UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Sara Močnik

Ponceletov izrek

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2019

Kazalo

Ponceletov izrek

Povzetek

Ponceletov izrek pravi, da če za stožnici S_1 in S_2 obstaja n-kotnik, ki je včrtan stožnici S_1 in očrtan stožnici S_2, potem za S_1 in S_2 obstaja neskončno takih n-kotnikov. Vsaka točka na S_1 je oglišče kakega opisanega n-kotnika in vsaka točka na S_2 leži na stranici kakega opisanega n-kotnika. V realni projektivni ravnini najprej predstavimo in dokažemo poseben primer Ponceletovega izreka za trikotnike in nato še splošni izrek. Pri tem si pomagamo s Pascalovim izrekom, Brianchonovim izrekom, Carnotovim izrekom, dualom Carnotovega izreka in nekaj pomožnimi trditvami.

Poncelet's theorem

Abstract

Poncelet's theorem states, that if n-sided polygon is inscribed in conic S_1 and circumscribed about conic S_2, then there exists infinitely many of such polygons. Moreover, for any point P of S_1, there exists an n-sided polygon, also inscribed in conic S_1 and circumscribed about conic S_2, which has P as one of its vertices, and for any point R of S_2, there exists an n-sided polygon, also inscribed in conic S_1 and circumscribed about conic S_2, such that tangent to S_2 from R is one of its lines. In real projective plane we first explain special case of Poncelet's theorem for triangles and then the general case. For that we use Pascal's theorem, Brianchon's theorem, Carnot's theorem, dual of Carnot's theorem and some other claims.

Math. Subj. Class. (2010): 51N15, 51N20

Ključne besede: Ponceletov izrek, projektivna geometrija, stožnica

Keywords: Poncelet's theorem, projective geometry, conic

1. Uvod

Projektivna geometrija se je začela razvijati v 15. stoletju, ko so se slikarji začeli zanimati za geometrijo prostora. Želeli so, da se občutek prostora prenese na platno oz. ravnino. Prvi, ki se je ukvarjal s teorijo perspektive je bil italijanski arhitekt F. Brunelleschi leta 1425, njegovo delo sta nadaljevala italijanski arhitekt in slikar L. B. Alberti in nemški slikar A. Dürer. Alberti je preučeval projekcijo kvadrata iz vodoravne ravnine na platno, postavljeno pravokotno na ravnino kvadrata. Tej konstrukciji danes rečemo Albertinijeva konstrukcija, eno glavnih opažanj pa je, da se vzporedni premici kvadrata na platno preslikata v sekajoči se premici [3].

Kot matematični začetek razvoja projektivne geometije štejemo 17. stoletje, ko sta J. Kepler in G. Desargues neodvisno uvedla pojem neskončno oddaljene točke. To točko dobimo tako, da družini vzporednih premic dodamo eno novo točko v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$. Če množico vseh točk v neskončnosti združimo z evklidsko ravnino, dobimo razširjeno evklidsko ravnino $\bar{\mathbb{R}}^2$. Nato se je glavnina razvoja projektivne geometrije preselila v Francijo. Tam je B. Pascal leta 1640 dokazal Pascalov izrek o presekih stožca, ki je eden pomembnejših izrekov projektivne geometrije. Sledil mu je J. V. Poncelet, ki je preučeval pojme, kot so projektivnosti, perspektivnosti, harmonične četverke in dualnost [3].

V 18. stoletju je J. Steiner začel graditi projektivno geometrijo sistematično. Kasneje so nemški matematiki prenehali razlikovati med običajnimi točkami in točkami v neskončnosti in prišlo je do prehoda iz razširjenega evklidskega prostora na projektivnega. Šele leta 1892 je bila projektivna geometrija prvič zasnovana povsem aksiomatsko [3].

Jean-Victor Poncelet (1788 - 1876) je bil francoski inženir in matematik. Leta 1812 je bil zaprt kot vojni ujetnik Rusov in takrat je začel preučevati projektivno geometrijo. Napisal je celo knjigo *Traité des propriétés projectives des figures*, vendar je moral z izdajo le te počakati do leta 1822. V tem delu je Poncelet predstavil nekaj že znanih rezultatov in nekaj povsem novih izrekov projektivne geometrije, med drugim tudi *Veliki Ponceletov izrek* ali *Ponceletov zaprti izrek*. Ta danes velja za njegov največji dosežek na področju matematike. Izrek pravi, da če za stožnici S_1 in S_2 obstaja n-kotnik, ki je včrtan S_1 in očrtan S_2, potem za S_1 in S_2 obstaja neskončno takih n-kotnikov. Še več, vsaka točka na S_1 je oglišče kakega opisanega n-kotnika in vsaka točka na S_2 leži na stranici kakega opisanega n-kotnika [1].

2. Projektivna geometrija

V tem poglavju bomo podali osnovne pojme, definicije in trditve o projektivni geometriji, ki jih bomo potrebovali čez celotno diplomsko delo. Rezultati so povzeti po [5, poglavje 4].

V tem delu bomo točke označevali z velikimi tiskanimi črkami (npr. A, X...) in premice z malimi tiskanimi črkami (npr. p). Če sta A in B točki, bomo premico med njima označili z AB ali $A - B$, presek premic p in q pa bomo pisali z znakom $\cap$, torej $p \cap q$.

2.1. **Projektivna geometrija in princip dualnosti.**

Definicija 2.1. Naj bo V končno razsežen vektorski prostor nad obsegom O z razsežnostjo vsaj 2. Množica vseh vektorskih podprostorov v V se imenuje *projektivna geometrija* $P(V)$ nad V.

Vektorski podprostor 0 predstavlja prazno množico. Enorazsežne podprostore imenujemo *točke projektivne geometrije*, dvorazsežne pa *projektivne premice*.

Projektivni prostor $\mathcal{P}V$ je množica vseh točk projektivne geometrije $P(V)$.

Skozi razvoj projektivne geometrije so projektivno geometrijo enačili z razširjeno evklidsko ravnino. Bolj natančno: če obravnavamo n-razsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$, potem projektivno geometrijo tvorimo iz evklidske afine geometrije tako, da dodamo točko v neskončnosti za vsako družino vzporednih premic.

Če povzamemo [5, str. 52] in [4, poglavje 5.2], si lahko projektivno ravnino, ki jo dobimo iz evklidske afine ravnine $\mathbb{R}^2$, predstavljamo kot vložitev. Ravnino $\mathbb{R}^2$ vložimo na recimo nivo $z = 1$ v $\mathbb{R}^3$, kar označimo s $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{1\}$. Vsaka točka v Σ je tako presek te ravnine s primerno premico skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$ in podobno je vsaka premica v Σ presek ravnine s primerno ravnino skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$. Če lahko vsako točko v ravnini Σ predstavimo kot enorazsežen vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^2 \times 0)$, potem nam enorazsežni vektorski prostori v $\mathbb{R}^2 \times 0$ predstavljajo točke v neskončnosti. Podobno se zgodi s premicami: če vsako premico v ravnini Σ predstavimo kot dvorazsežen vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^2 \times 0)$, potem nam dvorazsežen vektorski prostor $\mathbb{R}^2 \times 0$ predstavlja premico v neskončnosti.

Za potrebe tega dela se bomo omejili na vektorske prostore nad poljem realnih števil $\mathbb{R}$. Če je vektorski prostor dimenzije 3, potem dobljeno projektivno geometrijo $P(\mathbb{R}^3)$ imenujemo tudi *projektivna ravnina*. Iz obravnave realnih števil že vemo, da ustrezajo tudi strukturi obsega, da obstaja le en avtomorfizem realnih števil in da je karakteristika $\mathbb{R}$ enaka 0. Ta dejstva bomo potrebovali v nadaljevanju, ko bomo definirali pojme samo za vektorske prostore nad $\mathbb{R}$ (za posplošitve naj bralec poseže po [5, 4. poglavje]).

Nekateri že znani rezultati iz eklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ dobijo v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ podobno formulacijo. Eden izmed takih je: skozi poljubni različni točki gre natanko ena projektivna premica. Spet drugi rezultati so specifični - posebnost projektivne ravnine je ta, da se poljubni različni projektivni premici sekata v natanko eni točki, ki je lahko končna ali neskončna. Hitro opazimo podobnost med trditvama, saj se zdi, kot da smo le zamenjali izraza točka in premica z izrazoma premica in točka. V projektivni ravnini to lahko storimo zaradi *(dvodimenzionalnega) principa dualnosti*. Po [3] definiramo:

Definicija 2.2. Naj bo τ neka izjava o projektivni ravnini. Izjavo, ki jo dobimo iz izjave τ na takšen način, da besede točka, premica, pripada, vsebuje po vrsti zamenjamo z besedami premica, točka, vsebuje, pripada, imenujemo izjavi τ *dualna izjava* τ^* *v ravnini.*

Rečemo, da sta si izjavi τ in τ^* *dualni.*

Podobno lahko v projektivni ravnini zaradi principa dualnosti zamenjamo izraza kolinearen in konkurenten ter izraza oglišče in stranica. V splošnem nam princip dualnosti pove, da je za vsako resnično trditev τ o projektivni geometriji resnična tudi njena dualna trditev τ^*.

2.2. **Preslikave v projektivni geometriji.**

Definicija 2.3. Naj bosta V in U vektorska prostora nad obsegom $\mathbb{R}$ enake razsežnosti $n \geqslant 3$ ter $\mathcal{P}V$ in $\mathcal{P}U$ ustrezna projektivna prostora. Bijektivno preslikavo $\vartheta : \mathcal{P}V \to \mathcal{P}U$ imenujemo *projektivnost*, če poljubne tri kolineane točke preslika v kolinearne.

Vsaki projektivnosti ustreza neka bijektivna linearna preslikava $M : V \to U$. Tedaj uporabljamo tudi zapis $\vartheta = \vartheta_M$, njen predpis pa ima obliko $\vartheta_M(X) = MX$, kjer je $X \leq \mathcal{P}V$. To je tudi osnovni izrek projektivne geometrije, njegov dokaz lahko najdemo v [5, str. 84-86].

Definicija 2.4. Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ in naj bodo U, U' ter T taki vektorski podprostori v V, da velja: $\dim U = \dim U'$, $U \oplus T = U' \oplus T = V$. Preslikavo $\vartheta : \mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$, definiramo s predpisom $\vartheta(X) = (X \oplus T) \cap U'$, imenujemo *perspektivnost s centrom T*.

