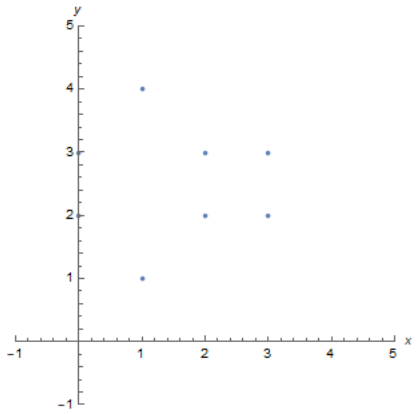
Poglejmo si še primer kubične krivulje nad poljem $\mathbb{F}_p$.

Primer 3.19. Naj bo E krivulja oblike $y^2 = x^3 + x - 1$ nad poljem $\mathbb{Z}_5$. Poglejmo si kako izgledajo točke na krivulji E.

x	x^3+x-1	y	Točke
0	-1	± 3	$(0,3), (0,2)$
1	1	± 1	$(1,1), (1,4)$
2	4	± 3	$(2,3), (2,2)$
3	4	± 3	$(3,3), (3,2)$
4	2	/	/



Slika 7: Algebraična krivulja $y^2 = x^3 + x - 1$ v $\mathbb{R}$.



Slika 8: Algebraična krivulja $y^2 = x^3 + x - 1$ v $\mathbb{Z}_5$.

Izračunajmo sedaj še $(2,3)+(1,1)$. Uporabimo formule v lemi 3.15, tako dobimo

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2, \\ x_3 &= 4 - 2 - 1 = 1, \\ \mu &= 3 - 2 \cdot 2 = -1 = 4, \\ y_3 &= -2(1) - 4 = 4. \end{aligned}$$

$(2,3) + (1,1)$ je torej enako $(1,4)$ na krivulji E.

4 Delitelji

Pri konstrukciji Weilovega parjenja bodo pomembno vlogo igrali tako imenovani delitelji. V tem poglavju bomo navedli nekaj definicij in lastnosti, ki jih bomo potrebovali v kasnejših poglavjih. Uporabljali bomo terminologijo, ki jo lahko najdemo v [21].

Definicija 4.1. Naj bo K polje in naj bo P točka na krivulji $E(\overline{K})$. Za vsako točko P definirajmo formalen simbol $[P]$. *Delitelj* D na krivulji E je končna linearna kombinacija takih simbolov s celoštevilskimi koeficienti

$$D = \sum_j a_j[P_j],\ a_j \in \mathbb{Z}.$$

Iz same definicije sledi, da je delitelj element Abelove grupe generirane s simboli $[P]$. Označimo to grupo z $\mathrm{Div}(E)$.

Definicija 4.2. Definirajmo *vsoto* in *stopnjo* delitelja kot

$$\mathrm{sum}(\sum_j a_j[P_j]) = \sum_j a_j P_j \ \in E(\overline{K}),$$

$$\deg(\sum_j a_j[P_j]) = \sum_j a_j \ \in \mathbb{Z}.$$

Definicija 4.3. Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K. *Funkcija* na E je racionalna funkcija

$$f(x, y) \in \ \overline{K},$$

ki je definirana za vsaj eno točko na $E(\overline{K})$. Funkcija torej zavzame vrednosti v $\overline{K}$.

Opomba 4.4. Naj bo E podana z enačbo $y^2 = x^3 + ax + b$. Racionalna funkcija $\frac{1}{y^2 - x^3 - ax - b}$ torej ne predstavlja funkcije na E, saj ni definirana za nobeno točko na E.

Trditev 4.5 ([16], Trditev 4.3)**.** *Naj bo P točka na krivulji E. Potem obstaja funkcija u_P, kateri rečemo uniformizator, z lastnostjo $u_P(P) = 0$, za katero velja, da lahko vsako funkcijo $f(x, y)$ nad E zapišemo kot*

$$f = u_P^r g,\ \textit{za nek } r \in \mathbb{Z},\ \textit{kjer } g(P) \neq 0 \textit{ in } \frac{1}{g(P)} \neq 0.$$

Definicija 4.6. Številu r iz trditve 4.5 rečemo *red* funkcije f v točki P in ga označimo z $\mathrm{ord}_P(f)$.

Primer 4.7. Naj bo $y^2 = x^3 - x$ eliptična krivulja in naj bo $f(x, y) = x$. Za točko $P = (0, 0)$ izberimo $u(x, y) = y$. Očitno je $u(0, 0) = 0$. Nad eliptično krivuljo velja

$$y^2 = x^3 - x = x(x^2 - 1),$$

od tod sledi $x = y^2 \frac{1}{x^2-1}$ nad E. Prav tako velja, da $1/(x^2-1) \neq 0$ v točki $(0,0)$. Od tod sledi, da je red funkcij x in x/y enak

$$\mathrm{ord}_{(0,0)}(x) = 2 \text{ in } \mathrm{ord}_{(0,0)}(x/y) = 1.$$

Red funkcije je lahko tudi nepozitiven. Vzemimo funkcijo $1/x$. Enačbo krivulje prepišimo v obliko $\frac{1}{x} = \frac{1}{y^2}(x^2-1)$. To pomeni, da je red v točki $P = (0,0)$ enak

$$\mathrm{ord}_{(0,0)}(1/x) = -2.$$

Poglejmo si še red funkcije x/y^2. Enačbo krivulje prepišimo v obliko $\frac{x}{y^2} = \frac{1}{x^2-1}$. Tu lahko vzamemo za uniformizator poljubno funkcijo, ki zadošča pogoju $u(P) = 0$, saj nastopa s potenco 0. Torej je red funkcije x/y^2 v točki $P = (0,0)$ enak

$$\mathrm{ord}_{(0,0)}(x/y^2) = 0.$$

Definicija 4.8. Točki P rečemo *ničla* funkcije f, če je $\mathrm{ord}_P(f) > 0$ in *pol*, če je $\mathrm{ord}_P(f) < 0$

Definicija 4.9. Naj bo f funkcija nad E, ki ni identično enaka 0. Definirajmo *delitelj* funkcije f kot

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in E(\overline{K})} \mathrm{ord}_P(f)[P] \in \mathrm{Div}(E).$$

Trditev 4.10 ([21], Trditev 11.1)**.** *Naj bo E eliptična krivulja in naj bo f funkcija na E, ki ni identično enaka 0. Potem veljajo naslednje trditve:*

- *f ima le končno mnogo ničel in polov,*
- *$deg(\ div(f)) = 0$,*
- *če f nima ničel ali polov, potem je f konstantna.*

Izrek 4.11. *Naj bo E eliptična krivulja. Naj bo D delitelj nad E z $deg(D) = 0$. Potem obstaja taka funkcija f na E z lastnostjo*

$$div(f) = D$$

natanko tedaj, ko

$$sum(D) = \text{točka } \infty.$$

Dokaz. Pokažimo najprej, da je možno $[P_1] + [P_2]$ zapisati kot

$$[P_1 + P_2] + [\infty] + \text{delitelj neke funkcije}.$$

Recimo, da imamo tri kolinearne točke P_1, P_2, P_3 na krivulji E, ki ležijo na premici $ax + by + c = 0$. Naj bo $f(x,y) = ax + by + c$, potem ima funkcija f ničle v točkah P_1, P_2, P_3. Če b ni enak 0, potem ima funkcija po trditvi 4.10 trojni pol v ∞. Velja torej

$$\mathrm{div}(ax + by + c) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[\infty].$$

Ker se nahajamo na krivulji zapisani v Weierstrassovi obliki, kjer točko $-P$ dobimo z zamenjavo predznaka y-koordinate, ima premica skozi točki $P_3 = (x_3, y_3)$ ter $-P_3 = (x_3, -y_3)$ enačbo $x - x_3 = 0$. Po trditvi 4.10 ponovno velja

$$\operatorname{div}(x - x_3) = [P_3] + [-P_3] - 2[\infty].$$

Od tod sledi

$$\operatorname{div}\left(\frac{ax + by + c}{x - x_3}\right) = \operatorname{div}(ax + by + c) - \operatorname{div}(x - x_3) = [P_1] + [P_2] - [-P_3] - [\infty].$$

Ker na krivulji velja $P_1 + P_2 = -P_3$ (to sledi iz definicije seštevanja točk na krivulji), lahko zgornjo enačbo prepišemo v

$$[P_1] + [P_2] = [P_1 + P_2] + [\infty] + \operatorname{div}(g), \text{ kjer je } g = \frac{ax + by + c}{x - x_3}.$$

Hitro opazimo, da velja

$$\operatorname{sum}(\operatorname{div}(g)) = P_1 + P_2 - (P_1 + P_2) - \infty = \infty.$$

Prav tako pa se iz zgornje enačbe vidi, da je $[P_1] + [P_2] = 2[\infty] + \operatorname{div}(g)$, če velja $P_1 + P_2 = \infty$. Zaradi tega je vsota vseh členov s pozitivnimi koeficienti v D enaka vsoti nekega simbola $[P]$, večkratnika $[\infty]$, ter delitelja neke funkcije. Enako velja tudi za člene z negativnimi koeficienti. Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + n[\infty] + \operatorname{div}(h),$$

kjer je h kvocient produkta funkcij z lastnostjo $\operatorname{sum}(\operatorname{div}(g_i)) = \infty$. Zato velja tudi $\operatorname{sum}(\operatorname{div}(h)) = \infty$. Po trditvi 4.10 velja $\deg(\operatorname{div}(h)) = 0$, saj funkcija ni konstantna. Imamo torej

$$0 = \deg(D) = 1 - 1 + n + 0 = n.$$

Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + \operatorname{div}(h).$$

Prav tako velja

$$\operatorname{sum}(D) = P - Q + \operatorname{sum}(\operatorname{div}(h)) = P - Q,$$

ker je ∞ nevtralni element Abelove grupe na E. Predpostavimo sedaj, da velja $\operatorname{sum}(D) = \infty$. Potem je $P - Q = \infty$, zato mora veljati $P = Q$ in $D = \operatorname{div}(h)$. Za dokaz v obratno smer predpostavimo, da je $D = \operatorname{div}(f)$ za neko funkcijo f. Potem je

$$[P] - [Q] = \operatorname{div}(f/h).$$

Od tod po spodnji lemi 4.12 sledi, da je $P = Q$ in torej $\operatorname{sum}(D) = \infty$.

□

Lema 4.12 ([21], Lema 11.3)**.** *Naj bosta $P, Q \in E(\overline{K})$, ter h funkcija na E za katero velja*

$$div(h) = [P] - [Q].$$

Potem sledi $P = Q$.

5 Krivulje končnega reda

5.1 Torzijske točke

Definicija 5.1. Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K, ter naj bo $n \in \mathbb{N}$. *Torizjske točke* reda n, so točke v množici

$$E[n] = \{P \in E(\overline{K}) | nP = \infty\}.$$

Struktura torzijskih točk je opisana v naslednjem izreku.

Izrek 5.2. *Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Če karakteristika polja K ne deli n oziroma je enaka 0, potem je*

$$E[n] \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n.$$

Zapišimo $n = p^r n'$, kjer p ne deli n'. Če je karakteristika K enaka $p > 0$ in $p|n$, potem velja

$$E[n] \cong \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'} \text{ ali } E[n] \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{n'}.$$

Izrek 5.2 bomo dokazali v zadnjem razdelku tega poglavja.

5.2 Endomorfizmi

Definicija 5.3. Naj bo K polje nad katerim je definirana eliptična krivulja E. *Endomorfizem* na E je homomorfizem $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$, ki je podan z racionalno funkcijo. Torej obstajata racionalni funkciji R_1 in R_2 s koeficienti v $\overline{K}$ za kateri velja

$$\alpha(x, y) = (R_1(x, y), R_2(x, y)),$$

za vse $(x, y) \in E(\overline{K})$.

Primer 5.4. Naj bo E krivulja podana z $y^2 = x^3 + ax + b$, ter naj bo $\alpha(P) = 2P$. Tako definiran α je očitno homomorfizem. Po lemi 3.15 pa obstajajo racionalne funkcije za seštevanje točk na kubičnih krivuljah, zato je α tudi endomorfizem.

Zaradi različnih možnih oblik racionalnih funkcij bo priročno, če bomo zapis endomorfizmov standardizirali, ter bomo od tod naprej privzeli, da so vsi endomorfizmi zapisani v enotni obliki. V racionalni funkciji $R(x, y)$ lahko, zato ker se nahajamo na Weierstrassovi krivulji, vse sode potence y zamenjamo z $x^3 + ax + b$ na primerno potenco. Zaradi tega lahko $R(x, y)$ zapišemo kot

$$R(x, y) = \frac{p_1(x) + p_2(x)y}{p_3(x) + p_4(x)y}.$$

Če sedaj še pomnožimo števec in imenovalec s $p_3 - p_4 y$ ter potem zamenjamo y^2 z $x^3 + ax + b$, dobimo izraz oblike

$$R(x, y) = \frac{q_1(x) + q_2(x)y}{q_3(x)}.$$

Za točke na Weierstrassovi krivulji velja $-(x,y) = (x,-y)$, kjer $-(x,y)$ označuje nasprotni element točke (x,y). Od tod sklepamo, da za vsak endomorfizem $\alpha = (R_1, R_2)$ nad E velja

$$R_1(x,-y) = R_1(x,y),\ R_2(x,-y) = -R_2(x,y).$$

To sledi iz dejstva, da je α homomorfizem in velja

$$\alpha(x,-y) = \alpha(-(x,y)) = -\alpha(x,y).$$

To pa pomeni, da se da $\alpha(x,y)$ zapisati kot $\alpha(x,y) = (r_1(x), r_2(x)y)$, kjer sta r_1, r_2 racionalni funkciji.

Če sedaj zapišemo $r_1(x)$ kot

$$r_1(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

potem lahko definiramo še nekaj pojmov.

Definicija 5.5. *Stopnja* endomorfizma je definirana kot

$$\deg(\alpha) = \begin{cases} \max\{\deg p(x), \deg q(x)\} & \text{če } \alpha \not\equiv 0, \\ 0 & \text{če } \alpha \equiv 0. \end{cases}$$

Definicija 5.6. Netrivialni endomorfizem α je *separabilen*, če je odvod $r_1'(x) \not\equiv 0$.

Poglejmo si na primeru, kako določimo stopnjo, ter ali je enodmorfizem seperabilen.

Primer 5.7. Če vzamemo endomorfizem iz prejšnjega primera $\alpha(P) = 2P$, po formuli iz leme 3.15 dobimo funkcijo

$$R_1(x,y) = \left(\frac{3x^2+a}{2y}\right)^2 - 2x.$$

To lahko preoblikujemo kot

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x^2+a}{2y}\right)^2 - 2x &= \frac{9x^4+6ax^2+a^2}{4y^2} - 2x \\ &= \frac{9x^4+6ax^2+a^2-2x(4(x^2+ax+b))}{4(x^2+ax+b)} \\ &= \frac{x^4-2ax^2-8bx+a^2}{4(x^2+ax+b)}. \end{aligned}$$

Iz

$$r_1(x) = \frac{x^4-2ax^2-8bx+a^2}{4(x^2+ax+b)}$$

razberemo, da je stopnja $\deg(\alpha) = 4$.

Poglejmo si še odvod $r_1'(x)$.

$$r_1'(x) = \frac{(4x^3 - 4ax - 8b)4(x^3 + ax + b) - (x^4 - 2ax^2 - 8bx + a^2)(12x^2 + 4a)}{16(x^2 + ax + b)^2}$$
$$= \frac{-a^3 - 8b^2 + 2x^5 - 2a^2x(1 + x) + 4bx^2(2 + x) + a(-4bx + 3x^4)}{4(b + x(a + x))^2}.$$

Števec zgornje enačbe pa ni identično enak 0, torej je endomorfizem seperabilen.

Opomba 5.8. Če bi zgornje računali v $\mathbb{F}_2$, bi dobili primer endomorfizma, ki ni seperabilen.

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednji izrek, za katerega ne bomo podali dokaza.

Izrek 5.9 ([21], Izrek 2.21)**.** *Naj bo $\alpha \neq 0$ seperabilni endomorfizem nad eliptično krivuljo E. Potem velja*

$$deg(\alpha) = \#Ker(\alpha), \text{ kjer } \# \text{ označuje število točk, ki so v jedru } \alpha.$$

Če $\alpha \neq 0$ ni seperabilen, pa velja

$$deg(\alpha) > \#Ker(\alpha).$$

5.3 Frobeniusov endomorfizem

Naj bo $\mathbb{F}_q$ končno polje z algebraičnim zaprtjem $\overline{\mathbb{F}_q}$ in naj bo

$$\phi_q : \overline{\mathbb{F}_q} \to \overline{\mathbb{F}_q},$$
$$x \mapsto x^q$$

Frobeniusova preslikava na $\mathbb{F}_q$. Če je eliptična krivulja E definirana nad $\mathbb{F}_q$, potem ϕ_q deluje na točkah E kot:

$$\phi_q(x, y) = (x^q, y^q) \text{ in } \phi_q(\infty) = \infty.$$

Lema 5.10. *Naj bo E eliptična krivulja definirana nad $\mathbb{F}_q$. Za točke $(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$ velja*

- $\phi_q(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$,
- $(x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$ *natanko tedaj ko je* $\phi_q(x, y) = (x, y)$.

Dokaz. Za dokaz leme bomo potrebovali lastnost

$$(a + b)^q = a^q + b^q,$$

kjer je q potenca karakteristike polja v katerem delamo. To sledi iz razvoja v vrsto in dejstva, da pri binomskih koeficientih velja $\binom{q}{i} \equiv 0$, za $1 \leq i \leq q - 1$. To je res, ker pri zapisu binomskega koeficienta po krajšanju vedno ostane vsaj en q, ki je potenca karakteristike.

