UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Nika Kastelec

O hiperbolični geometriji

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Pavle Saksida

Ljubljana, 2019

Kazalo

O hiperbolični geometriji

Povzetek

V nalogi spoznamo hiperbolično geometrijo prek treh modelov. Prvi obravnavani model je model zgornje polravnine $\mathcal{H}$, ki ga dobimo tako, da zgornjo polravnino opremimo s prvo fundamentalno formo psevdosfere, za katero smo dokazali, da ima konstantno negativno Gaussovo ukrivljenost. Ogledamo si, kaj so geodetke, ki jih imenujemo hiperbolične premice. Izpeljemo formulo za razdaljo na $\mathcal{H}$, $d(a,b) = 2\tanh^{-1}\frac{|b-a|}{|b-\bar{a}|}$. Pokažemo, da so izometrije $\mathcal{H}$ translacije, vzporedne realni osi, zrcaljenja preko premic, vzporednih imaginarni osi, skaliranje za pozitiven realen faktor in zrcaljenje prek krožnice s središčem na realni osi ter končni kompozitumi naštetih preslikav.

S preslikavo $\mathcal{P}(z) = \frac{z-i}{z+i}$ polravnino $\mathcal{H}$ preslikamo na enotski disk in ga opremili s tako prvo fundamentalno formo, da je preslikava $\mathcal{P}$ izometrija. S tem dobimo nov model hiperbolične geometrije imenovan Poincaréjev disk. Na tem modelu si ogledamo, kako izgleda vzporednost v hiperbolični geometriji, in ugotovili, da je smislno pojem vzporednosti razdeliti na dva pojma, vzporednost in ultra-vzporednost.

Na koncu si ogledamo še nekoliko drugačen model, saj bo le ta vložen v $\mathbb{R}^3$ in ne v ravnino, kot prejšnje dva. Vzamemo enotsko sfero v metriki Minkowskega, ki je podana z matriko:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enotska sfera je v tem primeru dvodelni hiperboloid. Da bo opazovana ploskev povezana mnogoterost,opazujemo le zgornji del hiperboloida, ki ga označimo s $\mathcal{H}^2$. Ugotovimo, da metrika Minkowskega na tangentnem prostoru $T\mathcal{H}^2$ inducira pozitivno definitno kvadratno formo. Pokažemo, da obstaja izometrija med $\mathcal{H}^2$ in Poincaréjevem diskom. Na koncu klasificiramo izometrije hiperboloida $\mathcal{H}^2$. Ugotovili smo, da izometrije predstavlja grupa $\mathbf{SO}(2,1) = \{A \in \mathbf{GL}(3,\mathbb{R}) | A^T J A = J\}$.

About hyperbolic geometry

Abstract

We present hyperbolic geomery through three different models. The first model is the upper half-plane model $\mathcal{H}$ where the half-plane is equiped with the first fundamental form of pseudosphere, for which we proved that it has constant negative Gaussian curvature. We explain what the geodetic curves are. These geodetic curves are called hyperbolic lines. We derive the formula of the distance on $\mathcal{H}$: $d(a,b) = 2\tanh^{-1}\frac{|b-a|}{|b-\overline{a}|}$. We show that the isometries of $\mathcal{H}$ are translation parallel to the real axis, reflections through lines parallel to the imaginary axis, dilations by factor $a \in R$, inversions in circles with centres on the real axis and compositions of finite number of the mentioned maps.

Half-plane $\mathcal{H}$ was maped with $\mathcal{P}(z) = \frac{z-i}{z+i}$ to the unit disc. The disc was equiped with the first fundamental form such that the map $\mathcal{P}$ is isometry. So we get the second model of the hyperbolic geometry called Poincaré's disc. On this model we present two kind of hyperbolic parallels: parallels and ultra-parallels.

The third model of the hyperbolic geometry is contrary to the first two, included in $\mathbb{R}^3$. The model is based on the unit sphere of Minkovsky's metric defined by matrix:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The unit sphere is in this case the double hyperboloid. To obtain a connected manifold we took only the upper part of it and we denotes it by $\mathcal{H}^2$. We found out that the Minkovsky's matrix on the tangent space $T\mathcal{H}^2$ induces positive definite qudratic form. We show that the isometry between $\mathcal{H}^2$ and Poincaré's disc exists. We show that the isometry of $\mathcal{H}^2$ is the group $\mathbf{So}(2,1) = \{A \in \mathbf{GL}(3,\mathbb{R}) | A^T J A = J\}$.

Math. Subj. Class. (2010): 51M09, 51M10

Ključne besede: Hiperbolična geometrija, geodetske krivulje, izometrija, zgornja polravnina, Poincaréjev disk, hiperboloidni model, hiperbolična razdalja, psvdosfera

Keywords: Hyperbolic geometry, geodetic curves, isometry, upper half-plane, Poincaré's disc, hyperboloid model, hyperbolic distance, pseudosphere

1. Uvod

V prvi polovici 19. stoletja sta ruski matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevski in madžarski matematik Janos Bolyai neodvisno odkrila prvo neevklidsko geometrijo, ki jo danes poznamo pod imenoma hiperbolična geometrija in geometrija Bolyai - Lobačevskega. Pred tem so različni matematiki skušali dokazati, da iz prvih štirih aksiomov evklidske geometrije sledi peti aksiom, ki pravi, da ima vsaka premica skozi poljubno točko natanko eno vzporednico. Z odkritjem hiperbolične geometrije sta Lobačevski in Bolyai našla prostor v katerem veljajo prvi štirje aksiomi evklidske geometrije, aksiom o vzporednici pa ne drži.

V nalogi bomo hiperbolično geometrijo obravnavali s stališča diferencialne geometrije. Omejili se bomo na ploskve. Videli bomo, da je ploskev hiperbolična, če ima negativno Gauusovo ukrivljenost. Lastnosti hiperbolične geometrije bomo začeli spoznavati na modelu polravnine, ki jo bomo kasneje izometrično preslikali v drug model hiperbolične ravnine, imenovan Poincaréjev disk. Kasneje bomo opazovali hiperboloidni model in se poglobili v grupo izometrij hiperbolične ravnine.

Na tem mestu spoznajmo še nakaj osnovnih pojmov diferencialne geometrije.

Definicija 1.1. Preslikava $r : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je parametrizacija, če je njen rang povsod enak 2. Slika take preslikave je ploskev.

Definicija 1.2. Funkcije $E, F, G : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirane s predpisi:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \langle r_u(u,v), r_u(u,v)\rangle, \\ F(u,v) &= \langle r_u(u,v), r_v(u,v)\rangle, \\ G(u,v) &= \langle r_v(u,v), r_v(u,v)\rangle, \end{aligned}$$

se imenujejo koeficienti prve fundamentalne forme glede na parametrizacijo r.

Matrika

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

je matrika nekega skalarnega produkta na prostoru $T_{r(u,v)}X$ glede na bazo $\{r_u, r_v\}$.

Definicija 1.3. Preslikava $f : X \to \tilde{X}$ je izometrija, če za vsako krivuljo $\gamma : [a,b] \to X$ velja, da je $\mathcal{L}_X(\gamma) = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(f(\gamma))$, kjer $\mathcal{L}$ krivulji priredi njeno dolžino glede na ploskev, na kateri se nahaja.

Definicija 1.4. Gaussova ukrivljenost $K : X \to \mathbb{R}$ je funkcija podana s predpisom:

$$K(u,v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

ki vsaki točki na ploskvi določi ukrivljenost. Funkcije $E, F, G : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirane s predpisi:

$$\begin{aligned} L(u,v) &= \langle r_{uu}(u,v), n(u,v)\rangle, \\ M(u,v) &= \langle r_{uv}(u,v), n(u,v)\rangle, \\ N(u,v) &= \langle r_{vv}(u,v), n(u,v)\rangle, \end{aligned}$$

se imenujejo koeficienti prve fundamentalne forme glede na parametrizacijo r, $n(u,v)$ pa predstavlja normalo na ploskev v točki (u,v).

Gauss v svojem veličastnem izreku dokazal, da je Gaussova ukrivljenost K odvisna le od prve fundamentalne forme in njenih odvodov.

Pomembno vlogo bodo igrale tudi geodetske krivulje.