2.3. **Homogene koordinate in dvorazmerje.** Homogene koordinate v projektivni geometriji so nekakšen ekvivalent kartezičnim koordinatam v evklidski geometriji. Njihova prednost je, da lahko točke v neskončnosti podamo s končnimi koordinatami, kar nam mnogo stvari poenostavi. S pomočjo [4] in [5] definiramo homogene koordinate v projektivni ravnini.

Homogene koordinate v projektivni ravnini imajo obliko $[x : y : z]$. Vemo že, da so točke projektivne ravnine enorazsežni vektorski podprostori vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Vsaka premica v $\mathbb{R}^3$ je določena s smernim vektorjem (x, y, z), zato homogene koordinate točke, ki jo premica določa, označimo z $[x : y : z]$. Ker je smerni vektor določen do množenja s skalarjem natančno, nam homogene koordinate $[x : y : z]$ in $[\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ predstavljajo isto točko projektivne ravnine. Če se spomnimo, kako si predstavljamo projektivno ravnino, potem nam premice skozi izhodišče v ravnini $z = 0$ določajo točke v neskončnosti in imajo homogene koordinate $[x : y : 0]$, ostale točke projektivne geometrije pa lahko delimo s skalarjem in pridemo do homogenih koordinat $[x : y : 1]$.

Definicija 2.5. Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ razsežnosti n. Tedaj $n + 1$ točk v $P(V)$ tvori *projektivno ogrodje*, če nobena n-terica teh točk ne leži na isti hiperravnini.

Oglejmo si še definicijo dvorazmerja.

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ razsežnosti 2. Naj bo p projektivna premica v $\mathcal{P}V$ in A, B, C take točke na njej, da je $\{A, B, C\}$ projektivno ogrodje za premico p. Premica je dvorazsežen podprostor vektorskega prostora V. Tri točke tvorijo projektivno ogrodje za premica p, če noben par točk ne leži na isti hiperravnini. Hiperravnina je podprostor korazsežnosti 1, v našem primeru torej točke. Vidimo torej, da točke $\{A, B, C\}$ tvorijo projektivno ogrodje za projektivno premico, če so vse točke različne.

Pri definiciji dvorazmerja bomo potrebovali spodnjo lemo. Sledimo [5] in [4].

Lema 2.6. *Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ razsežnosti n. Če je $\{X_0, \ldots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$, potem obstajajo neničelni vektorji $x_i \in X_i$, da velja:*

$$x_0 = x_1 + \ldots + x_n.$$

Dokaz. Naj bo $\{X_0, \ldots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}\mathbb{R}^n$. Za vsak $i \in \{0, \ldots, n\}$ izberemo neničelni vektor $y_i \in X_i$. Po definiciji projektivnega ogrodja nobena n-terica točk ne leži na isti hiperravnini, torej točke $X_1, \ldots, X_n$ ne ležijo na isti hiperravnini in je množica $\{y_1, \ldots, y_n\}$ baza vektorskega prostora V. Vektor y_0 razvijemo po bazi: obstajajo skalarji $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da je $y_0 = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$. V primeru, da je $\lambda_i = 0$ pridemo v protislovje, saj pridemo do sklepa, da točke $X_0, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ ležijo na isti hiperravnini. Vsi skalarji λ_i so torej neničelni in iskani vektorji so $x_0 = y_0$ ter $x_i = \lambda_i y_i$. □

Ker točke $\{A, B, C\}$ tvorijo projektivno ogrodje za premico p, po lemi 2.6 obstajajo neničelni vektorji $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, da je $c = a + b$. Naj bo $D \in p$ točka na premici p, ki je različna od točke A. Naj bo $d' \in D$. Potem obstajata taka skalarja $\alpha, \beta \in O$, da velja:

$$d' = \alpha a + \beta b.$$

Ker smo točko D izbrali tako, da $A \neq D$, velja $\beta \neq 0$. Zgornjo enačbo lahko tako preobrazimo v:

$$d = \frac{\alpha}{\beta} a + b$$

Definicija 2.7. Kvocient $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ imenujemo *dvorazmerje* različnih točk A, B, C in D in ga označimo z $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.

Iz izpeljave vidimo, da se dvorazmerje λ spremeni, če spremenimo vrstni red točk na premici p.

Pokažimo, da se dvorazmerje ohrani, če točke slikamo s projektivnostjo. Naj bo $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$. Torej obstajajo taki neničelni vektorji $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ in $d \in D$, da je $c = a+b$ in $d = \lambda a+b$. Naj bo ϑ_M projektivnost. Matriko M uporabimo na vektojih: $Mc = M(a + b) = Ma + Mb$ in $Md = M(\lambda a + b) = M(\lambda a) + Mb = \lambda Ma + Mb$. Za preslikane vektorje velja $Ma \in MA$, $Mb \in MB$, $Mc \in MC$, da je $Mc = Ma + Mb$ in $Md = \lambda Ma + Mb$, kar je po definiciji dvorazmerja ravno dvorazmerje preslikanih točk.

Definicija 2.8. Naj bo V vektorski prostor nad poljem F razsežnosti 3. Naj bodo p, q, r in s različne projektivne premice v $\mathcal{P}V$, ki se sekajo v isti točki Q. Naj bo t projektivna premica v $\mathcal{P}V$, ki ne gre skozi točko Q. Dvorazmerje šopa premic je:

$$\mathcal{D}(p, q, r, s) = \mathcal{D}(p \cap t, q \cap t, r \cap t, s \cap t)$$

Definicija dvorazmerja šopa premic je neodvisno od izbire premice t. Če izberemo drugo premico v, ki ne vsebuje točke Q, potem obstaja perspektivnost $\vartheta : t \to v$ s centrom Q, za katero velja:

$$\vartheta(p \cap t) = p \cap v,$$
$$\vartheta(q \cap t) = q \cap v,$$
$$\vartheta(r \cap t) = r \cap v,$$
$$\vartheta(s \cap t) = s \cap v.$$

Ker velja, da je vsaka perspektivnost projektivnost (dokaz lahko bralec najde v [5, izrek 4.44]) in ker projektivnost ohranja dvorazmerje, velja: $\mathcal{D}(p\cap t, q\cap t, r\cap t, s\cap t) = \mathcal{D}(p \cap v, q \cap v, r \cap v, s \cap v)$.

2.4. **Stožnice.** V projektivni geometriji ne moremo posebej obravnavati elipse, hiperbole in parabole kot v evklidski geometriji, zato poznamo samo stožnico v splošni obliki. Razlika med elipso, hiperbolo in parabolo je v projektivni ravnini v premici v neskončnosti. Za začetek si poglejmo nekaj definicij, ki nas bodo pripeljale do definicije stožnice in njenih lastnosti.

Naj bo $V = \mathbb{R}^3$ vektorski prostor. Stožnica S v projektivni geometriji $P(V)$ v homogenih koordinatah $[x : y : z]$ je množica ničel homogenega polinoma stopnje 2. Stožnici S ustreza enačba

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

Če enačbo zapišemo v matrični obliki, dobimo:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Rečemo, da stožnici S pripada zgornja matrika.

Povedano drugače: točka s homogenimi koordinatami $[x : y : z]$ reši zgornjo enačbo natanko tedaj, ko leži na stožnici.

Za potrebe dokazov izreka 2.11 in trditve 2.14 se spomnimo, kako prehajamo med bazami vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$ (povzeto po [7]). Naj bosta $\mathcal{B}_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$ in $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ bazi prostora. Bazne vektorje baze $\mathcal{B}_2$ izrazimo z baznimi vektorji baze $\mathcal{B}_1$ s pomočjo enačbe $v_j = \sum_{i=1}^{3} p_{i,j} t_i$. Iz skalarjev $p_{i,j}$ tvorimo matriko, ki ji rečemo prehodna matrika iz baze $\mathcal{B}_1$ v bazo $\mathcal{B}_2$ in jo označimo s P_{12}. Ta matrika bazne vektorje $\mathcal{B}_1$ po vrsti preslika v vektorje $\mathcal{B}_2$. Za izračun prehodne matrike iz baze $\mathcal{B}_2$ v bazo $\mathcal{B}_1$ nam ni potrebno uporabiti zgornjega računa, saj sta si prehodni matriki inverzni: $P_{12} = P_{21}^{-1}$. Namreč: če matrika P_{12} preslika bazne vektorje $\mathcal{B}_1$ v vektorje $\mathcal{B}_2$ in podobno matrika P_{21}, potem njun produkt $P_{12}P_{21}$ slika bazne vektorje $\mathcal{B}_1$ same vase in tej preslikavi pripada identična matrika.

Primer 2.9. Naj bo $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^3$. Množica $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ je linearno neodvisna, zato je prav tako baza prostora $\mathbb{R}^3$.

Prehodna matrika iz baze $\mathcal{B}_1$ v $\mathcal{B}_2$ je $P_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, njen inverz, ki je prehodna matrika iz baze $\mathcal{B}_2$ v $\mathcal{B}_1$ pa je $P_{21} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tako smo našli preslikavo, ki bazne vektorje baze $\mathcal{B}_1$ po vrsti preslika v bazne vektorje $\mathcal{B}_2$ oz. ravno obratno. Preverimo za prva vektorja obeh baz:

$$e_1 = P_{21} v_1 = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = P_{12} e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

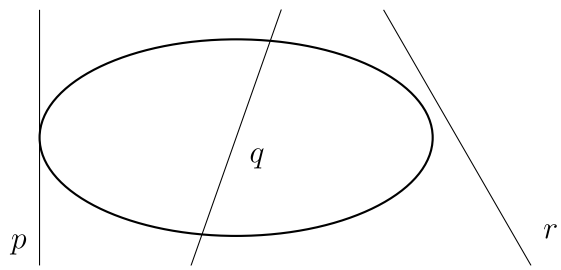
Najenostavnejša za računanje je standardna baza prostora. V dokazih izreka 2.11 in trditve 2.14 bomo izbrano bazo $\{v_1, v_2, v_3\}$ slikali v standardno bazo $\{e_1, e_2, e_3\}$ s prehodno matriko P. Stožnici S naj v izbrani bazi pripada matrika M. Računamo:

$$
\begin{aligned}
v_1^\top M v_1 &= 0 \\
\big(e_1^\top P^\top\big) M \big(P e_1\big) &= 0 \\
e_1^\top \big(P^\top M P\big) e_1 &= 0 \\
e_1^\top M' e_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Pri tem se simetrična matrika, ki pripada stožnici S, nekoliko spremeni, a ostane simetrična: $(P^\top M P)^\top = P^\top M^\top P = P^\top M P$.