Prav tako bomo potrebovali trditev 2.1, da za vse $a \in \mathbb{F}_q$ velja $a^q = a$. Dokaz tega sledi iz dejstva, da ima grupa vseh obrnljivih elementov $\mathbb{F}_q^\times$ red $q-1$, kar pomeni $a^{q-1} = 1$, za vse $a \in \mathbb{F}_q \neq 0$. To pa je ekvivalentno zgornji trditvi.

Lemo lahko brez težav dokažemo za krivulje v posplošeni Weierstrassovi obliki.

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \tag{5.1}$$

kjer so $a_i \in \mathbb{F}_q$. Če to enačbo potenciramo na stopnjo q in uporabimo zgornja dejstva, dobimo

$$(y^q)^2 + a_1(x^qy^q) + a_3(y^q) = (x^q)^3 + a_2(x^q)^2 + a_4(x^q) + a_6.$$

To pa ravno pomeni, da točke oblike (x^q, y^q) ležijo na krivulji podani z enačbo (5.1).

Za drugi del leme uporabimo dejstvo, da velja $x \in \mathbb{F}_q$ natanko tedaj, ko je $\phi_q(x) = x$. Smer iz leve v desno smo že dokazali zgoraj. Potrebujemo še dokaz v drugo smer. Ta pa sledi iz lastnosti, da ima polinom $X^q - X$ natanko q različnih ničel v $\overline{\mathbb{F}_p}$. Ker pa množici

$$\{\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p} | \alpha^q = \alpha\} \text{ in } \mathbb{F}_q$$

vsebujeta vsaka po q elementov in je $\mathbb{F}_q$ vsebovana v drugi množici, sledi da sta enaki.

Od tod za točke $(x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$ sledi

$$\begin{aligned}(x,y) \in E(\mathbb{F}_q) &\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{F}_q \\ &\Leftrightarrow \phi_q(x) = x \text{ in } \phi_q(y) = y \\ &\Leftrightarrow \phi_q(x,y) = (x,y).\end{aligned}$$

□

Trditev 5.11. *Naj bo E eliptična krivulja definirana nad $\mathbb{F}_q$. Naj bosta α, β endomorfizma na E ter $a, b \in \mathbb{Z}$. Definirajmo endomorfizem*

$$(a\alpha + b\beta)(P) = a\alpha(P) + b\beta(P).$$

Potem velja

$$deg(a\alpha + b\beta) = a^2\ deg(\alpha) + b^2\ deg(\beta) + ab(\ deg(\alpha + \beta) -\ deg(\alpha) -\ deg(\beta)).$$

Opomba 5.12. Naj $n \in \mathbb{N}$ ne deli karakteristike K. Ker velja $E[n] \cong \mathbb{Z}_n \bigoplus \mathbb{Z}_n$, lahko za $E[n]$ izberemo neko bazo $\{\beta_1, \beta_2\}$. To pomeni, da lahko vsak element $E[n]$ zapišemo kot $m_1\beta_1 + m_2\beta_2$, za $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_n$. Homomorfizem $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$ preslika $E[n]$ v $E[n]$. Zato obstajajo števila $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$, da velja

$$\alpha(\beta_1) = a\beta_1 + b\beta_2,\ \alpha(\beta_2) = c\beta_1 + d\beta_2.$$

To pa ravno pomeni, da se lahko vsak tak homomorfizem α predstavi z matriko oblike

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Dokaz trditve 5.11. Naj bo $n \in \mathbb{Z}$, število ki ni deljivo s karakteristiko polja. Predstavimo α, β z matrikama α_n, β_n, glede na neko izbrano bazo $E[n]$. Velja

$$\det(a\alpha_n + b\beta_n) = a^2\det(\alpha_n) + b^2\det(\beta_n) + ab(\det(\alpha_n + \beta_n) - \det(\alpha_n) - \det(\beta_n)).$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}\deg(a\alpha + b\beta) \equiv a^2 \deg(\alpha) + b^2 \deg(\beta) + ab(\deg(\alpha + \beta) \\ - \deg(\alpha) - \deg(\beta)) \pmod{n}.\end{aligned}$$

Ker to drži za neskončno mnogo n, v tej enačbi velja enakost.

□

Trditev 5.13 ([21], Trditev 4.7)**.** *Naj bo E definirana nad $\mathbb{F}_q$ in naj bo $n \geq 1$. Potem velja*

- *$Ker(\phi_q^n - 1) = E(\mathbb{F}_{q^n})$.*
- *Endomorfizem $\phi_q^n - 1$ je seperabilen. Velja torej $\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = \deg(\phi_q^n - 1)$.*

Opomba 5.14. ϕ_q^n predstavlja kompozicijo $\phi_q \circ \phi_q \circ \ldots \circ \phi_q$. Prav tako pa je $\phi_q^n - 1$ endomorfizem, saj je množenje z -1 endomorfizem.

Izrek 5.15 (Hasse [21], Izrek 4.2)**.** *Naj bo E eliptična krivulja nad končnim poljem $\mathbb{F}_q$. Potem red $E(\mathbb{F}_q)$ zadošča zvezi*

$$|q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q)| \leq 2\sqrt{q}.$$

Opomba 5.16. Hassejev izrek igra pomembno vlogo tudi pri iskanju velikosti grupe, saj nam poda zgornjo in spodnjo mejo. Velikost grupe pa potem nadaljno zožimo z dejstvom, da red elementa deli red grupe.

Lema 5.17. *Naj bosta $r, s \in \mathbb{Z}$ tuji števili. Potem obstaja število a, za katerega velja*

$$\deg(r\phi_q - s) = r^2q + s^2 - rsa.$$

Dokaz. Z uporabo trditve 5.11 dobimo

$$\deg(r\phi_q - s) = r^2 \deg(\phi_q) + s^2 \deg(-1) + rs(\deg(\phi_q - 1) - \deg(\phi_q) - \deg(-1)).$$

Če sedaj uporabimo dejstvi $\deg(\phi_q) = q$, $\deg(-1) = 1$ ter $\deg(\phi_q - 1) = q + 1 - a$, željeni rezultat sledi. □

Dokaz izreka 5.15. Po trditvi 5.13 lahko zapišemo

$$a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - \deg(\phi_q - 1).$$

Pokazati moramo $|a| \leq 2\sqrt{q}$. Ker velja $\deg(r\phi_q - s) \geq 0$, nam lema 5.17 implicira

$$q\left(\frac{r}{s}\right)^2 - a\frac{r}{s} + 1 \geq 0,$$

za vse r, s za katere je $\gcd(s, q) = 1$. Množica racionalnih števil oblike r/s, ki zadoščajo tej lastnosti je gosta v $\mathbb{R}$. To lahko vidimo tako, da za s vzamemo potenco števila 2 ali 3. Vsaj eno od teh števil bo tuje q, saj je q moč končnega polja in je torej oblike $q = t^n$, za neko praštevilo t. Števila oblike $\frac{r}{2^m}$ ali $\frac{r}{3^m}$ pa so očitno gosta v $\mathbb{R}$. Zato velja

$$qx^2 - ax + 1 \geq 0,$$

za vse $x \in \mathbb{R}$. To pa pomeni, da je diskriminanta polinoma negativna ali nič. Kar povedano z drugimi besedami pomeni

$$a^2 - 4q \leq 0.$$

To pa je ravno pogoj $|a| \leq 2\sqrt{q}$.

□

Izrek 5.18 ([21], Izrek 4.10)**.** *Naj bo E eliptična krivulja definirana nad $\mathbb{F}_q$. Naj bo $a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - \ deg(\phi_q - 1)$. Potem velja*

$$\phi_q^2 - a\phi_q + q = 0,$$

gledano kot endomorfizem nad E. Prav tako pa je a edino število k, za katerega velja

$$\phi_{q^n}^2 - k\phi_{q^n} + q^n = 0.$$

Povedano drugače, velja naslednja lastnost. Naj bo $(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_q}$, potem velja

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) - a(x^q, y^q) + q(x, y) = \infty,$$

obenem pa je a edino število, tako da ta lastnost velja za vse $(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_q}$. Velja še več

$$a \equiv Sled((\phi_q)_m) \ mod \ m,$$

za vse m, ki zadoščajo $gcd(m, q) = 1$.

5.4 Red grupe nad eliptičnimi krivuljami

Pogosto nas zanima, koliko točk leži na dani krivulji E. S pomočjo naslednje trditve bomo dobili preprost način kako izračunati $\#E(\mathbb{F}_{q^n})$, če poznamo $\#E(\mathbb{F}_q)$. Preostane še vprašanje kako izračunati $\#E(\mathbb{F}_q)$. Enega od možnih načinov bomo opisali v opombi 8.7, kot posledico algoritma Velik korak-majhen korak.

Trditev 5.19. *Naj bo $\#E(\mathbb{F}_q) = q+1-a$, kot v izreku 5.18. Zapišimo $X^2 - aX + q = (X - \alpha)(X - \beta)$. Potem velja*

$$\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = q^n + 1 - (\alpha^n + \beta^n),$$

za vse $n \geq 1$.

Preden lahko dokažemo zgornjo trditev, bomo potrebovali še naslednjo lemo.

Lema 5.20. *Naj bo $s_n = \alpha^n + \beta^n$. Potem velja $s_0 = 2, s_1 = a$ in $s_{n+1} = as_n - qs_{n-1}$, za vse $n \geq 1$.*

Dokaz. Če je $n = 0$, potem lema očitno velja. Za $n = 1$ lema sledi iz definicije α in β, ki sta ničli enačbe $X^2 - aX + q$, ter uporabe Vietovih formul. Dokažimo lemo še za splošen n. Ker sta α in β ničli iste enačbe, lahko zapišemo $\alpha^2 - a\alpha + q = 0$ in $\beta^2 - a\beta + q = 0$. Sedaj enačbi pomnožimo z α^{n-1} in β^{n-1}. S tem dobimo

$$\alpha^{n+1} = a\alpha^n + q\alpha^{n-1} \text{ in } \beta^{n+1} = a\beta^n + q\beta^{n-1}.$$

Če enačbi seštejemo, dobimo rekurzivno zvezo

$$s_{n+1} = as_n - qs_{n-1}.$$

□

Dokaz trditve 5.19. Iz leme 5.20 takoj sledi, da velja $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{N}$. Naj bo f funkcija

$$f(X) = (X^n - \alpha^n)(X^n - \beta^n) = X^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)X^n + q^n.$$

Iz prve enakosti sledi, da funkcija $X^2 - aX + q = (X - \alpha)(X - \beta)$ deli f. Po osnovnem izreku od deljenju lahko f zapišemo kot $f(X) = g(X)Q(x) + r(x)$, kjer je $g(X) = X^2 - aX + q$. Prav tako pa ima kvocient Q celoštevilske koeficiente. Po izreku 5.18 velja

$$(\phi_q^n)^2 - (\alpha^n + \beta^n)\phi_q^n + q^n = f(\phi_q) = Q(\phi_q)(\phi_q^2 - a\phi_q + q) = 0,$$

kjer je ϕ_q endomorfizem na E. Velja tudi $\phi_q^n = \phi_{q^n}$. Ponovno uporabimo izrek 5.18, od koder sledi, da obstaja natanko en $k \in \mathbb{Z}$, za katerega je $\phi_{q^n}^2 - k\phi_{q^n} + q^n = 0$, in sicer, $k = q^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{q^n})$. Od tod torej sledi

$$\alpha^n + \beta^n = q^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{q^n}).$$

□

Primer 5.21. Naj bo E posplošena Weierstrassova krivulja podana s predpisom $y^2 + xy = x^3 + 1$. S preprostim pregledom vseh možnosti vidimo, da je $\#E(\mathbb{F}_2) = 4$. Izračunajmo sedaj $\#E(\mathbb{F}_4)$. Po trditvi 5.19 moramo $\#E(\mathbb{F}_2)$ zapisati kot $q + 1 - a$. Sledi torej $a = 2 + 1 - 4 = -1$. Polinom je potem oblike

$$X^2 + X + 2 = \left(X - \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}\right).$$

Za število točk na krivulji moramo poračunati še $s_2 = \alpha^2 + \beta^2$, pri čemer si lahko pomagamo z lemo 5.20.

$$s_2 = as_1 - qs_0 = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3$$

Od tod sledi

$$\#E(\mathbb{F}_{2^2}) = 2^2 + 1 - s_2 = 4 + 1 + 3 = 8.$$

Če naštejemo vse točke na $E(\mathbb{F}_4) = \{\infty, (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (3,0), (0,3), (1,3)\}$ vidimo, da je naš rezultat pravilen. Moč trditve 5.19 pa se skriva v velikih potencah.

Če bi na primer želeli izračunati $E(\mathbb{F}_{2^{200}})$ z naštevanjem točk ne bi prišli prav daleč. S pomočjo zgornje trditve in leme pa lahko hitro poračunamo

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\right)^{200} + \left(\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\right)^{200} = -2534943693362688758337590430751,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} E(\mathbb{F}_{2^{200}}) &= 2^{200} + 1 + 2534943693362688758337590430751 \\ &= 1606938044258990275541962092343697546215565682541130425732128. \end{aligned}$$

5.5 Dokaz izreka 5.2

Definicija 5.22. Definirajmo m-ti *deliteljski polinom* $\gamma_m \in \mathbb{Z}[x, y, a, b]$ kot

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0, \\ \gamma_1 &= 1, \\ \gamma_2 &= 2y, \\ \gamma_3 &= 3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2, \\ \gamma_4 &= 4y(x^6 + 5ax^4 + 20bx^3 - 5a^2x^2 - 4abx - 8b^2 - a^3), \\ \gamma_{2m+1} &= \gamma_{m+2}\gamma_m^3 - \gamma_{m-1}\gamma_{m+1}^3, \text{ za } m \geq 2, \\ \gamma_{2m} &= (2y)^{-1}\gamma_m(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2), \text{ za } m \geq 3. \end{aligned}$$

Lema 5.23. *Polinom γ_n je element $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$ za vse lihe n. Za sode n pa je γ_n element $2y\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$.*

Dokaz. Lemo dokažemo s pomočjo indukcije. Za $n \leq 4$ lema očitno velja. Obravnavajmo primera, ko je $n = 2m$ in $n = 2m + 1$ za nek $m \in \mathbb{N}$.

- $n = 2m$: Predpostavimo lahko, da je $2m > 4$, saj vemo, da lema velja za $n \leq 4$, torej je $m > 2$. Potem velja $2m > m + 2$, kar pomeni, da vsi polinomi v definiciji γ_{2m} zadoščajo indukcijski predpostavki. Če je m sodo število, potem se $\gamma_m, \gamma_{m+2}, \gamma_{m-2}$ nahajajo v $2y\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. Od tod pa sledi, da je tudi $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. Če je m lih, potem sta $\gamma_{m-1}, \gamma_{m+1} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. To pa pomeni, da je tudi $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$.

- $n = 2m + 1$: Primer obravnavamo podobno kot $n = 2m$.

□

Definirajmo še polinoma

$$\begin{aligned} \phi_m &= x\gamma_m^2 - \gamma_{m+1}\gamma_{m-1}, \\ \omega_m &= (4y)^{-1}(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2). \end{aligned}$$

Podobno kot pri polinomih γ_m, lahko tudi za ϕ_m in ω_m formuliramo lemo.

Lema 5.24. *Polinom ϕ_n je element $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$, za vse n. Če je n lih, potem je ω_n element v $y\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. Za sode n pa je ω_n element v $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$.*

Dokaz. Če je n lih, potem sta ϕ_{n+1} in ϕ_{n-1} po lemi 5.23 v $y\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. To pomeni, da je njun produkt v $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. Od tod takoj sledi, da je ϕ_n element $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. V primeru, ko je n sodo število, dokaz poteka podobno. Prav tako na podoben način pokažemo $\omega_n \in y^{-1}\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$ v primeru, ko je n liho število. Za sode n pa je potrebno malo več dela. Z indukcijo lahko najprej dokažemo

$$\phi_n \equiv (x^2 + a)^{(n^2-1)/4} \pmod 2, \text{ ko je } n \text{ liho število}$$

in

$$(2y)^{-1}\phi_n \equiv (\frac{n}{2})(x^2 + a)^{(n^2-4)/4} \pmod 2, \text{ ko je } n \text{ sodo število.}$$

S pomočjo tega pa izračunamo

$$\begin{aligned}
\omega_n &= (4y)^{-1}(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2) \\
&\equiv (4y)^{-1}(2y\frac{n+2}{2}(x^2 + A)^{\frac{(n+2)^2-1}{4}+\frac{(n-1)^2-1}{2}} \\
&- 2y\frac{n-2}{2}(x^2 + A)^{\frac{(n-2)^2-1}{4}+\frac{(n+1)^2-1}{2}}) \pmod 2 \\
&\equiv (4y)^{-1}2y(x^2 + A)^{\frac{3n^2}{4}}\left(\frac{n+2}{2} - \frac{n-2}{2}\right) \pmod 2 \\
&\equiv (x^2 + A)^{\frac{3n^2}{4}} \pmod 2
\end{aligned}$$

To pa pomeni, da je tudi za sode n, ω_n element $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$. □

Opomba 5.25. Če bi pri dokazu, da je ω_n element v $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$, za sode n, uporabili zgolj lemo 5.23, bi lahko dokazali le $\omega_n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$.

Predstavimo sedaj $\gamma_m, \omega_m, \phi_m$ kot polinome nad eliptičnimi krivuljami v Weierstrassovi obliki

$$E : y^2 = x^3 + ax + b, \text{ kjer velja } -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0.$$

Polinome v $\mathbb{Z}[x, y^2, a, b]$ lahko gledamo kot polinome v $\mathbb{Z}[x, a, b]$, tako da y^2 nadomestimo z $x^3 + ax + b$.

Opomba 5.26. Polinoma γ_n ni vedno možno predstaviti kot polinom v spremenljivki x, saj je potenca y odvisna od parnosti n. Vseeno pa velja, da lahko γ_n^2 vedno zapišemo kot polinom spremenljivke x.

