UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Jona Gričar

Izvršitev ameriških opcij na realnih trgih

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Janez Bernik
Somentor: asist. dr. Aleš Toman

Ljubljana, 2019

Kazalo

Izvršitev ameriških opcij na realnih trgih

Povzetek

Ameriška opcija je pogodba med nosilcem in izdajateljem opcije, s katero se dogovorita o pravici do nakupa oziroma prodaje osnovnega premoženja po vnaprej določeni izvršilni ceni na katerikoli dan v prihodnosti do zapadlosti opcije. Teorija opcij pravi, da se izvršitev ameriške nakupne opcije na delnico, ki ne izplačuje dividend, pred datumom zapadlosti ne splača, saj jo je vselej bolje prodati kot izvršiti. Izkušnje s finančnih trgov kažejo, da je zgodnje izvršenih veliko ameriških nakupnih opcij. V delu diplomskega seminarja predstavimo empirično študijo, ki razkriva razsežnost zgodnjih izvršitev opcij in jo skuša pojasniti s finančnimi trenji, na primer stroški kratke prodaje in transakcijskimi stroški, ki jih klasični modeli trga zanemarijo. Nato opišemo diskreten in zvezen model trga, ki upoštevata finančna trenja in omogočata izračun spodnje izvršitvene meje opcije. To je kritična cena delnice, nad katero se ameriško nakupno opcijo splača izvršiti tudi pred zapadlostjo. Spodnja izvršitvena meja pada pri zvišanju stroškov kratke prodaje, stroškov financiranja in zahtevanih vzdrževalnih kritij za opcije in delnice. Na koncu dela še pokažemo, da opisani zvezni model učinkovito pojasni empirične podatke o zgodnjih izvršitvah opcij na realnih trgih.

Exercising American options in real markets

Abstract

An American option is a contract between the option holder and option writer in which they agree on the right to buy or sell the underlying asset at a predetermined strike price in a certain time interval in the future no later than the option expiration date. In theory, an American call option on a non-dividend paying stock should never be exercised before its expiration day, hence it is always better to sell it rather than exercising it. Financial practice shows that many American call options are exercised early. In this diploma thesis, we present an empirical study that reveals a widespread practice of early exercises and tries to relate them to financial frictions observed in the markets, such as short-sale costs and transaction costs, which are typically disregarded in the classical models. Then we describe a discrete and a continuous market model that take financial frictions into account and allow us to derive the lower exercise boundary of an option. This is the critical stock price above which early exercise of an American call option is rational. The lower exercise boundary decreases as the short-sale costs, funding costs, and the required maintenance margins for options and stocks increase. We conclude the thesis by demonstrating that the proposed continuous model efficiently explains early options exercises in real financial markets.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20, 62P05

Ključne besede: ameriška nakupna opcija, zgodnja izvršitev, delnica, zapadlost, finančna trenja, izvršitvena meja, notranja vrednost

Keywords: American call option, early exercise, stock, expiration date, financial frictions, exercise boundary, intrinsic value

1. Uvod

Opcija je eden izmed izvedenih finančnih instrumentov. Delo diplomskega seminarja se osredotoča predvsem na ameriške opcije, saj so za obravnavo bolj zanimive kot evropske. Glavno raziskovalno vprašanje, ki si ga zastavimo na začetku, je vprašanje o optimalnem času izvršitve ameriške nakupne opcije na realnem trgu. Znaten del tega dela izhaja predvsem iz članka z naslovom *Early option exercise: Never say never* [4], v katerem je predstavljen specifičen model za obravnavo ameriških nakupnih opcij. Poleg tega je bila v njem opravljena unikatna empirična raziskava, ki se direktno nanaša na vsebino tega dela.

Delo diplomskega seminarja začnemo s kratkim pregledom evropskih in ameriških opcij. Na začetku razložimo pomen opcije in njeno delovanje, temu potem sledijo relacije med premijami opcij. V tretjem poglavju nadaljujemo z vrednotenjem ameriških opcij, kjer najprej predstavimo binomski model na konkretnem primeru in ga povežemo s pojmom zaščitne strategije. V zadnjem razdelku tega poglavja se prvič srečamo s pojmom predčasne izvršitve ameriške nakupne opcije. V četrtem poglavju si ogledamo dva različna modela, ki so ju predstavili avtorji našega osrednjega članka, in sicer diskretni enoobdobni model in model z zveznim časom. V petem poglavju vse zbrane ugotovitve preverimo v praksi, kjer si pogledamo empirično analizo predčasnih izvršitev ameriških opcij. V prvem razdelku si najprej ogledamo primer za motivacijo. V drugem razdelku predstavimo podatke, ki so bili zbrani posebej za empirično analizo v članku. V zadnjem razdelku opišemo oziroma povzamemo rezultate in ugotovitve avtorjev članka.

2. Evropske in ameriške opcije

Opcije smo spoznali že v času študija pri predmetu Finančna matematika 1. Krajši opis opcij je povzet po [5] in [6]. Podrobnejši opis tega finančnega instrumenta se nahaja v [3] in [7]. V tem razdelku bomo na kratko pogledali osnove opcij, ki jih bomo potem potrebovali v nadaljevanju tega dela.