Definicija 2.10. Stožnica S je *neizrojena*, če je rang pripadajoče matrike maksimalen.

Iz evklidske ravnine vemo, da lahko premica stožnico seka v največ dveh točkah. Podobno je tudi v projektivni geometriji.



SLIKA 1. Stožnica ima s projektivno premico p eno skupno točko, s projektivno premico q dve skupni točki, s projektivno premico r pa sta si tuji.

Izrek 2.11. *Presek neprazne, neizrojene stožnice s projektivno premico vsebuje največ dve točki.*

Dokaz. Dokažemo s protislovjem.

Naj bo p projektivna premica in S neprazna, neizrojena stožnica. Recimo, da v preseku ležijo tri različne točke: $p \cap S = \{A, B, C\}$. Po lemi 2.6 izberemo neničelne vektorje $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, da je $c = a + b$. Izberemo še vektor $d \in V$, tako da množica $\{a, b, d\}$ tvori bazo za vektorski prostor V. Za lažje računanje z matriko preidemo v standardno bazo. Pokazali smo že, kako po vrsti bazne vektorje baze $\{a, b, d\}$ preslikamo v standardno bazo $\{e_1, e_2, e_3\}$. Naj stožnici S v standardni bazi pripada naslednja matrika:

$$
M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}.
$$

Ker smo vektor a preslikali v vektor e_1, vektor e_1 vstavimo v enačbo za stožnico in dobimo $e_1^\top M e_1 = 0$, kar nam da rezultat $\alpha_1 = 0$. Podobno naredimo z vektorjem b, ki ga preslikamo v e_2. Z malo računanja dobimo $\alpha_3 = 0$. Ker je smerni vektor za točko C je določen z vektorjema a in b, je preslikan vektor določen z vektorjema e_1 in e_2. Ob upoštevanju prejšnjih rezultatov dobimo $\alpha_2 = 0$.

Stožnici S tako pripada matrika $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$, za katero velja rang $M \leq 2$. Ker se rang matrike ne spremeni, če spremenimo bazo prostora, smo prišli v protislovje s predpostavko, daje stožnica neizrojena.

□

Izrek nam pove tudi, da je vsaka stožnica, ki vsebuje tri kolinearne točke (in s tem premico), izrojena.

Definicija 2.12. Projektivna premica t_X je *tangenta* na stožnico S v točki X, če je v preseku stožnice s tangento samo točka X: $S \cap t_X = X$.

Točki $X \in S$ iz zgornje definicije rečemo tudi *dotikališče* tangente s stožnico. Ta tangenta je edina tangenta na stožnico S v točki X. Če pa točka Y ne leži na stožnici, se lahko zgodi, da iz nje na stožnico S obstajata ali dve tangenti ali nobene. Prvi primer se zgodi, če točka leži zunaj stožnice in drugi, če točka leži znotraj stožnice.

Definicija 2.13. *Polara* točke X v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$ glede na stožnico S z matriko M je množica $p_X = \{\text{Lin}\{y\};\ y^\top Mx = 0\}$, kjer je x poljuben neničeln vektor v X.

Tangente in polare v projektivni ravnini so projektivne premice. Pokažemo lahko, da točka X leži na polari p_Y točke Y natanko tedaj, ko točka Y leži na polari p_X točke X. Če točka $X = \text{Lin}\{x\}$ leži na polari p_Y točke $Y = \text{Lin}\{y\}$, potem je $x^\top My = 0$. Zaradi simetričnosti matrike M velja enakost $x^\top My = y^\top Mx = 0$, kar pa ravno pomeni, da točka Y leži na polari p_X točke X. Podobno pridemo tudi do rezultata, da točka X leži na svoji polari natanko tedaj, ko točka leži na stožnici. Dokaz trditve najdemo v [5, str. 102].

Zgodi se lahko tudi, da polara in tangenta sovpadata:

Trditev 2.14. *Naj bosta S neprazna, neizrojena stožnica in $X \in S$ točka na njej. Potem je polara p_X točke X glede na stožnico S tangenta na S v X.*

Dokaz. Dokažemo s protislovjem.

Naj bo S neprazna, neizrojena stožnica s pripadajočo matriko M in točka $X \in S$. Videli smo že, da v tem primeru velja $X \in p_X$. Recimo, da v preseku polare točke X s stožnico ležita različni točki X in Y. Izberemo neničelne vektorje $x \in X$, $y \in Y$ in $z \in V$ tako, da tvorijo bazo vektorskega prostora V. Za lažje računanje z matriko preidemo v standardno bazo. Pokazali smo že, kako po vrsti bazne vektorje baze $\{x, y, z\}$ preslikamo v standardno bazo $\{e_1, e_2, e_3\}$. Naj stožnici S v standardni bazi pripada naslednja matrika:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Vektorja točk X in Y smo slikali v e_1 in e_2, zato dobimo $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Točka Y leži tudi na polari točke X, zato po definiciji polare velja $y^\top Mx = 0$ in zato po spremembi baze $\alpha_2 = 0$.

Stožnici S tako pripada matrika $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$, za katero velja rang $M \leq 2$. Ker se rang matrike ne spremeni, če spremenimo bazo prostora, smo prišli v protislovje s trditvijo, da presek polare s stožnico vsebuje dve različni točki. □

Pojma polare in tangente sta torej tesno povezana - celo tako zelo, da si lahko s tangentami pomagamo pri konstrukciji polar. Povzemimo [5, str. 104-105]. Videli smo že, da če točka X leži na stožnici S, potem sta tangenta t_X in polara p_X ista projektivna premica. V primeru, da točka X ne leži na stožnici S se lahko zgodi, da ali obstajata dve tangenti ali nobena. V prvem primeru označimo dotikališči obeh tangent s točkama X_1 in X_2, tangenti pa t_{X_1} in t_{X_2}. Poglejmo, kaj lahko povemo o t_{X_1}. Po zgornjem razmisleku velja $t_{X_1} = p_{X_1}$. Tangento t_{X_1} smo konstruirali tako, da vsebuje točki X in X_1. Tako velja $X \in p_{X_1}$, kar nam inducira $X_1 \in p_X$. Simetrično se zgodi v drugem dotikališču in dobimo $X_2 \in p_X$. Polara točke X vsebuje točki X_1 in X_2, kar lahko označimo kot $X_1X_2 = p_X$. Oglejmo si še zadnji primer konstrukcije polare točke X, ki nima tangent na stožnico S. Naj bosta p_1 in p_2 premici skozi X, ki sekata stožnico S v točkah X_1, Y_1 in X_2, Y_2, torej: $p_i = X_iY_i$. Naj bo Z_i presečišče tangent na S v točkah X_i in Y_i. Podobno kot zgoraj razmislimo, da $X \in p_i = X_iY_i = p_{Z_i}$. Tako zopet dobimo $Z_i \in p_X$ oz. $p_X = Z_1Z_2$.

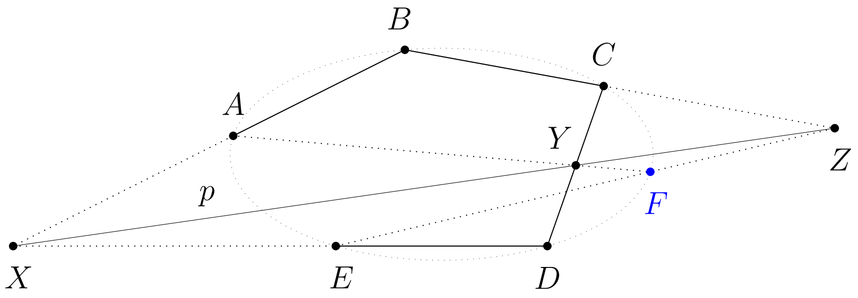
Tudi za stožnice lahko definiramo dvorazmerje točk:

Definicija 2.15. Naj bo S neprazna, neizrojena stožnica. *Dvorazmerje* različnih točk A, B, C, $D \in S$ je $\mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(TA,TB,TC,TD)$, kjer je $T \in S$ poljubna točka.

V definiciji nastopa poljubna točka T. Lahko se zgodi, da je enaka eni izmed točk A, B, C ali D. Če se na primer zgodi $T = A$, potem velja $\mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(AA,AB,AC,AD)$, kjer premica AA predstavlja tangento na stožnico S v točki A. Kljub temu dvorazmerje ostaja enako in dobro definirano zaradi Steinerjevega izreka. Ta namreč pravi, da je dvorazmerje šopa premic $\mathcal{D}(TA,TB,TC,TD)$ neodvisno od točke $T \in S$ - več v [5, izrek 4.77].

V nadaljevanju dela se bomo srečali s Pascalovim izrekom (izrek 3.1), ki nam pove, kako lahko konstruiramo stožnico s šestimi točkami. Izkaže se, da lahko stožnico konstruiramo že samo s petimi točkami ali premicami v splošni legi. Pravimo, da n točk leži v splošni legi, če ni nobena trojica točk kolinearna. Podobno n premic leži v splošni legi, če nobene tri niso konkurentne. Povzemimo [2], ki nam predstavi konstrukcijo stožnice s petimi točkami. Zaradi principa dualnosti lahko podobno konstrukcijo naredimo s petimi premicami.

Naj različne točke A, B, C, D in E ležijo v splošni legi v ravnini. Najprej narišemo poligonsko črto $ABCDE$. Skozi točko X, ki je presečišče premic AB in DE, narišemo poljubno premico p. Poiščemo presečišča premice p s premicama CD in BC in ju označimo z Y in Z. Nato narišemo premici YA in ZE in poiščemo njuno presečišče F. Tako smo našli šesto točki F, ki leži na stožnici S.



SLIKA 2. Konstrukcije stožnice skozi 5 točk.

Tako smo konstruirali šesto točko na stožnici. Sedaj lahko z uporabo Pascalovega izreka stožnico tudi konstruiramo. Izkaže se, da je vsaka točka F v ravnini del stožnice S, le če so točke X, Y in Z iz konstrukcije kolinearne (torej lahko vsako točko na stožnici dobimo tako, da spreminjamo naklon premice p in ponavljamo postopek).

V Ponceletovem izreku (izrek 4.2) se srečamo z izrazoma *včrtan* in *očrtan*. Pravimo, da je n-kotnik včrtan stožnici, če so vsa njegova oglišča na stožnici. Dualno rečemo, da je n-kotnik očrtan stožnici, če so vse njegove stranice tangente stožnice.