Izrek 5.27 ([21], Izrek 3.6)**.** *Naj bo $P = (x, y)$ točka na krivulji $y^2 = x^3 + ax + b$, nad poljem s karakteristiko različno od 2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, potem velja*

$$nP = \left(\frac{\phi_n(x)}{\gamma_n^2(x)}, \frac{\omega_n(x, y)}{\gamma_n^3(x, y)}\right).$$

Posledica 5.28. *Naj bo E eliptična krivulja. Endomorfizem E podan kot množenje z n ima stopnjo n^2.*

Brez dokazov formulirajmo še nekaj pomožnih trditev, ki jih bomo potrebovali za dokaz izreka 5.2.

Izrek 5.29 ([21], Izrek 2.22)**.** *Naj bo E eliptična krivulja definirana nad poljem K. Naj bo $\alpha \neq 0$ endomorfizem na E. Potem je $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$ surjektivna preslikava.*

Trditev 5.30 ([21], Trditev 2.28)**.** *Naj bo E eliptična krivulja definirana nad poljem K ter naj bo $n \in \mathbb{N}$. Naj bo množenje z n na E podano z racionalnima funkcijama R_n in S_n, kot v razdelku 5.2,*

$$n(x, y) = (R_n(x), yS_n(x))$$

za vse $(x, y) \in E(\overline{K})$. Potem velja

$$\frac{R_n'(x)}{S_n(x)} = n.$$

Od tod pa sledi, da je množenje z n seperabilno natanko tedaj, ko n ni večkratnik karakteristike polja K.

Sedaj imamo vse kar potrebujemo, da dokažemo izrek 5.2.

Dokaz izreka 5.2. Predpostavimo, da n ni večkratnik karakteristike p polja. Po izreku 5.27 vemo, da ima množenje z n prvo koordinato oblike

$$R(x) = \frac{x^{n^2} + \dots}{n^2 x^{n^2-1} + \dots}.$$

Če poračunamo odvod, v števcu dobimo $n^2 x^{2n^2-2} + \dots$, kar ni identično enako 0. To pomeni, da je množenje z n seperabilno. Jedro množenja z n so torzijske točke $E[n]$. Po posledici 5.28 in izreku 5.9 ima jedro množenja z n red n^2. Iz algebre vemo [3], da so končne Abelove grupe, torej tudi $E[n]$, izomorfne

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k},$$

za neka naravna števila $n_1, n_2, \dots, n_k$, za katere velja $n_i | n_{i+1}$ za vse i. Naj bo l praštevilo, ki deli n_1. Potem $l | n_i$ za vse i. To pa pomeni, da ima $E[l] \subseteq E[n]$ red l^k. Ker ima $E[l]$ red l^2, iz zgoraj povedanega sledi, da je $k = 2$. Množenje z n ima torej jedro $E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$. Veljati pa mora tudi $n_2 | n$. Ker velja $n^2 = \#E[n] = n_1 n_2$, od tod sledi $n_1 = n_2 = n$. Zato velja

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n,$$

ko karakteristika polja ne deli n.

Trditev moramo pokazati še v primeru, ko $p | n$. Po trditvi 5.30 množenje s p ni seperabilno, zato ima po izreku 5.9 jedro $E[p]$ množenja s p red strogo manjši kot je stopnja endomorfizma, ki je p^2 po posledici 5.28. Ker ima vsak element $E[p]$ red 1 ali p, sledi da ima $E[p]$ red potence p. Torej mora biti red 1 ali p. Če je $E[p]$ trivialna, potem je $E[p^k]$ trivialna za vse k. Če ima $E[p]$ red p potem trdimo,

da velja $E[p^k] \simeq \mathbb{Z}_{p^k}$ za vse k. Pokazati moramo, da ima taka grupa red p^k in ne manjšega. Denimo, da obstaja element P reda p^j. Po izreku 5.29 je množenje s p surjektivno. Torej obstaja točka Q, za katero velja $pQ = P$. Ker velja

$$p^j Q = p^{j-1} P \neq \infty \text{ in } p^{j+1} Q = p^j P = \infty,$$

ima Q red p^{j+1}. Z indukcijo lahko pokažemo, da na krivulji obstajajo točke reda p^k za vse k. Ker za vse $i < j$ velja $E[p^i] \subsetneq E[p^j]$, v $E[p^k]$ obstaja točka reda p^k. To pa pomeni, da je $E[p^k]$ ciklična. Zato je $E[p^k]$ ciklična reda p^k.

Zapišimo sedaj $n = p^r n'$, $r \geq 0$ in $p \nmid n'$. Potem velja

$$E[n] \simeq E[n'] \oplus E[p^r].$$

Po zgoraj dokazanem lahko zapišemo $E[n'] \simeq Z_{n'} \oplus Z_{n'}$, ker $p \nmid n'$. Vemo, da velja zveza

$$\mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{p^r} \simeq \mathbb{Z}_{n'p^r} \simeq Z_n.$$

Od tod pa sledi

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'} \text{ ali } \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{n'}.$$

□

6 Weilovo parjenje

Parjenja eliptičnih krivulj [21] so uporabna za konstrukcijo različnih kriptografskih sistemov, prav tako pa imajo pomembno vlogo pri napadih na problem diskretnega logaritma nad gladkimi kubičnimi krivuljami, kateremu bomo posvetili nadaljna poglavja.

Definicija 6.1. Naj bo K polje in naj bo $n \in \mathbb{N}$ tak, da karakteristika K ne deli n.

$$\mu_n = \{x \in \overline{K} | x^n = 1\}$$

je *grupa n-tih korenov enote* $\overline{K}$.

Izrek 6.2. *Naj bo E eliptična krivulja definirana nad poljem K, in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Predpostavimo, da karakteristika polja K ne deli n. Potem obstaja Weilovo parjenje*

$$e_n : E[n] \times E[n] \to \mu_n,$$

za katerega velja:

- *e_n je bilinearna v obeh spremenljivkah*

  $$e_n(S_1 + S_2, T) = e_n(S_1, T)e_n(S_2, T)$$

  in

  $$e_n(S, T_1 + T_2) = e_n(S, T_1)e_n(S, T_2)$$

  za vse $S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 \in E[n]$.

- *e_n je neizrojeno v obeh spremenljivkah. To pomeni, $e_n(S, T) = 1$ za vse $T \in E[n]$ natanko tedaj, ko je $S = \infty$.*

- *$e_n(T, T) = 1$ za vse $T \in E[n]$.*

- *$e_n(T, S) = e_n(S, T)^{-1}$ za vse $S, T \in E[n]$.*

- *$e_n(\rho S, \rho T) = \rho(e_n(S, T))$ za vse avtomorfizme ρ na $\bar{K}$, za katere je ρ identiteta na koeficientih enačbe za E.*

- *$e_n(\alpha(S), \alpha(T)) = e_n(S, T)^{\,deg(\alpha)}$ za vse separabilne endomorfizme α polja E.*

Posledica 6.3. *Naj bosta T_1, T_2 baza za $E[n]$. Potem je $e_n(T_1, T_2)$ generator grupe μ_n.*

Dokaz. Vemo, da za poljubni točki T_1, T_2 v $E[n]$ velja $e_n(T_1, T_2)^n = 1$, saj se slika parjenja nahaja v grupi n-tih korenov enote. Pokazati moramo torej, da če za neko število d velja $e_n(T_1, T_2)^d = 1$, potem od tod sledi, da je $d \geq n$. Recimo torej, da je $e_n(T_1, T_2) = \zeta$ in $\zeta^d = 1$. Po prvi točki izreka 6.2 velja

$$e_n(T_1, dT_2) = e_n(T_1, T_2)^d = 1.$$

Prav tako velja $e_n(T_2, dT_2) = e_n(T_2, T_2)^d = 1$. Naj bo $S \in E[n]$, potem iz $S = aT_1 + bT_2$ za neka $a, b \in \mathbb{N}$, s ponovno uporabo izreka 6.2 dobimo

$$e_n(S, dT_2) = e_n(T_1, dT_2)^a e_n(T_2, dT_2)^b = 1.$$

Ker to velja za vsak S, iz druge točke izreka 6.2 sledi, da je $dT_2 = \infty$. To pa je možno le, če $n|d$, kar pomeni, da je $n \leq d$. □

Posledica 6.4. *Če je $E[n] \subseteq E(K)$, potem je $\mu_n \subset K$.*

Dokaz. Naj bo ρ tak avtomorfizem $\overline{K}$, da je ρ indentiteta na elementih K. Naj T_1, T_2 tvorita bazo $E[n]$. Ker imata po predpostavki točki koordinate v K, zanju velja $\rho T_1 = T_1,\ \rho T_2 = T_2$. Po izreku 6.2 velja

$$\zeta = e_n(T_1, T_2) = e_n(\rho T_1, \rho T_2) = \rho(e_n(T_1, T_2)) = \rho(\zeta).$$

Osnovni izrek Galoisove teorije [14] pa pravi, če je $x \in \overline{K}$ fiksen za vse avtomorfizme ρ, ki delujejo kot identiteta na elementih K, potem je $x \in K$. Torej je $\zeta \in K$. Ker pa je ζ primitivni koren enote, od tod sledi $\mu_n \subset K$.

□

Pred dokazom izreka 6.2 bomo potrebovali še eno trditev.

Trditev 6.5 ([21], Trditev 9.34)**.** *Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K. Naj bo f funkcija, ki elementu iz E priredi element v $\overline{K} \cup \{\infty\}$, ter naj bo $n \in \mathbb{N}$ število, ki ni deljivo s karakteristiko K. Če velja $f(P+T) = f(P)$ za vse $P \in E(\overline{K})$ in $T \in E[n]$, potem obstaja funkcija h na E, za katero velja*

$$f(P) = h(nP),\ \textit{za vse } P.$$

Dokaz izreka 6.2. Naj bo $T \in E[n]$. Po izreku 4.11 obstaja funkcija f, za katero velja

$$\operatorname{div}(f) = n[T] - n[\infty]. \tag{6.1}$$

To drži, ker je $D = n[T] - n[\infty]$ delitelj za katerega velja $\deg(D) = 0$. Prav tako pa velja $\operatorname{sum}(D) = \infty$, ker se nahajamo v $E[n]$. Izberimo sedaj še točko $T' \in E[n^2]$, za katero velja $nT' = T$. Pokazati želimo, da obstaja funkcija g, tako da velja

$$\operatorname{div}(g) = \sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R]).$$

Preden lahko uporabimo izrek 4.11 moramo preveriti vse potrebne predpostavke izreka. Veljati mora torej

$$\operatorname{sum}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \infty$$

in

$$\deg(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = 0.$$

Po izreku 5.2 je $E[n]$ izomorfna $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$. To pomeni, da $E[n]$ vsebuje n^2 različnih točk. Velja torej

$$\operatorname{sum}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \sum_{R \in E[n]} T' + R - R = \sum_{R \in E[n]} T' = n^2 T' = nT = \infty.$$

Podobno preverimo še, da velja $\deg(\sum_{R \in E[n]}([T' + R] - [R])) = 0$. Torej po izreku 4.11 funkcija g obstaja. Označimo s $f \circ n$ funkcijo, ki točko pomnoži z n in

nato na njenem rezultatu izračuna f. Točke $P = T' + R$, kjer je $R \in E[n]$, so točke za katere velja $nP = T$. Iz 6.1 in definicije preslikav med delitelji [16, str. 29] sledi

$$\operatorname{div}(f \circ n) = n\left(\sum_{R \in E[n]} [T' + R]\right) - n\left(\sum_{R \in E[n]} [R]\right) = \operatorname{div}(g^n).$$

Iz definicije delitelja funkcije sledi, da je funkcija $f \circ n$ oblike g^n pomnožene z neko konstanto. Če za nov f vzamemo ta f pomnožen s primerno konstanto, potem lahko predpostavimo, da velja

$$f \circ n = g^n.$$

Naj bo $S \in E[n]$, ter naj bo $P \in E(\overline{K})$. Potem velja

$$g(P + S)^n = f(n(P + S)) = f(nP) = g(P)^n.$$

Zaradi tega velja $g(P + S)/g(P) \in \mu_n$. Tako lahko sedaj definiramo Weilovo parjenje kot

$$e_n(S, T) = \frac{g(P + S)}{g(P)}.$$

Ta definicija je dobra, ker je g zaradi lastnosti delitelja določen do skalarja natančno, torej je definicija neodvisna od izbire g. Prav tako pa je definicija neodvisna od izbire P, vendar je obrazložitev bolj zahtevna in je ne bomo navedli. Lahko jo najdemo v [16].

Sedaj, ko smo uspešno definirali Weilovo parjenje, moramo preveriti, da zanj veljajo lastnosti 1-6.

1. Ker je definicija neodvisna od izbire točke P, lahko uporabimo P in $P + S_1$. Potem je

$$\begin{aligned} e_n(S_1, T)e_n(S_2, T) &= \frac{g(P + S_1)}{g(P)} \frac{g(P + S_1 + S_2)}{g(P + S_1)} \\ &= \frac{g(P + S_1 + S_2)}{g(P)} \\ &= e_n(S_1 + S_2, T). \end{aligned}$$

   Pokazati moramo še, da velja

$$e_n(S, T_1)e_n(S, T_2) = e_n(S, T_1 + T_2).$$

   Dokaz linearnosti v drugi spremenljivki pa je malce težji kot dokaz za prvo spremenljivko. Predpostavimo da so $T_1, T_2, T_3 \in E[n]$ z lastnostjo $T_1 + T_2 = T_3$. Označimo z f_i, g_i funkcije, ki spadajo k definicijam $e_n(S, T_i)$. Po izreku 4.11 obstaja funkcija h, za katero velja

$$\operatorname{div}(h) = [T_3] - [T_1] - [T_2] + [\infty].$$

Enačba 6.1 nam da

$$\operatorname{div}\left(\frac{f_3}{f_1 f_2}\right) = n \operatorname{div}(h) = \operatorname{div}(h^n).$$

Zato obstaja neničelna konstanta $c \in \overline{K}$, tako da velja

$$f_3 = c f_1 f_2 h^n.$$

Od tod pa sledi

$$g_3 = c^{1/n}(g_1)(g_2)(h \circ n).$$

To pa nas končno pripelje do

$$\begin{aligned} e_n(S, T_1 + T_2) &= \frac{g_3(P+S)}{g_3(P)} = \frac{g_1(P+S)}{g_1(P)} \frac{g_2(P+S)}{g_2(P)} \frac{h(n(P+S))}{h(nP)} \\ &= e_n(S, T_1) e_n(S, T_2). \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali $nS = \infty$, od koder sledi $h(n(P+S)) = h(nP)$.

2. Predpostavimo, da $T \in E[n]$, tak da velja $e_n(S, T) = 1$, za vse $S \in E[n]$. To pomeni, da je $g(P+S) = g(P)$ za vse P in $S \in E[n]$. Po trditvi 6.5 obstaja funkcija h, za katero velja $g = h \circ [n]$. Od tod sledi

$$(h \circ n)^n = g^n = f \circ n.$$

Ker je množenje z n surjektivno na $E(\overline{K})$, od tod sledi $h^n = f$. To pa pomeni

$$n \operatorname{div}(h) = \operatorname{div}(f) = n[T] - n[\infty],$$

kar dokaže, da je $\operatorname{div}(h) = [T] - [\infty]$. Po izreku 4.11 pa od tod sledi $T = \infty$. S tem smo dokazali eno polovico točke 2, druga polovica pa avtomatično sledi iz tega ter uporabe točke 4.

3. Označimo s τ_{jT} točko jT. V tem primeru $f \circ \tau_{jT}$ označuje funkcijo $P \mapsto f(P + jT)$. Delitelj te funkcije je torej $n[T - jT] - n[-jT]$. Zaradi tega velja

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}) = \sum_{j=0}^{n-1} (n[(1-j)T] - n[-jT]) \\ &= n[T] - n[-T] + n[-T] - n[-2T] + \cdots + n[(-n+2)T] - n[(-n+1)T] \\ &= n[T] - n[(-n+1)T] = n[T] - n[-nT + T] = n[T] - n[\infty + T] \\ &= n[T] - n[T] = 0 \end{aligned}$$

To pomeni, da je funkcija $\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}$ konstantna, n-ta potenca funkcije $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$ pa je ravno produkt f komponirane z n:

$$\begin{aligned}(\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'})^n &= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ n \circ \tau_{jT'} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}.\end{aligned}$$

To pa tudi pomeni, da je funkcija $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$ konstantna. Torej lahko namesto točke P vanjo vstavimo točko $P + T'$ in dobimo

$$\prod_{j=0}^{n-1} g(P + T' + jT') = \prod_{j=0}^{n-1} g(P + jT').$$

Ko okrajšamo levo in desno stran, dobimo

$$g(P + nT') = g(P).$$

Ker pa velja $nT' = T$, to ravno pomeni

$$e_n(T, T) = \frac{g(P + T)}{g(P)} = 1.$$

4. Iz točke 1. in 3. sledi

$$\begin{aligned}1 &= e_n(S + T, S + T) = e_n(S, S)e_n(S, T)e_n(T, S)e_n(T, T) \\ &= e_n(S, T)e_n(T, S).\end{aligned}$$

S tem smo dokazali, da je

$$e_n(T, S) = e_n(S, T)^{-1}.$$

5. Naj bo ρ avtomorfizem na $\overline{K}$, za katerega velja, da je ρ identiteta na koeficientih E. Če z ρ delujemo na vsakem koraku konstrukcije Weilovega parjenja, dobimo

$$\operatorname{div}(f^\rho) = n[\rho T] - n[\infty],$$

ter podobno za g^ρ. Tu f^ρ, g^ρ označujeta funkciji, ki ju dobimo tako, da ρ deluje na koeficiente racionalnih funkcij, v definicijah f, g. Zato velja

$$\rho(e_n(S, T)) = \rho\left(\frac{g(P + S)}{g(P)}\right) = \frac{g^\rho(\rho P + \rho S)}{g^\rho(\rho P)} = e_n(\rho S, \rho T).$$

6. Naj bo $\{Q_1, \ldots, Q_k\} = Ker(\alpha)$. Ker je α seperabilen, po izreku 5.9 velja $k = \deg(\alpha)$. Naj bo

$$\mathrm{div}(f_T) = n[T] - n[\infty], \quad \mathrm{div}(f_{\alpha(T)}) = n[\alpha(T)] - n[\infty]$$

in

$$g_T^n = f_T \circ n, \; g_{\alpha(T)}^n = f_{\alpha(T)} \circ n.$$

Če uporabimo oznako τ_Q iz točke 3., velja

$$\mathrm{div}(f_t \circ \tau_{-Q_i}) = n[T + Q_i] - n[Q_i].$$

Zato velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f_{\alpha(T)} \circ \alpha) &= n \sum_{T'', \alpha(T'') = \alpha(T)} [T''] - n \sum_{Q, \alpha(Q) = \infty} [Q] \\
&= n \sum_i ([T + Q_i] - [Q_i]) \\
&= \mathrm{div}\left(\prod_i (f_T \circ \tau_{-Q_i}) \right).
\end{aligned}$$

Za vsak i sedaj izberemo Q_i', tako da velja $nQ_i' = Q_i$. Potem je

$$g_T(P - Q_i')^n = f_T(nP - Q_i).$$

Za to funkcijo velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\prod_i (g_T \circ \tau_{-Q_i'})^n) &= \mathrm{div}(\prod_i f_T \circ \tau_{-Q_i} \circ n) \\
&= \mathrm{div}(f_{\alpha(T)} \circ \alpha \circ n) \\
&= \mathrm{div}(f_{\alpha(T)} \circ n \circ \alpha) \\
&= \mathrm{div}(g_{\alpha(T)} \circ \alpha)^n.
\end{aligned}$$

Delitelja $\prod_i g_T \circ \tau_{-Q_i'}$ in $g_{\alpha(T)} \circ \alpha$ se torej razlikujeta samo za nek konstantni faktor.