2.1. **Vrste in lastnosti opcij.** Opcija (ang. option) je nekakšna pogodba med dvema stranema, med **nosilcem** (kupcem) opcije (ang. option holder) in **izdajateljem** opcije (ang. option writer) oziroma med dolgo in kratko stranjo. Za razliko od mnogih ostalih finančnih instrumentov, opcija daje nosilcu pravico in nikakršne obveznosti – oseba, ki opcijo izda oziroma izdajatelj mora nosilčevo odločitev upoštevati. Z opcijami se lahko trguje tako na **prostem trgu** (ang. over-the-counter market) kot tudi na **organiziranem trgu** (borza, ang. exchange). Na prostem trgu se trguje predvsem z opcijami na obrestne mere in devizne tečaje, na organiziranem trgu pa s standardiziranimi opcijami na delnice, terminske pogodbe in različne vrste blaga.

Kakšna pogodba je torej opcija? Kot že rečeno, je to pogodba med nosilcem in izdajateljem opcije, pri čemer se dogovorita o nakupu oziroma prodaji **osnovnega premoženja** (ang. underlying asset), npr. delnic, obveznic, blaga, tuje valute, obrestne mere itd., in sicer po vnaprej določeni **izvršilni ceni** (ang. strike price ali exercise price). Pri tem je pomembno poudariti, da ločimo dva tipa opcij, in sicer: **nakupna opcija** (ang. call option), ki nosilcu daje pravico nakupa osnovnega premoženja ob določenem datumu po določeni ceni; ter **prodajna opcija** (ang. put option), ki nosilcu daje pravico prodaje osnovnega premoženja ob določenem datumu po določeni ceni. Najpoznejšemu datumu v taki pogodbi pravimo **zapadlost** opcije (ang. expiration date ali maturity date) – takrat se imetnik opcije še zadnjič lahko odloči, ali bo opcijo izvršil ali ne bo naredil ničesar. Na borzah kotirajo opcije z različnimi izvršilnimi cenami in datumi zapadlosti. Nosilec opcije ob nakupu opcije (sklenitev pogodbe) plača ceno oziroma **premijo** opcije (ang. option premium). S tem so njegove obveznosti zaključene, ostanejo mu le še pravice. Če se potem nosilec odloči to opcijo izvršiti, mora izdajatelj poravnati svoje obveznosti.

Sprejemu odločitve za nakup ali prodajo osnovnega premoženja v skladu z opcijsko pravico pravimo **izvršitev opcije** (ang. exercising the option). Ob tem pridemo do nove delitve opcij – glede na to, kdaj je opcijo možno izvršiti, ločimo več različnih vrst opcij. Najbolj pogosti sta **evropska** (ang. European option) in **ameriška** opcija (ang. American option), poznamo pa tudi veliko drugih, ki jih združimo pod skupno ime eksotične opcije (ang. exotic options). Najbolj enostavna je evropska opcija, ki jo je mogoče izvršiti le na datum zapadlosti, medtem ko ameriško opcijo lahko izvršimo kadarkoli od nakupa do vključno datuma zapadlosti. Vredno si je zapomniti, da imeni ameriška in evropska opcija nimata nikakršne veze z geografsko lokacijo, na kateri se opcija izvršuje, oziroma z lokacijo borze (npr. nekatere opcije, s katerimi se trguje na severnoameriških borzah, so evropske). Evropske opcije je ponavadi lažje analizirati in vrednotiti kot ameriške, prav tako pa veliko lastnosti ameriških opcij pogosto izhaja iz evropskih. Kljub temu je večina opcij, s katerimi se trguje na borzah, ameriških.

Vpeljimo nekaj oznak, ki jih bomo uporabljali skozi celotno delo:

- t ... čas,
- $t = 0$ ... čas izdaje ali nakupa opcije,
- $t = T$ ... čas zapadlosti opcije,
- $D(t, T)$ ... diskontni faktor za obdobje $[0, T]$,
- $A(t, T)$ ... obrestovalni faktor za obdobje $[0, T]$,
- K ... izvršilna cena opcije,
- S_t ... cena osnovnega premoženja v času $t \in [0, T]$,
- c_t^a ... premija za ameriško nakupno opcijo v času $t \in [0, T]$,
- c_t^e ... premija za evropsko nakupno opcijo v času $t \in [0, T]$,
- p_t^a ... premija za ameriško prodajno opcijo v času $t \in [0, T]$,
- p_t^e ... premija za evropsko prodajno opcijo v času $t \in [0, T]$,
- C_t ... notranja vrednost nakupne opcije v času $t \in [0, T]$,
- P_t ... notranja vrednost prodajne opcije v času $t \in [0, T]$,
- V_t ... vrednost opcijske strategije v času $t \in [0, T]$.

2.2. **Notranja in časovna vrednost opcije.** Ker se delo diplomskega seminarja osredotoča predvsem na ameriške opcije, bomo od sedaj naprej analizirali le-te in jim namenili največ pozornosti. Del analize bodo tudi evropske opcije, saj so v nekaterih okoliščinah ekvivalentne ameriškim.