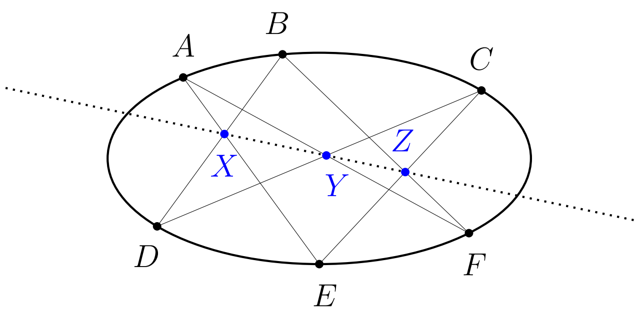
3. Ponceletov izrek za trikotnike

Najprej bomo pokazali poseben primer Ponceletovega izreka za trikotnike. Pokazali bomo, da če oglišča dveh trikotnikov brez skupnih oglišč ležijo na neki stožnici S_1, potem so stranice trikotnikov tangentne na neko drugo stožnico S_2. Izrek in dokaz bomo povzeli po [1].

Pred tem bomo navedli in dokazali Pascalov izrek, njegov dual, ki se imenuje Brianchonov izrek, in Carnotov izrek z dualom. Navedbe vseh najdemo v [1], dokaz za Pascalov izrek in njegov dual pa v [5].

Izrek 3.1. ***(Pascalov izrek)*** *Naj bo S neprazna, neizrojena stožnica. Točke A, B, C, D, E, F ležijo na S natanko tedaj, ko so točke $X = AE \cap BD$, $Y = AF \cap CD$ in $Z = BF \cap CE$ kolinearne.*

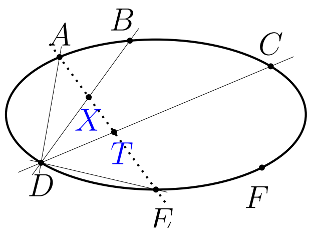
Pascalov izrek govori torej o stožnici vrisanem šestkotniku. Temu šestkotniku rečemo tudi *Pascalov šestkotnik*, premico, ki vsebuje točke X, Y in Z pa imenujemo *Pascalova premica*.



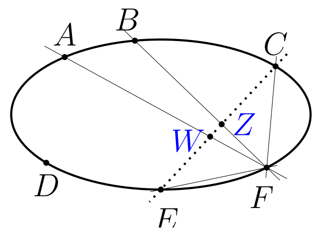
SLIKA 3. Stožnica s Pascalovim šestkotnikom in Pascalovo premico.

Dokaz. Pri dokazovanju v desno bomo izračunali dvorazmerje točk A, B, C in E na dva načina in ju primerjali.

Imamo neprazno, neizrojeno stožnico S in točke A, B, C, D, E in F, ki ležijo na njej.



SLIKA 4. Izračun dvorazmerja točk A, B, C in E s pomočjo točke D.



SLIKA 5. Izračun dvorazmerja točk A, B, C in E s pomočjo točke F.

Najprej izračunamo dvorazmerje točk A, B, C in E kot dvorazmerje šopa premic, ki gredo skozi točko D in ležijo na premici AE (glej sliko 4):

$$\mathcal{D}(A,B,C,E) = \mathcal{D}(DA,DB,DC,DE) = \mathcal{D}(A,X,T,E), \tag{1}$$

kjer je $X = AE \cap DB$ in $T = AE \cap DC$.

Nato dvorazmerje točk izračunamo še kot dvorazmerje šopa premic, ki gredo skozi točko F in ležijo na premici CE kot na sliki 5):

$$\mathcal{D}(A,B,C,E) = \mathcal{D}(FA,FB,FC,FE) = \mathcal{D}(W,Z,C,E), \tag{2}$$

kjer je $Z = BF \cap EC$ in $W = EC \cap AF$.

Če združimo enačbi (1) in (2), dobimo naslednjo enakost:

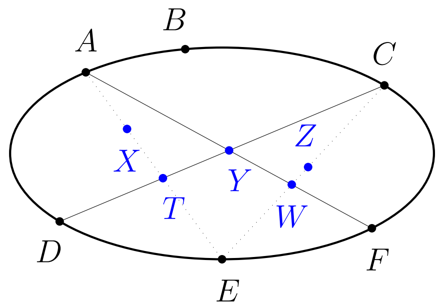
$$\mathcal{D}(W,Z,C,E) = \mathcal{D}(A,B,C,E) = \mathcal{D}(A,X,T,E). \tag{3}$$

Sedaj primerjamo dvorazmerji šopov premic, ki potekajo skozi točko $Y = AF \cap CD$. Po eni strani velja:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(YA,YX,YT,YE) &= \mathcal{D}(YA\cap AE, YX\cap AE, YT\cap AE, YE\cap AE)\\ &= \mathcal{D}(A,X,T,E).\end{aligned}$$

Po drugi pa velja:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(YW,YZ,YC,YE) &= \mathcal{D}(YW\cap CE, YZ\cap CE, YC\cap CE, YE\cap CE)\\ &= \mathcal{D}(W,Z,C,E).\end{aligned}$$



Slika 6. Dvorazmerje šopov premic skozi točko Y.

Zato ob upoštevanju (3) velja:

$$\mathcal{D}(YA, YX, YT, YE) = \mathcal{D}(YW, YZ, YC, YE)$$

in ker je $YA = YW$, $YT = YC$, velja tudi $YX = YZ$. Iz enakosti premic vidimo, da so točke X, Y in Z kolinearne.

Pri dokazovanju v levo bomo konstruirali stožnico skozi 5 točk in pokazali, da tudi šesta točka leži na isti stožnici. Naj bodo točke A, B, C, D, E in F take, da so točke $X = AE \cap BD$, $Y = AF \cap CD$ in $Z = BF \cap CE$ kolinearne. Označimo Pascalovo premico, torej premico, ki vsebuje vse tri točke, z l. Skozi točke A, B, C, D, E konstruiramo stožnico S. Dokazati moramo, da tudi točka F leži na stožnici.

Naj bo F' presečišče premice BF in stožnice S. Ker točka F' leži na stožnici S, lahko za A, B, C, D, E in F' uporabimo Pascalov izrek v desno. Konstruiramo točki $X = AE \cap BD$ in $Z' = BF' \cap CE$. Ker velja $F' \in BF$, je $Z = Z'$. Po predpostavki točki X in Z ležita na Pascalovi premici l. Po predpostavki tudi točka Y leži na isti premici, torej jo lahko zapišemo kot $Y = AF \cap CD = l \cap CD$. Po drugi strani je zaradi Pascalovega izreka $Y' = AF' \cap CD = l \cap CD$, zato $Y = Y'$. Vidimo, da so točke Y, A, F in F' kolinearne. Ker po konstrukciji velja $F' = AY \cap BF$, po predpostavki pa $F = AY \cap BF$, sta točki F in F' enaki, kar pomeni, da vse točke A, B, C, D, E in $F = F'$ ležijo na stožnici S. $\square$

Iz izreka 3.1 lahko hitro vidimo, da če so vse točke A, B, C, D, E in F paroma različne, potem so tudi točke X, Yin Z zagotovo različne. Že v primeru, da izenačimo dve točki na stožnici se lahko zgodi, da točke X, Y in Z niso več paroma različne. Če na primer izenačimo točki A in D, dobimo $X = Y$.

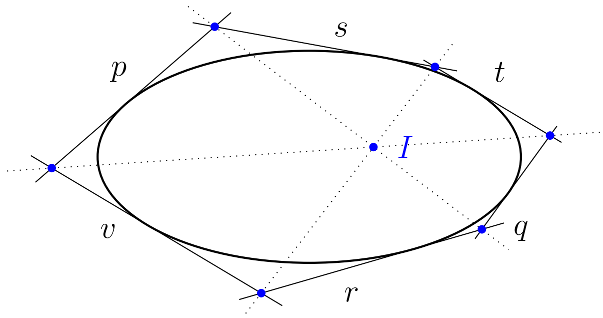
Ko se bomo kasneje sklicevali na izrek 3.1, bomo uporabljali notacijo

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A' & B' & C' & D' & E' & F' \end{pmatrix},$$

ki pomeni: če imamo stožnico s točkami A', B', C', D', E' in F' in želimo uporabiti enega izmed izrekov, bomo v izrek namesto točke A vstavili točko A' itd.

Oglejmo si še dual Pascalovega izreka. Ta izrek se imenuje Brianchonov izrek:

Izrek 3.2. ***(Brianchonov izrek)*** *Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna, neizrojena stožnica. Premice p, q, r, s, t, v so tangentne na $\mathcal{S}$ natanko tedaj, ko se premice $(p \cap s) - (q \cap r)$, $(r \cap v) - (t \cap s)$ in $(p \cap v) - (q \cap t)$ sekajo v isti točki.*



SLIKA 7. Brianchonov izrek.

Brianchonov izrek govori torej o stožnici orisanem šestkotniku. Pravi, da se diagonale, ki povezujejo nasprotna oglišča, sekajo v točki I, ki ji rečemo tudi *Brianchonova točka*.

Dokaz. Pri dokazu v desno si pomagamo s Pascalovim izrekom.

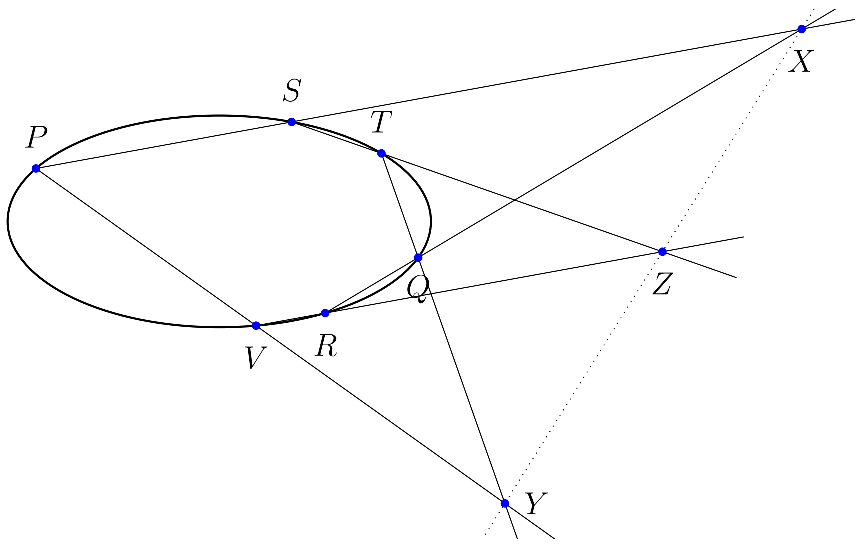
Označim presečišča tangent s stožnico z istoimenskimi točkami:

$$P = p \cap S, \qquad Q = q \cap S, \qquad R = r \cap S,$$
$$S = s \cap S, \qquad T = t \cap S, \qquad V = v \cap S.$$

Vseh šest točk leži na stožnici S, zato lahko uporabimo izrek 3.1:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ P & R & T & Q & S & V \end{pmatrix}$$

in dobimo, da so točke $X = PS \cap QR$, $Y = PV \cap QT$ in $Z = ST \cap VR$ kolinearne.

