UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Barbara Robba

Pakirno kromatično število koron nad potmi in cikli

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Ljubljana, 2019

Kazalo

Pakirno kromatično število koron nad potmi in cikli

Povzetek

Pakirno kromatično število $\chi_\rho(G)$ grafa G je najmanjši k, za katerega lahko poiščemo k-pakirno barvanje grafa, torej najmanjši k, za katerega obstaja taka funkcija $\pi :\ (G)\ \to\ [k]$, da iz $\pi(u) = \pi(v)$ sledi, da je razdalja med u in v večja od $\pi(u)$. Za graf G in $p \geq 1$ definiramo p-korono grafa G kot graf, ki ga iz grafa G dobimo tako, da na vsako njegovo vozlišče pripnemo p dodatnih listov (torej vozlišč stopnje ena).

Določanje pakirnega kromatičnega števila grafa je v splošnem težek problem, kar v delu nakažemo s tem, da dokažemo, da je 4-pakirno barvanje NP-poln problem. Nato dokažemo izrek o pakirnem kromatičnem številu na poteh in ciklih, zatem pa se omejimo na pakirno kromatično število p-koron poti in ciklov.

Packing Chromatic Number of Coronae of Paths and Cycles

Abstract

The packing chromatic number $\chi_\rho(G)$ of a graph G is the smallest integer k for which a packing k-coloring of graph G can be found, which is the smallest k for which such a function $\pi :\ (G)\ \to\ [k]$ exists, that from $\pi(u) = \pi(v)$ follows that the distance between u and v is greater than $\pi(u)$. For a graph G and $p \geq 1$, a p-coronae of the graph G is defined as the graph we obtain graph G by adding p additional leaves (vertices of degree 1) to each vertex on the graph.

Determining the packing chromatic number of a graph is a complex problem. In this paper we show this by presenting a proof that 4-packing coloring is an NP-complete problem. Then we prove a theorem on the packing chromatic number of paths and cycles, and afterwards focus on the packing chromatic number of p-coronae of paths and cycles.

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C38

Ključne besede: pakirno barvanje, pakirno kromatično število, korona grafa, pot, cikel

Keywords: packing coloring, packing chromatic number, corona graph, path, cycle

1. Uvod

Problem iskanja pakirnega kromatičnega števila je v [3] vpeljan kot problem dodeljevanja radijskih frekvenc radijskim postajam. Če želimo, da dve postaji oddajata na enaki frekvenci, ne da bi se njuna signala med seboj motila, mora biti geografska razdalja med njima dovolj velika. Zahtevana oddaljenost med postajama pa je odvisna od moči frekvence – za močnejši signal je potrebna večja razdalja. Določanje pakirnega kromatičnega števila je motivirano z iskanjem najmanjšega števila frekvenc na katerih lahko oddajajo radijske postaje.

Tema sodi v področje teorije grafov, zato v uvodu definirajmo nekaj pojmov iz tega področja, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju. Definicije so povzete po virih [6] in [7].

Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in povezav med njimi $E(G)$.

Definicija 1.1. *Pot* med vozliščema u in v je zaporedje povezav grafa G oblike $ux, xy, yz, \dots, wt, tv$, kjer se ne ponovi nobena povezava in nobeno vozlišče.

Definicija 1.2. Naj bosta u in v vozlišči grafa G. Z $d(u, v)$ označimo *razdaljo* med u in v, ki je enaka dolžini najkrajše poti med u in v. Če je razdalja med vazliščema u in v enaka 1, pravimo, da sta vozlišči u in v *sosednji*.

S pomočjo razdalje definiramo premer grafa in neodvisno množico grafa.

Definicija 1.3. *Premer grafa G* $\mathrm{diam}(G)$ je največja razdalja med poljubnima paroma vozlišč grafa G.

Definicija 1.4. *Neodvisna množica grafa G* je podmnožica vozlišč grafa G, za katero velja, da si poljubni vozlišči iz množice med seboj nista sosednji. *Neodvisnostno število* $\alpha(G)$ grafa G je velikost največje neodvisne množice grafa G.

V dokazih si bomo pomagali tudi z določanjem podgrafov danega grafa.

Definicija 1.5. Graf H imenujemo *podgraf* grafa G, če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Poglejmo si še dve vrsti barvanja vozlišč grafa G.

Definicija 1.6. Preslikavi $c : V(G) \to [k]$ pravimo *k-barvanje (vozlišč)* grafa G, če za poljubni sosednji vozlišči u in v velja $c(u) \neq c(v)$.

Definicija 1.7. Podmnožica vozlišč V_i je *i-pakiranje*, če je razdalja med poljubnima vozliščema v V_i večja od i.

Definicija 1.8. Za pozitivna naravna števila $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k$ je $(s_1, s_2, \dots, s_k)$-*barvanje* particija $\pi = (V_1, V_2, \dots, V_k)$, kjer je V_j s_j-pakiranje za vsak $1 \leq j \leq k$.

Iz zgornjih definicij sledi, da je 2-barvanje enako $(1, 1)$-barvanju in 3-barvanje enako $(1, 1, 1)$-barvanju.

V poglavju 2 bomo definirali pakirno kromatično število in si pogledali nekaj primerov. Opazili bomo, da je določanje pakirnega kromatičnega števila zanimiv problem za različne tipe grafov, vendar je za grafe v splošnem NP-poln. Pokazali bomo, da je 4-barvanje NP-poln problem in definirali p-korono grafa.

V poglavju 3 bomo navedli izrek, ki nam določa pakirno kromatično število poti in ciklov ter ga dokazali. Nato bodo v poglavjih 4 in 5 sledili še izreki za pakirno kromatično število koron poti in ciklov ter njihovi dokazi. Pri tem bomo sledili članku [5].

Pri določanju pakirnega kromatičnega števila grafa si bomo pomagali z izreki, ki jih bomo dokazali v nadaljevanju. V nekaterih primerih bo del dokaza slonel tudi na pregledu vseh možnosti. V tem primeru analizo opravimo s pomočjo računalnika. Primer programa, s katerim preverimo trditve iz dela, je v prilogi.

2. Pakirno kromatično število in p-korona

V tem poglavju bomo definirali pakirno kromatično število in druge pojme na grafih, ki so pomembni za obravnavo teme, ter si na nekaj primerih ogledali osnovne lastnosti pakirnega kromatičnega števila.

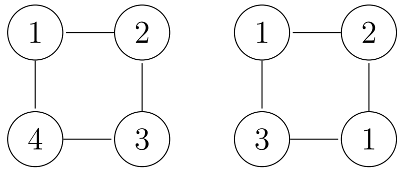
Preden definiramo pakirno kromatično število, si poglejmo kaj je k-pakirno barvanje grafa.

Definicija 2.1. Funkcija $\pi : V(G) \to [k]$ je *k-pakirno barvanje* grafa G, če iz $\pi(u) = \pi(v)$ sledi $d(u, v) > \pi(u)$.

Po definiciji za $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$-barvanje iz uvoda je k-pakirno barvanje enako $(1, 2, \ldots, k)$-barvanju.

Vzemimo poljuben graf G z ℓ vozlišči, ki jih v poljubnem vrstnem redu označimo z $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$. Graf lahko ℓ-pakirno pobarvamo z pakirnim barvanjem $\pi(x_i) = i$. Če je G poln graf, je razdalja med poljubnima njegovima vozliščema 1, torej lahko vsako barvo priredimo največ enemu vozlišču. Za polne grafe torej ne obstaja k-pakirno barvanje za $k < \ell$. Če graf G ni poln, obstajata taki vozlišči u in v, da je razdalja med njima večja od 1. Obema lahko torej priredimo barvo 1 in tako za barvanje grafa skupno porabimo eno barvo manj. Za grafe, ki niso polni, torej obstajajo k-pakirna barvanja za vsaj kakšen $k < \ell$.

Primer 2.2. Graf C_4 lahko 4-pakirno pobarvamo, obstaja pa tudi 3-pakirno barvanje tega grafa.



Slika 1. 4-pakirno barvanje grafa C_4 in 3-pakirno barvanje grafa C_4.

◊

Zanimivo je torej vprašanje, kakšen je najmanjši k, za katerega obstaja k-pakirno barvanje grafa.

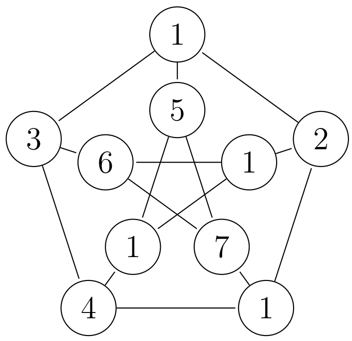
Definicija 2.3. *Pakirno kromatično število* $\chi_\rho(G)$ grafa G je najmanjši k, za katerega obstaja k-pakirno barvanje grafa G.

V primeru 2.2 smo videli, da za C_4 obstaja 3-pakirno barvanje grafa. Ker je $\mathrm{diam}(C_4) = 2$, lahko z barvo 2 pobarvamo največ eno vozlišče. Z barvo 1 lahko pobarvamo največ dve vozlišči. Za pakirno barvanje grafa moramo torej uporabiti vsaj tri barve, torej je $\chi_\rho(C_4) = 3$.

Poglejmo si še en primer in določimo pakirno kromatično število Petersenovega grafa P. Pakirno kromatično število in nekatere druge lastnosti Petersenovega grafa so avtorji opisali v članku [1].

Preverimo lahko, da je $\mathrm{diam}(P) = 2$. Torej sta poljubni vozlišči grafa na razdalji manjši ali enaki 2. Od tod sledi, da bomo vsa števila, ki so večja ali enaka dve, lahko priredili natakno enemu vozlišču. Največ koliko voziščem pa lahko priredimo enico?

Petersenov graf je sestavljen iz dveh ciklov C_5. Ker je $\alpha(C_5) = 2$, bo torej veljalo $\alpha(P) \leq 4$. Da je $\alpha(P) = 4$, preverimo tako, da v grafu poiščemo neodvisno množico s štirimi vozlišči (na primer množica vozlišč, ki smo jim na sliki 2 priredili 1). Potem Petersenov graf pakirno pobarvamo tako, da vozliščem iz neke neodvisne množice priredimo barvo 1, ostalim pa v poljubnem vrstnem redu priredimo barve od 2 do 7. Torej je $\chi_\rho(P) = 7$.