Notranja vrednost (ang. intrinsic value) opcije je izplačilo opcije, če bi jo nosilec hipotetično želel izvršiti v točno tistem trenutku. Imetnik opcije lahko ob času $t \in (0, T)$ opcijo izvrši ali jo proda po njeni premiji c_t ali p_t ali pa ne naredi ničesar. Podobno se zgodi v času $t = T$, opcijo lahko izvrši ali pa ne naredi ničesar. Recimo, da je naš nosilec racionalen, zato bo nakupno opcijo izvršil le, če bo $S_t > K$, in prodajno opcijo le, če bo $S_t < K$. Za opcijo lahko tudi rečemo, da se splača, je na meji ali pa se ne splača. **Opcija se splača** (ang. in the money), če je $S_t > K$ za nakupno oziroma $S_t < K$ za prodajno; **opcija je na meji** (ang. at the money), če $S_t = K$ za nakupno ali prodajno; ter **opcija se ne splača** (ang. out of the money), če je $S_t < K$ za nakupno oziroma $S_t > K$ za prodajno. Če opcije, ki se splača, še nismo izvršili, bo le-ta vedno izvršena ob trenutku zapadlosti (če seveda pri tem ne bo transakcijskih stroškov, ki bi presegli izplačilo opcije). To lahko povemo tudi drugače – nakupno opcijo izvršimo, če je cena delnice na trgu višja od izvršilne cene, prodajno opcijo pa izvršimo v primeru, ko je cena delnice na trgu nižja od izvršilne cene. Če imamo nakupno opcijo na delnico, vendar delnice ne potrebujemo, jo najprej kupimo v skladu z opcijo in jo nato takoj prodamo po višji tržni ceni, pri čemer pozitivno razliko obdržimo. V nasprotnem primeru, ko delnico potrebujemo, jo bomo po nakupu obdržali – na ta način smo še vedno v prednosti, saj smo to delnico kupili po nižji ceni od tržne. Obratno, če imamo prodajno opcijo na delnico, vendar delnice sploh nimamo, jo najprej kupimo po tržni ceni in jo nato prodamo v skladu z opcijo – pozitivno razliko zopet obdržimo. V primeru, ko delnico imamo, smo ponovno v prednosti, saj smo zanjo ob prodaji iztržili več od njene tržne cene.

Če se postavimo v vlogo nosilca opcije, je njena notranja vrednost enaka razliki med ceno osnovnega premoženja S_t v času hipotetične izvršitve $t \in [0, T]$ in izvršilno ceno K, če je le-ta razlika v tem času t pozitivna – v nasprotnem primeru racionalni nosilec (tak nosilec ne sprejema prostovoljnih odločitev, ki vodijo h gotovi izgubi) opcije ne izvrši in je tako njena notranja vrednost enaka 0. Iz pravkar opisanega zaključimo, da je v času $t \in [0, T]$ notranja vrednost nakupne opcije enaka $C_t = \max\{S_t - K, 0\}$ in prodajne opcije enaka $P_t = \max\{K - S_t, 0\}$.

Opcijo lahko torej obravnavamo kot vrednostni papir, ki izplača ustrezno razliko med cenama, če je ta razlika pozitivna. V tem primeru lahko rečemo, da je opcija denarno poravnana. Takšna obravnava je možna, kadar je opcija napisana na osnovno premoženje, s katerim se intenzivno trguje in ga je v vsakem trenutku možno prodati ali kupiti po tržni ceni.

Ameriška opcija, ki se splača, mora biti vredna vsaj toliko, kot je njena notranja vrednost, ker lahko nosilec opcije njeno notranjo vrednost realizira tako, da opcijo takoj izvrši. Pogosto je za nosilca take ameriške opcije optimalno, da čaka in opcije ne izvrši takoj. V tem primeru rečemo, da ima opcija pozitivno **časovno vrednost** (ang. time value), ki jo zapišemo kot razliko $c_t^a - C_t$ ali $p_t^a - P_t$ v času t. Celotno vrednost opcije lahko potem interpretiramo kot vsoto notranje vrednosti in njene časovne vrednosti. Za ameriško opcijo velja, da je njena notranja vrednost spodnja meja za premijo:

$$c_t^a \geq C_t \text{ in } p_t^a \geq P_t.$$

Če ti dve neenakosti ne bi veljali, bi imeli arbitražo (ang. arbitrage), to je možnost netveganega zaslužka brez začetne investicije. Strategija bi bila, da opcijo kupimo in jo takoj izvršimo. V primeru, da je časovna vrednost ameriške opcije v času t pozitivna, je bolj smiselno, da opcijo prodamo kot pa izvršimo. Če pride do prodaje, dobimo c_t^a ali p_t^a, v primeru izvršitve pa C_t ali P_t. Moja naloga v tem delu bo, da dejansko razmislim in pokažem, kako delujejo izvršitve ameriških opcij na realnih trgih in kdaj so dejansko optimalne.

2.3. **Relacije med premijami opcij.** Pri naslednjih relacijah bomo privzeli, da osnovno premoženje ne izplačuje dividend in nima vnaprej znanega donosa (npr. obresti na bančnem računu v primeru valutnih opcij).

Trditev 2.1. *Ameriška opcija ne more biti cenejša od ekvivalentne evropske opcije, saj nam daje več možnosti za zaslužek. Premija katerekoli opcije ne more biti negativna, saj opcija imetniku prinaša le pravice, ne pa obveznosti. Torej na trgu brez arbitraže velja:*

$$c_t^a \geq c_t^e \geq 0 \text{ in } p_t^a \geq p_t^e \geq 0.$$

Dokaz. Če katera od teh dveh relacij ne velja, pridemo do arbitraže. Strategija v primeru evropske in ameriške opcije bi bila: najprej izdamo ali kratko prodamo dražjo evropsko opcijo in kupimo cenejšo ekvivalentno ameriško opcijo ter počakamo do datuma zapadlosti. Nato ameriško opcijo izvršimo, če svojo opcijo izvrši lastnik evropske opcije. V obeh primerih zaslužimo vsaj pozitivno razliko med premijama v trenutku, ko smo pričeli opisano strategijo.