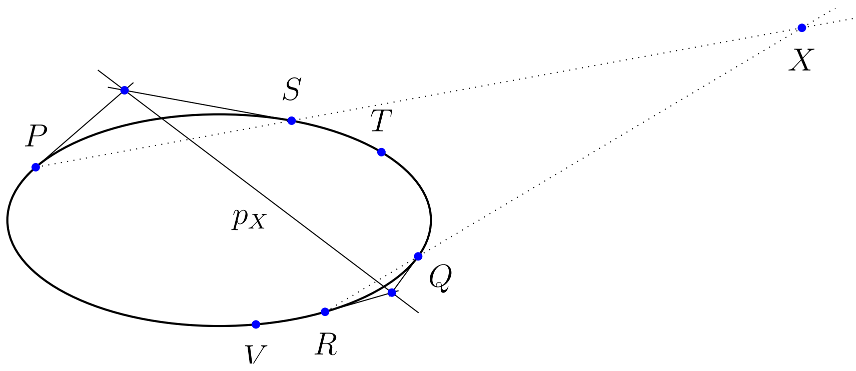


SLIKA 8. Točke $X = PS \cap QR$, $Y = PV \cap QT$ in $Z = ST \cap VR$ so kolinearne.

Polari točk X in Y sta premici skozi dotikališči dveh tangent na stožnico iz dane točke. Označimo njuno presečišče, torej: $I = p_X \cap p_Y$. Ker točka I leži na obeh polarah, točki X in Y ležita na polari točke I oz. $p_I = XY$. Podobno lahko sklepamo za polari točk X in Z. Presečišče označimo z J in dobimo, da je $p_J = XZ$.

Po zgornjem razmisleku smo videli, da so točke X, Y ter Z kolinearne, kar implicira tudi enakost polar $p_I = XY = XZ = p_J$. Iz tega sklepamo, da sta točki I in J enaki, kar pomeni, da se polare točk X, Y in Z vse sekajo v isti točki.

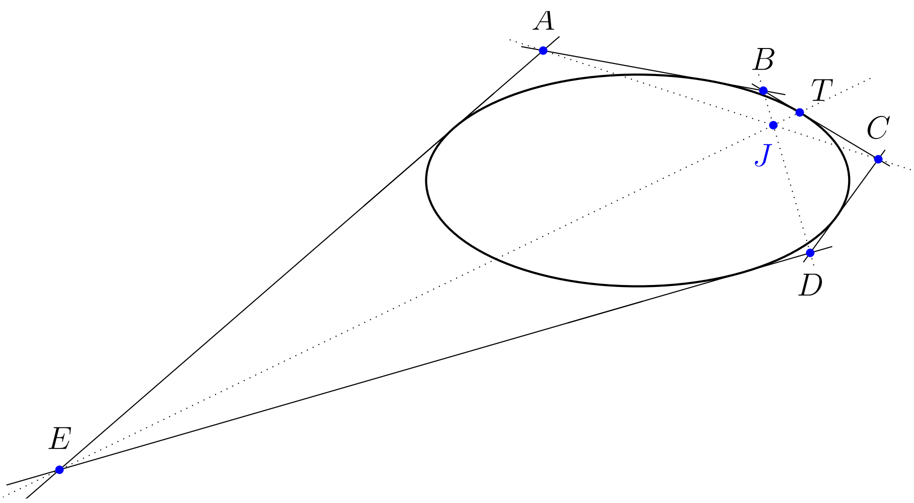
Sedaj s konstrukcijo polare pokažemo, da se premice iz izreka sekajo v isti točki.



SLIKA 9. Konstrukcija polare p_X točke X.

Za konstrukcijo polare točke X izberemo točke P, S, R in Q. Polara poteka skozi presek tangent parov točk, torej poteka skozi točki $p \cap s$ in $q \cap r$. Dobimo torej: $p_X = (p \cap s) - (q \cap r)$. Podobno dobimo tudi polari točk Y in Z: $p_Y = (p \cap v) - (t \cap q)$ in $p_Z = (t \cap s) - (v \cap r)$. Presečišče vseh treh polar oz. premic pa je ravno v točki I.

Pri dokazu v levo bomo konstruirali stožnico skozi 5 tangent in pokazali, da je tudi šesta premica tangentna na to stožnico. Naj bodo premice p, q, r, s, t, v take, da se premice $(p \cap s) - (q \cap r)$, $(r \cap v) - (t \cap s)$ in $(p \cap v) - (q \cap t)$ sekajo v isti točki I. Izberemo pet premic, brez škode za splošnost vzamemo p, q, r, s in t in označimo njihova presečišča: $A = p \cap s$, $B = s \cap t$, $C = t \cap q$, $D = q \cap r$, $E = q \cap p$. Izbrane premice bodo tangente stožnice S, ki jo bomo konstruirali. Najprej poiščemo dotikališča premic s stožnico. Sledimo sliki 10. Če je točka T dotikališče stožnice S in tangente t, potem so po izreku 3.2 diagonale šestkotnika $ABTCDE$ konkurentne. Presečišče premic AC in DB je v točki J, torej je dotikališče tangente t s stožnico ravno v preseku premic EJ in t.



SLIKA 10. Konstrukcija dotikališča tangente in stožnice.

Če to ponovimo za vsako premico, dobimo pet dotikališč, s katerimi pa že znamo konstruirati stožnico.

Za končen dokaz izreka moramo pokazati, da je tudi premica v tangenta na isto stožnico S.

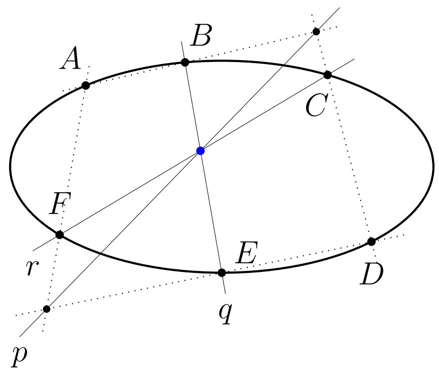
Označimo s točko V_1 presečišče premic r in v ter s V_2 presečišče premic v in p. Iz točke V_1 (ki ne leži na stožnici S) na stožnico S padata dve tangenti: r in v'. Presečišče tangent v' in p označimo z V_2'. Naš cilj je pokazati $v' = v$. Ker so p, q, r, s, t in v' vse tangentne na stožnico S, lahko uporabimo izrek 3.2 v desno. Tako dobimo rezultat, da so premice $(p \cap s) - (q \cap r)$, $(r \cap v') - (t \cap s) = V_1 - (t \cap s)$ in $(p \cap v') - (q \cap t) = V_2' - (q \cap t)$ konkurentne in se sekajo v točki I. Ob upoštevanju predpostavke vidimo, da točko I vsebuje tudi premica $(p \cap v) - (q \cap t) = V_2 - (q \cap t)$. Torej sta točki V_2 in V_2' kolinearni, saj obe ležita na premici $I - (q \cap t)$. Obe točki prav tako ležita na tangenti $t \neq I - (q \cap t)$, torej pridemo do zaključka, da sta točki enaki: $V_2 = V_2'$. Torej velja tudi enakost $v' = v$ in tako je premica v dokazano tangentna na stožnico S.

□

Podobno kot za sklicevanje na izrek 3.1, bomo za uporabo izreka 3.2 uporabljali notacijo

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s & t & v \\ p' & q' & r' & s' & t' & v' \end{pmatrix}.$$

Izrek 3.3. ***(Carnotov izrek)*** *Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna, neizrojena stožnica. Točke A, B, C, D, E, F ležijo na $\mathcal{S}$ natanko tedaj, ko so premice $p = (AB \cap CD) - (DE \cap FA)$, $q = BE$ in $r = CF$ konkurentne oz. se sekajo v isti točki.*



Slika 11. Carnotov izrek.

Dokaz. Pri dokazu zamenjamo točke in dokazujemo kolinearnost s pomočjo Pascalovega izreka.

Ko točke primerno premečemo:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & D & F & C & A & E \end{pmatrix}$$

in uporabimo izrek 3.1, vidimo, da so točke

$$X = AB \cap CD,$$

$$Y = BE \cap CF,$$

$$Z = DE \cap AF$$

kolinearne. To pa ravno pomeni, da so premice p, q in r iz izreka konkurentne. $\square$

Oglejmo si še dual Carnotovega izreka:

Izrek 3.4. ***(Carnotov izrek*)*** *Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna, neizrojena stožnica. Premice p, q, r, s, t, v so tangentne na $\mathcal{S}$ natanko tedaj, ko so točke $X = [(p \cap s) - (t \cap q)] \cap [(q \cap r) - (v \cap p)]$, $Y = s \cap r$ in $Z = t \cap v$ kolinearne.*

Dokaz. Pri dokazu zamenjamo premice in dokazujemo kolinearnost s pomočjo Brianchonovega izreka.

Ko premice primerno premečemo:

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s & t & v \\ p & q & t & s & r & v \end{pmatrix}$$

in uporabimo izrek 3.2, vidimo, da so premice

$$a = (p \cap s) - (q \cap t),$$

$$b = (r \cap s) - (t \cap v),$$

$$c = (p \cap v) - (q \cap r)$$

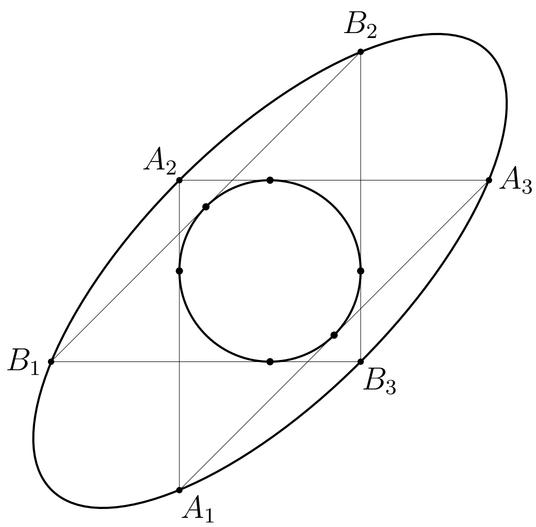
konkurentne, torej se sekajo v isti točki X. Dual Carnotovega izreka pa pravi, da so točke $X = [(p \cap s) - (t \cap q)] \cap [(q \cap r) - (v \cap p)]$, $Y = s \cap r$ in $Z = t \cap v$ kolinearne. Izrek je dokazan, saj velja $YZ = b$ in $X = a \cap c$. $\square$

Ko se bomo kasneje sklicevali na izrek 3.3, bomo uporabljali isto notacijo kot za izrek 3.1, torej:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A' & B' & C' & D' & E' & F' \end{pmatrix}.$$

Podobno tudi za izrek 3.4.