Definicija 1.5. Geodetska krivulja na ploskvi X je najkrajša krivulja, ki povezuje izbrani dve točki.

2. Model zgornje polravnine

Vzemimo zgornjo polravnino in jo opremimo s prvo fundamentalno formo psevdosfere. S tem bomo definirali skalarni produkt oziroma metriko na tangentni ravnini v vsaki točki zgornje polravnine. Rezultate bomo povzeli po [1, poglavje 11.]

Ena od parametrizacij psevdosfere se glasi:

$$\sigma(u,v) = \left(\frac{1}{v}\cos u, \frac{1}{v}\sin u, \sqrt{1-\frac{1}{v^2}} - \cosh^{-1} v\right). \tag{1}$$

Da bo zgornja preslikava dobro definirana in gladka, mora veljati, da je $v > 1$.

Izračunajmo pripadajočo prvo fundamentalno formo:

$$\begin{aligned} E(u,v) = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle &= \left\langle \left(-\frac{1}{v}\sin u, \frac{1}{v}\cos u, 0\right), \left(-\frac{1}{v}\sin u, \frac{1}{v}\cos u, 0\right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{v^2}\sin^2 u + \frac{1}{v^2}\cos^2 u = \frac{1}{v^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = \\ &= \left\langle \left(-\frac{1}{v}\sin u, \frac{1}{v}\cos u, 0\right), \left(-\frac{1}{v^2}\cos u, -\frac{1}{v^2}\sin u, -\frac{\sqrt{v^2-1}}{v^2}\right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{v^3}\sin u \cos u - \frac{1}{v^3}\cos u \sin u = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{-1}{v^2}\cos u, \frac{-1}{v^2}\sin u, \frac{\sqrt{v^2-1}}{-v^2}\right), \left(\frac{-1}{v^2}\cos u, \frac{-1}{v^2}\sin u, \frac{\sqrt{v^2-1}}{-v^2}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{v^4}\cos^2 u + \frac{1}{v^4}\sin^2 u + \frac{v^2-1}{v^4} = \frac{1}{v^4} + \frac{v^2-1}{v^4} = \frac{1}{v^2}. \end{aligned}$$

Trditev 2.1. *Gaussova ukrivljenost K psevdosfere je konstantno enaka -1.*

Dokaz. K bomo izračunali s pomočjo spodnje enačbe, ki je posledica rezultata iz Gaussovega izreka Egregium. Izrek pravi, da je Gaussova ukrivljenost K odvisna le od prve fundamentalni forme in njenih odvodov. Poleg tega bomo upoštevali, da je v našem primeru $F = 0$. Formula se glasi:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{E}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{E}\right)\right). \tag{2}$$

Ker v našem primeru velja tudi $G = E$, zato se enačba še dodatno poenostavi v:

$$K = -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{E_u}{E}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{E}\right)\right).$$

Upoštevamo, da je $E_u = 0$ in $E_v = -\frac{2}{v^3}$ in dobimo:

$$K = -\frac{v^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{2}{v}\right)\right) = -\frac{v^2}{2}\frac{2}{v^2} = -1. \tag{3}$$

□

S $\mathcal{H} = \{(u,v) \in \mathbb{R} | v > 0\} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ označimo zgornjo polravnino, na kateri je zgoraj izračunana prva fundamentalna forma dobro definirana. Polravnina $\mathcal{H}$ skupaj s prvo fundamentalno formo psevosfere predstavlja konformni model hiperbolične ravnine. Sedaj bomo lahko njene lastnosti študirali v $\mathbb{R}^2$ namesto v $\mathbb{R}^3$, kamor je vložena psevdosfera. V naslednjem podpoglavju si bomo pogledali, kako izgledajo premice v $\mathcal{H}$.

2.1. **Premice v zgornji polravnini.** Geodetska krivulja je najkrajša krivulja, ki povezuje dve točki. V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ so geodetske krivulje deli premic, zato bomo geodetskim krivuljam na polravnini $\mathcal{H}$ rekli hiperbolične premice.

Ker smo polravnino opremili s prvo fundamentalno formo psevdosfere, je

$$\sigma : (\mathcal{H}, E, F, G) \to (\sigma(\mathcal{H}), E, F, G) \tag{4}$$

izometrija. Izometrija slika geodetke v geodetke, zato za premice v $\mathcal{H}$ izberemo krivulje, ki se s parametrizacijo σ slikajo v geodetke na psevdosferi.

Pri dokazu naslednje trditve si bomo pomagali s Clairautovim izrekom o geodetkah na rotacijskih ploskvah.

Izrek 2.2. *Naj bo γ naravno parametrizirana krivulja na rotacijski ploskvi $\mathcal{S}$, $\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ razdalja med točko na $\mathcal{S}$ in osjo rotacije ter ψ kot med γ in merediani ploskve $\mathcal{S}$. Če je γ geodetka, potem je količina $\rho \sin\psi$ konstantna vzdolž γ. Drži tudi obratno: če je količina $\rho \sin\psi$ konstantna vzdolž γ in noben del γ ni del vzporednika na $\mathcal{S}$, je γ geodetka.*

Dokaz. Naj bo $\sigma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$ in $\rho = \rho(u) = f(u)$. Vektor σ_u je enotski vektor tangenten na meridiane in vektor $\rho^{-1}\sigma_v$ je enotski vektor tangenten na vzporednike. Ker je $F = 0$, sta pravokotna. Ker je $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ naravno parametrizirana, je

$$\dot{\gamma} = \cos\psi\ \sigma_u + \rho^{-1}\sin\psi\ \sigma_v$$

Če enačbo vektorsko pomnožimo s σ_u z leve, dobimo:

$$\sigma_u \times \dot{\gamma} = \rho^{-1}\sin\psi\ \sigma_u \times \sigma_v.$$

Če namesto $\dot{\gamma}$ v zgornjo enakost vstavimo $\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v$, dobimo:

$$\dot{v}\sigma_u \times \sigma_v = \rho^{-1}\sin\phi\ \sigma_u \times \sigma_v.$$

Torej je $\dot{v} = \rho^{-1}\sin\psi$ oziroma $\rho\sin\psi = \rho^2\dot{v}$.
Ker je γ geodetka, je rešitev znanih Euler-Lagrangevih enačb za iskanje geodetk, iz katerihih dobimo pogoja:

$$\ddot{u} = f(v)\frac{df}{dv}\dot{v}^2, \quad \frac{d}{dt}\left(f(v)^2\dot{v}\right) = 0. \tag{5}$$

Iz druge enačbe sledi, da je $\rho^2\dot{v}$ konstanta vzdolž γ.

Predpostavimo sedaj, da velja $\rho\sin\psi = \Omega$, kjer je Ω konstanta. Ker je $\rho^2\dot{v} = \rho\sin\psi = \Omega$, velja drugi pogoj iz enačbe (5). Pokazati moramo da velja tudi prvi.

Iz zgornje enačbe izrazimo $\dot{v} = \frac{\sin\psi}{\rho} = \frac{\Omega}{\rho^2}$ in nesemo v enačbo $\dot{u}^2 = 1 - \dot{v}^2$, ki jo dobimo, če upoštevamo, da je γ naravno parametrizirana krivulja. Dobimo:

$$\dot{u}^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2}$$

in odvajamo po t:

$$2\dot{u}\ddot{u} = \frac{2\Omega^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{du}\dot{u}$$

oziroma:

$$\dot{u}\left(\ddot{u} - \rho\frac{d\rho}{du}\dot{v}^2\right) = 0.$$

Recimo, da izraz v oklepaju ni enak 0 v točki $\gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0)$, potem obstaja $\epsilon > 0$, da za vse t, za katere velja $|t_0 - t| < \epsilon$, je $\dot{u} = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko. Torej je izraz v oklepaju enak 0 povsod na krivulji in velja tudi prvi pogoj iz enačbe 5. ☐

Trditev 2.3. *Premice na $\mathcal{H}$ so poltraki in polkrogi, ki pravokotno sekajo x-os oziroma rob $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Izračunajmo geodetke na psevdosferi. Psevdosfera je rotacijska ploskev s parametrizacijo oblike

$$\sigma(u, v) = (f(v)\cos u), f(v)\sin u, g(v)),$$

zato bomo geodetke izračunali s pomočjo Clairautovega izreka.