Da bi dokazali nenegativnost premije opcije, bomo privzeli ravno nasprotno. Če je premija opcije negativna, nam plačajo, da jo kupimo, torej v tem primeru takoj zaslužimo. Kasneje ob zapadlosti opcijo izvršimo, če se splača, in pri tem še dodatno zaslužimo, ali pa jo pustimo da propade. □

Trditev 2.2. *Za nakupni opciji na trgu brez arbitraže velja*

$$\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \leq c_t^e \leq c_t^a \leq S_t.$$

Dokaz. Dokazovati začnemo pri levi neenakosti in najprej predpostavimo, da velja $\max\{S_t - KD(t,T), 0\} > c_t^e$. Premija mora biti vedno nenegativna, zato iz tega sledi $S_t - KD(t,T) > c_t^e$. Iz tega lahko sestavimo naslednjo strategijo v času t:

- kratko prodamo eno enoto osnovnega premoženja,
- kupimo evropsko nakupno opcijo,
- na netvegan bančni račun naložimo $KD(t,T)$ v denarju do časa zapadlosti T.

Vrednost take strategije v času t je potem

$$V_t = S_t - KD(t,T) - c_t^e > 0.$$

V času T zapremo strategijo, in sicer:

- kupimo eno enoto osnovnega premoženja in zapremo kratko prodajo,
- izvršimo evropsko nakupno opcijo, če se splača,
- dvignemo naložen denar z obrestmi z bančnega računa.

V času T je vrednost strategije tako enaka

$$V_T = -S_T + \max\{S_T - K, 0\} + K = \max\{K - S_T, 0\} \geq 0.$$

Vidimo, da je naša strategija arbitražna. Ker pa taka strategija ne obstaja, mora zares kot v trditvi veljati $\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \leq c_t^e$.

Neenakost na sredini med obema premijama, smo dokazali oziroma razložili že v trditvi 2.1.

Tako nam preostane le še desna neenakost, pri čemer sedaj predpostavimo, da velja $c_t^a > S_t$. Iz tega lahko ponovno sestavimo naslednjo strategijo v času t:

- kupimo eno enoto osnovnega premoženja,
- izdamo ameriško nakupno opcijo.

Vrednost take strategije v času t je potem $V_t = c_t^a - S_t > 0$, kar spet sledi direktno iz korakov same strategije in predpostavljene neenakosti. Če nato imetnik oziroma kupec te nakupne opcije le-to izvrši v nekem času $z \in [t, T]$, potem mu mi v trenutku izvršitve izročimo osnovno premoženje, na katerega je bila opcija pisana, in kot izdajatelj prejmemo znesek izvršitvene cene $K > 0$. Če kupec opcije ne izvrši, opcija propade, mi pa ob njeni zapadlosti prodamo enoto osnovnega premoženja in prejmemo $S_T > 0$. Tudi ta strategija je arbitražna in mora zato zares kot v trditvi veljati $c_t^a \leq S_t$. Pri tem je treba poudariti, da vse to velja ob privzetku, da stroškov za hranjenje osnovnega premoženja ni (delnica ali vrednostni papir). $\square$

Posledica 2.3. *Izvršitev ameriške nakupne opcije pred datumom zapadlosti T se ne splača, opcija ima vedno nenegativno časovno vrednost, zato jo je vselej bolje prodati kot izvršiti.*

Dokaz. Pri dokazu si pomagamo z že dokazano trditvijo 2.2. Vemo že, da velja $\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \leq c_t^e \leq c_t^a$; mi bomo pri tem dokazu izpustili c_t^e, saj nas v tem primeru ne zanima. Zato bomo uporabili le neenakost $\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \leq c_t^a$ ter lastnosti diskontnega faktorja $D(t,T)$. Za $t \in [0,T]$ velja $D(t,T) \leq 1$ in zato je tudi $S_t - K \leq S_t - KD(t,T)$. Če vse skupaj upoštevamo v (obrnjeni) neenakosti, dobimo

$$c_t^a \geq \max\{S_t - KD(t,T), 0\} \geq \max\{S_t - K, 0\} = C_t^a$$

oziroma $c_t^a \geq C_t^a$ ali $c_t^a - C_t^a \geq 0$, kar pomeni, da ima ameriška opcija vedno nenegativno časovno vrednost in se je ne splača izvršiti pred datumom zapadlosti T. $\square$

Trditev 2.4. *Za ameriško prodajno opcijo na trgu brez arbitraže velja*

$$\max\{K - S_t, 0\} \leq p_t^a \leq K.$$

Dokaz. Ker je leva stran ravno enaka $\max\{K - S_t, 0\} = P_t$, vidimo, da neenakost $P_T \leq p_t$ velja – v prejšnjem razdelku smo že pokazali, da je notranja vrednost opcije P_t ravno spodnja meja za premijo p_t^a. Torej nam preostane le še desna neenakost, kjer predpostavimo, da velja $p_t^a > K$. Tudi tu želimo pokazati obstoj arbitraže, zato sestavimo naslednjo strategijo v času t:

- izdamo ameriško prodajno opcijo,
- na netvegan bančni račun naložimo K v denarju in ročnosti ne določimo.