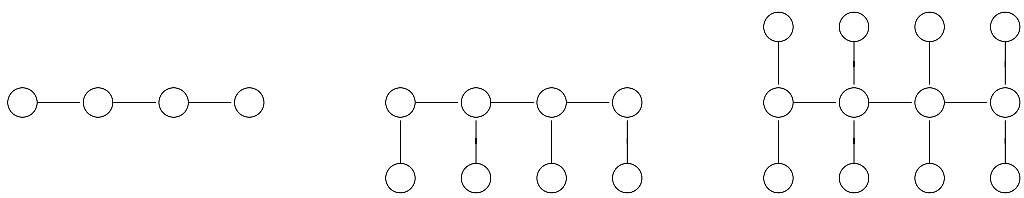


Slika 2. 7-pakirno barvanje Petersenovega grafa.

V nadaljevanju dela se bomo omejili na določanje pakirnega kromatičnega števila za poti, cikle in p-korone poti in ciklov. Zato naprej poglejmo definicijo p-korone poti grafa G.

Definicija 2.4. Za $p \geq 1$ je *p-korona* $G \odot pK_1$ grafa G graf, ki ga iz grafa G dobimo tako, da vsakemu vozlišču grafa dodamo p povezav s p vozlišči stopnje 1. Če je graf G cikel ali pot, ga bomo imenovali *centralni cikel* oziroma *centralna pot*.

Primer 2.5. Poglejmo si grafa $P_4 \odot K_1$ in $P_4 \odot 2K_1$:



Slika 3. Grafi P_4, $P_4 \odot K_1$ in $P_4 \odot 2K_1$.

$\diamondsuit$

Pri dokazovanju izrekov o pakirnem kromatičnem številu koron nad potmi in cikli, si bomo pomagali s trditvijo o pakirnem kromatičnem številu podgrafa.

Trditev 2.6. *Naj bo H podgraf grafa G. Potem velja $\chi_\rho(H) \leq \chi_\rho(G)$.*

Dokaz. Naj bo H podgraf grafa G. Naj ima graf G pakirno kromatično število k in naj bo $c : V(G) \to [k]$ k-pakirno barvanje grafa G. Graf H lahko iz grafa G dobimo tako, da iz grafa G odstranimo nekaj vozlišč in povezav. Z odstranjevanjem vozlišč in povezav se razdalje med vozlišči kvečjemu povečujejo. Zato je $c : V(H) \to [k]$ k-pakirno barvanje za graf H. Torej velja $\chi_\rho(H) \leq k = \chi_\rho(G)$. $\square$

Zgornja trditev nam pakirno kromatično število podgrafa H navzgor omeji s pakirnim kromatičnim številom grafa G, ničesar pa ne pove o spodnji meji. V dokazu smo uporabili k-pakirno barvanje, ki na grafu H izpolnjuje vse pogoje za pakirno barvanje, vendar bo običajno obstajalo tudi boljše pakirno barvanje (torej m-pakirno barvanje za $m < k$). Zato bomo izrek uporabljali v obratni smeri. Ko bomo določali pakirno kromatično število grafa G, bomo poiskali nek njegov podgraf H, katerega pakirno kromatično število poznamo. Iz tega bo sledilo $\chi_\rho(H) \leq \chi_\rho(G)$, torej bomo dobili spodnjo mejo za $\chi_\rho(G)$.

Iskanje pakirnega kromatičnega števila poljubnega grafa je v splošnem težek problem. Težko je namreč dokazati, da zagotovo ne obstaja manjši k, za katerega bi obstajalo k-pakirno barvanje grafa, ali z drugimi besedami: težko je določiti spodnjo mejo množice števil, za katera obstaja k-pakirno barvanje grafa. V [2] sta avtorja dokazala, da je določanje pakirnega kromatičnega števila celo na drevesih NP-poln problem.

Naprej poglejmo, kaj pomeni, da je nek problem NP-poln, pri čemer si pomagajmo z knjigo [4].

Omejimo se na odločitvene probleme (t.j. probleme, pri katerih je končni odgovor "da" ali "ne"). Pravimo, da je stroj nedeterminističen, če je zmožen hkrati izvajati poljubno mnogo med seboj neodvisnih izračunov. Potem razred odločitvenih problemov, ki so rešljivi na nedeterminističnem stroju v polinomskem času, imenujemo razred NP. NP-polni problemi so problemi, ki so vsaj tako težki, kot najtežji problem iz razreda NP. Problem je NP-poln, če ga lahko v polinomskem času prevedemo na nek problem, za katerega že vemo, da je NP-poln. Dva znana NP-polna problema iz teorije grafov sta določanje, ali graf ima Hamiltonov cikel in ali za graf obstaja 3-barvanje. Za NP-polne probleme je značilno, da lahko rešitev hitro preverimo, ne znamo pa je hitro poiskati.

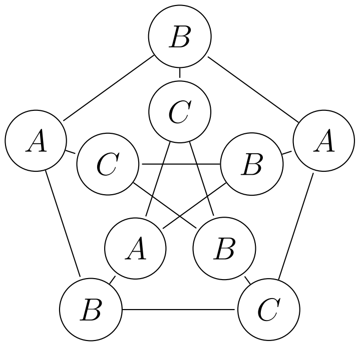
V nadaljevanju bomo pokazali, da je 4-pakirno barvanje NP-poln problem.

Torej želimo najti algoritem, ki bo nek problem, za katerega že vemo, da je NP-poln, v polinomskem času prevedel na naš problem. Za znan NP-poln problem bomo uporabili problem določanja, ali za graf obstaja 3-barvanje.

Dokaz bomo naredili v dveh korakih. Naprej bomo problem iskanja 3-barvanja v polinomskem času prevedli na problem $(1, 1, 2)$-barvanja, nato pa bomo problem $(1, 1, 2)$-barvanja v polinomskem času prevedli na problem iskanja 4-pakirnega barvanja.

Na primeru Petersenovega grafa se spomnimo $(1, 1, 2)$-barvanja in 3-barvanja. Pri določanju, ali za graf obstaja 3-barvanje, gledamo, ali lahko graf pobarvamo z barvami A, B in C tako, da bosta vozlišči pobarvani z enako barvo na razdalji večji od 1. Tako barvanje prikazuje slika 4.

Poglejmo še, ali obstaja $(1, 1, 2)$-barvanje Petersenovega grafa P. Vemo, da je $\mathrm{diam}(P) = 2$, torej bomo tretjo barvo lahko uporabili za barvanje največ enega vozlišča. Preostalih 9 vozlišč bi torej morali pobarvati z dvema barvama tako, da nobeni dve vozlišči pobarvani z isto barvo nista sosednji. Ker vemo, da preostalih 9 vozlišč tvori vsaj en 5 cikel, to ni mogoče. Torej za Petersenov graf ne obstaja $(1, 1, 2)$-barvanje.



SLIKA 4. 3-barvanje Petersenovega grafa.

Želimo pokazati, da bomo za nek poljubni graf znali določiti, ali obstaja njegovo $(1,1,2)$-barvanje natanko tedaj, ko bomo znali določiti, ali obstaja 3-barvanje, kar bo natanko tedaj, ko bomo znali določiti, ali za graf obstaja 4-pakirno barvanje.

Izrek 2.7. $(1,1,2)$*-barvanje je NP-poln problem.*

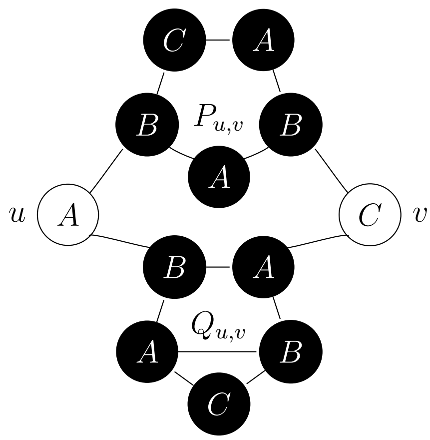
Dokaz. Problem 3-barvanja je očitno v razredu NP. Pokazali bomo, da odločitveni problem, ali graf ima 3-barvanje, lahko prevedemo na problem iskanja $(1,1,2)$-barvanja na grafu. Vzemimo graf G in vsako njegovo povezavo uv zamenjajmo na sledeč način, da dobimo graf G'. Vzemimo cikel C_5 in ga označimo z $P_{u,v}$. Dve njegovi nesosednji vozlišči povežimo z vozliščema u in v. Nato vzemimo še en cikel C_5 in ga označimo z $Q_{u,v}$. Dve sosednji vozlišči grafa $Q_{u,v}$ povežimo z u in v in dodajmo povezavo med nesosednjima vozliščema $Q_{u,v}$ stopnje 2.

Vozlišča iz grafa G v grafu G' imenujmo originalna vozlišča G'.

Na sliki 5 vidimo kako spremenimo povezavo uv grafa G. Originalna vozlišča grafa G' so bele barve, novo dodana vozlišča pa črne barve. Na tak način zamenjamo vse povezave grafa G, da dobimo graf G'.

Denimo, da naše 3-barvanje barva graf z barvami A, B in C. Iz grafa G želimo zgraditi tak graf, da bo barva C 2-pakiranje. Originalna vozlišča v G' pobarvamo kot da bi 3-barvali graf G. Nova vozlišča grafa G' pa barvamo po naslednjem pravilu.

V $Q_{u,v}$ z barvo C pobarvamo vozlišče stopnje 2. Če je eno od vozlišč u in v barve C, potem v $P_{u,v}$ z barvo C pobarvamo tisto vozlišče stopnje 2, ki je od vozlišča C oddaljeno za 3. Če nobeno izmed vozlišč u in v ni barve C, potem v $P_{u,v}$ z barvo C pobarvamo vozlišče stopnje 2, ki je od u in v oddaljeno za 2. Ostala vozlišča pobarvamo z barvama A in B, kot je prikazano na sliki spodaj. (Barvi A in B lahko tudi zamenjamo.)