Če predpostavimo , da je $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ naravno parametrizirana krivulja, dobimo enačbo:

$$E\dot{u}^2 + F\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = \frac{1}{v^2}\dot{u}^2 + \frac{1}{v^2}\dot{v}^2 = 1 \quad \text{oziroma} \quad \dot{u}^2 + \dot{v}^2 = v^2. \tag{6}$$

Ker je $\sin\psi = f(v)\dot{u}$, bomo geodetke dobili kot rešitve diferencialne enačbe:

$$\frac{1}{v}\sin\psi = \frac{1}{v^2}\dot{u} = \Omega \tag{7}$$

Če je $\Omega = 0$, mora veljati $\dot{u} = 0$, torej je $u(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$, kar pomeni, da so navpični poltraki geodetke.

V primeru, da $\Omega \neq 0$, lahko predpostavimo, da je $\Omega > 0$. Iz enačb 6 in 7 dobimo diferencialno enačbo:

$$\frac{1}{v^2}\sqrt{v^2 - \dot{v}^2} = \Omega \tag{8}$$

Izrazimo $\dot{v}$ in dobimo:

$$\dot{v} = \pm v\sqrt{1 - v^2\Omega^2}.$$

Iz 7 dobimo:

$$\dot{u} = v^2\Omega.$$

Torej velja:

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \pm\frac{v\Omega}{\sqrt{1-v^2\Omega^2}},$$
$$\dot{u} = \pm\frac{\Omega v\dot{v}}{\sqrt{1-v^2\Omega^2}},$$
$$\int du = \pm\int\frac{v\Omega dv}{\sqrt{1-v^2\Omega^2}}, \quad \text{uvedemo novo spremenljivko:} \quad y = 1-v^2\Omega^2,$$
$$u+u_0 = \mp\int\frac{dy}{2\Omega\sqrt{y}}, \quad u_0\in\mathbb{R},$$
$$u+u_0 = \mp\frac{1}{\Omega}\sqrt{1-v^2\Omega^2},$$
$$(u+u_0)^2+v^2 = \frac{1}{\Omega^2}.$$

Vidimo, da v tem primeru geodetke zadoščajo enačbi krožnice s središčem na x-osi. Ker je prva fundamentalna forma definirana le na zgornji polravnini, so geodetke le zgornje polovice krožnic. □

Sedaj, ko vemo, kaj so premice v našem hiperboličnem modelu, lahko opazujemo njihove lastnosti in jih primerjamo s premicami v evklidski geometriji.

Trditev 2.4.

(1) Skozi poljubni različni točki poteka natanko ena premica.

(2) Z vsako premico l in vsako točko a, ki ne leži na premici l, obstaja neskončno mnogo premic, ki ne sekajo l.

Dokaz.

(1) Naj bosta $a, b\in\mathcal{H}$ dve različni točki. Če je $\mathfrak{Re}(a)=\mathfrak{Re}(b)$, je hiperbolična premica, ki poteka skozi ti dve točki, navpičen poltrak.

Če $\mathfrak{Re}(a)\neq\mathfrak{Re}(b)$, obstaja c, ki leži na realni osi, tako da je $|a-c|=|b-c|$. Hiperbolična premca skozi a in b je torej polkrog s središčem v c in polmerom $|a-c|=|b-c|$.

(2) Naj bo $l=\{(x,y)\in\mathbb{C} | x=0, y>0\}$ hiperbolična premica in $a\notin l$. Brez škode za splošnost lahko a izberemo tako, da je $\mathfrak{Re}(a)>0$. Za vsak $c\in\mathbb{R}$, za katerega velja, da je $|a-c|<c$, je polkrog s središčem v c in radijem $|a-c|$ hiperbolična premica, ki ne seka l. Torej je dober vsak c, za katerega velja $c>\frac{|a|^2}{2\mathfrak{Re}(a)}$, takih pa je neskončno mnogo.

□

2.2. **Razdalja.** V tem razdelku bomo izpeljali formulo za razdaljo na Hiperbolični ravnini. Razdalja med dvema točkama a in b je dolžina najkrajše krivulje, ki se začne v točki a in konča v točki b. Najkrajša krivulja med dvema točkama je geodetska krivulja. Ker smo za premice na $\mathcal{H}$ izbrali geodetske krivulje, bo razdalja med točko a in točko b dolžina odseka hiperbolične premice. Na ta način je pojem hiperbolične razdalje dobro definiran, saj smo v prejšnji trditvi dokazali, da skozi vsaki dve točki poteka natanko ena hiperbolična premica. Hitro opazimo: če velja $\mathfrak{Re}(a)=\mathfrak{Re}(b)$, se hiperbolična razdalja ujema z evklidsko.

Osredotočimo se na primer, ko a in b ne ležita na isti navpični premici. Takrat je hiperbolična premica, ki poteka skozi a in b, polkrog s središčem v $c\in\mathbb{R}$. Parametrizirajmo odsek krožnega loka med a in b:

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) = (c + r\cos t, r\sin t), \quad t \in (\phi, \theta), \tag{9}$$

kjer sta ϕ in θ kota, ki ju oklepata daljici med a in c oz. b in c z delom realne osi desno od c.

Razdaljo $d_{\mathcal{H}}(a, b)$ izračunamo po znani formuli za dolžino krivulje:

$$\begin{aligned} d &= \int_\theta^\phi \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt = \int_\theta^\phi \sqrt{\frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{v^2}} dt = \\ &= \int_\theta^\phi \frac{r}{r\sin t} dt = \int_\theta^\phi \frac{dt}{\sin t} = \ln\frac{\tan\frac{\phi}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Po drugi strani velja:

$$\tanh\frac{d}{2} = \frac{e^{\frac{d}{2}} - 1}{e^{\frac{d}{2}} + 1} = \frac{\tan\frac{\phi}{2} - \tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\phi}{2} + \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\phi-\theta}{2}}{\sin\frac{\phi+\theta}{2}} \tag{10}$$

in

$$\begin{aligned} |b - a|^2 &= r^2((\cos\phi - \cos\theta)^2 + (\sin\phi - \sin\theta)^2) = 2r^2(1 - \cos(\phi - \theta)) = \\ &= 4r^2\sin^2\frac{\phi - \theta}{2}. \end{aligned}$$

Podobno velja tudi:

$$|b - \overline{a}|^2 = 4r^2\sin^2\frac{\phi + \theta}{2}.$$

Tako dobimo formulo za razdaljo:

$$d(a, b) = 2\tanh^{-1}\frac{|b - a|}{|b - \overline{a}|}.$$

2.3. **Elementarne izometrije $\mathcal{H}$.** Za začetek si oglejmo nekaj elementarnih izometrij.

(1) Translacija, vzporedna realni osi:
$\mathcal{T}_a(z) = z + a, \quad a \in \mathbb{R}$
(2) Zrcaljenje čez premico, vzporedno imaginarni osi:
$\mathcal{R}_a(z) = 2a - z, \quad a \in \mathbb{R}$
(3) Skaliranje za faktor $a > 0$:
$\mathcal{D}_a(z) = az, \quad a \in \mathbb{R}$
(4) Zrcaljenje prek krožnice s središčem na realni osi:
$\mathcal{I}_{a,r}(z) = a + \frac{r^2}{\bar{z}-a}, \quad a \in \mathbb{R}$

Prepričajmo se, da so zgornje preslikave res izometrije. Očitno je, da vse zgoraj naštete preslikave $\mathcal{H}$ slikajo v $\mathcal{H}$ bijektivno. Naj bo preslikava $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ izometrija in γ krivulja na $\mathcal{H}$. Potem mora veljati, da sta dolžini krivulje γ in krivulje $\mathcal{F}(\gamma)$ enaki. Naj bo $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ in $\mathcal{F}(\gamma(t)) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$. Zgornjo zahtevo za izometrijo lahko zapišemo tako:

$$\begin{bmatrix}\dot{u} & \dot{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\tilde{u}} & \dot{\tilde{v}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E} & \tilde{F}\\ \tilde{F} & \tilde{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\tilde{u}}\\ \dot{\tilde{v}}\end{bmatrix}, \tag{11}$$

kjer velja: $\tilde{E} = E \circ \mathcal{F}, \tilde{F} = E \circ \mathcal{F}, \tilde{G} = E \circ \mathcal{F}$.