Izrek 3.5. ***(Ponceletov izrek za trikotnike)*** *Če sta dva trikotnika brez skupnih oglišč vrisana v stožnico, potem so stranice trikotnikov tangentne na stožnico.*



Slika 12. Ponceletov izrek za trikotnike.

Dokaz. S pomočjo stranic obeh trikotnikov poiščemo kolinearne točke X, Y in Z in uporabimo Pascalov izrek in dual Carnotovega izreka.

Naj bosta $\triangle A_1A_2A_3$ in $\triangle B_1B_2B_3$ trikotnika, ki sta vrisana stožnici S_1. Velja, da $A_i \neq B_j$ za vsak $i, j \in \{1, 2, 3\}$, torej trikotnika nimata skupnih oglišč.

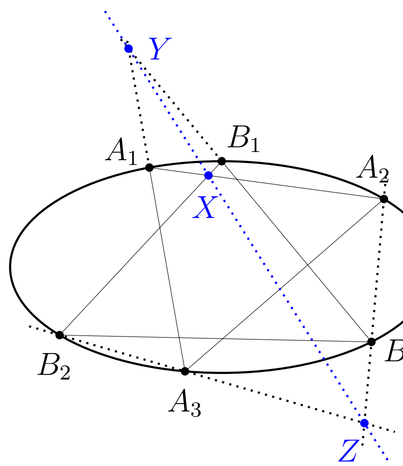
Označimo:

$$X = A_1A_2 \cap B_1B_2,$$
$$Y = A_3A_1 \cap B_3B_1,$$
$$Z = A_2B_3 \cap B_2A_3.$$

Če točke permutiramo

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A_1 & B_2 & B_3 & B_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix},$$

hitro vidimo, da lahko uporabimo izrek 3.1. Ta nam pove, da so točke X, Y ter Z kolinearne.



Slika 13. Točke X, Y in Z so kolinearne.

Sedaj lahko s preimenovanjem stranic trikotnika

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s & t & v \\ A_2A_3 & A_1A_2 & B_3B_1 & B_2B_3 & B_1B_2 & A_3A_1 \end{pmatrix},$$

uporabimo izrek 3.4. Tako dobimo rezultat, da so stranice obeh trikotnikov tangente na neko stožnico S, saj so točke X, Y in Z kolinearne. □

Posledica 3.6. *Naj bosta S_1 in S_2 neprazni, neizrojeni stožnici. Naj bo trikotnik $\triangle A_1A_2A_3$ vrisan v stožnico S_1 in orisan stožnici S_2. Potem za vsako točko $B_1 \in S_1$, za katero obstajata dve tangenti na stožnico S_2, obstaja trikotnik $\triangle B_1B_2B_3$, ki je prav tako vrisan v stožnico S_1 in orisan stožnici S_2.*

Dokaz. Za vsako točko B_1 na stožnici tvorimo trikotnik in upoštevamo izrek 3.5.

Naj bosta S_1 in S_2 neprazni, neizrojeni stožnici. Naj bo trikotnik $\triangle A_1A_2A_3$ vrisan v stožnico S_1 in orisan stožnici S_2.

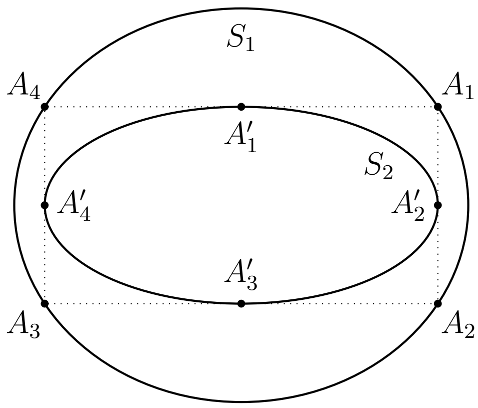
Če je točka B_1 enaka kateremukoli izmed oglišč trikotnika $\triangle A_1A_2A_3$, potem je naš iskan trikotnik $\triangle A_1A_2A_3$.

Sicer naj bodo točke A_1, A_2, A_3, $B_1 \in S_1$ paroma različne. Po predpostavki iz točke B_1 obstajata dve tangenti na stožnico S_2. Točki, kjer tangenti ponovno sekata stožnico S_1, označimo z B_2 in B_3. Tako smo konstruirali 6 točk na stožnici S_1 in 5 tangent na stožnico S_2. Če povežemo še točki B_2 in B_3, dobimo dva trikotnika $\triangle A_1A_2A_3$ in $\triangle B_1B_2B_3$, katerih oglišča so vsa na stožnici S_1. Izrek 3.5 nam pove, da so stranice trikotnikov tangentne na stožnico S_2'. Ker je stožnica definirana s petimi tangentami, je $S_2' = S_2$, torej je trikotnik $\triangle B_1B_2B_3$ orisan v stožnico S_2. □

4. Ponceletov izrek

V tem poglavju bomo zapisali in dokazali *Veliki Ponceletov izrek*, ki je eden glavnih dosežkov Ponceleta v projektivni geometriji in na področju matematike. Poglavje bomo povzeli po [1] in ga razdelili na tri dele. Najprej bomo zapisali Ponceletov izrek, potem pa bomo navedli in dokazali tri pomožne trditve. Te trditve bomo v tretjem delu potrebovali pri dokazu Ponceletovega izreka.

Definicija 4.1. Naj bosta S_1 in S_2 neizrojeni, neprazni stožnici. Če obstaja n-kotnik, ki je očrtan stožnici S_2 in včrtan stožnici S_1, potem rečemo, da imata S_1 in S_2 *n-Ponceletovo lastnost.*

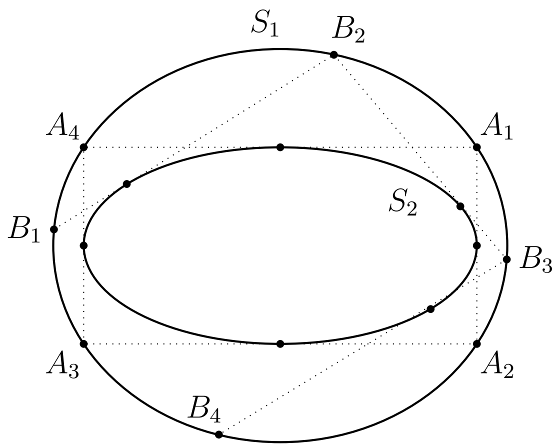


Slika 14. Stožnici S_1 in S_2 imata 4-Ponceletovo lastnost.

Veliki Ponceletov izrek se imenuje tudi *Ponceletov zaprti izrek.* Beseda zaprti v imenu nastopa, saj se n-kotnik v stožnici sklene oz. zapre. Poglejmo: naj bosta S_1 in S_2 stožnici z n-Ponceletovo lastnostjo in naj bo A_1 točka na stožnici S_1. Če narišemo tangento na stožnico S_2, ki gre skozi točko A_1, tangenta seka S_1 še v eni točki - označimo jo z A_2. Če zopet narišemo tangento na stožnico S_2, ki gre skozi točko A_2, dobimo novo točko A_3. Postopek ponavljamo. V n-tem koraku postopka dobimo: $A_{n+1} = A_1$, torej se n-kotnik, ki ga dobimo s tangentami, zapre [6].

Ponceletov izrek pravi:

Izrek 4.2. ***(Ponceletov izrek)*** *Naj bosta S_1 in S_2 neprazni, neizrojeni stožnici. Naj bo $A_1A_2\dots A_n$ n-kotnik, ki je včrtan v stožnico S_1 in očrtan stožnici S_2 in nobeno njegovo oglišče ne leži na S_2. Naj bo $B_1B_2\dots B_n$ taka poligonska črta, da vsa njena oglišča ležijo na S_1, nobeno oglišče ne leži na S_2 in vse daljice so tangentne na S_2. Potem je tudi daljica B_nB_1, ki sklene poligonsko črto, tangentna na stožnico S_2.*



SLIKA 15. Ponceletov izrek.

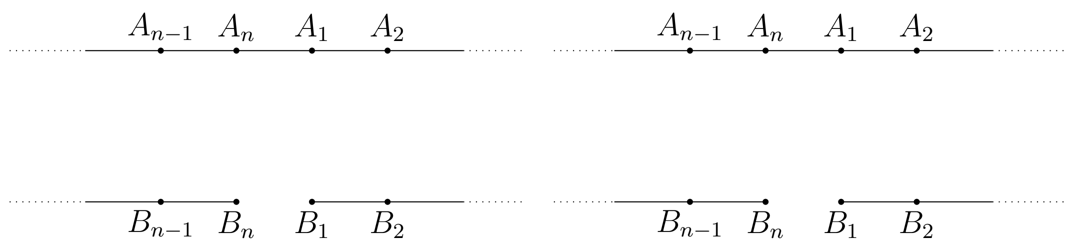
Takojšnja posledica Ponceletovega izreka, ki je veliko bolj znana in jo v literaturi večkrat srečamo kot Ponceletov izrek, se glasi:

Posledica 4.3. *Naj bosta S_1 in S_2 neprazni, neizrojeni stožnici brez skupnih točk. Če obstaja n-kotnik, ki je včrtan v stožnico S_1 in očrtan stožnici S_2, potem je vsaka točka na S_1 oglišče kakega takega n-kotnika in vsaka točka na S_2 leži na stranici kakega opisanega n-kotnika.*

Lotimo se dokaza izreka. Pred tem bomo navedli nekaj trditev, ki jih bomo potrebovali pri dokazovanju. Za trditve 4.4, 4.5 in 4.6 predpostavimo:

Naj bosta S_1 in S_2 neizrojeni, neprazni stožnici, ki imata n-Ponceletovo lastnost. Torej obstaja n-kotnik z oglišči A_1, A_2, …, A_n, ki vsa ležijo na S_1, stranice A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 pa so tangentne na S_2. Naj bo $B_1B_2 \dots B_n$ taka poligonska črta, da vsa njena oglišča ležijo na S_1, nobeno oglišče ne leži na S_2 in vse daljice so tangentne na S_2. Predpostavimo še, da so vsa oglišča med seboj različna, torej za vsak $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$ velja: $A_i \neq A_j$, $B_i \neq B_j$ ter $A_i \neq B_j$, $A_i \neq B_i$.