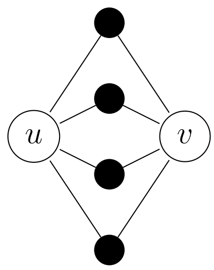
Slika 5. Sprememba povezave uv grafa G pri grajenju grafa G', ter dve možnosti za barvanje grafa G'.

Če za G' obstaja $(1, 1, 2)$-barvanje π, kjer je barva C 2-pakiranje, potem vozlišči u in v ne moreta biti pobarvani z enako barvo. Če bi bili obe vozlišči barve B, ne bi mogli pravilno pobarvati $Q_{u,v}$, če bi bili barve C, pa ne bi mogli pobarvati $P_{u,v}$. Torej je preslikava π zožana na vozlišča grafa G 3-barvanje grafa G. $\square$

Izrek 2.8. *4-pakirno barvanje je NP-poln problem.*

Dokaz. Prevedimo problem $(1, 1, 2)$-barvanja na problem 4-pakirnega barvanja. Naj bo G nek povezan graf. Graf G' dobimo iz grafa G tako, da početverimo vsako povezavo in nato na vsako povezavo grafa dodamo še eno vozlišče. Originalna vozlišča grafa G' so stopnje vsaj 4, vozlišča, ki smo jih dodali na novo, pa so stopnje 2.

Na sliki 6 vidimo, kako spremenimo povezavo uv grafa G. Graf G' dobimo tako, da na tak način spremenimo vse povezave grafa G. Originalna vozlišča grafa G' so na sliki bele barve, novo dodana pa črne barve.



Slika 6. Zamenjava povezave uv grafa G pri grajenju grafa G'.

Imejmo $(1, 1, 2)$-barvanje grafa G z barvami A, B in C. Iz $(1, 1, 2)$-barvanja grafa G naredimo $(1, 2, 3, 4)$-barvanje grafa G' tako, da z 1 pobarvamo vsa na novo dodana vozlišča (na sliki 6 obarvana s črno), z 2 vsa vozlišča, ki so bila v $(1, 1, 2)$-barvanju grafa G pobarvana z barvo A, z barvo 3 vozlišča, ki so bila pobarvana z barvo B in s 4 vozlišča, ki so bila pobarvana z barvo C.

Ker je 4-pakirno barvanje enako $(1, 2, 3, 4)$-barvanju, smo tako iz $(1, 1, 2)$-barvanja grafa G dobili 4-pakirno barvanje grafa G'.

Vsa vozlišča, ki smo jih dodali v grafu G', smo torej pobarvali z barvo 1, vozlišča iz grafa G pa z barvami 2, 3 in 4. Ker smo na vsako povezavo grafa G dodali vozlišče, si v grafu G' nobeni vozlišči iz grafa G nista sosednji. Torej sta množici vozlišč pobarvanih z 2 in 3 v G neodvisni množici, množica vozlišč pobarvanih z 4 pa je 2-pakiranje grafa G. Torej smo dobili $(1, 1, 2)$-barvanje grafa G. $\square$

Določanje pakirnega kromatičnega števila je torej težek problem. Zato se bomo v tem delu omejili na zelo lepe grafe, kot so cikli, poti in njihove p-korone.

3. Pakirno kromatično število poti in ciklov

Izrek 3.1. *Velja:*

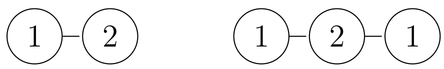
(i) $\chi_\rho(P_n) = 2$, *če* $n \in \{2, 3\}$,

(ii) $\chi_\rho(P_n) = 3$, *če* $n \geq 4$,

(iii) $\chi_\rho(C_n) = 3$, *če* $n = 3$ *ali* $n \equiv 0 \pmod 4$,

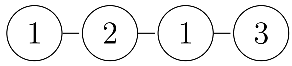
(iv) $\chi_\rho(C_n) = 4$, *če* $n \geq 5$ *in* $n \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$.

Dokaz. Naprej dokažimo prvo trditev iz izreka. Kot vidimo na sliki 7, pot dolžine 2 ali 3 lahko 2-pakirno pobarvamo. Vemo, da 1-pakirno barvanje ne obstaja, saj bi tako vsem vozliščem morali prirediti 1, posamezna vozlišča pa so med seboj sosednja, torej razdalja med njimi ni večja od 1.



Slika 7. 2-pakirno barvanje grafov P_2 in P_3.

Dokažimo tudi kakšno je pakirno kromatično število grafov P_n za $n \geq 4$. Naprej opazimo, da je pakirno kromatično število grafa P_4 enako 3.

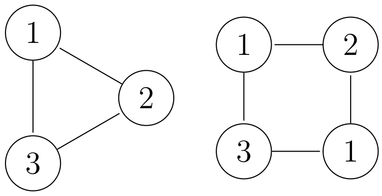


Slika 8. 3-pakirno barvanje grafa P_4.

Ker je graf P_4 podgraf vsakemu grafu P_n za $n \geq 4$, iz 2.6 vemo, da bo pakirno kromatično število takega grafa večje ali enako 3. Torej bomo dokazali, da je pakirno kromatično število takšnega grafa enako 3 tako, da bomo poiskali neko 3-pakirno barvanje grafa. Takšno barvanje dobimo tako, da vozliščem grafa zaporedoma prirejamo vrednosti $1, 2, 1, 3$. To pomeni, da vozlišča po vrsti označimo z $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in jih pobarvamo s predpisom:

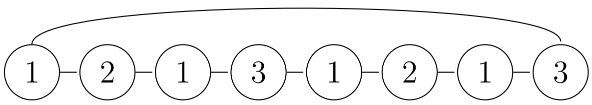
$$\pi(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{če } i \equiv 1 \pmod 2, \\ 2 & \text{če } i \equiv 2 \pmod 4, \\ 3 & \text{če } i \equiv 0 \pmod 4, \end{cases}$$

Dokažimo še tretjo točko iz izreka. Opazimo, da pakirno kromatično število grafov C_3 in C_4 ne more biti manjše od 3. Iz slike 9 vidimo, da 3-pakirno barvanje obstaja, torej je $\chi_\rho(C_3) = \chi_\rho(C_4) = 3$.



SLIKA 9. 3-pakirno barvanje grafov C_3 in C_4.

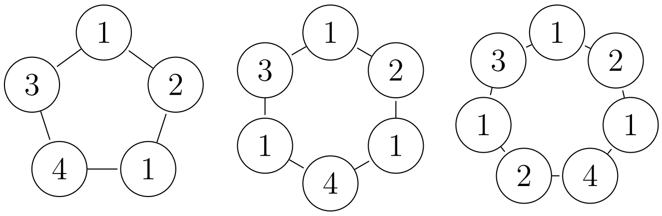
Vzemimo sedaj poljuben C_n za $n \equiv 0 \pmod 4$. Ker je graf P_4 podgraf takega grafa, bo njegovo pakirno kromatično število večje ali enako 3. Graf C_n lahko 3-pakirno pobarvamo tako, da vozliščem ciklično prirejamo vrednosti $1, 3, 1, 2$. Torej velja $\chi_\rho(C_n) = 3$.



SLIKA 10. 3-pakirno barvanje grafa C_8.

Poglejmo še, kaj velja za $\chi_\rho(C_n)$ za $n \geq 5$ in $n \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$. Vsak cikel C_n, kjer je n oblike $4k + \ell$, ima za podgraf pot P_{4k}. Vemo, da to pot lahko 3-pakirno barvamo s cikličnim prirejanjem vrednosti $1, 2, 1, 3$. Kamorkoli v ta cikel želimo vriniti še eno vozlišče, bo gotovo enica na razdalji 1, ter 2 in 3 na razdalji 1 in 2. Torej moramo novo dodanemu vozlišču prirediti vrednost 4. Če dodamo dve vozlišči, ju lahko pobarvamo z 1 in 4, če dodamo 3 vozlišča, pa z 1, 2 in 4.

Cikel dolžine $n = 4k + \ell$ torej pobarvamo tako, da $4(k-1)$ vozlišč zapored pobarvamo s ponavljanjem zaporedja $1, 2, 1, 3$, ostalih $4 + \ell$ vozlišč pa pobarvamo z 12134, če je $\ell = 5$, z 121314, če je $\ell = 6$ in z 1213124, če je $\ell = 7$.



SLIKA 11. 4-pakirno barvanje grafov C_5, C_6 in C_7.

□

Čeprav je iskanje pakirnega kromatičnega števila NP-poln problem (celo za tako lepe grafe kot so drevesa), smo za poti in cikle pokazali izrek, ki nam določa pakirno kromatično število teh grafov. Zanima nas, ali obstajajo še kakšni grafi podobni ciklom in potem, za katere bomo znali določiti pakirno kromatično število. V nadaljevanju si bomo pogledali p-korone poti in ciklov.

4. Pakirno kromatično število koron nad potmi in cikli

Spomnimo se, da p-korono grafa G dobimo tako, da vsakemu njegovemu vozlišču dodamo p listov.

V tem poglavju bomo določili pakirno kromatično število 1-koron nad potmi in cikli.

Pri dokazovanju izrekov si bomo pomagali z naslednjo trditvijo, ki nam navzgor ocenjuje pakirno kromatično število gosenice.

Definicija 4.1. *Gosenica* je drevo, v katerem obstaja taka pot, da vsako vozlišče grafa bodisi leži na poti, bodisi je edini njegov sosed neko vozlišče na poti. Pravimo, da je graf gosenica dolžine ℓ, če je najdaljša pot v grafu, za katero velja zgornji pogoj, dolžine $\ell + 2$. To pot imenujemo *telo*.