Vrednost take strategije v času t je potem $V_t = p_t^a - K > 0$ direktno iz dane strategije in predpostavke. Če nato imetnik oziroma kupec te prodajne opcije le-to izvrši v nekem času $z \in [t, T]$, potem mi dvignemo denar in opcijo izplačamo. Torej je vrednost v trenutku z enaka

$$V_z = -\max\{K - S_z, 0\} + KA(t, z) = \min\{KA(t, z), S_z + K(A(t, z) - 1)\} \geq 0,$$

kjer je $A(t, z) \geq 1$ obrestovalni faktor za izposojen denar od časa t do časa z, kjer $t \leq z$. V slučaju, da do izvršitve te opcije ne pride, mi ob zapadlosti le dvignemo denar skupaj z obrestmi z bančnega računa. □

Trditev 2.5. *Na trgu brez arbitraže velja neenakost za ameriško prodajno in nakupno opcijo (ang. American call-put relation)*

$$c_t^a + KD(t, T) \leq p_t^a + S_t \leq c_t^a + K.$$

Dokaz. Najprej dokažimo levo neenakost in sicer tako, da predpostavimo

$$c_t^a + KD(t, T) > p_t^a + S_t$$

in sestavimo strategijo, v kateri v času t:

- izdamo ameriško nakupno opcijo,
- izposodimo si $KD(t, T)$ v denarju in ročnosti ne določimo,
- kupimo ameriško prodajno opcijo,
- kupimo eno enoto osnovnega premoženja.

Vrednost strategije v času t je enaka

$$V_t = c_t^a + KD(t, T) - p_t^a - S_t > 0.$$

V nadaljevanju strategije upoštevamo, da kupec ameriške nakupne opcije lahko le-to izvrši kadarkoli do njene zapadlosti ali pa nikoli.

- Prva možnost je, da jo izvrši v času $z \in [t, T)$. Najprej bi ob izvršitvi izročili eno enoto osnovnega premoženja in dobili plačilo K ter potem prodali prodajno opcijo in vrnili izposojen denar. Vrednost strategije bi bila v tem primeru enaka

$$V_z = K + p_z^a - KD(t,T) \cdot A(t,z) = K(1 - D(t,T) \cdot A(t,z)) + p_z^a \geq 0.$$

Pri vrednosti smo upoštevali $p_z^a \geq 0$ in neenakost $A(t,z) \leq A(t,T)$, saj je drugo obdobje daljše in zato tudi obrestovalni faktor večji, zato je

$$D(t,T) \cdot A(t,z) \leq D(t,T) \cdot A(t,T) = 1.$$

Strategija je s tem predčasno zaključena (vse pozicije so zaprte) in arbitražna.

- Druga možnost je, da jo izvrši v času T. Najprej bi ob izvršitvi izročili eno enoto osnovnega premoženja in dobili plačilo K ter potem vrnili denar. Ker je kupec racionalen, se prodajna opcija v tem primeru ne splača, izplačilo bi bilo v tem primeru enako

$$V_T = K - K = 0.$$

- Če pa se zgodi, da do vključno zapadlosti T ne pride do izvršitve nakupne opcije, potem bomo v primeru, da se tedaj prodajno opcijo splača izvršiti, le-to zares izvršili, vrnili denar in prodali osnovno premoženje; vrednost bi bila

$$V_T = \max\{K - S_T, 0\} - K + S_T \geq 0.$$

Za dokaz desne neenakosti predpostavimo, da velja $p_t^a + S_t > c_t^a + K$ in sestavimo strategijo v času t:

- izdamo ameriško prodajno opcijo,
- kratko prodamo eno enoto osnovnega premoženja,
- kupimo ameriško nakupno opcijo,
- na netvegan bančni račun naložimo K v denarju in ročnosti ne določimo.

Vrednost v času t je enaka

$$V_t = p_t^a + S_t - c_t^a - K > 0.$$

Zopet imamo dve možnosti, in sicer glede na to, ali kupec prodajno opcijo izvrši ali ne.

- Če kupec prodajno opcijo izvrši v času $z \in [t,T]$, od njega kupimo eno enoto osnovnega premoženja po ceni K, zapremo kratko prodajo in dvignemo denar z bančnega računa; vrednost je enaka

$$V_z = KA(t,z) - K \geq 0.$$

- Poglejmo še primer, ko kupec prodajne opcije ne izvrši. Če se splača, v času T izvršimo nakupno opcijo, v vsakem primeru zapremo kratko prodajo in dvignemo denar z bančnega računa; vrednost je enaka

$$V_T = \max\{S_T - K, 0\} - S_T + KA(t,T) = \max\{K(A(t,T) - 1), KA(t,T) - S_T\} \geq 0.$$

$\square$

Vse relacije iz trditev 2.1–2.5 lahko preoblikujemo oziroma razširimo za primer, ko osnovno premoženje oziroma delnica izplača eno ali več znanih dividend v času življenja opcije. Z $I(t,T)$ označimo trenutno vrednost vseh dividend v času t, ki bodo izplačane v času od t do T. Relacije, prav tako kot tiste brez izplačil dividend, sledijo iz podobnih strategij in neobstoja arbitraže. Za premiji ameriških opcij velja

$$\max\{S_t - KD(t,T) - I(t,T), S_t - K, 0\} \leq c_t^a \leq S_t - I(t,T)$$

in

$$\max\{KD(t,T) + I(t,T) - S_t, K - S_t, 0\} \leq p_t^a \leq K,$$

premiji povezuje neenakost

$$c_t^a + KD(t,T) \leq p_t^a + S_t \leq c_t^a + K + I(t,T).$$

Pri prvi alineji velja omeniti, da v neenakosti še vedno velja $S_t - K \leq c_t^a$. Na trgu lahko opazimo, da ima dividenda vpliv na S_t, pri čemer cena delnice pade. Pokazati je možno, da je zgodnja izvršitev ameriške nakupne opcije lahko smiselna le tik pred izplačilom dividend. Tega ne bomo dokazovali.