Velja

$$\begin{aligned}
e_n(\alpha(S), \alpha(T)) &= \frac{g_{\alpha(T)}(\alpha(P + S))}{g_{\alpha(T)}(\alpha(P))} \\
&= \prod_i \frac{g_T(P + S - Q_i')}{g_T(P - Q_i')} \\
&= \prod_i e_n(S, T) \\
&= e_n(S, T)^k = e_n(S, T)^{\deg(\alpha)}.
\end{aligned}$$

□

6.1 Učinkovit algoritem za izračun Weilovega parjenja

Leta 1986 je Victor Miller objavil algoritem za učinkovit izračun Weilovega parjenja [13] .

Izrek 6.6. *Naj bo E eliptična krivulja in naj bosta $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$ točki različni od ∞, ki ležita na E.*

1. *Označimo z λ naklon premice, ki povezuje točki P in Q. V primeru, da sta točki enaki, naj λ predstavlja naklon tangente v točki. Če pa je premica navpična ($x_P = x_Q$), potem privzamemo, da je $\lambda = \infty$. Definirajmo funkcijo $g_{P,Q}$ na sledeči način:*

$$g_{P,Q} = \begin{cases} \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2} & \text{če } \lambda \neq \infty, \\ x - x_P & \text{sicer.} \end{cases}$$

   Potem velja

$$div(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P + Q] - [\infty].$$

2. *(Millerjev algoritem) Naj bo $m \geq 1$. Zapišimo m v binarnem kot*

$$m = m_0 + m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2^2 + \ldots + m_{n-1} \cdot 2^{n-1},$$

   kjer so $m_i \in \{0, 1\}$ in $m_{n-1} \neq 0$. Potem algoritem 2 vrne funkcijo f_P, za katero velja

$$div(f_P) = m[P] - [mP] - (m - 1)[\infty].$$

Algoritem 2 Millerjev algoritem

Vhod: število m podano v binarnem zapisu, točka P na eliptični krivulji
Izhod: funkcija f_P
$T = P, f = 1$
for $i = n - 2 : 0$ **do**
  $f = f^2 \cdot g_{T,T}$
  $T = 2T$
  if $m_i = 1$ **then**
    $f = f \cdot g_{T,P}$
    $T = T + P$
  end if
end for

Dokaz. 1. Predpostavimo najprej, da $\lambda \neq \infty$, ter naj $y = \lambda x + \mu$ predstavlja premico skozi P, Q (ali tangento v primeru ko je $P = Q$). Taka premica seka krivuljo E v treh točkah $P, Q, -P - Q$. To sledi iz definicije strukture grupe nad E. Za to premico torej velja

$$\text{div}(y - \lambda x - \mu) = [P] + [Q] + [-P - Q] - 3[\infty],$$

saj je točka ∞ nevtralni element. Navpične premice pa sekajo E v neki točki P in $-P$. Torej velja

$$\text{div}(x - x_{P+Q}) = [P + Q] + [-P - Q] - 2[\infty].$$

Od tod sledi, da ima funkcija

$$g_{P,Q} = \frac{y - \lambda x - \mu}{x - x_{P+Q}}$$

željen delitelj

$$\mathrm{div}(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P+Q] - [\infty].$$

Z uporabo formul za seštevanje točk 3.15, dobimo $x_{P+Q} = \lambda^2 - x_P - x_Q$. Prav tako pa lahko izrazimo μ kot $\mu = y_P - \lambda x_P$. Od tod dobimo

$$g_{P,Q} = \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2}.$$

V primeru, da velja $\lambda = \infty$, potem je $P + Q = \infty$. V tem primeru želimo dobiti delitelj oblike $\mathrm{div}(g_{P,Q}) = [P] + [-P] - 2[\infty]$. Tak delitelj pa ima ravno funkcija $x - x_P$.

2. Dokažemo s pomočjo indukcije, pri čemer upoštevamo $\mathrm{div}(g_{T,T}) = 2[T] - [2T] - [\infty]$ in $\mathrm{div}(g_{T,P}) = [T] + [P] - [T+P] - [\infty]$. Preverimo algoritem na primeru $m = 3$. Binarni zapis m je 11. Sledimo korakom algoritma 2,

$$f = f^2 \cdot g_{T,T} = g_{P,P}.$$

Ker je v tem primeru $m_0 = 1$, moramo f popraviti v $f = f \cdot g_{T,P}$. To nam da

$$f = g_{P,P} \cdot g_{2T,P}.$$

Iz zgornjih zvez dobimo

$$\mathrm{div}(f) = 2[P] - [2P] - [\infty] + [2P] + [P] - [2P+P] - [\infty] = 3[P] - [3P] - 2[\infty],$$

kar smo želeli.

□

S pomočjo izreka 6.6 lahko sedaj izračunamo Weilovo parjenje $e_m(P,Q)$ kot

$$e_m(P,Q) = \frac{\frac{f_P(Q+S)}{f_P(S)}}{\frac{f_Q(P-S)}{f_Q(-S)}}.$$

Tu moramo za točko S izbrati $S \notin \{\infty, P, -Q, P-Q\}$.

Primer 6.7. Naj bo $y^2 = x^3 + 30x + 34$ eliptična krivulja nad poljem $\mathbb{F}_{631}$. Izberimo točki $P = (36, 60)$ in $Q = (121, 387)$. Izračunati želimo Weilovo parjenje $e_5(P,Q)$

Če želimo uporabiti Millerjev algoritem, moramo izbrati točko S iz izreka 6.2. Izberimo $S = (0, 36)$. Hitro lahko preverimo, da S res zadošča kriterijem izbire. Za izračun $e_5(P,Q)$ moramo izračunati f_P, f_Q v dveh različnih točkah. Poglejmo si podrobnejši izračun za $f_P(S)$.

V prvem koraku, moramo izračunati $g_{P,P}(S)$. Po vseh potrebnih izračunih dobimo

$$\text{naklon} = 569,\ \text{števec} = 268,\ \text{imenovalec} = 14.$$

Od tod sledi $g_{P,P}(S) = 560$. Ker velja $m_1 = 0$, po prvem koraku dobimo $f = 560$ in $T = 2P$. V drugem koraku poračunamo $g_{2P,2P}(S)$, kjer kot rezultat dobimo 399. Vrednost f pa moramo popraviti na 362. V tem koraku namreč velja $m_0 = 1$, torej moramo poračunati še $g_{4P,P}(S)$. Premica med P in $4P$ je navpična, zato uporabimo drugo vejo funkcije g. Kot rezultat dobimo $g_{4P,P}(S) = 595$. Še zadnjič popravimo f in kot končni rezultat dobimo $f_P(S) = 219$.

Na podoben način izračunamo še ostale vrednosti ter dobimo

$$\frac{f_P(Q+S)}{f_P(S)} = \frac{103}{219} = 473,$$
$$\frac{f_Q(P-S)}{f_Q(-S)} = \frac{284}{204} = 88.$$

Končni rezultat je torej

$$e_5(P,Q) = \frac{473}{88} = 242.$$

7 Problem diskretnega logaritma

Diffe-Hellmanova izmenjava ključev je postopek, pri katerem se dve osebi npr. Alenka in Boris dogovorita za skrivni ključ. To naredita tako, da tudi v primeru, ko njun pogovor posluša tretji nepovabljeni gost npr. Ciril, le ta iz pogovora ne more rekonstruirati Alenkinega in Borisovega ključa.

Algoritem 3 Diffie-Hellmanova izmenjava ključev.

1. Alenka in Boris se (javno) dogovorita za eliptično krivuljo E nad končnim obsegom $\mathbb{F}_q$, ter za točko $P \in E(\mathbb{F}_q)$.
2. Alenka se naključno odloči za skrivno število $a \in \mathbb{N}$, in izračuna $P_a = aP$, ter to pošlje Borisu. Pri tem red točke P ne sme biti enak a.
3. Boris se naključno odloči za skrivno število $b \in \mathbb{N}$, in izračuna $P_b = bP$, ter to pošlje Alenki. Pri tem red točke P ne sme biti enak b.
4. Alenka izračuna $aP_b = abP$.
5. Boris izračuna $bP_a = baP$.
6. Skupni ključ je abP.

Kot sam ključ bi lahko na koncu Alenka in Boris uporabila npr. zadnjih 256 bitov x-koordinate točke abP. Tu se zanašamo na to, da je iz $E, \mathbb{F}q, P, P_a, P_b$ težko izračunati baP, kar pa je odvisno od same izbire krivulje E.

To nas privede do tako imenovanega problema diskretnega logaritma v grupi točk nad eliptičnimi krivuljami. Definirajmo najprej problem diskretnega logaritma v splošni grupi G.

Definicija 7.1. Naj bo G grupa, kjer njeno operacijo označimo z $\circ$. Naj bosta $a, b \in G$. Naj b^k označuje

$$b^k = \underbrace{b \circ b \circ \cdots \circ b}_{k\text{-krat}}.$$

Število $k \in \mathbb{N}$, ki reši enačbo

$$b^k = a$$

imenujemo *diskretni logaritem* elementa a pri osnovi b.

Problem diskretnega logaritma je torej poiskati tak k, ki bo rešil dano enačbo. V našem primeru, kjer je imamo grupo točk na neki krivulji E, lahko problem diskretnega logaritma zapišemo kot:

Naj bosta $P, Q \in E$. Iščemo tak k, da bo veljalo $kP = Q$.

Trditev 7.2. *Če znamo rešiti problem diskretnega logaritma, potem smo rešili tudi problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev. Povedano drugače velja*

$$DL \Rightarrow DH.$$

Dokaz. Problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev lahko enostavno prevedemo na problem diskretnega logaritma na sledeč način:

- Vzemi aP in izračunaj a tako, da rešiš problem diskretnega logaritma.
- Izračunaj $a(bP)$.

□

Poleg klasičnega problema diskretnega logaritma lahko formuliramo tudi odločitveni problem diskretnega logaritma. Ta je, ali znamo pri danih podatkih P, aP, bP, Q in $E(F_q)$ preveriti, če velja $Q = abP$. Povedano drugače, če dobimo namig, ki vsebuje abP, ali lahko preverimo, če ta informacija drži.

Poglejmo si na primeru, kako lahko s pomočjo Weilovega parjenja v določenih primerih pridemo do rešitve tega problema.

Primer 7.3. Naj bo E podana z enačbo $y^2 = x^3 + 1$ nad $\mathbb{F}_q$, kjer je $q \equiv 2 \pmod 3$. Naj bo $\omega \in \mathbb{F}_{q^2}$ primitivni tretji koren enote. Opazimo, da $\omega \notin \mathbb{F}_q$, saj je red $\mathbb{F}_q^\times$ enak $q - 1$, kar pa ni deljivo s tri. Definirajmo preslikavo

$$\beta : E(\overline{\mathbb{F}_q}) \to E(\overline{\mathbb{F}_q}),\ (x, y) \mapsto (\omega x, y),\ \beta(\infty) = \infty.$$

Preverimo lahko, da je tako podana preslikava izomorfizem. Denimo, da ima $P \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$ red n. Potem iz lastnosti izomorfizmov sledi, da ima tudi $\beta(P)$ red n. Definirajmo modificirano Weilovo parjenje

$$e'_n(P_1, P_2) = e_n(P_1, \beta(P_2)),$$

kjer je e_n običajno Weilovo parjenje in $P_1, P_2 \in E[n]$.

Predpostavimo sedaj, da poznamo P, aP, bP, Q in želimo preveriti ali velja $Q = abP$. Najprej preverimo, če je Q večkratnik P. Po trditvi 8.1 bo to res natanko tedaj, ko je $e_n(P, Q) = 1$. Predpostavimo, da velja $Q = tP$ za nek $t \in \mathbb{N}$. Potem imamo

$$e'_n(aP, bP) = e'_n(P, P)^{ab} = e'_n(P, abP),$$

ter

$$e'_n(Q, P) = e'_n(P, P)^t.$$

Če predpostavimo da $3 \nmid n$, potem je $e'_n(P, P)$ n-ti koren enote. To pa pomeni,

$$Q = abP \iff t \equiv ab \pmod n \iff e'_n(aP, bP) = e'_n(P, P)^t.$$

V zgornjem primeru je potrebna še dodatna utemeljitev, ki jo lahko zapišemo kot lemo.

Lema 7.4. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ število, ki ni deljivo s 3. Če ima $P \in E(\mathbb{F}_q)$ red n, potem je $e'_n(P, P)$ n-ti koren enote.*

Dokaz. Naj bo $uP = v\beta(P)$ za neki števili u, v. Potem zaradi lastnosti izomorfizmov velja

$$\beta(vP) = v\beta(P) = uP \in E(\mathbb{F}_q).$$

Ločimo dva primera.

- Če je $vP = \infty$, potem iz definicije β sledi $uP = \infty$. To pa pomeni, da je $u \equiv 0 \pmod{n}$.
- Če velja $vP \neq \infty$, potem zapišimo $vP = (x, y)$, kjer sta $x, y \in \mathbb{F}_q$. Dobimo

$$(\omega x, y) = \beta(vP) \in E(\mathbb{F}_q).$$

  Ker $\omega \notin \mathbb{F}_q$, mora veljati $x = 0$. Torej je točka vP oblike $(0, \pm 1)$. Take točke pa imajo red tri, kar lahko izpeljemo iz definicije grupe. To pa ni možno, saj smo predpostavili, da $3 \nmid n$.

V obeh primerih mora torej veljati $u, v \equiv 0 \pmod{n}$. Od tod pa sledi, da sta P in $\beta(P)$ baza $E[n]$. Po posledici 6.3 to pomeni, da je $e'_n(P, P)$ n-ti koren enote.

□

7.1 Izračun indeksa

Izračun indeksa je postopek s pomočjo katerega lahko rešimo problem diskretnega logaritma v polju $\mathbb{F}_p$. Pri metodi si najprej izberemo množico majhnih praštevil, ki jo poimenujemo baza faktorizacije. Označimo to množico z $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_B\}$. Prvi korak izračuna indeksa je, izračunati diskretne logaritme vseh elementov baze. V drugem koraku pa nato s pomočjo baze izračunamo diskretni logaritem za poljuben element.

Poglejmo si sedaj podrobneje prvi korak tega algoritma. Da poračunamo diskretne logaritme baze pri osnovi α najprej sestavimo vsaj B enačb oblike

$$\alpha^{x_j} \equiv p_1^{a_{1j}} \ldots p_B^{a_{B_j}} \pmod{p},$$

$1 \leq j \leq B$. Te enačbe so ekvivalentne enačbam oblike

$$x_j \equiv a_{1j} \log_\alpha p_1 + \ldots + a_{B_j} \log_\alpha p_B \pmod{p-1}.$$

Če smo enačbo primerno izbrali, potem bo imel sistem enolično rešitev modulo $p-1$. To pa ravno pomeni, da smo našli diskretne logaritme baze. Vprašanje je torej še, kako generiramo te enačbe. Eden iz med načinov je, da izberemo naključno število x, ter poračunamo $\alpha^x \pmod{p}$. Za tem pa preverimo, če ima dobljeno število vse faktorje v bazi.

Zaradi drugega koraka v algoritmu, lahko uvrstimo izračun indeksa pod algoritme tipa Las Vegas, saj naključno izberemo število $1 \leq s \leq p-2$, ter izračunamo $\gamma \equiv \beta\alpha^s \pmod{p}$. V tej enačbi je β število katerega diskretni logaritem nas zanima. Sedaj pa γ poskusimo zapisati kot produkt faktorjev iz baze. Denimo, da lahko zapišemo

$$\beta\alpha^s \equiv p_1^{c_1} \ldots p_B^{c_B} \pmod{p}.$$

To lahko prepišemo v obliko

$$\log_\alpha \beta + s \equiv c_1 \log_\alpha p_1 + \ldots + c_B \log_\alpha p_B \pmod{p-1}.$$

V tem zapisu pa poznamo vse spremenljivke, razen $\log_\alpha \beta$.