(1) $\mathcal{T}_a(z) = z + a$ lahko prepišemo v kartezično obliko in dobimo $\mathcal{T}_a(u,v) = (u+a, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$. Potem je $\dot{\tilde{u}} = \dot{u}$ in $\dot{\tilde{v}} = \dot{v}$. Ker je $E = E \circ \mathcal{T}_a = G \circ \mathcal{T}_a = G$, je zgornji enačbi zadoščeno in je $\mathcal{T}_a$ izometrija.

(2) $\mathcal{R}_a(z) = 2a - z$ prepišimo v $\mathcal{R}_a(u,v) = (2a - u, -v)$. Potem je $\dot{\tilde{u}} = -\dot{u}$ in $\dot{\tilde{v}} = -\dot{v}$ in $E = E \circ \mathcal{R}_a = G \circ \mathcal{R}_a = G$. Ker v desni strani enakosti (11) z vektorjem $(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})$ množimo iz vsake strani, se minusa pokrajšata, zato je tudi R_a izometrija.

(3) $\mathcal{D}_a(z) = az$ prepišimo v $\mathcal{D}_a(u,v) = (au, av)$. Potem je $\dot{\tilde{u}} = a\dot{u}$ in $\dot{\tilde{v}} = a\dot{v}$ in $E \circ \mathcal{D}_a = G \circ \mathcal{D}_a = \frac{1}{a^2v^2}$. Ker v desni strani enakosti (11) z vektorjem $(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})$ množimo iz vsake strani, pridobimo a^2, ki se pokrajša pri množenju z matriko koeficjentov prve fundamentalne forme, zato je tudi D_a izometrija.

(4) Dovolj je dokazati za $\mathcal{I}_{0,1}$, saj lahko za ostale krožnice dokažemo s premikom in raztegom, za katera smo že videli, da sta izometriji. V kartezični obliki je $\mathcal{I}_{1,0}(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$. Potem je $\dot{\tilde{u}} = \frac{\dot{u}(v^2-u^2)-2uv\dot{v}}{(u^2+v^2)}$ in $\dot{\tilde{v}} = \frac{\dot{v}(u^2-v^2)-2uv\dot{u}}{(u^2+v^2)}$ ter $\tilde{E} = \tilde{G} = \frac{(u^2+v^2)^2}{v^2}$. Vstavimo to v desno stran enakosti (11), in ko poračunamo, dobimo $\frac{\dot{u}^2+\dot{v}^2}{v^2}$, kar je enako levi strani enakosti.

Končni kompozitumi teh preslikav so ulomljene linearne preslikave. Velja pa tudi obratno: vsako ulomljeno preslikavo se da napisati kot kompozitum elementarnih izometrij. Naj bo $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, kjer so a, b, c in $d \in R$, ulomljena preslikava. Da bo f bijektivna, mora veljati še $ad - cb > 0$. Potem je $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ in:

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= z + \frac{d}{c},\\
f_2(z) &= -\frac{1}{z},\\
f_3(z) &= \frac{(ad-bc)}{c^2}z,\\
f_4(z) &= z + \frac{a}{c}.
\end{aligned}
$$

Upoštevali smo, da $c \neq 0$. Če je $c = 0$, kompozitum najdemo še lažje. Dokazati se da tudi, da so to vse izometrije zgornje polravnine, dokaz pa je nekoliko bolj zapleten, zato ga bomo izpustili. Razlaga je povzeta po [3], kjer je tudi dokaz, da so to vse izometrije.

Trditev 2.5. *Naj bosta l_1 in l_2 hiperbolični premici ter $z_1 \in l_1$ in $z_2 \in l_2$ točki, ki ležita na njima. Potem obstaja izometrija prostora $\mathcal{H}$, ki slika l_1 v l_2 in z_1 v z_2.*

Dokaz. Najprej razmislimo, da je dovolj, če trditev dokažemo v primeru, ko je l_2 navpičen poltrak z izhodiščem v $(0,0)$ in točka z_2 ustreza točki i. Označimo ju z l in z. Poiskati moramo izometrijo F_1, ki l_1 slika v l tako, da točko $z_1 \in l_1$ slika v i in izometrijo F_2, ki drugo hiperbolično premico l_2 slika v l in z_2 v i. Potem je kompozitum $F_2^{-1} \circ F_1$ izometrija, ki slika l_1 v l_2 in z_1 v z_2.
Za l_1 imamo dve možnosti:

(i) l_1 je navpičen poltrak z enačbo $u = a$ in $z_1 = a + ib$.
Izometrija, ki l_1 slika v l, je $\mathcal{T}_{-a}$. Ker je $\mathcal{T}_{-a}(z_1) = ib$, jo popravimo tako, da jo komponiramo s skaliranjem za faktor b^{-1}.$\mathcal{D}_{b^{-1}}$ imaginarno os slika samo vase. Torej smo našli izometrijo $\mathcal{D}_{b^{-1}} \circ \mathcal{T}_{-a}$, ki l_1 slika v l in z_1 v i.

(ii) l_1 je polkrog s središčem na realni osi in točka z_1 leži na njem. Naj l_1 seka realno os v točki $a \in \mathbb{R}$.

Ker smo v prejšnji točki že našli izometrijo, ki preslika poljuben navpični poltrak v l, zadošča poiskati izometrijo, ki l_1 slika v poljuben navpični poltrak in točko z_1 v poljubno točko na njem. Videli smo, da $\mathcal{I}_{a,1}$ hiperbolične premice, ki pravokotno sekajo realno os v a, slika v navpične poltrake.

□

Zanimiva razlika med evklidsko in hiperbolično geometrijo je tudi ta, da so v hiperbolični geometriji podobni trikotniki skladni, torej je tudi ploščina trikotnika odvisna le od njegovih kotov. Dokaz bomo zaradi dolžine izpustili.

3. Poincaréjev disk

V tem poglavju si bomo ogledali naslednji model hiperbolične ravnine. Tega bomo dobili tako, da bomo enotski disk opremili s tako fundamentalno formo, da bo obstajala izometrija med $\mathcal{H}$ in enotskim diskom, glede na pripadajoči oziroma predpisani prvi fundamentalni formi.

3.1. **Izometrija med polravnino in Poincaréjevim diskom.** V tem razdelku bomo iskali izometrijo med $\mathcal{H}$ in enotskim diskom. S tem bomo dobili nekoliko drugačen model hiperbolične geometrije. Pomagali si bomo z ulomljenimi preslikavami. Oglejmo si naslednjo ulomljeno preslikavo:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{z-i}{z+i}. \tag{12}$$

$\mathcal{P}$ je definirana za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, njen inverz pa je definiran s predpisom:

$$\mathcal{P}^{-1}(z) = -\frac{i(z+1)}{z-1} \quad \text{za} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \tag{13}$$

Torej je $\mathcal{P}$ bijektivna preslikava med $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ker $-i \notin \mathcal{H}$ je definirana na celem $\mathcal{H}$. Oglejmo si sedaj $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.
Naj bo $z = u + iv$. Ker je $z \in \mathcal{H}$, je $v > 0$. Ker je

$$|\mathcal{P}(u+iv)| = \left|\frac{u+i(v-1)}{u+i(v+1)}\right| = \left(\frac{u^2-2v+1+v^2}{u^2+2v+1+v^2}\right)^{1/2} \leq 1, \tag{14}$$

je $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}_{0,1}$. Če je $z \in \mathbb{R}$, je to točka z roba $\mathcal{H}$ in velja:

$$|\mathcal{P}(u)| = \left(\frac{u^2+1}{u^2+1}\right)^{1/2} = 1. \tag{15}$$

Torej se rob $\mathcal{H}$ s preslikavo $\mathcal{P}$ slika v rob $\mathcal{D}_{0,1}$, zato je $\mathcal{P}$ bijekcija med $\mathcal{H}$ in $\mathcal{D}_{0,1}$.
Sedaj nas zanima, s kakšno prvo fundamentalno formo moramo opremiti enotski disk, da bo $\mathcal{P}$ med $\mathcal{H}$ in $\mathcal{D}_{0,1}$ izometrija.