Za pakirno kromatično število gosenic velja naslednja trditev:

Trditev 4.2. *Če je T gosenica dolžine ℓ, potem je* $\chi_\rho(T) \leq \begin{cases} 6; & \ell \leq 34, \\ 7; & \textit{sicer}. \end{cases}$

Dokaz. Gosenico 7-pakirno pobarvamo tako, da vsem listom priredimo vrednost 1, vozlišča telesa, razen robnih vozlišč, pa pobarvamo s ponavljanjem zaporedja

$$243256243257.$$

Računalniška analiza pokaže, da je najdaljše zaporedje vrednosti med 2 in 6, ki ustreza pogoju za pakirno barvanje, dolžine 34. Tako zaporedje je

$$2342562342532642352462352432652342.$$

Za gosenice dolžine med $1 \leq \ell \leq 34$ 6-pakirno barvanje dobimo tako, da vozlišča zaporedoma barvamo s prvimi ℓ elementi zgornjega zaporedja. □

Sedaj, ko smo določili $\chi_\rho(C_n)$ in $\chi_\rho(P_n)$, si bomo pogledali, kakšno je pakirno kromatično število 1-koron teh dveh grafov. Vemo, da je vsak cikel C_n podgraf grafa $C_n \odot K_1$ in da je vsaka pot P_{n+2} podgraf grafa $P_n \odot K_1$. S tem dejstvom in s pomočjo trditve 2.6 lahko torej pakirno kromatično število 1-koron ciklov in poti omejimo navzdol.

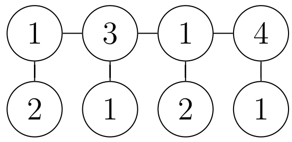
Izrek 4.3. $\chi_\rho(P_n \odot K_1) = \begin{cases} 2; & n = 1, \\ 3; & n \in \{2,3\}, \\ 4; & 4 \leq n \leq 9, \\ 5; & n \geq 10. \end{cases}$

Dokaz. Ker je graf $P_1 \odot K_1$ izomorfen grafu P_2, je njegovo pakirno kromatično število enako 2. Prav tako vidimo, da je graf $P_2 \odot K_1$ izomorfen grafu P_4 in je zato njegovo pakirno kromatično število enako 3. Poglejmo si 3-pakirno barvanje grafa $P_3 \odot K_1$:

Slika 12. Dve možnosti za 3-pakirno barvanje grafa $P_3 \odot K_1$.

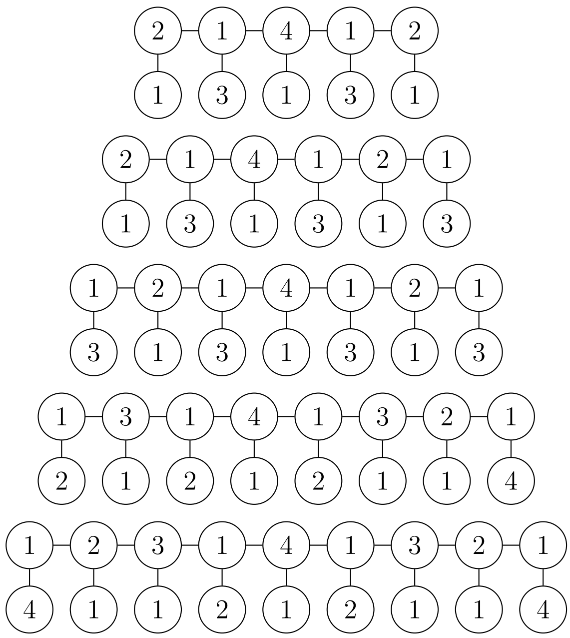
Iz slike vidimo, da 3-pakirno barvanje takega grafa obstaja. Ker je P_5 podgraf tega grafa, po trditvi 2.6 in izreku 3.1 k-pakirno barvanje za $k < 3$ ne obstaja.

Poskusimo sedaj 3-pakirno pobarvati graf $P_4 \odot K_1$. Na levi ali desni strani grafa bomo za prva tri vozlišča poti in njihove liste dobili enega od barvanj iz slike 12. Za četrto (t.j. še nepobarvano) vozlišče na centralni poti bo veljalo, da je najbližje vozlišče, ki je pobarvano z 1, na razdalji 1, najbližje vozlišče pobarvano z 2, na razdalji 2 in najbližje vozlišče pobarvano s 3, na razdalji 2. Novega vozlišča torej ne moremo pobarvati z nobeno od barv 1, 2 ali 3. Uporabiti moramo novo barvo 4. Tako dobimo 4-pakirno barvanje grafa $P_4 \odot K_1$. Zaradi zgornjega razmisleka vemo, da manjše barvanje ne obstaja, torej je $\chi_\rho(P_4 \odot K_1) = 4$.



Slika 13. 4-pakirno barvanje grafa $P_4 \odot K_1$.

Tudi za grafe $P_n \odot K_1$, kjer je $5 \leq n \leq 9$ lahko poiščemo 4-pakirna barvanja. Graf $P_4 \odot K_1$, za katerega velja $\chi_\rho(P_4 \odot K_1) = 4$, je podgraf vsakega grafa $P_n \odot K_1$ za $5 \leq n \leq 9$. Ker smo našli 4-pakirno barvanje, po izreku 2.6 velja $\chi_\rho(P_n \odot K_1) = 4$ za $5 \leq n \leq 9$.



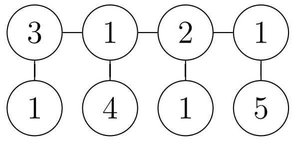
Slika 14. 4-pakirno barvanje grafov $P_5 \odot K_1$, $P_6 \odot K_1$, $P_7 \odot K_1$, $P_8 \odot K_1$ in $P_9 \odot K_1$.

Poglejmo si še grafe $P_n \odot K_1$ pri $n \geq 10$. Z $x_1, x_2, ..., x_n$ označimo vozlišča centralne poti grafa $P_n \odot K_1$, z y_i pa označimo list, ki je soseden vozlišču x_i. Za vsako 1-korono poti obstaja 5-pakirno barvanje grafa podanega s preslikavo π.

$$\pi(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{če } i \equiv 1 \pmod 2, \\ 2; & \text{če } i \equiv 2 \pmod 4, \\ 3; & \text{če } i \equiv 0 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\pi(y_i) = \begin{cases} 1; & \text{če } i \equiv 0 \pmod 2, \\ 4; & \text{če } i \equiv 1 \pmod 4, \\ 5; & \text{če } i \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Zaporedoma torej ponavljamo barvanje na spodnji sliki.



Slika 15. Predpis za 5-pakirno barvanje $P_n \odot K_1$.

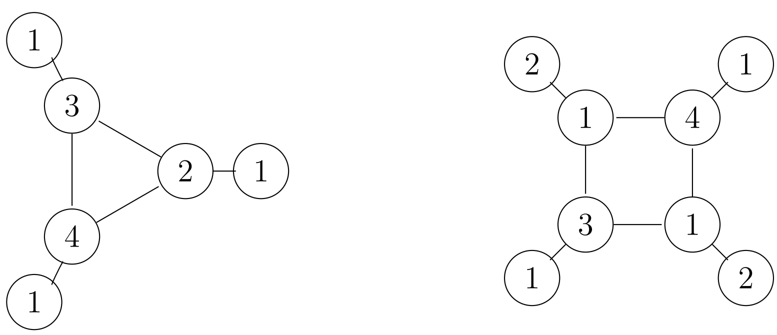
Napišemo program, ki išče 4-pakirna barvanja 1-korone poti. Program takšna barvanja najde za dolžine do $n = 8$. Za $n = 9$ takšno barvanje ne obstaja. Ker barvanje ne obstaja za $n = 9$ in ker velja, da je graf $P_9 \odot K_1$ podgraf vsakega grafa $P_n \odot K_1$ za $n > 9$, po trditvi 2.6 4-pakirno barvanje grafa $P_n \odot K_1$ ne obstaja za noben $n > 9$. Za 1-korone poti pri $n \geq 9$ je torej pakirno kromatično število enako 5. $\square$

Določimo še pakirno kromatično število 1-korone ciklov.

Vsak cikel dolžine m ima podgraf P_m. Torej iz trditve 2.6 takoj sledi, da bo $\chi_\rho(C_m \odot K_1) \geq \chi_\rho(P_m \odot K_1)$.

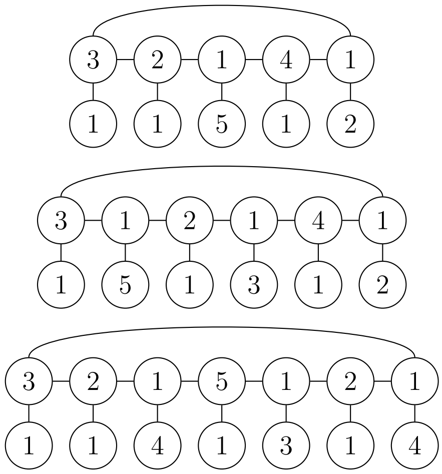
Izrek 4.4. $\chi_\rho(C_n \odot K_1) = \begin{cases} 4; & n \in \{3, 4\}, \\ 5; & n \geq 5. \end{cases}$

Dokaz. Kot prikazuje slika 16, grafa $C_3 \odot K_1$ in $C_4 \odot K_1$ lahko 4-pakirno pobarvamo. Če bi obstajalo 3-pakirno barvanje grafa C_3, bi morali glavni cikel pobarvati z 1, 2 in 3. Potem listu, pripetemu na vozlišče pobarvano z 1, ne moremo prirediti nobenega od števil 1, 2 in 3. Podobno bi, či bi želeli 3-pakirno pobarvati graf $C_4 \odot K_1$, morali vozliščem cikla prirediti vrednosti 1, 2, 1, 3. Potem listoma, ki sta pripeta na vozlišči, ki smo jima priredili 1, ne moremo prirediti nobene od vrednosti 1, 2 in 3.