Poglejmo si, kako algoritem deluje na primeru.

Primer 7.5. Naj bo $p = 1217$ praštevilo in naj bo $g = 3$ generator ciklične grupe $\mathbb{F}_p^\times$. Za $h = 37$ želimo rešiti problem diskretnega logaritma. Naj $L(x)$ označuje diskretni logaritem x pri osnovi b, torej

$$g^{L(x)} \equiv x \pmod{p}.$$

Izberimo si bazo praštevil $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Pri tem upoštevamo, da bo večja baza pomenila več računanja, a hkrati lažjo pot do odgovora. Iščemo možne x tako, da bo

$$3^x \equiv \pm\text{produkt praštevil iz baze} \mod 1217.$$

Ob iskanju takih x najdemo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned}
3^1 &\equiv 3 \pmod{1217},\\
3^{24} &\equiv -2^2 \cdot 7 \cdot 13 \pmod{1217},\\
3^{25} &\equiv 5^3 \pmod{1217},\\
3^{30} &\equiv -2 \cdot 5^2 \pmod{1217},\\
3^{54} &\equiv -5 \cdot 11 \pmod{1217},\\
3^{87} &\equiv 13 \pmod{1217}.
\end{aligned}$$

Z večjo bazo bi v tem primeru lažje našli take enačbe, a bi jih hkrati potrebovali več. Z uporabo malega Fermatovega izreka velja

$$3^{1216} \equiv 1 \equiv (-1)^2 \mod 1217,$$

od koder sledi $L(-1) \equiv 608 \mod 1216$. Če enačbe sedaj zapišemo z uporabo logaritmom, dobimo:

$$\begin{aligned}
1 &\equiv L(3) \pmod{1216},\\
24 &\equiv 608 + 2L(2) + L(7) + L(13) \pmod{1216},\\
25 &\equiv 3L(5) \pmod{1216},\\
30 &\equiv 608 + L(2) + 2L(5) \pmod{1216},\\
54 &\equiv 608 + L(5) + L(11) \pmod{1216},\\
87 &\equiv L(13) \pmod{1216}.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo $L(2) = 216$, $L(11) = 1059$, $L(7) = 113$, $L(5) = 819$, $L(13) = 87$ in $L(3) = 1$. Sedaj poračunamo še $3^j \cdot 37$ za različne j, dokler ne dobimo $3^j \cdot 37 \equiv$ produkt elementov iz baze. Pri vrednosti $j = 16$ dobimo

$$3^{16} \cdot 37 \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \pmod{1217}.$$

Spomnimo se, da iščemo $L(37)$. Iz definicije L pa velja

$$3^{L(37)} \equiv 37 \pmod{1217} \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3^{-16} \pmod{1217}.$$

Če sedaj namesto baze vstavimo ustrezne L, dobimo

$$3^{L(37)} \equiv 3^{3L(2)} \cdot 3^{L(7)} \cdot 3^{L(11)} \cdot 3^{-16L(3)} \pmod{1217}.$$

Sedaj lahko $L(37)$ zapišemo kot

$$L(37) \equiv 3L(2) + L(7) + L(11) - 16L(3) \pmod{1216} \equiv 588 \pmod{1216}.$$

Torej je naš iskani $k = 588$.

Časovna zahtevnost algoritma je $O(e^{(1+o(1))\sqrt{\ln p \ln\ln p}})$ [17].

8 MOV

MOV napad, poimenovan po njegovih avtorjih Menezes, Okamoto in Vanstone, s pomočjo Weilovega parjenja pretvori problem diskretnega logaritma iz $E(\mathbb{F}_q)$ v problem diskretnega logaritma nad $\mathbb{F}_{q^m}^{\times}$ [21]. Na ta način se izognemo računanju nad krivuljo. Nov problem diskretnega logaritma pa lahko rešimo z različnimi napadi, med drugim tudi z napadom izračun indeksa 7.1 [21]. MOV napad deluje, če velikost polja $\mathbb{F}_{q^m}$ ni dosti večja od velikosti polja $\mathbb{F}_q$. Postopek napada sledi poteku dokaza naslednje trditve.

Trditev 8.1. *Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}_q$. Izberimo točki $P, Q \in E(\mathbb{F}_q)$, kjer ima P red N. Predpostavimo, da velja $gcd(N, q) = 1$. Potem obstaja tako število k, da velja $Q = kP$ natanko tedaj, ko je $NQ = \infty$ in $e_N(P, Q) = 1$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Če je $Q = kP$, potem je $NQ = kNP$. Ampak, ker je red P enak N, od tod sledi $kNP = \infty$. Prav tako je

$$e_n(P, Q) = e_n(P, P)^k = 1^k = 1.$$

($\Leftarrow$) Naj bo $NQ = \infty$, torej je po definiciji $Q \in E[N]$. Ker je $\gcd(N, q) = 1$, lahko uporabimo izrek 5.2 in zapišemo $E[N] \cong \mathbb{Z}_N \oplus \mathbb{Z}_n$. Sedaj izberemo točko R tako, da je $\{P, R\}$ baza $E[N]$. Ker P in R tvorita bazo, lahko Q zapišemo kot

$$Q = aP + bR,$$

za neki števili $a, b \in \mathbb{N}$. Po posledici definicije Weilovega parjenja 6.3 velja, da je $e_N(P, R) = \zeta$ generator μ_N. Po predpostavki je $e_N(P, Q) = 1$, torej

$$1 = e_N(P, Q) = e_N(P, P)^a e_N(P, R)^b = \zeta^b.$$

Od tod sledi, da je b večkratnik števila N in zato je $bR = \infty$ ter $Q = aP$. □

Ideja dokaza nam sedaj da korake MOV napada.

Algoritem 4 MOV napad

Vhod: Točki P in Q na eliptični krivulji E.
Izhod: diskretni logaritem k.
Izberi m tako, da

$$E[N] \subset E(\mathbb{F}_{q^m}).$$

Ker imajo vse točke $E[N]$ koordinate v $\overline{\mathbb{F}_q} = \cup_{j \geq 1} \mathbb{F}_{q^j}$ tak m obstaja. Prav tako je μ_N v $\mathbb{F}_{q^m}$. Nato postopaj po naslednjih korakih.

1. Naključno izberi točko $T \in E(\mathbb{F}_{q^m})$.
2. Izračunaj red M točke T.
3. Naj bo $d = \gcd(M, N)$ in naj bo $T_1 = (M/d)T$. Potem ima T_1 red, ki deli N, torej je $T_1 \in E[N]$.
4. Izračunaj $\zeta_1 = e_N(P, T_1)$ in $\zeta_2 = e_N(Q, T_1)$. Tu sta ζ_1 in ζ_2 v $\mu_d \subset \mathbb{F}_{q^m}^{\times}$.
5. Reši problem diskretnega logaritma $\zeta_2 = \zeta_1^k$ v $\mathbb{F}_{q^m}^{\times}$. To nam da $k \mod d$.
6. Ponovi korake 1-5 za različne točke T dokler ni k določen.

MOV napad deluje hitreje, kot če bi reševali problem diskretnega algoritma direktno nad krivuljo, v primeru ko velja

$$k > log^2(p),$$

kjer MOV napad krivuljo $E(\mathbb{F}_p)$ pretvori v grupo $\mathbb{F}_{p^k}^{\times}$.

MOV napad deluje na supersingularnih krivuljah, saj za take krivulje običajno lahko vzamemo $m = 2$.

Definicija 8.2. Eliptična krivulja E v polju s karakteristiko p je *supersingularna*, če je $E[p] \cong 0$.

Izrek 8.3. *Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}_q$, kjer je q potenca nekega praštevila p. Potem velja $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - a$ za neko število a. Krivulja E je supersingularna natanko tedaj, ko velja $a \equiv 0 \pmod p$, kar se zgodi natanko tedaj, ko $\#E(\mathbb{F}_q) \equiv 1 \pmod p$.*

Dokaz. Zapišimo $X^2 - aX + q = (X - \alpha)(X - \beta)$. Trditev 5.19 pravi, da velja

$$\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = q^n + 1 - (\alpha^n + \beta^n).$$

Po lemi 5.20 za $s_n = \alpha^n + \beta^n$ velja rekurzivna zveza

$$s_0 = 2,\ s_1 = a,\ s_{n+1} = as_n - qs_{n-1}.$$

Predpostavimo sedaj, da velja $a \equiv 0 \pmod p$. Potem velja $s_1 = a \equiv 0 \pmod p$ in $s_{n+1} \equiv 0 \pmod p$, za vse $n \geq 1$. Torej velja

$$\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = q^n + 1 - s_n \equiv 1 \pmod p.$$

To pa ravno pomeni, da v $E(\mathbb{F}_{q^n})$ ni točk reda p za noben $n \geq 1$. Ker lahko zapišemo $\overline{\mathbb{F}_q}$ kot $\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{F}_{q^n}$, tudi v $\overline{\mathbb{F}_q}$ nimamo nobene točke reda p. To pa po definiciji supersingularnosti pomeni, da je E supersingularna.

Dokažimo še drugo stran ekvivalence. Predpostavimo, da $a \not\equiv 0 \pmod{p}$. Rekurzivna zveza implicira $s_{n+1} \equiv as_n \pmod{p}$, za $n \geq 1$. Ker je $s_1 = a$, imamo $s_n \equiv a^n \pmod{p}$, za vse $n \geq 1$. Od tod sledi

$$\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = q^n + 1 - s_n \equiv 1 - a^n \pmod{p}.$$

Mali Fermatov izrek nam pove $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Torej ima $E(\mathbb{F}_{q^{p-1}})$ red deljiv s p in zato vsebuje element reda p. To pa ravno pomeni, da E ni supersingularna.

Zadnji del trditve pa sledi iz dejstva, da je

$$\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - a \equiv 1 - a \pmod{p}.$$

Od tod vidimo, da je $\#E(\mathbb{F}_q) \equiv 1 \pmod{p}$ natanko tedaj, ko je $a \equiv 0 \pmod{p}$. □

Opomba 8.4. Izkaže se, da je pri pogoju $q = p \geq 5$ definicija superingularnosti ekvivalentna temu, da je $a = 0$.

Naslednja trditev bo utemeljila izbiro m pri supersingularnih krivuljah.

Trditev 8.5. *Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}_q$, ter naj velja $a = q+1-\#E(\mathbb{F}_q) = 0$. Izberimo $N \in \mathbb{N}$. Če obstaja točka $P \in E(\mathbb{F}_q)$ reda N, potem velja*

$$E[N] \subseteq E(\mathbb{F}_{q^2}).$$

Dokaz. Frobeniusev endomorfizem ϕ_q po izreku 5.18 zadošča enačbi $\phi_q^2 - a\phi_q + q = 0$. Ker velja $a = 0$, to pomeni

$$\phi_q^2 = -q.$$

Naj bo $S \in E[N]$. Ker velja $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1$ in ker obstaja točka reda N, od tod izhaja da $N|q + 1$. Povedano drugače, $-q \equiv 1 \pmod{N}$. Od tod sledi

$$\phi_q^2(S) = -qS = 1 \cdot S.$$

Po lemi 5.10 je torej $S \in E(\mathbb{F}_{q^2})$. □

Primer 8.6. Denimo, da želimo rešiti problem diskretnega logaritma na krivulji $E : y^2 = x^3 + x \pmod{\mathbb{F}_{547}}$, podanega s točkama $P = (67, 481), Q = (167, 405)$. Iščemo tak k, da bo veljalo $P = kQ$.

Najprej moramo prvotno polje razširiti z ustreznim m. Ker je podana krivulja supersingularna, lahko za m izberemo 2. Krivuljo torej razširimo na polje $\mathbb{F}_{547^2}$. Za nerazcepni polinom stopnje 2 vzemimo polinom $x^2 + 543x + 2$. Elementi tega polja so torej polinomi stopnje 1 s koeficienti v $\mathbb{F}_p$. V naslednjem koraku izberemo neko naključno točko T. Denimo, da smo izbrali točko $T = (24x + 219, 273x + 466)$. Z algoritmom 5 sedaj izračunamo red M točke T, in dobimo $M = 274$. Izračunati moramo tudi red N točke P, le ta pa je enak $N = 137$. Največji skupni delitelj števil M in N je 137. Zato dobimo novo točko T_1 kot

$$T_1 = (M/\gcd(M, N))T = (274/137)T = 2T = (440x + 318, 363x + 296).$$

Sedaj s pomočjo Weilovega parjenja poračunamo

$$e_{137}(P, T_1) = 50x + 422,\ e_{137}(Q, T_1) = 416x + 519.$$

Na tem mestu moramo rešiti problem diskretnega logaritma v polju $\mathbb{F}_{547^2}$. To lahko naredimo s posplošitvijo algoritma izračun indeksa na končna polja [10]. Rešitev je 83, kar lahko preverimo. Če poračunamo

$$(50x + 422)^{83} \div (x^2 + 543x + 2),$$

kot ostanek v $\mathbb{F}_{547^2}$ res dobimo polinom $416x + 519$. Postopek z naključno izbranimi T bi morali še nekajkrat ponoviti. Od tod pa bi potem lahko zaključili, da je iskani $k = 83$. Ta rezultat lahko s pomočjo algoritma za seštevanje točk tudi hitro preverimo.

8.1 Mali korak, Velik korak

V tem razdelku bomo opisali, kako izračunamo red točke na ekonomičen način. Trenutno je najhitrejši algoritem za izračun reda točke Schoof–Elkies–Atkinsonov algoritem (SEA) [15]. Tu pa si bomo ogledali nekoliko preprostejši algoritem, ki vseeno predstavlja veliko izboljšanje glede na naiven pristop seštevanja točke same s sebo. Naj bo $P \in E(\mathbb{F}_q)$. Želimo izračunati red točke P. Iščemo torej tako število k, da bo veljalo $kP = \infty$. Algoritem Mali korak, Velik korak lahko izračuna red točke v približno $4q^{\frac{1}{4}}$ korakih. Koraki algoritma so sledeči:

Algoritem 5 Mali korak, Velik korak

Vhod: točka P na eliptični krivulji E.
Izhod: red točke P.

1. Izračunaj $Q = (q + 1)P$.
2. Izberi število m za katero velja $m > q^{\frac{1}{4}}$. Za $j = 0, 1, \ldots, m$ izračunaj in shrani jP.
3. Za $k = -m, -m+1, \ldots, m-1, m$ izračunaj točke $Q + k(2mP)$. V primeru, da se kakšna od teh točk ujema s $\pm jP$, prekini računanje in si zapomni ustrezna k, j.
4. Izračunaj $(q + 1 + 2mk \mp j)P$ in poglej v katerem primeru je to enako ∞. V tem primeru naj bo $M = (q + 1 + 2mk \mp j)$.
5. Faktoriziraj M. Označi faktorje števila M s $p_1, \ldots, p_r$.
6. Izračunaj $(M/p_i)P$, za $i = 1, \ldots r$. Če je $(M/p_i)P = \infty$ za nek i, potem zamenjaj M z M/p_i in pojdi nazaj na korak (5). V nasprotnem primeru je M red točke P.

Opomba 8.7. Algoritem 5 lahko preoblikujemo do te mere, da namesto reda točke izračunamo število točk na krivulji. Za to moramo ponavljati korake (1)-(6) za naključno izbrane točke $P \in E(\mathbb{F}_q)$. Ustavimo se, ko najmanjši skupni večkratnik redov točk deli eno samo število N v območju $q + 1 - 2\sqrt{q} \leq N \leq q + q + 2\sqrt{q}$. To število N je potem število točk na dani krivulji. Pri tem postopku uporabimo Hassejev izrek o številu točk na eliptični krivulji.

Utemeljiti moramo zakaj ta algoritem deluje. Odgovor na to vprašanje pa nam da naslednja lema.

Lema 8.8. *Naj bo G aditivna grupa in naj bo $g \in G$. Denimo da velja $Mg = 0$ za nek $M \in \mathbb{N}$. Označimo s $p_1, \ldots, p_r$ različna praštevila, ki delijo M. Če velja $(M/p_i)g \neq 0$ za vse i, potem je M red g.*

Dokaz. Naj bo k red $g \in G$. Ker velja $Mg = 0$ vemo, da $k|M$. Denimo, da $k \neq M$. Pokazati moramo, da obstaja praštevilo p_i, tako da je $(M/p_i)g = 0$. Naj bo p_i praštevilo, ki deli M/k. Tako število obstaja, ker $M \neq k$. Potem velja $p_i k|M$, to pa pomeni da $k|(M/p_i)$. Ker pa je k red elementa g, mora biti $(M/p_i)g = 0$.

□

Primer 8.9. Vzemimo problem iz prejšnega primera. Zanima nas torej red točke $P = (67, 481)$, ki se nahaja na krivulji $y^2 = x^3 + x \pmod{547}$.

Najprej poračunamo točko $Q = (q + 1)P = 548P = \infty$. Ker je Q točka v neskončnosti, lahko izpustimo iskanje pravega k iz algoritma, saj bo pri $k = 0, j = 0$ veljalo

$$Q + k(2mP) = Q = \infty = jP.$$

Za število M prav tako v obeh primerih dobimo isti rezultat, in sicer $M = 548$. Velja $548 = 2 \cdot 2 \cdot 137$. Pri izvajanju nadaljnih korakov algoritma število M dvakrat delimo z 2, saj velja $274P = \infty$ in $137P = \infty$. Ker pa je 137 praštevilo in $P \neq \infty$, od tod sledi, da je red N točke P je enak 137.