3. Vrednotenje ameriških opcij

Premija ameriške nakupne opcije je odvisna od tega, kdaj je opcijo optimalno izvršiti. Preden se lotimo natančne analize izvrševanja ameriških opcij, si poglejmo kratek primer vrednotenja in izvrševanja v binomskem modelu.

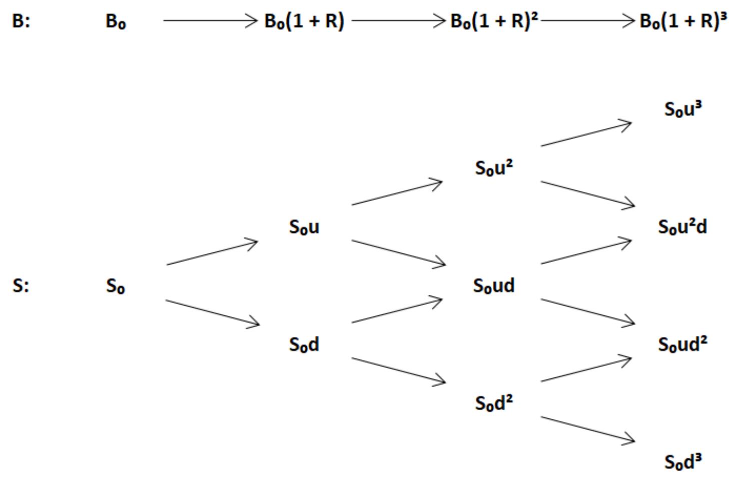
3.1. **Binomski model.** Binomski model je diskretni model trga, na katerem obstajata netvegan bančni račun z nespremenljivo obdobno obrestno mero R in delnica, ki ima lokalno ob koncu vsakega obdobja dve možni stanji, in sicer dobro ali slabo – če je stanje dobro, se začetna cena delnice S_t do časa $t+1$ poveča na vrednost $S_t u$, če je stanje slabo, cena pade na vrednost $S_t d$, kjer $0 < d < u$. V opisu smo implicitno privzeli, da je $d < 1 < u$, kar v splošnem ni nujno. Opisani model je brez arbitraže, če velja $d < 1 + R < u$. Triobdobni binomski model lahko prikažemo z binomskim drevesom možnih prihodnjih cen delnice in vrednosti enote bančnega računa, kot to prikazuje slika 1.

Na to delnico sedaj napišemo ameriško nakupno opcijo z zapadlostjo 3 in izvršilno ceno K. Njeno izplačilo v primeru izvršitve ob času t naj bo $C_t = \max\{S_t - K, 0\}$. Zanimajo nas njena premija, optimalna strategija izvrševanja ter zaščitna strategija. Da lahko začnemo z vrednotenjem, potrebujemo še do tveganja nevtralno verjetnost Q. Prehodna verjetnost, da je stanje dobro, naj bo q, ter slabo, $1-q$. Tedaj velja

$$q = \frac{1+R-d}{u-d} \text{ in } 1-q = \frac{u-1-R}{u-d}.$$

Pri vrednostnem procesu opcije U_t upoštevamo, da imamo v vsakem trenutku dve možnosti: ali opcijo izvršimo, ali pa ne; vrednotimo od zapadlosti nazaj (obratna indukcija). Velja torej:

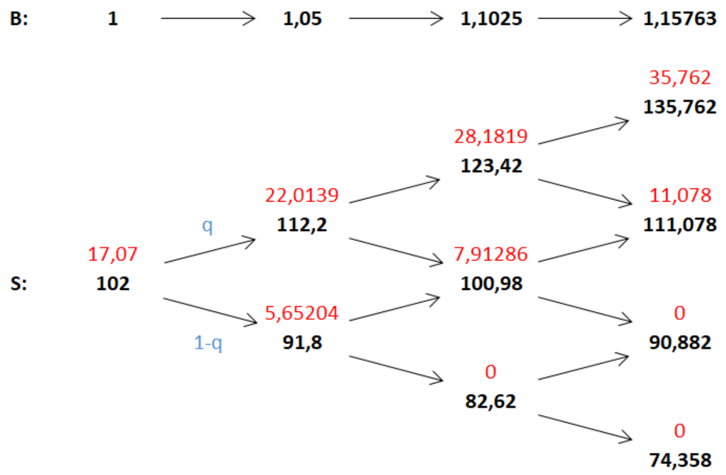
- $U_T = C_T$, vrednost v času zapadlosti;



Slika 1. Triobdobni binomski model

- $U_t = \max\{C_t; \frac{1}{1+R}E_Q(U_{t+1}|F_t)\}$, vrednost v časih pred zapadlostjo, kjer je C_t vrednost ob takojšnji izvršitvi ter $\frac{1}{1+R}E_Q(U_{t+1}|F_t)$ diskontirana pričakovana vrednost, če počakamo še eno obdobje. Opcijo v trenutku t izvršimo, če je $Z_t > \frac{1}{1+R}E_Q(U_{t+1}|F_t)$;
- $U_0 = c_0^a$ je premija.

Oglejmo si konkreten primer. Naj bo $T = 3$ in $K = 100$, $S_0 = 102$, $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$ in $R = 0{,}05$. Iz teh parametrov trga sledi, da je verjetnost $q = 0{,}75$. Razvoj cene delnice in enote bančnega računa prikazuje slika 2.



Slika 2. Binomsko drevo in vrednostni proces ameriške nakupne opcije

Določimo vrednostni proces ameriške nakupne opcije.