Izrek 3.1. *Če enotski disk $\mathcal{D}_{0,1}$ opremimo s prvo fundamentalno formo $F = 0$, $E = G = \frac{4}{1-u^2-v^2}$, je preslikava $\mathcal{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}_{0,1}$ izometrija.*

Dokaz. Naj bo $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ krivulja na $\mathcal{D}_{0,1}$ in $\tilde{\gamma}(t) = \mathcal{P}^{-1}(u(t), v(t)) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ krivulja na $\mathcal{H}$. Če naj bo $\mathcal{P}^{-1}$ izometrija, morata imeti γ in $\tilde{\gamma}$ enako dolžino. Iz formule za dolžino krivulje in iz izreka o povprečni vrednosti dobimo, da bo $\mathcal{P}^{-1}$ izometrija natanko tedaj, ko bo veljala zveza:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} & \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\mathcal{P}^{-1}$ je v kartezičnih koordinatah podana s predpisom

$$\mathcal{P}^{-1}(u,v) = \left(\frac{2uv}{(u-1)^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{(u-1)^2+v^2} \right),$$

kjer sta u in v seveda odvisna od t. Prva fundamentalna forma $\mathcal{H}$ ima v tem primeru koeficiente enake $E = G = \frac{1}{\tilde{v}^2}$ in $F = 0$. Izračunajmo še $\dot{\tilde{u}}$ in $\dot{\tilde{v}}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{u}} &= \frac{(2v((u-1)^2+v^2) - 4uv(u-1))\dot{u} + (2u((u-1)^2+v^2) - 4uv^2)\dot{v}}{((u-1)^2+v^2)^2}, \\
\dot{\tilde{v}} &= \frac{(-2u((u-1)^2+v^2) - (1-u^2-v^2)2(u-1))\dot{u}}{((u-1)^2+v^2)^2} \\
&+ \frac{(-2v((u-1)^2+v^2) - 2v(1-u^2-v^2))\dot{v}}{((u-1)^2+v^2)^2}.
\end{aligned}$$

Ker zgornja zveza velja za vsak par $(\dot{u_0}, \dot{v_0}) \in T_{u_0,v_0}\mathcal{P}$, velja tudi za vektorja $(0,1)$ in $(1,0)$. E iz zgornje zveze dobimo tako, da za $(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})$ vstavimo vektor $(1,0)$ na obeh straneh leve strani enakosti, F tako, da na eni strani vstavimo $(1,0)$, na drugi pa $(0,\, 1)$ in G tako, da na obeh straneh leve strani enačbe vstavimo vektor $(0,1)$.

$\square$

Sedaj lahko definiramo Poincaréjev disk kot naslednji model hiperbolične ravnine.

Definicija 3.2. Poincaréjev disk $\mathcal{D}_P$ s koeficienti prve fundamentalne forme $F = 0$, $E = G = \frac{4}{1-u^2-v^2}$ je model hiperbolične ravnine.

3.2. **Premice na $\mathcal{D}_P$.** Ker je preslikava $\mathcal{P}$ iz prejšnega razdelka izometrija, geodetke slika v geodetke. Zato so geodetke oziroma krivulje, ki jih bomo na Poincaréjevem disku imenovali premice, slike geodetk oziroma premic na zgornji polravnini. Kot smo že omenili, je $\mathcal{P}$ ulomljena preslikava, ki premice in krožnice slika v premice in krožnice. Poleg tega je preslikava konformna, kar vidimo iz oblike matrike koeficjentov prve fundamentalne forme. Torej $\mathcal{P}$ ohranja kote. Če povežemo vse naštete lastnosti preslikave $\mathcal{P}$, ugotovimo, da so geodetke na $\mathcal{D}_P$ deli krožnic, ki pravokotno sekajo rob diska. Med njimi so tudi vsi premeri diska, na katere lahko gledamo kot na dele krožnic z neskončnim radijem.

Na Poincaréjevem disku je razdalja podana z naslednjo formulo:

$$d_{\mathcal{D}_P}(a,b) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{b-a}{1-\overline{a}b}\right).$$

Ker je dokaz zelo podoben dokazu formule za razdaljo na zgornji polravnini, ga bomo izpustili.

V naslednjem poglavju si bomo na podlagi tega modela ogledali, kaj je vzporednost v hiperbolični geometriji.

4. Hiperbolična vzporednost

Hiperbolična vzporednost se kar dosti razlikuje od vzporednosti v evklidski geometriji. Kasneje bomo definirali celo dve različni hiperbolični vzporednosti, pri tem pa bomo izhajali iz različnih karakterizacij vzporednosti v evklidski geometriji. Oglejmo si naslednjo preprosto trditev brez dokaza.

Trditev 4.1. *Naslednje trditve so v evklidski geometriji ekvivalentne:*

(i) Premici l in m se ne sekata.
(ii) Premici l in m imata skupno pravokotnico.
(iii) Premici l in m sta na konstantni razdalji.

V evklidski geometriji pravimo, da sta l in m, ki zadoščata zgornjim trditvam, vzporedni, v hiperbolični geometriji pa je premic, ki se ne sekajo, zelo veliko, medtem ko to, da se premici ne sekata, še zdaleč ne pomeni, da imata skupno pravokotnico, kaj šele neskončno mnogo skupnih pravokotnic. Prav tako nobeni dve različni hiperbolični premici ne zadoščata točki (iii) iz zgornje trditve.

Trditev 4.2. *Naj bo l hiperbolična premica. Ne obstaja hiperbolična premica m, ki bi bila konstantno oddaljena od premice l.*

Dokaz. Ta dokaz bomo naredili na $\mathcal{H}$. Ker smo dokazali, da obstaja izometrija, ki katerokoli premico slika v katero koli drugo, lahko za l izberemo kar pozitivni del imaginarne osi. Izberimo še točko $a = u_0 + iv_0$. Geodetka, ki povezuje a s točko na l, je polovica krožnice z enačbo $u^2 + v^2 = u_0^2 + v_0^2 = r^2$ in l seka v točki $w = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}i = ir$. Razdalja med a in w je enaka $2\tanh^{-1}|\frac{ir-u_0-iv_0}{ir-u_0+iv_0}|$. Sedaj bi radi, da je ta razdalja konstantno enaka D, ko r preteče vsa pozitivna števila. S pomočjo programa WolframMatematica, se izkaže, da je množica točk (u, v), ki je rešitev enačbe

$$2\tanh^{-1}\left|\frac{ir-u-iv}{ir-u+iv}\right| = D,$$

ko $D \neq 0$, dve premici v evklidskem smislu, ki sekata izhodišče. Njuni enačbi sta:

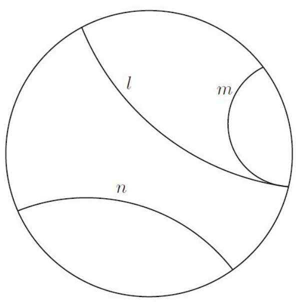
$$v = \pm\frac{\sqrt{u^2}(\tanh^2\frac{D}{2} - 1)}{2|\tanh\frac{D}{2}|}.$$

Ker izhodišča ne sekata pravokotno, to nista hiperbolični premici. $\square$

Definirajmo hiperbolično vzporednost na Poincaréjevem disku.

Definicija 4.3. Naj bosta l in m hiperbolični premici na $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$, ki se ne sekata v nobeni točki $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$.

(i) Če se l in m sekata v točki na robu $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$, pravimo, da sta vzporedni.
(ii) Če se l in m ne sekata v nobeni točki, pravimo, da sta ultra-vzporedni.

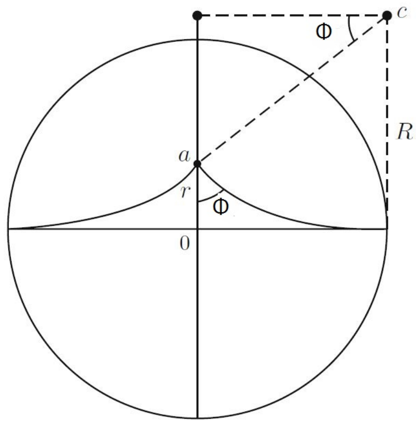


SLIKA 1. Premici l in n sta ultra-vzporedni, l in m pa vzporedni.

V poglavju o zgornji polravni smo videli, da v hiperbolični geometriji aksiom evklidske geometrije o vzporednicah ne drži. Oglejmo si situacijo na $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$.