9 Anomalne krivulje

Delovanje MOV temelji na uporabi Weilovega parjenja. Pojavi se torej ideja, da bi konstruirali tako krivuljo, ki vedno da trivialno Weilovo parjenje. S tem bi preprečili MOV napad. Za krivulje s to lastnostjo velja

$$\#E(\mathbb{F}_q) = q.$$

Takim krivuljam rečemo *anomalne krivulje*. V primeru, ko je p praštevilo, je $E[p]$ ciklična grupa, kar pomeni, da bo Weilovo parjenje konstantno enako 1. Vendar pa za tak tip krivulj obstaja napad, ki deluje še hitreje kot MOV. Pokažimo algoritem, ki deluje, če je q praštevilo. Za tak napad bomo morali najprej krivuljo E in točki P, Q razširiti iz $\mathbb{F}_p$ na $\mathbb{Z}$. Pri tem bomo potrebovali naslednjo trditev.

Trditev 9.1. *Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}_p$ in naj bosta $P, Q \in E(\mathbb{F}_p)$. Predpostavimo še, da je krivulja E oblike $y^2 = x^3 + ax + b$. Potem obstajajo cela števila $a', b', x_1, x_2, y_1, y_2$ in eliptična krivulja E' podana z*

$$y^2 = x^3 + a'x + b',$$

ter točke $P' = (x_1, y_1), Q' = (x_2, y_2), \in E'(\mathbb{Q})$. Za ta števila velja

$$a \equiv a',\ b \equiv b',\ P \equiv P',\ Q \equiv Q' \ (mod\ p).$$

Dokaz. Izberi števili x_1 in x_2, ki v $\pmod p$ podajata x-koordinati P in Q. Predpostavimo najprej, da $x_1 \not\equiv x_2 \pmod p$. Nato izberimo y_1 tako, da velja $P' \equiv P \pmod p$. Tu ekvivalenco gledamo po koordinatah. Pri izbiri y_2 moramo biti bolj previdni. Izberimo y_2 tako, da velja

$$y_2^2 \equiv y_1^2 \pmod{x_2 - x_1} \text{ in } (x_2, y_2) \equiv Q \pmod p.$$

To je mogoče, saj lahko uporabimo Kitajski izrek o ostankih, ker velja $gcd(p, x_2 - x_1) = 1$.

Na ta način dobimo dve enačbi s pomočjo katerih določimo konstanti a', b'. Enačbi sta

$$y_1^2 = x_1^3 + a'x_1 + b',$$
$$y_2^2 = x_2^3 + a'x_2 + b'.$$

Rešitev se torej glasi

$$a' = \frac{(y_2^2 - y_1^2) - (x_2^3 - x_1^3)}{x_2 - x_1},\ b' = y_1^2 - x_1^3 - a'x_1.$$

Ker je $y_2^2 - y_1^2$ po konstrukciji deljivo z $x_2 - x_1$ in ker so vse ostale konstante cela števila, sta tudi $a', b' \in \mathbb{Z}$. Točki P', Q' pa ležita na E' po konstrukciji.

Obravnavati moramo še primer, če je $x_1 \equiv x_2 \pmod p$. V tem primeru velja $P = \pm Q$. Izberimo potem $x_1 = x_2$, ter y_1 tako, da nam $y_1 \pmod p$ podaja y-koordinato točke P. Na enak način izberemo še a', ter določimo $b' = y_1^2 - x_1^3 - a'x_1$. Q' pa izberemo kot $\pm P'$.

Preveriti moramo še, da enačba, ki predstavlja E', res podaja eliptično kirvuljo. Ker je krivulja E eliptična, velja

$$4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

To pa pomeni

$$4a'^3 + 27b'^2 \equiv 4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Velja torej $4a'^3 + 27b'^2 \neq 0$, zato je E' res gladka eliptična krivulja. □

Definicija 9.2. Naj bosta a, b tuji celi števili, za kateri velja $a/b \neq 0$. Zapišimo $a/b = p^r a_1/b_1$, kjer $p \nmid a_1 b_1$. Potem je *p-adična vrednost* definirana kot

$$v_p(a/b) = r.$$

Definirajmo še

$$v_p(0) = \infty.$$

Primer 9.3. $\frac{7}{40} = 2^{-3}\frac{7}{5}$, zato velja

$$v_2(7/40) = -3.$$

Enako preverimo

$$v_5(50/3) = 2,\ v_7(1/2) = 0.$$

Naj bo E' eliptična krivulja nad $\mathbb{Z}$ podana z $y^2 = x^3 + a'x + b'$. Naj bo $r \in N$. Potem lahko definiramo

$$E'_r = \{(x, y) \in E'(\mathbb{Q}) | v_p(x) \leq -2r, v_p(y) \leq -3r\} \cup \{\infty\}.$$

Izrek 9.4 ([21], Izrek 5.8)**.** *Naj bo E' podana z $y^2 = x^3 + a'x + b'$, $a', b' \in \mathbb{Z}$. Naj bo p praštevilo in naj bo $r \in \mathbb{N}$. Potem velja*

1. *E'_r je podgrupa $E'(\mathbb{Q})$.*

2. *Če je $(x, y) \in E'(\mathbb{Q})$, potem je $v_p(x) < 0$ natanko tedaj, ko je $v_p(y) < 0$. V tem primeru obstaja število $r \geq 1$, za katero velja $v_p(x) = -2r$ in $v_p(y) = -3r$.*

3. *Preslikava*

$$\begin{aligned} \lambda_r : E'_r/E'_{5r} &\to \mathbb{Z}_{p^{4r}} \\ (x, y) &\mapsto p^{-r}x/y \ (mod\ p^{4r}) \\ \infty &\mapsto 0 \end{aligned}$$

   je injektivni homomorfizem.

4. *Če je $(x, y) \in E'_r$ in hkrati $(x, y) \notin E'_{r+1}$, potem $\lambda_r(x, y) \not\equiv 0 \ (mod\ p)$.*

Potrebovali bomo še preslikavo redukcije po modulu p, definirano s predpisom

$$\begin{aligned} \mathrm{red}_p : E'(\mathbb{Q}) &\to E' \pmod p \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \pmod p \\ E'_1 &\mapsto \{\infty\} \end{aligned}$$

Ta preslikava je homomorfizem z jedrom E'_1.

Vrnimo se sedaj k prvotnemu problemu. Imamo torej anomalno krivuljo E nad poljem $\mathbb{F}_p$. Želimo poiskati k, tako da bo veljalo $Q = kP$. Sledeči algoritem nam vrne rešitev tega problema.

Algoritem 6 Teoretični algoritem nad anomalnimi krivuljami

Vhod: točki P, Q nad eliptično krivuljo E.
Izhod: diskretni logaritem k.

1. Razširi E, P, Q nad $\mathbb{Z}$, kot v trditvi 9.1.
2. Naj bo $P'_1 = pP', Q'_1 = pQ'$.
3. Če je $P'_1 \in E'_2$, izberi nove E', P', Q' in se vrni na korak 2. V nasprotnem primeru je $l_1 = \lambda_1(P'_1), l_2 = \lambda_1(Q'_1)$. Iskani k pa je $k \equiv l_1/l_2 \pmod p$.

Opomba 9.5. Drugi korak algoritma nam zagotavlja, da so $P'_1, Q'_1 \in E'_1$. To je res, ker smo na anomalni krivulji in velja $\mathrm{red}_p(pP') = p \cdot \mathrm{red}_p(P') = \infty$.

Tu je potrebno podati še utemeljitev zakaj tak napad res deluje. Označimo $K' = kP' - Q'$. Potem velja

$$\infty = kP - Q = \mathrm{red}_p(kP' - Q') = red_p(K').$$

To pomeni, da je $K' \in E'_1$. Od tod pa sledi, da je $\lambda_1(K')$ definiran in velja

$$\lambda_1(pK') = p\lambda_1(K') \equiv 0 \pmod p.$$

Torej velja

$$kl_1 - l_2 = \lambda_1(kP'_1 - Q'_1) = \lambda_1(kpP' - pQ') = \lambda_1(pK') \equiv 0 \pmod p.$$

To pa je ravno to, kar smo želeli dokazati. Izkaže se, da je ta algoritem nepraktičen, saj ima x-koordinata točk ponavadi približno p^2 števk. Vendar pa se lahko problemu izognemo tako, da delamo po modulu p^2 namesto v $\mathbb{Q}$. Tako pridemo do novega algoritma

Algoritem 7 Napad na anomalne krivulje

Vhod: točki P, Q nad eliptično krivuljo E.
Izhod: diskretni logaritem k.

1. Razširi E, P, Q nad $\mathbb{Z}$, kot v trditvi 9.1.
2. Izračunaj $P_2' = (p-1)P' \equiv (x', y') \pmod{p^2}$.
3. Izračunaj $Q_2' = (p-1)Q' \equiv (x'', y'') \pmod{p^2}$.
4. Izračunaj
$$m_1 = p\frac{y' - y_1}{x' - x_1},\ m_2 = p\frac{y'' - y2}{x'' - x_2}.$$
5. Če $v_p(m_2) < 0$ ali $v_p(m_1) < 0$ poizkusi na drugi krivulji E'. V nasprotnem primeru je $k \equiv m_1/m_2 \pmod{p}$.

Utemeljitev delovanja algoritma lahko najdemo v [21].

Primer 9.6. Naj bo krivulja E podana z enačbo $y^2 = x^3 + 154x + 82$ nad poljem $\mathbb{F}_{163}$. Naj bosta $P = (7, 6), Q = (150, 152)$ točki na krivulji. Iščemo tak k, da bo veljalo $kP = Q$. Preden uporabimo algoritem 7, se moramo prepričati, da je E res anomalna krivulja. Za točko P velja $163P = \infty$. Ker je 163 praštevilo, od tod sklepamo, da je red točke P enak 163. To pa pomeni, da 163 deli $\#E(\mathbb{F}_{163})$. Hassejev izrek 5.15 nam pove, da velja

$$q + 1 - 2\sqrt{q} \leq \#E(\mathbb{F}_q) \leq q + 1 + 2\sqrt{q},$$
$$139 \leq \#E(\mathbb{F}_{163}) \leq 189.$$

Hkrati pa vemo, da red točke deli red grupe, zato je $\#E(\mathbb{F}_{163}) = 163$. To velja, ker je 163 edino število v zahtevanem območju, ki je deljivo z 163.

Sedaj lahko uporabimo zgornji napad. Razširimo krivuljo in točke nad $\mathbb{Q}$ in dobimo

$$E' : y^2 = x^3 - 11908x + 83049,\ P = (7, 6),\ Q = (150, 1293).$$

Od tod potem poračunamo

$$P2 = 162 \cdot P1 = (12884, 24607) \pmod{26569},$$
$$Q2 = 162 \cdot Q1 = (10908, 3108) \pmod{26569}.$$

Poleg tega imamo

$$m_1 = 163\frac{24607 - 6}{12884 - 7} = \frac{24601}{79},$$
$$m_2 = 163\frac{3108 - 1293}{10908 - 150} = \frac{55}{2} \pmod{26569}.$$

Velja torej

$$k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{49202}{4345} \equiv 47 \pmod{163}.$$

10 Kriptografija nad Eliptičnimi krivuljami

10.1 ElGamalov kriptosistem

Najprej na kratko opišimo pojem javnega in privatnega ključa. V asimetričnih kriptosistemih, kjer imamo za šifriranje in dešifriranje različna ključa, ključ za šifriranje javno objavimo. Na ta način lahko vsak z našim javnim ključem pošlje šifrirano sporočilo, dešifriramo pa ga lahko le z našim privatnim (dešifrirnim) ključem.

ElGamalova enkripcija javnega ključa temelji na problemu diskretnega logaritma. V primeru, da bi rešili problem diskretnega logaritma, bi lahko prebrali tudi vsa poslana sporočila. Oglejmo si, kako deluje ElGamalov kriptosistem. Denimo, da hoče Alenka komunicirati z Borisom, pri čemer ima Boris javno objavljeno poljubno izbrano krivuljo E nad nekim končnim poljem $\mathbb{F}_q$, točko P na krivulji in točko B na krivulji. Borisov privatni ključ je v tem primeru nek naključno izbran s, s katerim je poračunal točko B, kot $B = sP$. Tu je P naključno izbrana točka. Če hoče Alenka komunicirati z Borisom, to stori na sledeč način:

1. Alenka predstavi sporočilo kot neko točko $M \in E(\mathbb{F}_q)$.
2. Alenka naključno izbere skrivno število k in izračuna $M_1 = kP$.
3. Alenka izračunaj $M_2 = M + kB$.
4. Alenka pošlje Borisu M_1, M_2.

Boris izračuna M kot

$$M = M_2 - sM_1.$$

Prepričajmo se, da Boris na ta način res dobi točko M:

$$M_2 - sM_1 = (M + kB) - k(sP) = M + ksBP - ksP = M.$$

Vsak tretji poslušalec, ki bi znal rešiti problem diskretnega logaritma, bi lahko s pomočjo P, B izračunal s, ali pa bi s pomočjo P, M_1 izračunal k.

Pomembno pri celotni shemi pa je tudi to, da Alenka za različna sporočila ne uporablja istega števila k. Recimo, da bi za sporočili M, M' Alenka uporabila isti k. Vsak tretji poslušalec bi lahko opazil, da sta v tem primeru točki M_1, M_1' enaki, in zato bi lahko izračunal

$$M_2 - M_2' = M' - M.$$

To na prvi pogled ne deluje kot resna grožnja, a bi lahko povzročila veliko škodo, če delamo z informacijami, ki bi kasneje postale javne. Če bi npr. sporočilo, ki je predstavljeno s točko M, kasneje postalo javno, bi lahko brez težav izračunali še

$$M' = M - M_2 + M_2'.$$

Vprašanje, ki ga moramo še razrešiti je, kako sporočilo predstaviti kot točko na krivulji. Ena izmed možnosti je način, ki ga je predlagal Koblitz [11]. Denimo, da je krivulja podana z enačbo $y^2 = x^3 + ax + b$ nad $\mathbb{F}_p$. Sporočilo m predstavimo kot število $0 \leq m \leq p/100$, nato določimo $x_j = 100m + j$, za $0 \leq j < 100$. Podobno kot pri generiranju naključne točke, sedaj poizkusimo določiti koordinato y_j, če ta obstaja. Če smo uspeli poračunati obe koordinati, je naša točka $M = (x_j, y_j)$. Ker velja $0 \leq x_j < p + 100$, je m določen kot $m = \lfloor x_j \rfloor$. Ocenimo lahko, da je verjetnost neobstoja take točke približno 2^{-100}.

10.2 Kriptosistemi nad parjenji

V prejšnjih poglavjih smo videli, kako lahko s pomočjo Weilovega parjenja izvedemo napad na problem diskretnega logaritma nad eliptičnimi krivuljami. Supersingularne krivulje so med tistimi, na katerih ta napad deluje. Sedaj pa si bomo ogledali še kriptosistem, ki uporablja supersingularne krivulje [7]. Tu se opremo na dejstvo, da kljub napadom kot je MOV, problem diskretnega logaritma v $\mathbb{F}_p^\times$ ni enostaven. Če izberemo dovolj velik p, je ta problem še vedno zelo zahteven. Supersingularne krivulje izbiramo zato, ker lahko izkoristimo njihove posebne lastnosti.

Obravnavajmo krivuljo E podano z enačbo $y^2 = x^3 + 1$ nad $\mathbb{F}_p$, kjer je $p \equiv 2 \pmod 3$. Take krivulje so supersingularne. Naj bo $\omega \in \mathbb{F}_{p^2}$ primitivni tretji koren enote. Definirajmo preslikavo

$$\begin{aligned} &\beta : E(\mathbb{F}_{p^2}) \to E(\mathbb{F}_{p^2}), \\ &(x, y) \mapsto (\omega x, y), \ \beta(\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Predpostavimo, da ima P red n. Potem ima tudi $\beta(P)$ red n. Uporabimo modificirano Weilovo parjenje

$$e'_n(P_1, P_2) = e_n(P_1, \beta(P_2)).$$

Že v lemi 7.4 smo pokazali, da v primeru ko $3 \nmid n$ in ima $P \in E(\mathbb{F}_p)$ red n, je $e'_n(P, P)$ primitivni n-ti koren enote.

Ker je E supersingularna, ima red $p+1$. Predpostavimo še, da za neko praštevilo l velja $p = 6l - 1$. To pomeni, da ima točka $6P$ red l ali 1 za vsako točko P. Za pripravo kriptosistema najprej neka agencija, ki jamči našo identiteto, naredi sledeče:

- Izbere veliko praštevilo $p = 6l - 1$.
- Izbere točko P reda l na $E(\mathbb{F}_p)$.
- Izbere zgoščevalni funkciji H_1, H_2. Funkcija H_1 vzame niz bitov poljubne dolžine in vrne točko reda l na krivulji E. Funkcija H_2 pa vzame element reda l iz $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ in vrne binarni niz dolžine n, kjer je n dolžina sporočila, ki bo poslano.
- Izbere skrivno število $s \in \mathbb{F}_l^\times$ in izračuna $P_{\text{javni}} = sP$.
- Javno objavi $p, H_1, H_2, n, P, P_{\text{javni}}$, obdrži pa s.

Če uporabnik z identiteto I želi dobiti privatni ključ, agencija naredi sledeče:

- Izračuna $Q_I = H_1(I)$.
- Izračuna $D_I = sQ_I$.
- Ko preveri identiteto uporabnika I, pošlje D_I uporabniku.

Če hoče sedaj Alenka Borisu poslati sporočilo M, to naredi tako:

- Alenka poišče Borisovo identiteto I, ter izračuna $Q_I = H_1(I)$.

- Izbere naključni element $r \in \mathbb{F}_l^\times$.
- Izračuna $g_I = e'_l(Q_I, P_{\text{javni}})$.
- Sporočilo c zapiše kot
$$c = (rP, M \oplus H_2(g_I^r)).$$
Tu oznaka $\oplus$ predstavlja operacijo XOR na bitih.