Skiciramo n-kotnik in poligonsko črto nekoliko drugače:



SLIKA 16. n-kotnik in poligonska črta.

Naš cilj je dokazati, da je tudi daljica B_nB_1, ki sklene poligonsko črto, tangenta na stožnico S_2.

Trditev 4.4. *Naj bosta p in q taki števili, da velja: $1 \leq p < q \leq n-1$. Definiramo točke:*

$$I_{p-1} = A_{p-1}A_p \cap B_{p-1}B_p,$$

$$I_p = A_pA_{p+1} \cap B_pB_{p+1},$$
$$I_q = A_{q-1}A_q \cap B_{q-1}B_q,$$
$$I_{q+1} = A_qA_{q+1} \cap B_qB_{q+1},$$
$$X = A_pB_q \cap B_pA_q.$$

Če so točke I_p, X in I_q paroma različne in kolinearne, potem so tudi točke I_{p-1}, X in I_{q+1} paroma različne in kolinearne.

Dokaz. Dokazujemo z uporabo Brianchonovega izreka in uporabo simetrije.

S preimenovanjem daljic

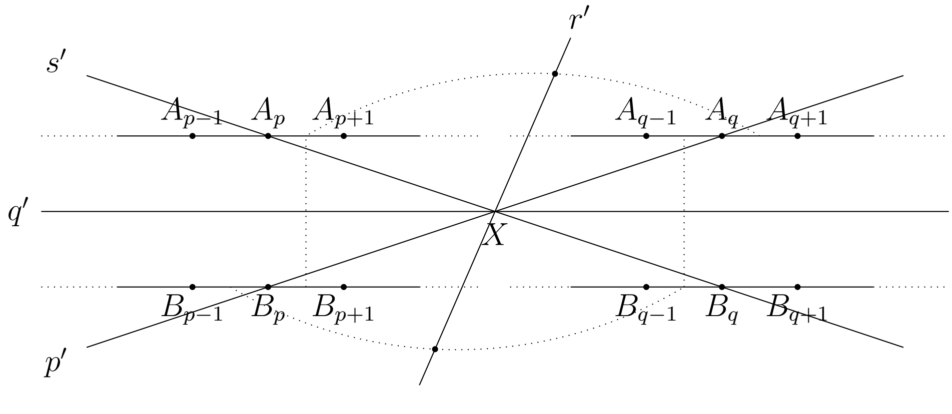
$$\begin{pmatrix} p & q & r & s & t & v \\ A_qA_{q+1} & B_{p-1}B_p & B_{q-1}B_q & A_pA_{p+1} & B_pB_{p+1} & A_{q-1}A_q \end{pmatrix}$$

lahko uporabimo izrek 3.2. Ta nam pove, da so premice

$$p' = B_pA_q,$$
$$q' = I_p \cap I_q,$$
$$r' = [A_pA_{p+1} \cap A_qA_{q+1}] - [B_{p-1}B_p \cap B_{q-1}B_q]$$

med seboj različne in se vse sekajo v isti točki.

Narišemo novo daljico $s' = A_pB_q$. Preverili smo že, da sta premici p' in q' različni, zato ob upoštevanju simetrije vidimo, da sta tudi premici s' in q' različni. Ker premica seka stožnico v največ dveh točkah, vidimo, da sta tudi premici p' in s' med seboj različni, saj premica s' vsebuje točki A_p ter B_q, premica p' pa točki B_p ter A_q, ki so vse paroma različne po predpostavki. Torej so premice p', q' in s' paroma različne. Presečišče premic p' in s' je po predpostavki v točki X. Po predpostavki so točke I_p, X ter I_q kolinearne, torej premica q' vsebuje točko X in se zato vse tri premice sekajo v njej. Skico lahko vidimo na sliki 17.



Slika 17. Premice p', q', s' in r' se vse sekajo v točki X.

Z malo drugačnim poimenovanjem daljic lahko znova uporabimo izrek 3.2. Z oznakami

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s & t & v \\ A_{p-1}A_p & B_qB_{q+1} & B_{q-1}B_q & A_pA_{p+1} & A_qA_{q+1} & B_{p-1}B_p \end{pmatrix}$$

v izreku 3.2 vidimo, da so premice

$$r' = [A_p A_{p+1} \cap A_q A_{q+1}] - [B_{p-1} B_p \cap B_{q-1} B_q],$$

$$s' = A_p B_q,$$

$$t' = I_{p-1} \cap I_{q+1}$$

med seboj različne in se vse sekajo v isti točki.

Vemo že, da sta premici p' in s' različni. Preverili smo že, da sta premici s' in t' različni, zato ob upoštevanju simetrije vidimo, da sta tudi premici p' in t' različni. Presečišče premic p' in s' je po predpostavki v točki X. Dokazati želimo, da tudi premica t' vsebuje točko X.

Vemo torej, da se premice p', q', r' in s' sekajo v isti točki X. Prav tako smo videli, da se premice r', s' ter t' sekajo v isti točki. Ker se premici r' in s' sekata v X in sta različni, mora tudi premica t' vsebovati to točko. Ker premica t' vsebuje tudi točki I_{p-1} ter I_{q+1}, so točke kolinearne.

Točke X, I_{p-1} ter I_{q+1} so tudi paroma različne. Če bi veljalo $I_{p-1} = I_{q+1}$, potem bi se premice $A_{p-1}A_p$, A_qA_{q+1}, $B_{p-1}B_p$ ter B_qB_{q+1} sekale v isti točki. To pomeni: če p in q izberemo tako, da velja $p-1 = q+1$, potem dobimo enakost točk $A_{p-1} = B_{p-1}$, kar pa je v protislovju z našo predopostavko o različnosti točk. Prav tako se zgodi v splošnem primeru, saj lahko iz poljubne točke na stožnico konstruiramo največ dve tangenti. Če so premice $A_{p-1}A_p$, A_qA_{q+1}, $B_{p-1}B_p$ ter B_qB_{q+1} konkurentne, potem so premice paroma enake in smo v protislovju s predpostavko o različnosti točk. S podobnim razmislekom vidimo tudi različnost točk X in I_{p-1} ter X in I_{q+1}. $\square$

Trditev 4.5. *Naj bosta p in q taki števili, da velja: $1 \leq p < q \leq n-1$. Definiramo točke:*

$$I_{p-1} = A_{p-1}A_p \cap B_{p-1}B_p,$$

$$I_{q+1} = A_qA_{q+1} \cap B_qB_{q+1},$$

$$X = A_pB_q \cap B_pA_q,$$

$$Y = A_{p-1}B_{q+1} \cap B_{p-1}A_{q+1}.$$

Če so točke I_{p-1}, X in I_{q+1} paroma različne in kolinearne, potem so tudi točke I_{p-1}, Y in I_{q+1} paroma različne in kolinearne.

Dokaz. Dokazujemo z uporabo Pascalovega izreka.

Naj bodo I_{p-1}, X in I_{q+1} paroma različne in kolinearne.

S preimenovanjem točk

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A_p & B_{p-1} & A_q & B_p & A_{p-1} & B_q \end{pmatrix}$$

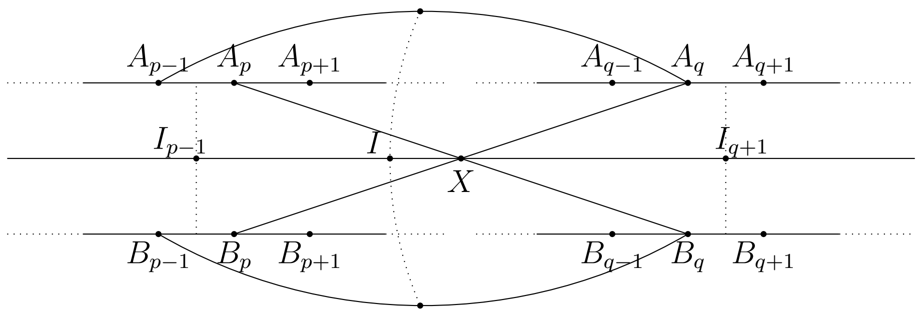
lahko uporabimo izrek 3.1. Tako vidimo, da so točke

$$I_{p-1} = A_{p-1}A_p \cap B_{p-1}B_p,$$

$$X = A_pB_q \cap B_pA_q,$$

$$I = A_{p-1}A_q \cap B_{p-1}B_q$$

med seboj različne in kolinearne. To nam prikazuje tudi slika 18.



SLIKA 18. Točke I_{p-1}, X ter I_{q+1} so kolinearne po predpostavki. Z uporabo Pascalovega izreka pokažemo, da ista premica vsebuje tudi točko I.

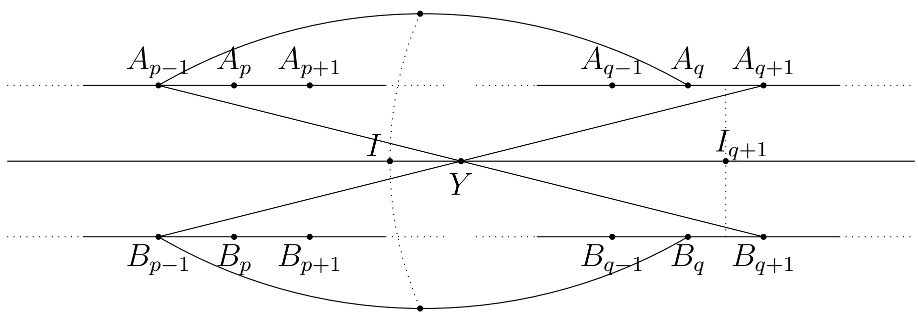
Izrek 3.1 lahko uporabimo tudi, če točke preimenujemo nekoliko drugače:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A_q & B_{p-1} & B_{q+1} & B_q & A_{p-1} & A_{q+1} \end{pmatrix}.$$

Tako dobimo, da so tudi točke

$$I = A_{p-1}A_q \cap B_{p-1}B_q,$$
$$Y = A_{p-1}B_{q+1} \cap B_{p-1}A_{q+1},$$
$$I_{q+1} = A_qA_{q+1} \cap B_qB_{q+1}$$

kolinearne in paroma različne (prikazano na sliki 19).