Trditev 4.4. *Naj bo l hiperbolična premica na $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ in a točka, ki ne leži na njej. Potem obstajata natanko dve hiperbolični premici m in m', ki sta vzporedni z l in potekata skozi a.*

Kot med m in m' je enak 2Φ, kjer je $\sin\Phi = sech^{-1}(d)$ in d hiperbolična razdalja med a in l. Poleg tega hiperbolična premica skozi a seka l natanko tedaj, ko leži med m in m' in hiperbolična premica skozi a, ki pravokotno seka l razpolavlja kot med m in m'.



Dokaz. Dokaz bo lažji, če najprej dokažemo, da ostaja izometrija $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$, ki l slika na del realne osi znotraj $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ in točko a na imaginarno os. Najprej s preslikavo $\mathcal{P}^{-1}$ l in a slikamo v $\mathcal{H}$ in označimo $\tilde{a} = \mathcal{P}^{-1}(a)$ in $\tilde{l} = \mathcal{P}^{-1}(l)$. Po trditvi 2.5 vemo, da obstaja izometrija F, ki $\tilde{l}$ slika na imaginarno os. Naj bo $b = F(a)$. Preslikava $\mathcal{D}_{\frac{1}{|b|}}$ točko b slika na enotsko krožnico, medtem ko imaginarno os slika samo vase. Da bo $\mathcal{G} = \mathcal{P}^{-1}(a) \circ F \circ \mathcal{D}_{\frac{1}{|b|}} \circ \mathcal{P}$ želena izometrija, moramo preveriti še, da $\mathcal{P}$ imaginarno os preslika v realno os in enotsko krožnico v imaginarno os.
Naj bo $z = xi, \quad x > 0$:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{xi - i}{xi + i} = \frac{i(x-1)}{i(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}.$$

Če pa je $z = x + iy$ in $x^2 + y^2 = 1$, je

$$\mathcal{P}(z) = \frac{x + i(y-1)}{x + i(y+1)} = \frac{x^2 + ix(y - 1 - 1 - y) + y^2 - 1}{x^2 - (y+1)^2} = \frac{-2ix}{x^2 - (y+1)^2}.$$

Torej je $\mathcal{G}$ res želena izometrija in je prvi del dokaza dovolj dokazati v primeru, ko je l del realne osi med -1 in 1 in $a = ri$ za $r < 1$. Na zgornji sliki vidimo, da je trditev očitna z izjemo formule za Φ.

Ker je d razdalja med a in l, je $d = 2\tanh^{-1}(|r|)$ in $r = \tanh(\frac{d}{2})$. Premico m opiše enačba

$$|z - 1 - iR| = R,$$

za nek $R \in \mathbb{R}$. Ker je točka a na m, tudi a reši zgornjo enačbo:

$$|-1 - i(r - R)| = R$$

iz česar sledi, da je

$$R = \frac{1 + r^2}{2r}.$$

Oglejmo si pravokotni trikotnik v evklidskem smislu z oglišči a, $1+iR$ in iR. Ker je hipotenuza tega trikotnika radij krožnice, katere del je m, m seka pravokotno, zato je kot pri a enak $\frac{\pi}{2} - \Phi$.

$$\sin \phi = \frac{R - r}{R}$$

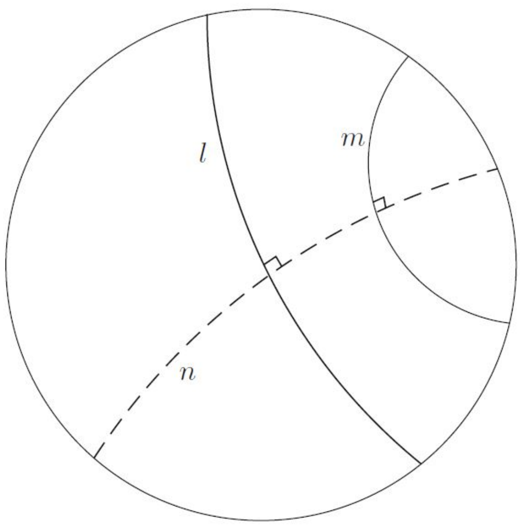
Če R nadomestimo z $\frac{1+r^2}{2r}$ in r z $\tanh(\frac{d}{2})$ in uporabimo še malo trigonometrije, dobimo:

$$\sin \phi = \mathrm{sh}^{-1}(d).$$

□

Pokazali smo, da k dani hiperbolični premici obstajata natanko dve vzporedni premici skozi neko točko, ki ne leži na prvotni premici. Trditev (ii) iz trditve 4.1 pa lahko povežemo z ultra-vzporednostjo. O tem govori naslednja trditev.

Trditev 4.5. *Hiperbolični premici sta ultra-vzporedni natanko takrat, ko imata skupno pravokotnico. V tem primeru je ena sama.*



Slika 2. Premici l in m sta ultra-vzporedni, m pa njuna skupna pravokotnica.

Dokaz. Predpostavimo najprej, da sta l in m ultra-vzporedni. V prejšnjem dokazu smo pokazali, da smemo predpostaviti, da l sovpada z imaginarno osjo. Poleg tega lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je m krog s središčem v c in z radijem r, ki v celoti leži na zgornji polovici diska, saj ne more biti premica, ki poteka skozi izhodišče, ker bi potem sekala l. Ker m seka disk pod pravim kotom, po Pitagorovem izreku velja:

$$|c| = r^2 + 1. \tag{16}$$

Pokažimo sedaj, da je $\mathrm{Re}(c)$ med -1 in 1:

$$-1 < \mathrm{Re}(c) < 1. \tag{17}$$

Predpostavimo, da m seka realno os v neki točki v. Potem velja $|c-v| = r$. Vstavimo r v enačbo 16 in dobimo kvadratno enačbo za v:

$$v^2 - 2v\,\mathrm{Re}(c) + 1 = 0. \tag{18}$$

Če je $|\,\mathrm{Re}(c)| > 1$, ima enačba 18 dve različni rešitvi po absolutni vrednosti manjši od 1, torej m seka l dvakrat, kar je v protislovju s predpostavko, da sta l in m ultra-vzporedni. Če je $|\,\mathrm{Re}(c)| = 1$ ima enačba 18 eno dvojno rešitev 1 ali -1, kar pomeni da se m dotika l na točki roba diska, kar je pravtako v nasprotju s tem, da sta ultra-vzporedni. Torej je $|\,\mathrm{Re}(c)| < 1$.

Predpostavimo sedaj, da je n krožnica s središčem v $b \in \mathbb{R}$ in z radijem s. Ker ima središče na realni osi, očitno seka l pod pravim kotom. Če želimo, da je pravokotna na m in rob diska, morata veljati zvezi:

$$|b-c|^2 = r^2 + s^2, \quad b^2 = s^2 + 1.$$

Če $\mathrm{Re}(c) \neq 0$, imata sistem zgornjih dveh enačb enolično rešitev:

$$b = \frac{1}{\mathrm{Re}(c)}, \quad s = \sqrt{\mathrm{Re}(c)^{-2} - 1}.$$

Tedaj je n iskana skupna pravokotnica. V primeru, ko je $\mathrm{Re}(c) = 0$, je očitno, da je iskana pravokotnica imaginarna os.

Predpostavimo sedaj, da imata l in m skupno pravokotnico n. Spet lahko privzamemo, da je l realna os in n imaginarna. Naj n seka l v točki $a = 0$ in m v točki b. Potem je m krožnica s središčem v iR za nek $R > 1$, ker n seka pravokotno. Kot v prvem delu dokaza tudi tu uporabimo pitagorov izrek in dobimo zvezo $R^2 = r^2 + 1$. Iz nje sledi, da je $R > r$, torej se m in l ne sekata in sta ultra-vzporedni. □

5. Paraboloidni model

V tem poglavju si bomo ogledali še en model hiperbolične ravnine. Tokrat bo model vložen v $\mathbb{R}^3$. Za začetek si oglejmo prostor Minkowskega, ki bo kasneje porodil naš model. Ta razdelek je povzet po [2, poglavje 3L].