Čas $t = 3$:

$$\begin{aligned}
U_{u^3} &= C_{u^3} = \max\{135{,}762 - 100; 0\} = 35{,}762 \Rightarrow \text{ izvršimo,}\\
U_{u^2d} &= C_{u^2d} = \max\{111{,}078 - 100; 0\} = 11{,}078 \Rightarrow \text{ izvršimo,}\\
U_{ud^2} &= C_{ud^2} = \max\{90{,}882 - 100; 0\} = 0 \Rightarrow \text{ ne izvršimo,}\\
U_{d^3} &= C_{d^3} = \max\{74{,}358 - 100; 0\} = 0 \Rightarrow \text{ ne izvršimo.}
\end{aligned}$$

Čas $t = 2$:

$$\begin{aligned}
U_{u^2} &= \max\{C_{u^2}; \tfrac{1}{1+R}E(U_3|F_2)\} =\\
&= \max\{\max\{123{,}42 - 100; 0\}; \tfrac{1}{1+0{,}05}(35{,}762 \cdot 0{,}75 + 11{,}078 \cdot 0{,}25)\} =\\
&= 28{,}1819 \Rightarrow \text{ ne izvršimo,}\\
U_{ud} &= \max\{C_{ud}; \tfrac{1}{1+R}E(U_3|F_2)\} =\\
&= \max\{\max\{100{,}98 - 100; 0\}; \tfrac{1}{1+0{,}05}(11{,}078 \cdot 0{,}75 + 0 \cdot 0{,}25)\} =\\
&= 7{,}91286 \Rightarrow \text{ ne izvršimo,}\\
U_{d^2} &= \max\{C_{d^2}; \tfrac{1}{1+R}E(U_3|F_2)\} =\\
&= \max\{\max\{82{,}62 - 100; 0\}; \tfrac{1}{1+0{,}05}(0 \cdot 0{,}75 + 0 \cdot 0{,}25)\} =\\
&= 0 \Rightarrow \text{ ne izvršimo.}
\end{aligned}$$

Čas $t = 1$:

$$\begin{aligned}
U_{u} &= \max\{C_{u}; \tfrac{1}{1+R}E(U_2|F_1)\} =\\
&= \max\{\max\{112{,}2 - 100; 0\}; \tfrac{1}{1+0{,}05}(28{,}1819 \cdot 0{,}75 + 7{,}91286 \cdot 0{,}25)\} =\\
&= 22{,}0139 \Rightarrow \text{ ne izvršimo,}\\
U_{d} &= \max\{C_{d}; \tfrac{1}{1+R}E(U_2|F_1)\} =\\
&= \max\{\max\{91{,}8 - 100; 0\}; \tfrac{1}{1+0{,}05}(7{,}91286 \cdot 0{,}75 + 0 \cdot 0{,}25)\} =\\
&= 5{,}65204 \Rightarrow \text{ ne izvršimo.}
\end{aligned}$$

Čas $t = 0$:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \max\{C_0; \tfrac{1}{1+R}E(U_1|F_0\} =\\
&= \max\{\max\{102 - 100; 0\}; \tfrac{1}{1+0{,}05}(22{,}0139 \cdot 0{,}75 + 5{,}65204 \cdot 0{,}25\}\\
&= 17{,}07 \Rightarrow \text{ ne izvršimo.}
\end{aligned}$$

Zaključimo, da je $U_0 = c_0^a = 17{,}07$ premija ameriške nakupne opcije. Hkrati opazimo, da opcije pred zapadlostjo nikoli ne izvršimo.

Če opisani račun avtomatiziramo z računalnikom, npr. v Excelu, lahko analiziramo vrednost ameriške nakupne opcije v odvisnosti od trenutne cene delnice S_0 in odvisnost prikažemo z grafikonom. Za zgoraj opisani primer grafikon prikazuje slika 3. Na horizontalno os nanašamo vrednost osnovnega premoženja S_0 v času 0 in na vertikalno os izračunane premije. Modra krivulja predstavlja z modelom dobljeno premijo oziroma vrednost opcije, rdeča pa notranjo vrednost opcije oziroma izplačilo ob takojšnji izvršitvi. V konkretnem primeru to pomeni, da za $S_0 = 100$

takojšnja izvršitev opcije prinese 2, njena premija pa je enaka 17,07. Graf potrjuje, da je opcijska premija vedno višja ali enaka notranji vrednosti opcije, zato se je res nikoli ne splača izvršiti.

Dejstvo, da sta krivulji na grafikonu zelo narazen, je posledica visoke obrestne mere. V praksi je razlika med $S_0 - K$ in $S_0 - KD(0,T)$ majhna, saj so netvegane obrestne mere nizke, opcije pa bolj kratkoročni instrumenti. Tudi če je cena tako visoka, da se bo opcijo splačalo izvršiti v vseh vozliščih v času T, bomo takrat dobili $S_T - K$. Ko to diskontiramo na čas 0, to postane $S_0 - KD(0,T)$, kar je več kot takojšnje izplačilo $S_0 - K$. Torej se splača čakati. Kot opombo je vredno omeniti, da imamo pri prodajni opciji $K - S_0$ ter $KD(0,T) - S_0$, torej je tam situacija drugačna in se krivulji sekata, zato se predčasna izvršitev lahko splača.