Boris sedaj Alenkino sporočilo $c = (u, v)$ dešifrira na sledeči način:

- S pomočjo privatnega ključa D_I izračuna $h_I = e'_l(D_I, u)$.
- Izračuna $m = v \oplus H_2(h_I)$.

Prepričajmo se, da na ta način Boris res dobi originalno sporočilo:

$$e'_l(D_I, u) = e'_l(sQ_I, rP) = e'_l(Q_I, P)^{sr} = e'_l(Q_I, P_{\text{javni}})^r = g_I^r,$$

zato je sporočilo

$$m = v \oplus H_2(e'_l(D_I, u)) = (M \oplus H_2(g_I^r)) \oplus H_2(g_I^r) = M.$$

11 Zaključek

Skozi delo smo spoznali, da izredno pomembno vlogo pri varnosti kriptosistemov nad eliptičnimi krivuljami igra sama izbira krivulje. Običajno krivulje generiramo naključno, nato pa preverimo vse potrebne pogoje, kot so supersingularnost, red grupe, ... Tekom dela smo ugotovili, da supersingularne krivulje ne predstavljajo dobre izbire, če želimo delati z zelo majhnimi ključi, saj le te niso odporne na napade kot je MOV. Prav tako smo videli, da lahko problem diskretnega logaritma nad anomalnimi krivuljami rešimo zelo enostavno. Ker smo si ogledali samo majhen del krivulj in načinov kako lahko izkoristimo njihovo obliko, zaključimo delo s primerom krivulje, ki trenutno velja za varno. Krivulja imenovana M-221 je podana z enačbo

$$E:\ y^2 = x^3 + 117050x^2 + x \pmod{2^{221} - 3}.$$

Predstavili pa so jo Aranha, Barreto, Pereira in Ricardini leta 2013 [4].

A Programska koda

A.1 Python

V tem podpoglavju bomo podali programsko kodo v programskem jeziku Python, napisano v verziji 3.6.6.

A.1.1 Osnovne strukture

```
import math
import random

def razEvk(a, b,inverz = True):
    """
    Opis:
        funkcija razEvk predstavlja razsirjen
        Evklidov algoritem

     Definicija:
        razEvk(a, b,inverz = True)

     Vhodni podatki:
        a...prvo stevilo
        b...drugo stevilo
        inverz...ce zelimo racunati samo inverz
             ne potrebujemo dodatne vrednosti
             ki nam jo da razsirjen Evklidov
             algoritem

     Izhodni podatek:
        stevili $gcd(a,b),x,y$ tako, da
```

```
        $ax+by = gcd(a,b)$
        ali v primeru ko je inverz True
        stevili $gcd(a,b),a^-1$

    """
    if inverz == False:
        s0, s1, t0, t1 = 1, 0, 0, 1
        while b != 0:
            q, a, b = a // b, b, a % b
            s0, s1 = s1, s0 - q * s1
            t0, t1 = t1, t0 - q * t1
        return  a, s0, t0
    else:
        s0, s1 = 1, 0
        while b != 0:
            q, a, b = a // b, b, a % b
            s0, s1 = s1, s0 - q * s1
        return  a, s0

class NumberMod:
    """
    Opis:
        Razred za predstavitev stevil po nekem
        modulu p

     Definicija:
       NumberMod(a,mod)

     Vhodni podatki:
       a...stevilo, ki ga hocemo predstaviti
       mod...modul po katerem delamo

     Izhodni  podatek:
       Razred stevila po modolu
    """
    def __init__(self,a, n=None):
        self.original = a
        self.modul = n
        if self.modul == None:
            self.num = a
        else:
            self.num = (a%self.modul)
            self.numS = self.num
            self.small(self.modul)

    def __neg__(self):
```

```
        return NumberMod(-self.num, self.modul)

    def __add__(self,other):
        """sestevanje stevil po modolu"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
        else:
            novonum = NumberMod((self.num + other.num)\
                                % self.modul, self.modul)
            return novonum

    def __sub__(self,other):
        """odstevanje stevil po modolu"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
        elif self.modul == None:
            return NumberMod(self.num-other.num, self.modul)
        else:
            novonum = NumberMod((self.num - other.num)\
                                % self.modul, self.modul)
            return novonum

    def __mul__(self,other):
        """mnozenje stevil po modolu"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
        else:
            novonum = NumberMod((self.num * other.num)\
                                % self.modul, self.modul)
            return novonum

    def __truediv__(self,other):
        """mnozenje z inverzom stevila po modolu"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
        else:
            temp = other.inverse()
            novonum = self*temp
            return novonum

    def __lt__(self, other):
        """manjse kot"""
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num < other.num
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) < other.num
```

```
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num < (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num < other.num

    def __le__(self, other):
        """manjse ali enako"""
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num <= other.num
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) <= other.num
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num <= (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num <= other.num

    def __eq__(self, other):
        """enakost"""
        return self.num == other.num

    def __ne__(self, other):
        """ne enakost"""
        return self.num != other.num

    def __gt__(self, other):
        """vecje kot"""
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num > other.num
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) > other.num
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num > (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num > other.num

    def __ge__(self, other):
        """vecje ali enako"""
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num >= other.num
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) >= other.num
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num >= (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num >= other.num
```

```
def __pow__(self,b):
    p = self.modul
    if not isinstance(b,int):
        raise Exception('power must be an integer')
    else:
        if b == 0:
            return NumberMod(1,p)
        elif b == 1:
            return NumberMod(self.num,p)
        else:
            if b%2 == 0:
                st = NumberMod(self.num*self.num,p)
                return st**(b//2)
            else:
                st = NumberMod(self.num,p)**(b-1)
                return NumberMod(self.num,p)*st


def __str__(self):
    return str(self.num)

def __repr__(self):
    return str(self.num)

def inverse(self):
    """inverz stevila po modolu"""
    if self.modul == None:
        raise Exception('modul equals None')
    n = self.modul
    if self.num < 0:
        a = self.num + n
    else:
        a = self.num
    if gcd(a,n) != 1:
        raise Exception('inverse does not exist')
    else:
        return NumberMod(razEvk(a,n)[1],n)

def small(self,n):
    """ce je stevilo veliko ga proba funkcija zapisati
    s predznakom minus"""
    if n == None:
        pass
    else:
        if ((n-1)/2) < self.numS:
            self.numS = self.numS-n
```

```
        elif self.numS < 0 and -((n-1)/2) > self.numS:
            self.numS = self.numS+n

    def isPrime(self,eps = 1/100000):
        """Miller-Rabinov test za prastevilskost
        z napako eps"""
        #Napaka posameznega koraka je manjsa kot 1/4
        k = int(math.log(eps)/math.log(1/4))+1
        r = 0
        n = self.num
        if n == 3:
            return True
        if n < 0:
            n += self.modul
        if n % 2 == 0:
            return False
        temp = n-1
        d = temp
        while temp % 2 == 0:
            r += 1
            d = int(d/2)
            temp = d
        i = 0
        while i < k:
            a = random.randint(2,n-2)
            xprej = pow(a,d,n)
            j = 1
            while j < r+1:
                xnov = pow(xprej,2,n)
                if (xnov % n == 1 and
                (xprej != n-1 and xprej != 1)):
                    #xprej je Millerjeva prica
                    return False
                j += 1
                xprej = xnov
            if xnov % n != 1:
                #xnov Fermatova prica
                return False
            i += 1
        return True

    def gcd(self,other):
        p = self.modul
        q = other.modul
        if p == q:
            return NumberMod(gcd(self.num,other.num),p)
```

```
        else:
            raise Exception('numbers have different modul')


def gcd(a,b):
    """
    Opis:
        Funkcija gcd poisce najvecji
        skupni delitelj stevil $a,b$

     Definicija:
        gcd(a,b)

     Vhodni podatki:
        a...prvo stevilo
        b...drugo stevilo

     Izhodni podatek:
        najvecji skupni delitelj stevil
        $a,b$
    """
    if b == 0:
        return a
    else:
        return gcd(b,a % b)


class ElipticCurve:
    """
    Opis:
        Razred elipticnih krivulj v Weierstrassovi obliki
        modulo p
        y^2 = x^3 + ax+b mod p

     Definicija:
        ElipticCurve(a,b,mod)

     Vhodni podatki:
        a...parameter a v enacbi
        b...parameter b v enacbi
        mod...modul p po katerem delamo

     Izhodni podatek:
        Razred elipticne krivulje
    """
```

```
def __init__(self, a, b, modulo):
    self.a = a
    self.b = b
    self.mod = modulo
    elipticna = self.isEliptic()
    if not elipticna:
        raise Exception('Curve is not Eliptic')
def __str__(self):
    """Pri izpisu print nam vrne
    krivuljo v lepi obliki"""
    if self.a > 0 and self.b > 0:
        return "y^2 = x^3 + {0}x + {1} mod {2}".format(
            self.a, self.b, self.mod)
    elif self.a > 0 and self.b <0:
        return "y^2 = x^3 + {0}x - {1} mod {2}".format(
            self.a,abs(self.b), self.mod)
    elif self.a > 0 and self.b == 0:
        return "y^2 = x^3 + {0}x mod {1}".format(
            self.a, self.mod)
    elif self.a == 0 and self.b > 0:
        return "y^2 = x^3 + {0} mod {1}".format(
            self.b, self.mod)
    elif self.a == 0 and self.b == 0:
        return "y^2 = x^3 mod {0}".format(
            self.mod)
    elif self.a == 0 and self.b <0:
        return "y^2 = x^3 - {0} mod {1}".format(
            abs(self.b), self.mod)
    elif self.a < 0 and self.b >0:
        return "y^2 = x^3 - {0}x + {1} mod {2}".format(
            abs(self.a), self.b, self.mod)
    elif self.a < 0 and self.b == 0:
        return "y^2 = x^3 - {0}x mod {1}".format(
            abs(self.a), self.mod)
    elif self.a < 0 and self.b <0:
        return "y^2 = x^3 - {0}x - {1} mod {2}".format(
            abs(self.a),abs(self.b), self.mod)

def __repr__(self):
    return str(self)



def rand(self):
    """
    Opis:
```

```
        Funkcija rand generira nakljucno tocko na
        elipticni krivulji E
        y^2 = x^3 + ax+b mod p

      Definicija:
        E.rand()

      Vhodni podatki:
        ni vhodnih podatkov

      Izhodni podatek:
        Razred Point, ki predstavlja tocko na
        elipticni krivulji
    """
    najdl = False
    while not najdl:
        x = random.randint(0,self.mod-1)
        y2 = NumberMod(x,self.mod)**3\
             + NumberMod(self.a*x,self.mod)\
             + NumberMod(self.b,self.mod)
        y2 = y2.num
        if pow(y2,(self.mod-1)//2,self.mod) == 1:
            y = TonelliShanks(y2,self.mod)
            najdl = True
    return Point(self.a,self.b,self.mod,x,y)

def isOn(self,P):
    """
    Opis:
        Funkcija isOn preveri ali tocka P res
        lezi na elipticni krivulji E

      Definicija:
        E.isOn(P)

      Vhodni podatki:
        P... razred Point, ki predstavlja tocko
            na elipticni krivulji

      Izhodni podatek:
        True/False
    """

    if (P.a != self.a or P.b != self.b
        or P.mod != self.mod):
        return False
```

```
            else:
                x = NumberMod(P.x, self.mod)**3\
                    + NumberMod(self.a*P.x, self.mod)\
                    + NumberMod(self.b, self.mod)
                y = (P.y**2) % self.mod
                return x.num==y
        def isEliptic(self):
            """Preverimo ali je dana krivulja res elipticna"""
            if not (self.a ==None and self.b== None
                    and self.mod == None):
                #ce to velja je tocka v neskoncnosti
                #nas ne zanima
                temp = (4*self.a**3 + 27*self.b**2) % self.mod
                if temp != 0:
                    return True
                else:
                    return False
            else:
                return True


INF = "inf"

class Point(ElipticCurve):
    """
    Opis:
        Razred tock na elipticni krivulji, ki je
        podrazred razdreda ElipticCurve.

        Tocka $\infty$ je podana kot
        INFPoint = Point(None,None,None,INF,INF),
        kjer je spremenljivka INF = "inf"

     Definicija:
        Point(a,b,mod,x,y)

     Vhodni podatki:
        a...parameter a v enacbi
        b...parameter b v enacbi
        mod...modul p po katerem delamo
        x...x-koordinate tocke
        y...y-koordinata tocke

     Izhodni podatek:
        Razred tocke na elipticni krivulji
    """
```

```
def __init__(self, a,b, mod, x, y):
    super().__init__(a,b, mod)
    self.x = x
    self.y = y
    if ((self.x == INF or self.y == INF)
        and self.y != self.x):
        #preverimo ali je tocka v neskoncnosti,
        # v tem primeru zahtevamo, da sta
        #obe koordianti INF
        raise Exception('Point not infinity')

def __str__(self):
    """Za lepsi izpis tocke po klicu print"""
    if self.x != INF:
        return "({0},{1}) mod {2}".format(
            self.x,self.y,self.mod)
    else:
        return u"\u221e"

def __repr__(self):
    """za lepsi izpis tocke po klicu return"""
    if self.x != INF:
        return "({0},{1}) mod {2}".format(
            self.x,self.y,self.mod)
    else:
        return u"\u221e"

def __add__(self,Q):
    """Algoritem za sestevanje tock nad isto elipticno
    krivuljo."""
    infty = False
    if self.x == INF or Q.x == INF:
        infty = True

    if (not(self.a == Q.a and self.b == Q.b
            and self.mod == Q.mod)
        and not infty):
        raise Exception("""Points don't lie on the
            same curve, or have different modulus""")

    if self.x == INF:
        return Q
    elif Q.x == INF:
        return self
```

```
        elif self.x != Q.x:
            m = NumberMod(Q.x-self.x, self.mod).inverse().num
            #print("stevec: ",Q.y-self.y)
            m = (m*(Q.y-self.y)) % self.mod
            x3 = (m**2-self.x-Q.x) % self.mod
            y3 = (m*(self.x-x3) - self.y) % self.mod
            return Point(self.a, self.b, self.mod, x3, y3)

        elif self.x == Q.x and self.y != Q.y:
            return Point(None, None, None, INF, INF)

        elif (self.x == Q.x and self.y == Q.y
              and self.y != 0):
            m = NumberMod(2*self.y, self.mod).inverse().num
            m = (m*(3*(self.x**2)+self.a)) % self.mod
            x3 = (m**2-2*self.x) % self.mod
            y3 = (m*(self.x-x3) - self.y) % self.mod
            return Point(self.a, self.b, self.mod, x3, y3)

        else:
            return Point(None, None, None, INF, INF)

    def __neg__(self):
        if self == INFPoint:
            return INFPoint
        else:
            return Point(self.a, self.b, self.mod,
                         self.x, -self.y % self.mod)


    def __sub__(self, Q):
        return self + (-Q)



    def __rmul__(self, num):
        """Funkcija predstavlja mnozenje stevila z tocko
        npr. 5P = P+P+P+P+P"""
        if not isinstance(num, int):
            raise Exception('Can only multiply with an int')

        if num < 0:
            return -(abs(num)*self)

        elif num == 0:
            return Point(None, None, None, INF, INF)
```

```
        elif num == 1:
            return self
        else:
            if num % 2 == 0:
                pol = int(num /2)
                return (pol*self + pol*self)
            else:
                return (self+(num-1)*self)

    def __eq__(self, Q):
        """Dve tocki sta enaki, ce lezita na
        isti krivulji in imata iste koordiante
        ali pa predstavljata tocko v neskoncnosti"""
        if self.x == INF and Q.x == INF:
            return True
        elif (self.a == Q.a and self.b == Q.b
              and self.x == Q.x and self.y == Q.y
              and self.mod == Q.mod):
            return True
        else:
            return False

INFPoint = Point(None,None,None,INF,INF)


def BabyGiant(P):
    """
    Opis:
       Funkcija BabyGiant je implementacija algoritma
       Baby step, Giant step za iskanje reda tocke P
     Definicija:
       BabyGiant(P)
     Vhodni podatki:
       P... razred Point, ki predstavlja tocko na
           eliptcni krivulji
     Izhodni podatek:
       int k, ki predstavlja red tocke P (kP = $\infty$)
    """
    q = P.mod
    Q = (q+1)*P
    m = int(q**(1/4))+1
    seznam = []

    for j in range(m+1):
        seznam.append(j*P)
```

```
    tmp = (2*m)*P
    for k in range(-m,m+1):
        T = Q + k*tmp
        if T in seznam:
            j = seznam.index(T)
            break
        elif -1*T in seznam:
            j = seznam.index(-1*T)
            break
    st1 = q+1+2*m*k -j
    st2 = q+1+2*m*k +j
    if st1*P == INFPoint:
        M = st1
    else:
        M = st2


    odg = pomozna(M,P)

    return odg

def pomozna(M,P):
    """
    Opis:
       Funkcija pomozna predstavlja rekurzivni del funkcije
       BabyGiant
     Definicija:
       pomozna(M,P)
     Vhodni podatki:
       M...stevilo, ki ga testiramo ce predstavlja red
            tocke P
       P...razred Point, ki predstavlja tocko na
            eliptic ni krivulji
     Izhodni podatek:
       int k, ki predstavlja red tocke P (kP = $\infty$)
    """
    faktorji = Factor(M)
    for el in faktorji:
        if (M//el)*P == INFPoint:
            rez = pomozna(M//el,P)
            return rez

    return M

def Factor(n):
```

```
    """
    Opis:
        Factor je enostavna neucinkovita funkcija
        za iskanje fakotrojev stevila
     Definicija:
        Factor(n)
     Vhodni podatki:
        n... stevilo, ki ga hocemo faktorizirati
     Izhodni podatek:
        Seznam faktorjev stevila n
    """
    faktorji = []

    tmp = NumberMod(n,None).isPrime()
    if tmp:
         faktorji.append(n)
         return faktorji
    else:
         tmp = n
         while tmp %2 == 0:
              faktorji.append(2)
              tmp = tmp//2
         i = 3
         while i*i < tmp:

              while tmp % i == 0:
                   faktorji.append(i)
                   tmp = tmp//i

              i+=2

         if tmp != 0:
              faktorji.append(tmp)

    return faktorji

def TonelliShanks(n,p1):
    """
    Opis:
        Funkcija TonelliShanks izracuna kvadraticni
        ostanek stevila $n$ modulo $p1$

     Definicija:
        TonelliShanks(n,p1)

     Vhodni podatki:
```

```
        n... stevilo katerega kvadraticni
             ostanek nas zanima
        p1... modul po katerem delamo

      Izhodni podatek:
        kvadraticni ostanek stevila $n$,
        ce ta obstaja
    """
    p = p1-1
    s = 0
    while True:
        if p %2 == 0:
            s+=1
            p = p//2
        else:
            break
    Q = p

    while True:
        z = random.randint(0,p1-1)
        if pow(z,(p1-1)//2,p1) == p1-1:
            break
    M = s
    c = pow(z,Q,p1)
    t = pow(n,Q,p1)
    R = pow(n,(Q+1)//2,p1)

    while True:
        if t == 0:
            return 0
        elif t == 1:
            return R
        else:
            i = 1
            while i < M:
                if pow(t,pow(2,i),p1) == 1:
                    break
                i += 1
            b = pow(c,pow(2,M-i-1),p1)
            M = i
            c = pow(b,2,p1)
            t = (t*pow(b,2,p1)) % p1
            R = (R*b) % p1

#Zgled definicij
#Definirajmo elipticno krivuljo E
```

```
E = ElipticCurve(30,34,631)
#ter tocki P,Q na krivulji E
P = Point(30,34,631,36,60)
Q = Point(30,34,631,121,387)
#nakljucno tocko dobimo z naslednjim klicem
Nakljucna = E.rand()
```