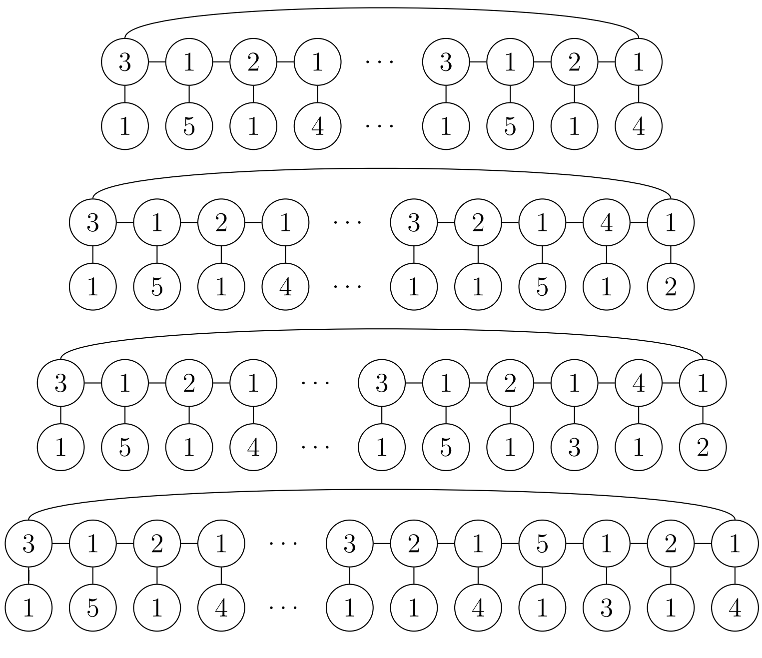
Slika 16. 4-pakirno barvanje grafov $C_3 \odot K_1$ in $C_4 \odot K_1$.

Razmislimo, kako bi 5-pakirno pobarvali grafe $C_n \odot K_1$ za $n \geq 5$. Naprej pokažimo, da 5-pakirno barvanje 1-koron grafov P_5, P_6 in P_7 obstaja.



SLIKA 17. 5-pakirno barvanje grafov $C_5 \odot K_1$, $C_6 \odot K_1$ in $C_7 \odot K_1$.

Podajmo še 5-pakirno barvanje za grafe oblike $P_n \odot K_1$, kjer je $n \geq 8$. Vsak tak n lahko zapišemo v obliki $n = m \cdot 4 + o$, kjer je $0 \leq 0 \leq 3$. Prvih $(m-1) \cdot 4$ vozlišč pobarvamo tako, da ponavljamo vzorec, ki je prikazan na sliki 15. Preostalih $o + 4$ vozlišč pobarvamo z enim od vzorcev iz slike 18 (vozlišča barvamo po vrsti, predpis iz zgornje slike beremo od leve proti desni). Ta dva predpisa za barvanje sta paroma združljiva, kar pomeni, da bo barvanje, ki ga bomo dobili, če bomo predpisa uporabili enega za drugim, ustrezalo pogojem za k-pakirno barvanje. Tako dobimo predpis za 5-pakirno barvanje grafa $C_n \odot K_1$ za poljubne n.



SLIKA 18. 5-pakirno barvanje grafov $C_n \odot K_1$ za $n \geq 8$.

Tri pike na zgornji sliki pomenijo poljubnokrat ponovljen levi vzorec za $P_4 \odot K_1$.

Pokazali smo, da 5-pakirno barvanje grafa $P_n \odot K_1$ obstaja za $n \geq 5$. Torej moramo pokazati še, da je to najmanjše pakirno barvanje.

Razmislimo, kakšna je povezava med C_n in P_m za poljuben $m \geq n$. Naj bo π neko k-pakirno barvanje grafa C_n. S pomočjo barvanja π želimo pobarvati graf P_m. Vozlišča cikla zaporedoma označimo z $x_1, \ldots, x_n$, vozlišča poti pa z $y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_m$. Vzemimo barvanje π' z predpisom

$$\pi'(y_i) = \pi(x_{(i \pmod n)}).$$

Kdaj bo barvanje π' ustrezalo pogojem za k-pakirno barvanje? Če se barva ℓ v barvanju π pojavi več kot enkrat, bodo vozlišča pobarvana z barvo ℓ tudi pri barvanju π' dovolj narazen. Problem lahko nastane, če se neka barva j v barvanju π pojavi natanko enkrat. Potem cikel trivialno izpoljuje pogoj, da so vozlišča, ki so pobarvana z barvo j, dovolj narazen, saj je tako vozlišče eno samo. V barvanju π' so vozlišča pobarvana z barvo j na razdalji n. Barvanje π' bo torej zagotovo k-pakirno barvanje grafa P_m takrat, ko bo $k < n$.

Ta razmislek lahko razširimo tudi na p-korone poti in ciklov. Če je pri barvanju π z barvo j pobarvano samo eno vozlišče centralnega cikla, sta vozlišči pobarvani z barvo j pri barvanju π' na razdalji n. Če je vozlišče, ki je pri barvanju π edino pobarvano z barvo j, v listu grafa, bosta vozlišči, ki bosta pri barvanju π' pobarvani z barvo j, na razdalji $n + 2$. Velja torej, da k-pakirno barvanje grafa $C_n \odot pK_1$ zagotovo podaja k-pakirno barvanje grafa $P_m \odot pK_1$ za $m > n$, takrat, ko je $k < n$.

Dokazati moramo, da za graf $P_n \odot K_1$ za $n \geq 5$ ne obstaja 4-pakirno barvanje. Če bi obstajalo 4-pakirno barvanje, bi po zgornjem razmisleku obstajalo tudi 4-pakirno barvanje grafa $P_{2n} \odot K_1$, kar pa je v protislovju z izrekom 4.3. □

5. Pakirno kromatično število p-koron poti in ciklov

V prejšnjem poglavju smo povedali, kaj velja za 1-korone poti in ciklov. Sedaj želimo ugotoviti, kaj velja za pakirno kromatično število p-koron za splošne $p > 1$.

Po trditvi 2.6 vemo, da bo z večanjem p pakirno kromatično število grafov $P_n \odot pK_1$ in $C_n \odot pK_1$ kvečjemu naraščalo (ker imata grafa $P_n \odot (p+1)K_1$ in $C_n \odot pK_1$ vedno podgraf $P_n \odot pK_1$). Iz trditve 4.2 pa vemo, da za vsak p velja

$$\chi_\rho(P_n \odot pK_1) \leq \begin{cases} 6; & n \leq 34, \\ 7; & sicer. \end{cases}.$$

Iz tega sledi, da bodo pakirna kromatična števila grafov $P_n \odot pK_1$ za vse p od nekega naprej enaka. Enako velja za p-korone ciklov. Izkaže se, da se naraščanje pakirnega kromatičnega števila ustavi pri $p = 4$. Zato bomo za p-korone ciklov in poti ločili primere, ko je $p \geq 4$, $p = 3$, $p = 2$ in $p = 2$.

Pri določanju pakirnega kromatičnega števila p-koron nad potmi in cikli si bomo pomagali tudi z naslednjo trditvijo:

Trditev 5.1.

(i) *Z $x_1, x_2, \ldots, x_n$ označimo vozlišča grafa P_n za $n \geq 2$. Naj bo $p \in \mathbb{Z}$ in π tako pakirno barvanje grafa $P_n \odot pK_1$, da za vozlišče x_i velja $\pi(x_i) = 1$. Potem je π vsaj $(p+3)$-pakirno barvanje, če je $2 \leq i \leq n-1$, oziroma vsaj $(p+2)$-pakirno barvanje, če je $i \in \{1, n\}$.*

(ii) *Z $y_1, y_2, \ldots, y_m$ označimo vozlišča cikla C_m za $m \geq 3$. Naj bo $p \in \mathbb{Z}$ in π' tako pakirno barvanje grafa $C_n \odot pK_1$, da za vozlišče y_i velja $\pi'(y_i) = 1$. Potem je π' vsaj $(p + 3)$-pakirno barvanje grafa.*

Dokaz. Ker barvanje π vozlišču x_i priredi 1, mora vsakemu njegovemu sosedu prirediti različno vrednost. Če je x_i vozlišče na centralni poti in velja $2 \leq i \leq n-1$, ima x_i $p+2$ sosedov, če velja $i \in \{1, n\}$, pa jih ima $p+1$. Če je vozlišče x_i na ciklu, ima vedno $p+2$ sosedov. Iz tega razmisleka sledita obe zgornji trditvi. □

V nadaljevanju bomo za pakirna barvanja uporabljali naslednji zapis: povrsti bomo zapisali vrednosti, ki jih predpišemo vozliščem glavne poti ali glavnega cikla in po vsaki vrednosti v oklepaju zapisali še vrednosti, ki jih priredimo listom, pripetim na to vozlišče, razen tistih barv listov, ki so enake 1. Barvanja ciklov bomo od barvanj poti ločili tako, da jih bomo zapisovali v kvadratnih oklepajih.

Primer 5.2. Pakirno barvanje grafa $P_4 \odot K_1$, ki je podano na sliki 13, zapišemo kot 1(2)31(2)4, pakirno barvanje $C_4 \odot K_1$, ki je podano na sliki 16, pa kot [1(2)41(2)3]. ♢

Naprej si poglejmo, kakšne so vrednosti pakirnega kromatičnega števila za p-korone poti, kjer je $p \geq 4$.

Izrek 5.3. *Za $p \geq 4$ velja:* $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) = \begin{cases} 2; & n = 1, \\ 3; & n = 2, \\ 4; & n \in \{3, 4\}, \\ 5; & 5 \leq n \leq 8, \\ 6; & 9 \leq n \leq 34, \\ 7; & \textit{sicer}. \end{cases}$

Dokaz. Na začetku poglejmo grafe $P_n \odot pK_1$, kjer je $n \leq 8$. Vsako vozlišče iz centralne poti takega grafa ima vsaj 5 sosedov, torej bomo, če bomo kateremu od vozlišč iz centralne poti priredili 1, porabili vsaj 6 barv. Poskusimo poiskati boljše barvanje tako, da vsem listom priredimo 1, vozliščem na centralni poti pa vrednosti med 2 in 5. Taka barvanja so:

$$2, 23, 234, 2342, 23425, 234253, 2342532, 23425324.$$

Zaporedje 23425324 je najdaljše zaporedje vrednosti med 2 in 5, ki ustreza pogoju za pakirno barvanje. To lahko preverimo s poizkušanjem ali z računalniško analizo. Opazimo tudi, da ga ne moremo podaljšati tako, da bi novemu vozlišču priredili barvo 1 (torej bi dobili 123425324 ali 234253241), saj potem listom, ki so pripeti na vozlišče z barvo 1, ne bi mogli prirediti vrednosti med 2 in 5. Iz tega sledi, da je $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) \geq 6$ za $n \geq 9$.