Definicija 5.1. Prostor Minkowskega dimenzije $n+1$ je $\mathbb{R}^{n+1}$, opremljen s kvadratno formo:

$$\langle x, x\rangle_M = -x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2. \tag{19}$$

Nas bo prostor zanimal le v primeru, ko je $n = 2$. Zgornjo kvadratno formo lahko v $\mathbb{R}^3$ zapišemo tudi v sledeči matrični obliki.

$$\langle x, x\rangle_M = x^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x. \tag{20}$$

Glejmo na zgornjo kvadratično formo kot na metriko Minkowskega in si oglejmo, kaj je "enotska sfera" v tej metriki:

$$\mathcal{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, x\rangle_M = -1, x_0 > 0\}.$$

Drugo zahtevo za x zahtevamo zato, da dobimo povezano mnogoterost. Takoj vidimo, da je $\mathcal{H}^2$ hiperboloid.

Trditev 5.2. *Kvadratna forma $\langle x, x\rangle_M = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ porodi bilinearno simetrično formo na $\mathbb{R}^3$ in pozitivno definitno fundamentalno formo na $\mathcal{H}^2$.*

Dokaz. Naj bo $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^2$ in naj bo α neničelni tangentni vektor v $T_a\mathcal{H}^2$. Potem velja $\langle a, \alpha \rangle_M = 0$. Naj bo $\gamma : I \to \mathcal{H}^2$ taka krivulja, da velja $\gamma(0) = a$. Ker γ leži v $\mathcal{H}^2$, je $\langle \gamma, \gamma \rangle_M = 1$. Če zadnjo enakost odvajamo, dobimo zvezo:

$$\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle_M = 0.$$

V zvezo vstavimo $t = 0$ in označimo $\dot{\gamma}(0) = (u, v, w)$:

$$\langle (u, v, w), (x_0, y_0, z_0) \rangle_M = -ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0. \tag{21}$$

Ker je $a \in \mathcal{H}^2$, med komponentami a velja zveza:

$$x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 1, \text{ iz katere lahko izrazimo } x_0,\ x_0 = \pm\sqrt{y_0^2 + z_0^2 + 1}.$$

Ker smo predpostavili, da je $x_0 > 0$, je $x_0 = \sqrt{y_0 + z_0 + 1}$. Če vstavimo x_0 v enačbo (21) in izrazimo u, dobimo

$$u = \frac{vy_0}{\sqrt{y_0 + z_0 + 1}} + \frac{wz_0}{\sqrt{y_0 + z_0 + 1}}. \tag{22}$$

S tem smo ugotovili, da so vektorji v $T_a\mathcal{H}^2$ oblike:

$$X = \left(\frac{vy_0}{\sqrt{y_0 + z_0 + 1}} + \frac{wz_0}{\sqrt{y_0 + z_0 + 1}}, v, w \right).$$

Sedaj bi radi videli, da spodnji izraz porodi simetrično pozitivno definitno formo za vsak $X \in T_a\mathcal{H}^2$. To bo pomenilo, da kvadratna forma inducira skalarni produkt na $T_a\mathcal{H}^2$. Računajmo:

$$X^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = -\frac{v^2y_0^2}{y_0^2 + z_0^2 + 1} - \frac{2vwy_0z_0}{y_0^2 + z_0^2 + 1} - \frac{w^2z_0^2}{y_0^2 + z_0^2 + 1} + v^2 + w^2 =$$
$$= \frac{1}{y_0^2 + z_0^2 + 1} \left(-v^2y_0^2 - 2vwy_0z_0 - w^2z_0^2 + \left(y_0^2 + z_0^2 + 1 \right) v^2 + \left(y_0^2 + z_0^2 + 1 \right) w^2 \right) =$$
$$= \frac{1}{y_0^2 + z_0^2 + 1} \left(v^2(z_0^2 + 1) - 2vwy_0z_0 + w^2(y_0^2 + 1) \right).$$

Ker je izraz $y_0^2 + z_0^2 + 1 > 0$, se v zgornjem izrazu lahko izognemo ulomku, tako da izraz pomnožimo z $y_0^2 + z_0^2 + 1$. Dobljeno kvadratno formo lahko zapišemo v matrični obliki takole:

$$\begin{bmatrix} z_0^2 + 1 & -y_0z_0 \\ -y_0z_0 & y_0^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Radi bi videli še, da je pozitivno definitna. Po znanem izreku je matrika pozitivno definitna, če so njena determinanta in determinante vseh njenih vodilnih podmatrik pozitivne. Ker je $z_0^2 + 1 > 0$, moramo izračunati samo še determinanto cele matrike:

$$det \left(\begin{bmatrix} z_0^2 + 1 & -y_0z_0 \\ -y_0z_0 & y_0^2 + 1 \end{bmatrix} \right) = (z_0^2 + 1)(y_0^2 + 1) - y_0^2z_0^2 = z_0^2 + y_0^2 + 1 > 0$$

Torej imamo res simetrično pozitivno definitno kvadratno formo na $T_a\mathcal{H}^2$, ki definira metriko.

□

V naslednjem razdelku bomo pokazali, da je hiperboloid $\mathcal{H}^2$ z dano prvo fundamentalno formo izometričen Poincaréjevemu disku.

5.1. **Izometrija med $\mathcal{H}^2$ in Poincaréjevim diskom.** Najprej želimo najti difeomorfizem Φ, ki bo $\mathcal{H}^2$ slikal na enotski disk. Oglejmo si nekoliko prilagojeno stereografsko projekcijo skozi točko $s = (-1, 0, 0)$, definirano s predpisom:

$$\Phi(x) = s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s\rangle_M}. \tag{23}$$

Preverimo, da Φ res slika $\mathcal{H}^2$ na enotski disk. Naj bo $x = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^2$. Potem velja $x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 1$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\langle x-s, x-s\rangle_M &= \langle (x_0+1, y_0, z_0), (x_0+1, y_0, z_0)\rangle_M = \\
&= -(x_0+1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = -x_0^2 - 2x_0 - 1 + y_0^2 + z_0^2 = -2x_0 - 2 \\
\Phi(x_0, y_0, z_0) &= (-1, 0, 0) - \frac{2(x_0+1, y_0, z_0)}{-2x_0 - 2} = \\
&= (0, \frac{y_0}{x_0+1}, \frac{z_0}{x_0+1}).
\end{aligned}$$

Prepričajmo se, da točka $(0, \frac{y_0}{x_0+1}, \frac{z_0}{x_0+1})$ leži na enotskem disku:

$$\left|\left(0, \frac{y_0}{x_0+1}, \frac{z_0}{x_0+1}\right)\right|^2 = \frac{y_0^2 + z_0^2}{(x_0+1)^2} = \frac{x_0^2 - 1}{(x_0+1)^2} < 1, \quad \text{za } x_0 > 0.$$

Ker je $\mathcal{H}^2$ ploskev vložena v $\mathbb{R}^3$, mormo pri dokazu, da je Φ izometrija, postopati nekoliko drugače kot v dokazu izreka 3.1. V ta namen najprej definirajmo nekaj pojmov, ki nam bodo v pomoč.

Definicija 5.3. Kvadrat tangentnega prostora T^2X tangentnega prostora TX je podmnogoterost $T^2X \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ oblike:

$$T^2X = \{(m, v_1, v_2) | m \in X, v_1, v_2 \in T_mX\}.$$

Mnogoterost lahko parametriziramo tako:

$$\psi(x, u_1, u_2) = (r(x), D_xr(u_1), D_xr(u_2)),$$

kjer je r parametrizacija ploskve X.