A.1.2 Weilovo parjenje

```
from base import *


def naklon(P,Q):
    """
    Opis:
        Funkcija naklon izracuna naklon premice med tockama
        P in Q, ki lezita na elipticni krivulji

     Definicija:
        naklon(P,Q)

     Vhodni podatki:
        P... razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
             tocko na elipticni krivulji in je definiran
             v dodatku base
        Q... razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
             tocko na elipticni krivulji in je definiran
             v dodatku base

     Izhodni podatek:
        stevilo po modolu P.mod, ki predstavlja naklon
    """
    mod = P.mod
    if P == Q:
        st = (3*(P.x**2)+P.a) % mod
        im = NumberMod(2*(P.y),mod).inverse().num
        rez = (st*im) % mod
        return rez
    else:
        st = (Q.y-P.y) % mod
        im = NumberMod(Q.x-P.x,P.mod).inverse().num
        rez = (st*im) % mod
        return rez



def g(P,Q,X):
```

```
    """
    Opis:
        Funkcija g del funkcije potrebne za izracun Weilovega
        parjenja, s pomocjo Millerjevega algoritma.
        Funkcija izracuna funkcijo $g_{P,Q}(X)$

     Definicija:
        g(P,Q,X)

     Vhodni podatki:
       P...razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
            tocko na elipticni krivulji in je definiran
            v dodatku base
       Q...razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
            tocko na elipticni krivulji in je definiran
            v dodatku base
       X...razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
            tocko na elipticni krivulji in je definiran
            v dodatku base

     Izhodni podatek:
       stevilo, ki predstavlja vrednost $g_{P,Q}(X)$
    """
    if P.x == Q.x and P.y != Q.y:
        rez = (X.x-P.x) % P.mod
        return rez
    else:
        #lambda je naklon premice
        lam = naklon(P,Q)
        st = (X.y-P.y-lam*(X.x-P.x)) % P.mod
        im = NumberMod(X.x+P.x+Q.x-lam**2,P.mod)
        im = im.inverse().num
        rez = (st*im) % P.mod
        return rez

def Miller(P,X,m):
    """
    Opis:
        Funkcija Miller je implementacija Millerjevega
        algoritma potrebnega za izracun Weilovega
        parjenja. Ce je
        $$e_m(P,Q)=(f_P(Q+S)/f_P(S))/(f_Q(P-S)/f_Q(-S))$$
        potem funkcija Miller predstavlja izracun
        vrednosti $f_P(X)$.

     Definicija:
```

```
        Miller(P,X,m)

        Vhodni podatki:
          P...razred Point, ki predstavlja tocko na
               elipticni krivulji
          X...razred Point, ki predstavlja tocko na
               elipticni krivulji
          m...red tocke P

        Izhodni podatek:
          vrednost funkcije $f_P(X)$
        """
        binarno = bin(m)[2:]
        #vrne niz porezemo 0b na zacetku niza
        n = len(binarno)
        T = P
        f = 1
        for i in range(1,n):
            f = (f**2 * g(T,T,X)) % P.mod
            T = 2*T
            if int(binarno[i]) == 1:
                f = (f* g(T,P,X)) % P.mod
                T = T + P
        return f


def WeilPairing(P,Q,S,N):
    """
    Opis:
        Funkcija WeilPairing je implementacija Weilovega
        parjenja $e_N(P,Q)$, kjer je
        $$e_N(P,Q)=(f_P(Q+S)/f_P(S))/(f_Q(P-S)/f_Q(-S))$$

    Definicija:
        WeilPairing(P,Q,S,N)

    Vhodni podatki:
        P...razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
            tocko na elipticni krivulji in je definiran
            v dodatku base
        Q...razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
            tocko na elipticni krivulji in je definiran
            v dodatku base
        S...razred Point(ElipticCurve), ki predstavlja
            tocko, ki se ne nahaja v podgrupi
            generirani z P,Q
```

```
        N... veckratnik reda tocke P

      Izhodni podatek:
        int eN, ki predstavlja vrednost Weilovega parjenja
    """

    #test ali je S v podgrupi generirani z P,Q
    st1 = BabyGiant(P)
    st2 = BabyGiant(Q)
    #preverimo se ali je prajenje netrivialno
    for i in range(st1+1):
        if i*P == Q:
            return 1
        for j in range(st2+1):
            if S == (i*P+j*Q):
                raise Exception("""S in subgroup
    generated by P,Q,S = {0}P+{1}Q""".format(i,j))


    fpQS = Miller(P,Q+S,N)
    fpS = Miller(P,S,N)
    fqPS = Miller(Q,P-S,N)
    fqS = Miller(Q,-S,N)

    fpS = NumberMod(fpS,P.mod).inverse().num
    eN1 = (fpQS * fpS) % P.mod

    fqS = NumberMod(fqS,P.mod).inverse().num
    eN2 = (fqPS * fqS) % P.mod
    eN2 = NumberMod(eN2,P.mod).inverse().num

    eN  = (eN1*eN2) % P.mod

    return eN

#Zgled uporabe na primeru 6.7
E = ElipticCurve(30,34,631)
P = Point(30,34,631,36,60)
Q = Point(30,34,631,121,387)
S = Point(30,34,631,0,36)
eN = WeilPairing(P,Q,S,5)
```

A.1.3 Anomalne krivulje

```
from base import *
import random
from fractions import Fraction
```

```
def Lift(P,Q,meja = 20):
    """
    Opis:
        Funkcija Lift sprejme tocki P,Q in ju
        vlozi v $\Z$, tako da so koordinate
        modulo p se vedno enake.


     Definicija:
        Lift(P,Q,meja = 20)

     Vhodni podatki:
        P... razred Point(ElipticCurve), ki
             predstavlja tocko na elipticni
             krivulji in je definiran v dodatku base
        Q... razred Point(ElipticCurve), ki
             predstavlja tocko na elipticni
             krivulji in je definiran v dodatku base
        meja... predsatvlja zgornjo mejo iskanja
             nakljucnega stevila v algoritmu

     Izhodni podatek:
        Tocki P,Q vlozeni v $\Z$
    """
    p = P.mod
    x1 = P.x + random.randint(0,meja)*p
    x2 = Q.x + random.randint(0,meja)*p
    if x1 != x2:
        y1 = P.y + random.randint(0,meja)*p
        razl = abs(x2-x1)
        i=0
        while True:
            y2 = Q.y + i*p
            if pow(y2,2,razl) == pow(y1,2,razl):
                break
            i += 1
        A1 = int((y2**2-y1**2)/(x2-x1) \
                 -(x2**3-x1**3)/(x2-x1))
        B1 = y1**2-x1**3-A1*x1
    else:
        x2 = x1
        y1 = P.y + random.randint(0,meja)*p
        A1 = A + random.randint(0,meja)*p
        B1 = y1**2-x1**3-A1*x1
        if P.y == Q.y:
```

```
            y2 = y1
        else:
            y2 = -y1
    return(Point(A1,B1,p**2,x1,y1),Point(A1,B1,p**2,x2,y2))

def AnomalneAttack(P,Q):
    """
    Opis:
        Funkcija AnomalneAttack izvede resuje
        problem diskretnega logaritma
        $$kP = Q$$
        nad anomalnimi krivuljami


     Definicija:
        AnomalneAttack(P,Q)

     Vhodni podatki:
        P...razred Point(ElipticCurve), ki
            predstavlja tocko na eliticni
            krivulji in je definiran v dodatku base
        Q...razred Point(ElipticCurve), ki
            predstavlja tocko na eliticni
            krivulji in je definiran v dodatku base

     Izhodni podatek:
         diskretni logaritem tocke $P$
    """
    (P1,Q1) = Lift(P,Q)
    p = P.mod
    P2 = (p-1)*P1
    Q2 = (p-1)*Q1
    m1 = p*Fraction(P2.y-P1.y,P2.x-P1.x)
    m2 = p*Fraction(Q2.y-Q1.y,Q2.x-Q1.x)
    k = m1/m2
    k1 = k.numerator
    k2 = k.denominator
    k2 = NumberMod(k2,p).inverse().num
    k = (k1*k2) % p
    return k
#Zgled uporabe funkcije na primeru 9.6
P = Point(154,82,163,7,6)
Q = Point(154,82,163,150,152)
k = AnomalneAttack(P,Q)
```

A.2 SAGE

Od sedaj naprej bo vsa programska koda podana v prosto dostopnem programskem okolju SAGE [18]. Uporabljena je bila vezija 8.9. Za ta korak se odločimo, ker se s tem izognemo implementaciji raznih algebraičnih objektov. Tako se lahko posvetimo samo kriptografskim problemom.

A.2.1 Izračun indeksa

```
def IndexCalculus(g,h,q,baza):
    """
    Opis:
        IndexCalculus vrne tak $k$, da velja
        $$g^k \equiv h (mod q)$$, kjer je g generator
        multiplikativne grupe $\Z_q$.

        Zgled:
            g = 3
            q = 1217
            h = 37
            baza = [-1,2,3,5,7,11,13]

     Definicija:
        IndexCalculus(g,h,q,baza)

     Vhodni podatki:
        g...generator multiplikativne grupe $\Z_q$.
        q...modul s katerim delamo
        h...desna stran problema, ki ga resujemo
        baza...baza prastevil s katerimi delamo more
                vsebovati tudi -1

     Izhodni podatek:
        $k$, da velja $$g^k \equiv h (mod q)$$
    """

    seznam_relacij = []
    V = VectorSpace(GF(q),len(baza)+1)
    Z = GF(q)
    k = 1
    while True:
        e0 = 0
        st = g^k % q
        if is_prime(st) and st not in baza:
            st = abs(st-q)
            e0 = 1
        tmp = ecm.factor(st)
```

```
        if set(tmp).issubset(set(baza)):
            relacija = [0]*(len(baza)+1)
            relacija[0] = e0
            for i in range(1,len(baza)):
                relacija[i] = tmp.count(baza[i])
            relacija[-1] = k

            seznam_relacij.append(relacija)
            M = Matrix(Z,seznam_relacij)
            if len(V.linear_dependence(M)) >0:
                seznam_relacij = seznam_relacij[:-1]

            if len(seznam_relacij) > len(baza):
                break
        k+=1

    tmp = seznam_relacij[:]
    b = [0]*(len(baza)+1)
    for i in range(len(baza)+1):
        if seznam_relacij[i][0] == 1:
            b[i] = seznam_relacij[i][-1] - ((q-1)//2)
        else:
            b[i] = seznam_relacij[i][-1]
        tmp[i] = tmp[i][1:-1]


    M = Matrix(IntegerModRing(q-1),tmp)
    B = vector(IntegerModRing(q-1),b)
    X = M.solve_right(B)

    j = 0
    while True:
        rez = (power_mod(g,j,q)*h) % q
        tmp = ecm.factor(rez)
        if set(tmp).issubset(set(baza)):
            enacba = [0]*(len(baza)-1)
            for i in range(1,len(baza)):
                enacba[i-1] = tmp.count(baza[i])
            enacba = vector(IntegerModRing(q-1),enacba)

            return( enacba*X - j)
        j+=1


#Uporaba funkcije na primeru 7.5
baza = [-1,2,3,5,7,11,13]
```

```
g = 3
q = 1217
h = 37
Lh = IndexCalculus(g,h,q,baza)
```

A.2.2 MOV napad

```
def MOV(E,q,m,P,Q,st_korakov = 10):
    """
    Opis:
        Funkcija MOV resuje problem diskretnega logaritma
        na krivulji E, podanega s tockama P,Q.
        Iscemo torej $k$, tako da velja $kP = Q$.

     Definicija:
       MOV(E,q,m,P,Q,st_korakov = 10)

     Vhodni podatki:
       E...Elipticna krivulja iz SAGE
       q...modul krivulje
       m...stevilo ki pove razsiritev prvotnega polja
            iz GF(q) gremo v GF(q^m) (GF = Galvajevo polje)
       P...tocka na elipticni krivulji iz SAGE
       Q...tocka na elipticni krivulji iz SAGE
       st_korakov...v algoritmu dobivamo rezultate po nekem
                    modulu in moramo na koncu s pomocjo
                    kitajskega izreka dobit koncni rezultat.
                    Lahko pa se zgodi da vedno dobivamo po
                    istih modulih in se program ne bi
                    koncal. st_korakov omeji kolikokrat
                    se ta del zanke izvede.

     Izhodni podatek:
       stevilo k
    """
    N = P.order()
    k = GF(q^m,'x')
    E1 = E.base_extend(k)#razsirimo krivuljo na vecje polje
    P1 = E1(P)#razsirit moramo tudi tocki
    Q1 = E1(Q)

    odgovori = [[],[]]
    koraki = 0

    while True:
        #vsak ta del nam da odgovor po modolu d
        T = E1.random_element()
```

```
            M = T.order()
            d = gcd(N,M)
            T1 = int(M/d)*T
            w1 = P1.weil_pairing(T1,N)
            w2 = Q1.weil_pairing(T1,N)
            if w1 != w2:
                k = discrete_log(w2, w1)
                odgovori[0].append(k)
                odgovori[1].append(d)
            if lcm(odgovori[1]) >= q:
                break
            elif koraki > st_korakov:
                break
            koraki+=1
        #uporabimo kitajski izrek o ostankih
        k = crt(odgovori[0],odgovori[1])
        return k

#Funkcija uporabljena na primeru 8.6
E = EllipticCurve(GF(547),[1,0])
P = E(67,481)
Q = E(167,405)
k = MOV(E,547,2,P,Q)
```

Literatura

[1] *Euler's Criterion*, https://proofwiki.org/wiki/Euler%27s_Criterion, 2020.

[2] *Extended Euclidean algorithm*, https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_Euclidean_algorithm, 2020.

[3] *Zapiski predavanj predmeta Algebra II*, šolsko leto 2015/2016.

[4] D. F. Aranha in dr., *A note on high-security general-purpose elliptic curves*, https://eprint.iacr.org/2013/647.pdf.

[5] M. Avsec, *Kubične krivulej v kriptografiji*, diplomska naloga, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2017.

[6] E. Barker in A. Roginsky, *NIST Special Publication 800-133 Recommendation for Cryptographic Key Generation*, 2019.

[7] D. Boneh in M. Franklin, *Identity-Based Encryption from the Weil Pairing*, SIAM Journal on Computing (2003).

[8] C. Easttom, *Modern Cryptography: Applied Mathematics for Encryption and Information Security*, McGraw-Hill Education Group, 1 izd., 2015.

[9] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press, 1998.

[10] C. Henri in dr., *Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography (Discrete Mathematics and Its Applications)*, Chapman and Hall/CRC, 2005.

[11] N. Koblitz, *Elliptic curve cryptosystems*, Mathematics of Computation **48** (1987) 203–209.

[12] H. W. Lenstra, *Factoring integers with elliptic curves*, Annals of Mathematics **126** (1987) 649–673.

[13] V. S. Miller, *Short programs for functions on curves*, v: IBM Thomas J. Watson Research Center, 1986.

[14] J. S. Milne, *Fields and Galois Theory*, www.jmilne.org/math/, 2018.

[15] R. Schoof, *Counting points on elliptic curves over finite fields*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux **7** (1995) 219–254.

[16] J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2009.

[17] D. R. Stinson, *Cryptography: Theory and Practice (Discrete Mathematics and Its Applications)*, CRC-Press, 1995.

[18] The Sage Developers, *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 8.9)*, 2019, `https://www.sagemath.org`.

[19] A. Tonelli, *Bemerkung über die auflösung quadratischer congruenzen*, v: Göttinger Nachrichten, 1891, str. 344–346.

[20] G. Tornaría, *Square roots modulo p*, v: LATIN '02: Proceedings of the 5th Latin American Symposium on Theoretical Informatics, 2002, str. 430–434.

[21] L. C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography, Second Edition*, Chapman & Hall/CRC, 2 izd., 2008.