Iz trditve 4.2 vemo, da je najdaljše zaporedje števil med 2 in 6, ki ustreza pravilu za pakirno barvanje, dolžine 34. Vsem listom grafa v tem primeru priredimo 1. Torej za $9 \leq n \leq 34$ velja $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) = 6$.

Za zaporedja $P_n \odot pK_1$, kjer je $n \geq 35$, lahko uporabimo cikličen vzorec

$$[234256234257]$$

(liste zopet pobarvamo z 1). □

Zgornji izrek velja vedno, ko je $p \geq 4$. Če je $p = 2$ ali $p = 3$, pa je $\chi_\rho(P_n \odot pK_1)$ lahko manjše (oziroma, zaradi trditve 2.6, zagotovo ni večje).

Poglejmo si, kaj velja za pakirno kromatično število 2-korone poti. Iz trditve 2.6 in s pomočjo izrekov 3.1 in 5.3 lahko $\chi_\rho(P_n \odot 2K_1)$ omejimo na obe strani.

Izrek 5.4. $\chi_\rho(P_n \odot 2K_1) = \begin{cases} 2; & n = 1, \\ 3; & n = 2, \\ 4; & n \in \{3, 4\}, \\ 5; & 5 \leq n \leq 11, \\ 6; & \textit{sicer}. \end{cases}$

Dokaz. Poiščemo lahko vzorec za 6-pakirno barvanje grafa $P_{12} \odot 2K_1$:

$$[1(26)24325623425]$$

Za $P_n \odot 2K_1$, kjer je $n < 12$, lahko 6-pakirno barvanje dobimo tako, da vozlišča pobarvamo z prvimi m členi zgornjega zaporedja. Za $P_n \odot 2K_1$, kjer je $n > 12$, pa 6-pakirno barvanje dobimo tako, da zaporedoma ponavljamo zgornji vzorec kolikokrat je potrebno.

Za vsak n torej velja $\chi_\rho(P_n \odot 2K_1) \leq 6$.

Za $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ lahko graf $P_n \odot 2K_1$ pakirno pobarvamo z vzorci $2, 23, 234, 2342$. Vemo, da ne obstaja zaporedje barv 2, 3 in 4, ki bi bilo dolžine 5 in bi ustrezalo pogoju za pakirno barvanje. Prav tako ne moremo prva 4 vozlišča centralne poti pobarvati z 2342 in petemu vozlišču centralne poti prirediti 1, ker potem njegovim listom ne moremo prirediti vrednosti 2, 3 in 4. Če v centralno pot dodamo peto vozlišče, moramo torej uporabiti vsaj 5 barv. Za $5 \leq n \leq 11$ lahko graf pakirno pobarvamo z vzorcem

$$1(35)243251(23)4231(25).$$

Preveriti moramo, da za $n \geq 12$ ne obstaja vzorec, ki bi 5-pakirno pobarval graf $P_n \odot 2K_1$. To naredimo s pomočjo računalniške analize.

Napišemo program, ki za vsak n izpiše, koliko možnosti je našel za 5-pakirno barvanje grafa $P_n \odot 2K_1$. Na začetku vzamemo prazen seznam, v katerega bomo vpisovali možna barvanja za graf vsake dolžine in vektor razdalj, ki nam bo na vsakem koraku povedal, kakšna bo razdalja od vozlišča, s katerim bomo podaljšali centralno pot, do najbližjega vozlišča, pobarvanega z vsako od barv.

Na začetku vzamemo prazen seznam z možnostmi za barvanja in vektor razdalj $[6, 6, 6, 6, 6]$. Na vsakem koraku vzamemo vektor razdalj in za vsak i, za katerega je $x_i \geq i$, povečamo cel vektor razdalj, razen i-tega elementa vektorja, ki ga postavimo na 1. Barvo i dodamo zaporednju, ki smo ga za dani vektor razdalj imeli do sedaj. Poleg tega pogledamo še, ali lahko pobarvamo tudi lista. Torej za vsak i pogledamo, ali velja $x_i < i$. Če neenakost velja, x_i postavimo na 2 in poiščemo še en $x_j < j$, ter še ta x_j postavimo na 2. Barvi i in j dodamo v zaporedje barvanja. Ko pregledamo vse možnosti za dani n, preštejemo, koliko možnosti za barvanje smo našli in to število izpišemo. Nato n povečamo za 1 in ponovimo zgornji postopek s seznamom zaporedij za barvanje in seznamom vektorjev razdalj iz prejšnega koraka. Postopek je smiselno ponavljati, dokler barvanja za neko dolžino ne najdemo več. Iz tega in iz trditve 2.6 bo namreč sledilo, da barvanje ne obstaja tudi za noben večji n.

Program nam vrne, da je največji n, za katerega najde 5-pakirno barvanje, enak 12. Za večje n bomo torej potrebovali 6 barv. Torej velja $\chi_\rho(P_n \odot 2K_1) = 6$ za $n \geq 12$. □

Med p-koronami poti so nam ostale samo še 3-korone.

Izrek 5.5. $\chi_\rho(P_n \odot 3K_1) = \begin{cases} 2; & n = 1, \\ 3; & n = 2, \\ 4; & n \in \{3, 4\}, \\ 5; & 5 \leq n \leq 8, \\ 6; & \textit{sicer.} \end{cases}$

Dokaz. Tudi za 3-korone poti lahko poiščemo ciklično 6-pakirno barvanje. Vozlišča na centralni poti po vrsti označimo z $x_1, x_2, \ldots, x_n$, liste vozlišča x_i pa označimo (v poljubnem vrsnem redu) z y_i, z_i in w_i. Potem bomo graf $P_n \odot K_1$ 6-pakirno pobarvali z barvanjem π, za katerega velja:

$$\pi(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{če } i \equiv 1 \pmod{14}, \\ 2; & \text{če } i \equiv 3, 6, 9 \text{ ali } 13 \pmod{14}, \\ 3; & \text{če } i \equiv 4, 8 \text{ ali } 12 \pmod{14}, \\ 4; & \text{če } i \equiv 5 \text{ ali } 11 \pmod{14}, \\ 5; & \text{če } i \equiv 2 \text{ ali } 10 \pmod{14}, \\ 6; & \text{če } i \equiv 0 \pmod{14}, \end{cases}$$

in

$$\pi(y_i), \pi(z_i) \text{ in } \pi(w_i) = \begin{cases} 2, 3 \text{ in } 4; & \text{če } i \not\equiv 1 \pmod{14}, \\ 1, 1 \text{ in } 1; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Barvanje π vozlišča barva z ponavljanjem vzorca [1(234)5234263254326].

Ker za vsak m velja, da je $P_m \odot 2K_1$ podgraf grafa $P_m \odot 3K_1$, po izreku 2.6 velja:

$$\chi_\rho(P_n \odot 3K_1) \geq \begin{cases} 2; & n = 1, \\ 3; & n = 2, \\ 4; & n \in \{3, 4\}, \\ 5; & 5 \leq n \leq 11, \\ 6; & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Enakost dokažemo tako, da poiščemo primerna pakirna barvanja. Za pakirno barvanje grafa $P_n \odot 3K_1$ za $1 \leq n \leq 8$ uporabimo primerno dolžino vzorca 23425324. Napišemo računalniški program, ki preveri, kakšen je največji n, za katerega obstaja 5-pakirno barvanje grafa $P_n \odot 3K_1$. Program je zelo podoben programu, ki smo ga uporabili pri prejšnem dokazu, le da za vsako centralno vozlišče pobarva en list več. Dobimo rezultat, da je iskani n enak 8. Za $n \geq 9$ bo torej zaradi zgornjega barvanja π veljalo $\chi_\rho(P_n \odot 3K_1) = 6$.

□

V nadaljevanju bomo določili pakirno kromatično število koron ciklov. Za p-korone ciklov ne velja, da je $C_n \odot pK_1$ podgraf grafa $C_{n+1} \odot pK_1$, kot pri poteh, zato pakirno kromatično število z dolžino cikla ne bo nujno naraščalo. Pomagali si bomo lahko s tem, da ima graf $C_n \odot pK_1$ podgrafe $P_m \odot qK_1$ in $C_n \odot qK_1$ za $m \leq n$ in $q \leq p$. Kot pri p-koronah poti, bomo tudi pri ciklih posebej navedli izreke za $p \geq 4$, $p = 2$ in $p = 3$. Naprej določimo $\chi_\rho(C_n \odot pK_1)$ za $p \geq 4$.

Izrek 5.6. *Za $p \geq 4$ velja:* $\chi_\rho(C_n \odot pK_1) = \begin{cases} 4; & n = 3, \\ 5; & n = 4, \\ 6; & n \in \{5, 6\}, \\ 8; & n = 11, \\ 7; & \textit{sicer.} \end{cases}$

Dokaz. Vsako vozlišče centralne poti grafa $P_n \odot pK_1$ za $p \geq 4$ ima vsaj 6 sosedov. Po trditvi 5.1 bomo torej, če neko vozlišče na centralni poti pobarvamo z 1, dobili vsaj 7-pakirno barvanje. Poskusimo torej vse liste pobarvati z 1, vozlišča na centralnem ciklu pa z barvami med 2 in 6. Za $n \leq 6$ lahko najdemo pakirna barvanja, ki liste grafa pobarvajo z 1, vozlišča na centralnem ciklu pa z: [234] za $n = 3$, [2345] za $n = 4$, [23456] za $n = 5$ in [234256] za $n = 6$.