Definicija 5.4. Metrika g na X je gladka funkcija, ki slika iz T^2X v $\mathbb{R}$, za katero velja, da za vsak $m \in X$ in vsaka $v_1, v_2 \in T_mX$, velja

$$g(m, v_1, v_2) = g_m(v_1, v_2).$$

Definicija 5.5. Naj bo $F : X \to Y$ taka gladka surjektivna preslikava, da je za vsak $m \in X$ odvod $D_mF : T_mX \to T_{F(m)}Y$ tudi surjektiven. Naj bo g metrika na Y. Povlek F^*g je metrika na X, dana s predpisom:

$$(F^*g)_m(v_1, v_2) = g_{F(m)}(D_mF(v_1), D_mF(v_2)).$$

Naša preslikava Φ bo izometrija, če bo veljalo:

$$\Phi^*(g_{\mathcal{D}}) = g_{\mathcal{H}^2}.$$

Naj bosta $X_1, X_2 \in T_{(x,y,z)}\mathcal{H}^2$ tangentna vektorja na $\mathcal{H}^2$ v točki (x, y, z). Po definiciji je:

$$(\Phi^*(g_{\mathcal{D}}))_{(x,y,z)}(X_1, X_2) = (g_{\mathcal{D}})_{(x,y,z)}(D_{(x,y,z)}(\Phi(X_1)), D_{(x,y,z)}(\Phi(X_2))).$$

Radi bi pokazali, da je zgornji povlek metrike enak $g_{\mathcal{H}^2}$. Računajmo:

$$\begin{aligned} D_{(x,y,z)}(\Phi) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{(1+x)^2} & \frac{1}{1+x} & 0 \\ -\frac{z}{(1+x)^2} & 0 & \frac{1}{1+x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1+x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{(1+x)} & 1 & 0 \\ -\frac{z}{(1+x)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Iz tega vidimo, da so elementi tangentnega prostora $T_{\Phi(x,y,z)}\mathcal{D}$ oblike $(0, A_1, A_2)$. Naj bo γ krivulja na $\mathcal{H}^2$ in naj bo $\gamma(0) = (x, y, z)$. Označimo $\dot{\gamma}(0) = X = (a_1, a_2, a_3)$. Od prej vemo:

$$-a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$

oziroma:

$$a_1 = a_2 \frac{y}{x} + a_3 \frac{z}{x}.$$

Torej je $X = \left(a_2 \frac{y}{x} + a_3 \frac{z}{x}, a_2, a_3\right)$. Če izračunamo $(D_{(x,y,z)}\Phi)X$, dobimo:

$$\frac{1}{1+x}\left(0, -a_2 \frac{y^2}{x(x+1)} - a_3 \frac{yz}{x(x+1)} + a_2, -a_2 \frac{yz}{x(x+1)} - a_3 \frac{z^2}{x(x+1)} + a_3\right).$$

Naj bo $\Phi(x, y, z) = (0, \frac{y}{x+1}, \frac{z}{x+1}) = (0, u, v)$. Izrazimo prvo fundamentalno formo Poincaréjevega diska z (x, y, z):

$$\begin{aligned} (1-u^2-v^2)^2 &= \left(1 - \frac{y^2}{(x+1)^2} - \frac{z^2}{(x+1)^2}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{y^2+z^2}{(x+1)^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2-1}{(x+1)^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2x+2}{(x+1)^2}\right)^2 = \frac{4}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Torej je $\frac{4}{(1-u^2-v^2)} = (x+1)^2$. Primerjajmo sedaj količini $g_{\mathcal{D}}(X, X)$ in $g_{\mathcal{H}^2}(X, X)$:

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{D}}(X,X) &= (x+1)^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2}\left(a_2\left(1 - \frac{y^2}{x(x+1)}\right) - a_3 \frac{yz}{x(x+1)}\right)^2\right) + \\ &+ (x+1)^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2}\left(a_3\left(1 - \frac{z^2}{x(x+1)}\right) - a_2 \frac{yz}{x(x+1)}\right)^2\right) = \\ &= \frac{a_2^2}{x^2(x+1)^2}\left(\left((x+1)x - y^2\right)^2 + y^2 z^2\right) - \\ &- \frac{2a_2 a_3}{x^2(x+1)^2}\left((x+1)x - z^2\right)\left((x+1)x - y^2\right) y^2 z^2 + \\ &+ \frac{a_3^2}{x^2(x+1)^2}\left(\left((x+1)x - z^2\right)^2 + y^2 z^2\right). \\ g_{\mathcal{H}^2}(X,X) &= -\left(a_2 \frac{y}{x} + a_3 \frac{z}{x}\right)^2 + a_2^2 + a_3^2 = \\ &= a_2^2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right) - 2a_3 a_2 \frac{yz}{x^2} + a_3^2\left(\frac{x^2-z^2}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Preslikava Φ bo izometrija, če se koeficienti pri a_2^2, a_3^2 in a_2a_3 ujemajo.
Z upoštevanjem, da je $z^2 = x^2 - y^2 - 1$ pri a_2^2, dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{((x+1)x-y^2)^2+y^2z^2}{x^2(x+1)^2} &= \frac{(x+1)^2x^2-2(x+1)xy^2+y^4+y^2x^2-y^4-y^2}{x^2(x+1)^2} = \\ &= \frac{(x+1)^2x^2-2x^2y^2-2xy^2+y^2x^2-y^2}{x^2(x+1)^2} = \\ &= \frac{(x+1)^2x^2-y^2(x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2}.\end{aligned}$$

Zelo podobno lahko opazimo, da so koeficjenti enaki tudi pri a_3^2 in a_2a_3, zato je Φ res iskana izometrija in $\mathcal{H}^2$ model hiperbolične geometrije.

5.2. **Izometrije $\mathcal{H}^2$.** V tem razdelku si bomo pogledali, kaj so vse izometrije hiperboloida $\mathcal{H}^2$. Naj bo:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrika skalarnega produkta na $\mathcal{H}^2$. Radi bi poiskali vse linearne preslikave $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki bodo izometrije.

Vemo, da je linearna preslikava A izometrija natanko tedaj, ko zadošča pogoju:

$$\langle Ax, Ay\rangle_M = \langle x, y\rangle_M \quad \text{za vsaka } x, y \in \mathcal{H}^2. \tag{24}$$

Če upoštevamo definicijo skalarnega produkta na $\mathcal{H}^2$, lahko zgornji pogoj zapišemo takole:

$$(Ax)^T JAy = x^T Jy,$$

oziroma:

$$x^T A^T JAy = x^T Jy.$$

Ker mora zgornji pogoj veljati za vsaka x in y, dobimo naslednji pogoj na A:

$$A^T JA = J.$$

Ker je J^2 identiteta, se pogoj lahko poenostavi v $A^{-1} = JA^TJ$. Torej smo pokazali, da velja $A^{-1} = JA^TJ$ natanko tedaj, ko je $\langle Ax, Ay\rangle_M = \langle x, y\rangle_M$.

Naj bo sedaj $x = y$. Potem je $\langle Ax, Ax\rangle_s = ||Ax||_M^2 = \langle x, x\rangle_s = ||x||_M^2$. Če je $x \in \mathcal{H}^2$, je $||x||_M^2 = 1$, in zato tudi $||Ax||_M^2 = 1$. Torej je A izometrija, ki $\mathcal{H}^2$ slika v $\mathcal{H}^2$. Ker je A linearna preslikava, je odvod sama sebi in zato $DxA = A : T_x\mathcal{H}^2 \to T_{Ax}\mathcal{H}^2$.

Trditev 5.6. *Grupa $G = \{A \in \boldsymbol{GL}(3,\mathbb{R}) | A^TJA = J\}$ je podgrupa grupe $\boldsymbol{GL}(3,\mathbb{R})$.*

Dokaz. Dokazati moramo, da veljajo naslednji trije pogoji za podgrupo:

(1) $id \in G$.

$$id^T Jid = idJid = J.$$

(2) Naj bosta $A, B \in G$, potem je tudi $AB \in G$.

$$(AB)^T JAB = B^T A^T JAB = B^T JB = J.$$

(3) Če je $A \in G$, potem je tudi $A^{-1} \in G$.
V zgornji izpeljavi smo videli, da je $A^{-1} = JA^TJ$. Potem imamo:

$$(JA^TJ)^T JJA^TJ = JAJJJA^TJ = JAJA^TJ = JJJ = J.$$

Torej je G res podgrupa. $\square$

Grupo vseh izometrij hiperboloida $\mathcal{H}^2$ bomo označili z $\mathbf{SO}(2,1)$. Tudi tu se da dokazati, da so to vse izometrije prostora $\mathcal{H}^2$.

Slovar strokovnih izrazov

upper half-plane zgornja polravnina
geodetic line keodetska krivulja
halfline poltrak
first fundamental form prva funadamentalna forma

Literatura

[1] A. Pressley,*Elementary Differencial Geometry*, Second edition, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London Limited, 2012.

[2] S. Gallot, *Riemannian Geometry*, Third edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004

[3] K. Snyder, Isometries of the hyperbolic plane,ogled 22 6. 2019], dostopno na povezavi `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Snyder.pdf`