SLIKA 19. Točke I, Y ter I_{q+1} so kolinearne po Pascalovem izreku.

Ker so točke I_{p-1}, I ter I_{q+1} kolinearne in je točka Y kolinearna s točkama I ter I_{q+1}, so kolinearne tudi točke Y, I_{p-1} in I_{q+1}.

Točke I_{p-1}, X ter I_{q+1} so po predpostavki paroma različne. Izrek 3.1 nam zagotovi, da so tudi I_{p-1}, X in I paroma različne. Z istim razmislekom so tudi I_{q+1}, I ter Y

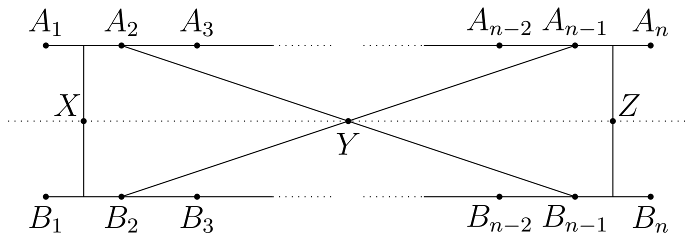
paroma različne. Tudi točki Y in I_{p-1} sta različni, saj bi sicer veljalo $p = q + 1$, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko, da $p < q$.

$\square$

Trditev 4.6. *Naj bo* $n \geqslant 4$. *Točke*

$$X = A_1A_2 \cap B_1B_2,$$
$$Y = A_2B_{n-1} \cap B_2A_{n-1},$$
$$Z = A_{n-1}A_n \cap B_{n-1}B_n$$

so paroma različne in kolinearne.



SLIKA 20. Trditev 4.6.

Dokaz. Kolinearnost točk dokazujemo po korakih, od središčnih točk poligonske črte in mnogokotnika navzven.

Ločimo primera, ko je n lih ali sod:

1. n je lih:

Označimo $k = \frac{n+1}{2}$. S preimenovanjem točk

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A_k & B_{k-1} & B_{k+1} & B_k & A_{k-1} & A_{k+1} \end{pmatrix}$$

nam izrek 3.1 zagotovi kolinearnost točk

$$X' = A_{k-1}A_k \cap B_{k-1}B_k,$$
$$Y' = A_{k-1}B_{k+1} \cap B_{k-1}A_{k+1},$$
$$Z' = A_kA_{k+1} \cap B_kB_{k+1}.$$

V naslednjem koraku uporabimo trditev 4.4. Vemo, da so točke X', Y' in Z' kolinearne, torej ko točke skladno s trditvijo preimenujemo ($p = k - 1$, $q = k + 1$), dobimo, da so kolinearne tudi točke

$$X'' = I_{p-1} = A_{k-2}A_{k-1} \cap B_{k-2}B_{k-1},$$
$$Y',$$
$$Z'' = I_{q+1} = A_{k+1}A_{k+2} \cap B_{k+1}B_{k+2}.$$

V primeru $n = 5$ je trditev s tem dokazana.

Če je $n > 5$ in lih, uporabimo trditev 4.5 in pokažemo da so kolinearne tudi točke X'', $Y'' = A_{k-2}B_{k+2} \cap B_{k-2}A_{k+2}$, Z''. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do končnega rezultata.

2. n je sod:

Označimo $k = \frac{n}{2}$. Če premice preimenujemo

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s & t & v \\ A_kA_{k+1} & A_{k-1}A_k & B_{k+1}B_{k+2} & B_kB_{k+1} & B_{k-1}B_k & A_{k+1}A_{k+2} \end{pmatrix},$$

nam izrek 3.4 zagotovi kolinearnost točk

$$X' = A_{k-1}A_k \cap B_{k-1}B_k,$$
$$Y' = A_kB_{k+1} \cap B_kA_{k+1},$$
$$Z' = A_{k+1}A_{k+2} \cap B_{k+1}B_{k+2}.$$

V primeru, da je $n = 4$, je trditev s tem dokazana.

Če je $n > 4$ in sod, uporabimo trditev 4.5 (za $p = k$ ter $q = k + 1$) in pokažemo da so kolinearne tudi točke

$$X',$$
$$Y'' = A_{k-1}B_{k+2} \cap B_{k-1}A_{k+2},$$
$$Z'.$$

Nato lahko z uporabo 4.4 pridemo do rezultata, da so kolinearne tudi točke

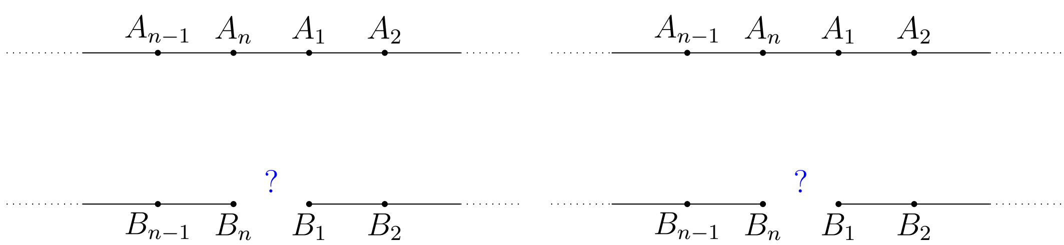
$$X'' = A_{k-2}A_{k-1} \cap B_{k-2}B_{k-1},$$
$$Y'',$$
$$Z'' = A_{k+2}A_{k+3} \cap B_{k+2}B_{k+3}.$$

Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do končnega rezultata. □

Dokaz izreka 4.2:

Dokaz. Za primerne točke najprej dvakrat uporabimo Pascalov izrek in na koncu še dual Carnotovega izreka.

Naj bosta S_1 in S_2 neprazni, neizrojeni stožnici z n-Ponceletovo lastnostjo, kjer je n najmanjši možen. Naj bo $A_1A_2 \dots A_n$ n-kotnik, ki je včrtan v stožnico S_1 in očrtan stožnici S_2 ter nobeno njegovo oglišče ne leži na S_2. Naj bo $B_1B_2 \dots B_n$ taka poligonska črta, da vsa njena oglišča ležijo na S_1, nobeno oglišče ne leži na S_2 in vse daljice so tangentne na S_2. Dokazati moramo, da je tudi daljica B_nB_1, ki sklene poligonsko črto, tangentna na stožnico S_2.



SLIKA 21. Za dokaz Ponceletovega izreka moramo pokazati, da je tudi daljica B_nB_1, ki sklene poligonsko črto, tangentna na stožnico. Tako dobimo 2 n-kotnika, ki sta vrisana v stožnico S_1 in orisana stožnici S_2.

Trditev 4.6 nam zagotovi, da so točke

$$X = A_1A_2 \cap B_1B_2,$$

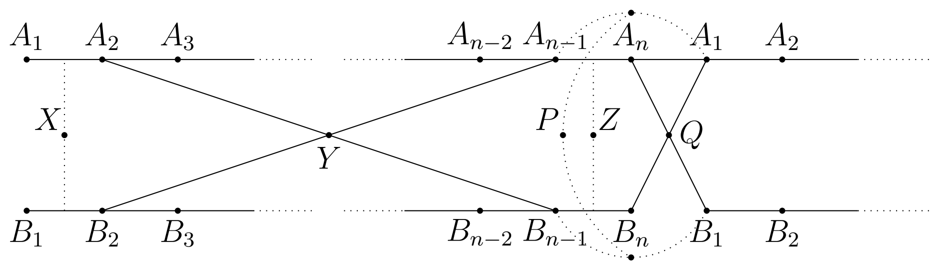
$$Y = A_2B_{n-1} \cap B_2A_{n-1},$$

$$Z = A_{n-1}A_n \cap B_{n-1}B_n$$

kolinearne. Definiramo točki:

$$P = A_{n-1}A_1 \cap B_{n-1}B_1,$$

$$Q = A_nB_1 \cap B_nA_1.$$



Slika 22. Trditev 4.6 nam da kolinearnost točk X, Y in Z, izrek 3.1 pa kolinearnost trojice točk X, Y in P ter Z, P in Q. Torej vse prej naštete točke ležijo na isti premici.

S preimenovanjem točk

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A_2 & B_1 & A_{n-1} & B_2 & A_1 & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

in uporabo izreka 3.1, vidimo, da so točke X, Y in P paroma različne in kolinearne.

Če točke označimo nekoliko drugače, in sicer:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A_n & B_{n-1} & A_1 & B_n & A_{n-1} & B_1 \end{pmatrix},$$

lahko zopet uporabimo izrek 3.1, ki nam pove, da so tudi točke Z, P in Q paroma različne in kolinearne.

Tako dobimo, da so vse točke X, Y, Z, P in Q kolinearne, kar si lahko ogledamo na sliki 22. To torej pomeni, da točke Z, Q ter X ležijo na isti premici. Sedaj lahko uporabimo izrek 3.4. Tako dobimo, da so A_nA_1, $A_{n-1}A_n$, B_1B_2, B_nB_1, $B_{n-1}B_n$ ter A_1A_2 vse tangentne na neko stožnico S_2'. Ker imata stožnici S_2 ter S_2' pet skupnih tangent, sta enaki. Torej, če je B_nB_1 tangentna na S_2', je tangentna tudi na S_2. □

Slovar strokovnih izrazov

nondegenerate neizrojen
conic stožnica
inscribed včrtan
circumscribed očrtan
concurrent konkurenten
collinear kolinearen

Literatura

[1] L. Halbeisen in N. Hungerbuehler, *A simple proof of Poncelet's theorem (on the occasion of its bicentennial)*, Amer. Math. Monthly **122** (2015), no. 6, 537-551.

[2] E. M. S. Hitzer, *Conic sections through five points classical, projective, conformal*, 2003, [ogled 10. 8. 2019], dostopno na `http://vixra.org/pdf/1306.0118v1.pdf`.

[3] M. Mitrović, *Projektivna geometrija*, Knjižnica Sigma **88**, DMFA, Ljubljana, 2009.

[4] A. Šadl Praprotnik, *Posledici Carnotovega izreka*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2019.

[5] A. Vavpetič, *Afina in projektivna geometrija*, 2011, [ogled 1. 8. 2019], dostopno na `https://www.fmf.uni-lj.si/~vavpetic/APG/APG.pdf`.

[6] M. Zeman, *Ponceletove krivulje*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2002.

[7] *Basis (linear algebra)*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 17. 8. 2019], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Basis_(linear_algebra)`.