Sedaj pokažimo še, da za $n \geq 7$ obstaja 7-pakirno barvanje, razen za $n = 11$. Naprej preverimo, da grafa $C_{11} \odot pK_1$ za $p \geq 4$ ne moremo 7-pakirno pobarvati. Poizkusimo listom prirediti 1 in poiskati zaporedje elementov med 2 in 7 dolžine 11, ki bo ciklično ustrezalo pogoju za pakirno barvanje. Barvo 2 bomo lahko uporabili največ trikrat, barvi 3 in 4 največ 2 krat in barve 5, 6 in 7 največ enkrat. Torej bomo lahko tako pobarvali največ 10 vozlišč. Poizkusimo eno vozlišče na centralni poti pobarvati z 1. Listom pripetim na to vozlišče priredimo 2, 3, 4 in 5. Potem moramo vozlišča v okolici 1 pobarvati takole ...43271(2345)6234.... Vidimo, da zaporedja ni mogoče nadaljevati z dvema vozliščema tako, da bi barvanje ustrezalo pogoju za pakirno barvanje cikla. Najkrajša razširitev zgornjega zaporedja, ki ciklično ustreza pogoju, je namreč dolžine 14: [43271(2345)623425362]. Torej iskano 7-pakirno barvanje grafa ne obstaja, obstaja pa 8-pakirno barvanje:

$$[23425324678].$$

Za $7 \geq n \leq 15$, $n \neq 11$ in $p \geq 4$ lahko graf $C_n \odot pK_1$ 7-pakirno pobarvamo z vzorci:

$$\begin{gathered} n = 7 : [2342567]; \\ n = 8 : [23425367]; \\ n = 9 : [234253267]; \\ n = 10 : [2342532467]; \\ n = 12 : [234253246257]; \\ n = 13 : [2342532462357]; \\ n = 14 : [23425362432576]; \\ n = 15 : [234253264235276]. \end{gathered}$$

Vsak $n \geq 9$, $n \neq 11$ lahko zapišemo kot $n = 8q + r$, kjer je $0 \leq r \leq 7$, $r \neq 3$. Potem 7-pakirno barvanje grafa $P_n \odot pK_1$ dobimo tako, da $(q-1)$-krat ponovimo zgornji vzorec za 7-pakirno barvanje pri $n = 8$, preostalih $8 + r$ vozlišč pa pobarvamo s primernim vzorcem za $7 \geq n \geq 15$, $n \neq 11$ definiranim zgoraj. Če je $q \geq 2$, lahko $C_n \odot pK_1$ za $n = 8q+3$ 7-pakirno pobarvamo tako, da $(q-2)$-krat uporabimo vzorec dolžine 8, za preostala vozlišča pa uporabimo vzorec dolžine 19:

$$[2342532462352432657]$$

□

V zgornjem izreku se je izkazalo, da je 11 edina dolžina grafa $C_n \odot pK_1$ za $p \geq 4$, za katero ne moremo najti 7-pakirnega barvanja. V naslednjem izreku bomo pokazali, da je podobna izjema pri grafu $C_n \odot 2K_1$ pri $n = 9$.

Poglejmo, kaj velja za 2-korone ciklov.

Izrek 5.7. $\chi_\rho(C_n \odot 2K_1) = \begin{cases} 4; & n = 3, \\ 5; & n = 4, \\ 7; & n = 9, \\ 6; & \textit{sicer}. \end{cases}$

Dokaz. Za $n \leq 13$, $n \neq 9$ lahko poiščemo pakirno barvanje grafa $C_n \odot 2K_1$ z naslednjimi vzorci:

$$n = 3 : [234];$$
$$n = 4 : [2345];$$
$$n = 5 : [23456];$$
$$n = 6 : [234256];$$
$$n = 7 : [1(23)423526];$$
$$n = 8 : [1(24)3251(24)326];$$
$$n = 10 : [1(23)41(23)523421(35)6];$$
$$n = 11 : [1(23)4231(25)624325];$$
$$n = 12 : [1(23)41(23)521(26)423526];$$
$$n = 13 : [1(23)41(23)5231(26)423526].$$

Za $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ je to očitno optimalno pakirno barvanje (t.j. k-pakirno barvanje za najmanjši možen k). V dokazu izreka 4.4 smo razmislili, da bo k-pakirno barvanje grafa $C_n \odot pK_1$ podajalo k-pakirno barvanje grafa $P_m \odot pK_1$ za poljuben p in $m > n$, če bo $k < n$. V našem primeru bi torej, če bi obstajalo 5-pakirno barvanje grafa $C_n \odot 2K_1$ za $n \geq 7$, obstajalo tudi 5-pakirno barvanje grafa $P_{12} \odot 2K_1$, kar pa je v protislovju z izrekom 5.4. Zgornja barvanja so torej optimalna in določajo pakirno kromatično število grafov $C_n \odot 2K_1$ za $3 \leq n \leq 13$.

Tudi za $n \geq 14$ ne more obstajati 5-pakirno barvanje, saj bi potem obstajalo tudi 5-pakirno barvanje grafa $P_{14} \odot 2K_1$. Pokažimo, da za take grafe obstaja 6-pakirno barvanje. Zgornji vzorci za $n \geq 8$ so združljivi (t.j. začetka in konca vzorcev se ujemata tako, da ko ju združimo, barvanje ustreza pogoju za pakirno barvanje grafa) s cikličnim vzorcem dolžine 7:

$$[1(23)423526],$$

ki ga za potrebe dokaza označimo z α. Najdemo tudi vzorec 423524326, ki je dolžine 9 in je združljiv z zgornjim vzorcem, vendar ta vzorec ni cikličen in ga zato ne moremo uporabiti za barvanje grafa $C_9 \odot 2K_1$. Tako lahko torej dobimo 6-pakirno barvanje za poljubno 2-korono poti C_n za $n \geq 14$. Če n zapišemo v obliki $n = 7q+r$, kjer je $q \geq 2$ in $0 \leq r \leq 6$, 6-pakirno barvanje grafa dobimo tako, da $(q-1)$-krat ponovimo vzorec α, in dodamo vzorec iz zgornjega seznama dolžine $7+r$, ali zgornji vzorec dolžine 9.

Poiskati moramo še pakirno kromatično število grafa $C_9 \odot 2K_1$. Najdemo lahko njegovo 7-pakirno barvanje:

$$[1(24)3251(24)3267].$$

Poizkusimo poiskati 6-pakirno barvanje. Ker je največja razdalja med vozlišči na cetralnem ciklu grafa $C_9 \odot 2K_1$ enaka 4, vemo, da lahko vsako vrednost, ki je večja ali enaka 4, priredimo samo enkrat, vrednost 3 največ dvakrat in vrednost 2 največ trikrat. Torej lahko vrednosti med 2 in 6 priredimo največ osmim vozliščem na centralni poti. Vsaj eno vozlišče na centralnem ciklu moramo torej pobarvati z barvo 1. Vrednosti 1 ne moremo predpisati dvema vozliščema na centralnem ciklu, saj so njuni listi med seboj oddaljeni naveč 6 – enemu od njih lahko torej predpišemo 6, dvema 5 in enemu 4. Na centralnem ciklu nam tako ostane 7 nepobarvanih vozlišč, priredimo pa jim lahko eno barvo 4, tri barve 2 in dve barvi 3, torej šest barv. Preostalemu vozlišču ne moremo prirediti enice, saj ne bi mogli pobarvati njegovih listov. Če želimo 1 prirediti samo enemu vozlišču na centralni poti, smo z dobro izbiro prisiljeni v barvanje 3241(23)526, ki ga ne moremo zaključiti tako, da bi bil dolžine 9, vseboval le vrednosti manjše od 7 in izpoljeval pogoje za pakirno barvanje. Pakirno kromatično število grafa $C_9 \odot K_1$ je torej 7. $\square$

Ostal nam je samo še en primer grafov in sicer 3-korone ciklov. Izkaže se, da je pakirno kromatično število takih grafov precej nenavadno.

Izrek 5.8. *Za $n \geq 3$ velja:*

$$\chi_\rho(C_n \odot 3K_1) = \begin{cases} 4; & n = 3, \\ 5; & n = 4, \\ 7; & n \in \{7, \dots, 13, 15, \dots, 22, 24, \dots, 27, 30, \dots, 36, 39, 40\} \cup \\ & \{41, 45, 47, \dots, 50, 53, 54, 55, 59, 62, 63, 64, 68, 77, 78, 91\}, \\ 6; & sicer. \end{cases}$$

Dokaz. Naprej pojasnimo, da oblika $a \dots b$ v zgornjem izreku pomeni, vsa cela števila med a in b vključno z a in b.

Poglejmo si barvanja za $3 \leq n \leq 6$. Trditev 5.1 nam pove, da bi, če bi vsaj eno vozlišče na centralnem ciklu pobarvali z barvo 1, porabili vsaj 6 barv. Poizkusimo poiskati k-pakirno barvanje za $k \leq 6$ tako, da listom priredimo 1, centralnemu ciklu pa vrednosti med 2 in 6. Pakirna barvanja za grafe $C_3 \odot 3K_1$, $C_4 \odot 3K_1$, $C_5 \odot 3K_1$ in $C_6 \odot 3K_1$ podana z vzorci

$$[234],\ [2345],\ [23456] \text{ in } [234256].$$

so torej optimalna.

Trditev 2.6 in izrek 5.6 nam povesta, da bo za vsak $n \geq 3$, $n \neq 11$, veljalo $\chi_\rho(C_n \odot 3K_1) \leq 7$.

V tabeli 1 so zapisani vzorci za 6-pakirno barvanje grafa $C_n \odot 3K_1$ za $n \in \{14, 23, 29, 38, 44, 46, 61, 67, 69, 73, 76, 82, 92\}$. Ker se vsako od barvanj začne z vzorcem 1(234)52342 in konča z vzorcem 524326, jih lahko poljubno paroma združujemo, saj bodo, ko jih bomo uporabili enega za drugim, izpolnjevali pogoj za 6-pakirno barvanje grafa. Torej lahko n zapišemo v obliki $n = 14q + r$, kjer je $0 \leq r \leq 13$ in za nekatere take n-je določimo 6-pakirno barvanje:

(i) Če je $n = 14q$, $n \geq 14$, q-krat ponovimo vzorec dolžine 14.
(ii) Če je $n = 14q + 1$, $n \geq 29$, $(q-2)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 29.
(iii) Če je $n = 14q + 2$, $n \geq 44$, $(q-3)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 44.
(iv) Če je $n = 14q + 3$, $n \geq 73$, $(q-5)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 73.
(v) Če je $n = 14q + 4$, $n \geq 46$, $(q-3)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 46.
(vi) Če je $n = 14q + 5$, $n \geq 61$, $(q-4)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 61.
(vii) Če je $n = 14q + 6$, $n \geq 76$, $(q-5)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 76.
(viii) Če je $n = 14q + 7$, $n \geq 105$, $(q-7)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorca dolžin 44 in 61.
(ix) Če je $n = 14q + 8$, $n \geq 92$, $(q-6)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 92.

n	ciklično pakirno barvanje za $C_n \odot 3K_1$
14	[1(234)52342 63 254326]
23	[1(234)52342 6324523642 3 524326]
29	[1(234)52342 6324523642 3424623 524326]
38	[1(234)52342 6324523624 3251(23)623425 324623 524326]
44	[1(234)52342 6324534624 3251(23)623425 3264235246 23 254326]
46	[1(234)52342 6324523642 35243261(23)52 3426324523 6423 524326]
61	[1(234)52342 6324523624 3251(23)623425 3246235243 261(23)5234263 245236423 524326]
67	[1(234)52342 6324523624 3251(23)623425 3246235243 261(23)5234263 245236423524623 524326]
69	[1(234)52342 6324523642 35243261(23)52 3426324523 6423524326 1(23)523426324 5236423 524326]
73	[1(234)52342 6324523624 3251(23)623425 3264235246 235243261(23)5 2342632452 3642352462 3 524326]
76	[1(234)52342 6324523624 3251(23)623425 3246235243 261(23)5234263 2452362432 51(23)62342532 4623 524326]
82	[1(234)52342 6324523624 3251(23)6234253 2462352432 61(23)523426324 5236243251(23) 6234253264 23524623 524326]
92	[1(234)52342 6324523642 35243261(23)52 3426324523 6423524326 1(23)523426324 5236423524 3261(23)523426 3245236423 524326]

Tabela 1. Predpisi za barvanje grafa $C_n \odot 3K_1$ za $n \in \{14, 23, 29, 38, 44, 46, 61, 67, 69, 73, 76, 82, 92\}$.

(x) Če je $n = 14q + 9$, $n \geq 23$, $(q-1)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 23.

(xi) Če je $n = 14q + 10$, $n \geq 38$, $(q-2)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 38.

(xii) Če je $n = 14q + 11$, $n \geq 67$, $(q-4)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 67.

(xiii) Če je $n = 14q + 12$, $n \geq 82$, $(q-5)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 82.

(xiv) Če je $n = 14q + 13$, $n \geq 69$, $(q-4)$-krat ponovimo vzorec dolžine 14 in dodamo vzorec dolžine 69.

Vidimo, da z združevanjem zgornjih vzorcev ne moremo dobiti 6-pakirnih barvanj ravno za dolžine n, ki smo jih navedli v izreku. Na način kot smo poiskali ostala pakirna barvanja torej teh barvanj ne moremo dobiti. Da takšna barvanja zares ne obstajajo, preverimo s pomočjo programa. Napišemo program, ki pregleda vse možnosti za 6-pakirno barvanje grafov $C_n \odot 3K_1$ za dolžine n za katere nismo našli 6-pakirnega barvanja. Program po pregledu vseh možnosti vrne, da takšna barvanja ne obstajajo.

Da obstaja 7-pakirno barvanje takih grafov, vemo iz izreka za graf $C_n \odot pK_1$, katerega podgraf je $C_n \odot 3K_1$. Vzamemo lahko barvanje za graf $C_n \odot pK_1$, ki smo ga uporabili v dokazu izreka 5.6 in izbrišemo po en list vsakega vozlišča na centralnem ciklu. Tako dobimo 7-pakirno barvanje grafov $C_n \odot pK_1$. $\square$

6. Zaključek

Poiskali smo pakirna kromatična števila za vse p-korone poti in ciklov. Zanimive so predvsem p-korone ciklov, kjer se pakirno kromatično število vede neprdevidljivo. Opazili smo tudi, da v nekaterih primerih pakirnega kromačnega števila ne znamo določiti drugače kot s pregledom vseh možnosti (kar običjano počnemo z računalnikom).

Zanimivo bi bilo pogledati tudi, kaj se dogaja, če na vsako vozlišče cikla namesto listov pripnemo poti dolžine ℓ. V tem primeru bi lahko za velike p vozlišča na pripeti poti pobarvali s ponavljanjem vzorca $1, 2, 1, 3$, za centralno pot/cikel pa bi poiskali zaporedje števil med 3 in k, ki bi ustrezalo pogoju za k-pakirno barvanje. Zopet bi bilo težko preveriti, kdaj takšno barvanje podaja pakirno kromatično število, kdaj pa obstaja m-pakirno barvanje za $m < k$, tako, da barvi 1 in 2 priredimo tudi nekaterim vozliščem na centralni poti/ciklu.

Priloge

V dokazih nekaterih izrekov v delu se skličemo na računalniški dokaz. Programi, uporabljeni v dokazih, so si med seboj podobni, zato si poglejmo samo enega izmed njih.

Poglejmo kako deluje program, ki išče 5-pakirna barvanja 2-koron poti dolžin od 1 do 13. Želimo, da program za vsako dolžino poti n vrne, koliko različnih zaporedij (t.j. koliko različnih barvanj s 5 barvami, ki ustreza pogojem za pakirno barvanje) je našel za 2-korono poti posamezne dolžine.

Program barvanja išče tako, da na vsakem koraku vzame zaporedje, s katerim je pobarval pot prejšne dolžine in števec, ki pove, koliko je novo vozlišče oddaljeno od vsake vrednosti. Nato temu zaporedju, če je to mogoče, doda še tri vrednosti za barvanje novega centralnega vozlišča in dveh listov pripetih nanj.

Program je napisan v programskem jeziku Python.

```python
import numpy as np
def daljse_zaporedje (zaporedje, stevec): # tipi: (seznam, np.array)
  daljsa_zaporedja=[]
  for i in range(1,6):
    if i < stevec[i-1]: # Barvamo vozlišče na centralni poti.
      stevec1 = stevec+1
      stevec1[i-1] = 1
      novo_zaporedje = zaporedje+[i]
      for j in range(1,6): # Barvamo prvi list.
        if j < stevec1[j-1]:
          stevec2 = np.array(stevec1, copy=True)
          stevec2[j-1] = 2
          for l in range(1,6): # Barvamo drugi list.
            if l < stevec2[l-1]:
              stevec22 = np.array(stevec2, copy=True)
              stevec22[l-1] = 2
              zaporedje_z_listom = novo_zaporedje+[j]+[l]
              daljsa_zaporedja.append((zaporedje_z_listom, stevec22))
  return (daljsa_zaporedja)

nicle = np.array([6,6,6,6,6])
```

```
zacetek = daljse_zaporedje ([], nicle)
with open('5_pak_barvanje_2koron_poti.txt', 'a') as f:
  print('za pot dolzine 1 najdemo: ', len(zacetek), 'zaporedij.', file=f)
  prejsni_korak = zacetek
  naslednji_korak = []

  for j in range(12):
    for i in prejsni_korak:
      new = daljse_zaporedje(i[0], i[1])
      naslednji_korak += new
    print('za pot dolžine ', j+2,'najdemo ',
              len(naslednji_korak), 'zaporedij.', file=f)
      prejsni_korak = naslednji_korak
      naslednji_korak = []
```

Program nam vrne rezultat:

```
za pot dolzine 1 najdemo:  64 zaporedij.
za pot dolžine  2 najdemo  564 zaporedij.
za pot dolžine  3 najdemo  1352 zaporedij.
za pot dolžine  4 najdemo  1690 zaporedij.
za pot dolžine  5 najdemo  1160 zaporedij.
za pot dolžine  6 najdemo  704 zaporedij.
za pot dolžine  7 najdemo  416 zaporedij.
za pot dolžine  8 najdemo  178 zaporedij.
za pot dolžine  9 najdemo  128 zaporedij.
za pot dolžine  10 najdemo  16 zaporedij.
za pot dolžine  11 najdemo  16 zaporedij.
za pot dolžine  12 najdemo  0 zaporedij.
za pot dolžine  13 najdemo  0 zaporedij.
```

Dovolj je, da program išče pakirna barvanja za 2-korone poti do prve dolžine, za katero barvanja ne najde več. Po izreku 2.6 vemo, da zagotovo ne bo obstajalo pakirno barvanje za 2-korone daljših poti.

Vidimo, da se rezultat, ki ga je izračunal program, ujema z izrekom in dokazom za $\chi_\rho(P_n \odot 2K_1)$.

Slovar strokovnih izrazov

caterpillar of length ℓ gosenica dolžine ℓ
independent set of graph neodvisna množica grafa
i**-packing** i-pakiranje
k**-coloring of graph** k-barvanje grafa
k**-packing coloring** k-pakirno barvanje
packing chromatic number of a graph G pakirno kromatično število grafa G
packing k**-coloring** k-pakirno barvanje
p**-corona of a graph** G p-korona grafa G
radius of graph polmer grafa
$(s_1, s_2, \ldots, s_k)$**-coloring** $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$-barvanje

Literatura

[1] B. Brešar, D.F. Rall, S. Klavžar in K. Wash, *Packing chromatic number,* $(1,1,2,2)$*-colorings and characterizing the Petersen graph*, Aequat. Math. (2017) strani 169–184.

[2] J. Fiala in P. A. Golovach, *Complexity of the packing coloring problem for trees*, Discrete Appl. Math. **158** (2010) strani 771–778.

[3] W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. M. Harris in D. F. Rall, *Broadcast chromatic numbers of graphs*, Ars Combin. **86** (2008) strani 33–49.

[4] S. Klavžar, M. Lokar, M. Petkovšek in T. Pisanski, *Izbrana poglavja iz računalništva*, DMFA-založništvo, 1986.

[5] D. Laïche, I. Bouchemakh in E. Sopena, *Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **37** (2017) strani 665–690.

[6] D.B. West, *Introduction to Graph Theory, Second Edition*, Prentice-Hall, 2001.

[7] R.J. Wilson in J.J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, DMFA-založništvo, 1997.