Slika 3. Premija in notranja vrednost ameriške nakupne opcije

3.2. **Zaščitna strategija.** Da bi zvezo med opcijsko premijo in ceno delnice bolje razumeli, se postavimo v čevlje izdajatelja, ki svojo opcijsko pozicijo varuje preko trgovanja z osnovnim premoženjem. Taki strategiji pravimo zaščitna strategija (ang. delta hedging). Namen te strategije je zmanjšati oziroma zavarovati tveganje, povezano z gibanjem cene osnovnega premoženja, in sicer preko izravnave kratkih in dolgih pozicij. Ta strategija temelji na spremembi premije ali cene opcije, ki jo povzroči sprememba cene osnovnega premoženja, na katerem temelji določena opcija. Z delta označimo teoretično spremembo premije, pri čemer ceno osnovnega premoženja spremenimo za 1 denarno enoto. Razmerje med tema dvema premikoma imenujemo količnik varovanja pred tveganjem (ang. hedge ratio). Delta vrednost nakupne opcije se giblje med 0 in 1, medtem ko se pri prodajni opciji giblje med -1 in 0.

Slabost take strategije je, da je nujno stalno spremljanje dogajanja in prilagajanje pozicij, ki so vključene. Izdajatelj mora ves čas kupovati in prodajati vrednostne papirje glede na gibanje cene delnice, da bi se izognil prenizkemu ali previsokemu zavarovanju, kar ga lahko drago stane [2]. Z ohranjanjem takega zavarovanja, se izdajatelju ni treba ukvarjati s tem, kam se giba osnovno premoženje, saj eliminira celotno cenovno tveganje. Kljub temu ostaja izpostavljen določenemu tveganju, saj ne pozna izvršitvene strategije imetnika opcije. Da bi zmanjšal izpostavljenost imetnikovi strategiji, izdajatelj predpostavi, da bo imetnik opcijo izvršil ob za izdajatelja najslabšem možnem času. Pričakuje, da bo izvršitve prišlo ob času, ko bo imetnik opcije prišel do najvišjega dobička, on sam pa bo prišel do najmanjšega dobička. Cilj je torej poiskati tako strategijo, ki izdajatelju prinese najmanjšo možno vrednost in imetniku opcije najboljšo možno vrednost [1].

Kako bi izgledala izdajateljeva zaščitna strategija v binomskem modelu? Ker smo vrednosti v vozliščih drevesa že izračunali, lahko s strategijo začnemo povsem na začetku oziroma skrajno levo v binomskem drevesu. Preden zapišemo zaščitno strategijo, vpeljemo še nekaj oznak za vsako izmed T obdobij binomskega modela.

- $\theta_t = \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{bmatrix}$ ... portfelj vrednostnih papirjev, ustvarjen v času t,
- $c_t = \begin{bmatrix} B_t \\ S_t \end{bmatrix}$ ... vektor cen vrednostnih papirjev v času t,
- $M_t = \begin{bmatrix} B_t(1+R) & S_t u \\ B_t(1+R) & S_t d \end{bmatrix}$ ... matrika izplačil vrednostnih papirjev v času $t+1$,
- $\underline{V_t(\theta_t)} = \langle \theta_t, c_t \rangle$ ... nakupna vrednost portfelja θ_t v času t,
- $\overline{V_t(\theta_t)} = M_t \theta_t$ ... izplačilo portfelja θ_t v času $t+1$.

V času $t = 0$ poznamo

$$M_0 = \begin{bmatrix} B_0(1+R) & S_0 u \\ B_0(1+R) & S_0 d \end{bmatrix} \text{ in } c_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ S_0 \end{bmatrix}.$$

Iščemo portfelj θ_0, za katerega velja $\overline{V_0(\theta_0)} = M_0 \theta_0 = \begin{bmatrix} U_u \\ U_d \end{bmatrix}$.

Ker je trg brez arbitraže, je matrika M_0 obrnljiva in dobimo $\theta_0 = M_0^{-1} \begin{bmatrix} U_u \\ U_d \end{bmatrix}$.
To je začetni zaščitni portfelj, ki nam pove, kaj se dogaja z bančnim računom (α_t) in osnovnim premoženjem oziroma delnico (β_t). Predznak α_t ali β_t je tu ključnega pomena, pri čemer je α_t količina enot bančnega računa, β_t pa količina delnice. Pozitiven predznak v primeru bančnega računa pomeni, da smo v zaščitnem portfelju denar naložili na banko, negativen pa, da smo ga z banke dvignili. Pri delnici pozitiven predznak predstavlja nakup neke količine delnice, negativen pa kratko prodajo.

Povsem enako postopamo v ostalih vozliščih binomskega drevesa. Zaščitni portfelj se s časom spreminja. Če kupec opcije le-te pred zapadlostjo ne izvrši, izdajatelj vodi zaščitno strategijo vse do zapadlosti. Če pa kupec opcijo v katerem izmed vmesnih vozlišč izvrši, potem mi kot izdajatelj nakupne opcije zapremo zaščitno strategijo in dobimo znesek, ki nam pripada glede na vrednost izplačila portfelja v danem vozlišču.

V času $t = 0$ tako v konkretnem primeru velja

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1{,}05 & 112{,}2 \\ 1{,}05 & 91{,}8 \end{bmatrix} \text{ in } c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 102 \end{bmatrix}.$$

Iščemo θ_0, da velja $\overline{V_0(\theta_0)} = M_0\theta_0 = \begin{bmatrix} 22{,}0139 \\ 5{,}65204 \end{bmatrix}$, in dobimo $\theta_0 = \begin{bmatrix} -64{,}7396 \\ 0{,}80205 \end{bmatrix}$.

V času $t = 1$ v stanju u velja

$$M_u = \begin{bmatrix} 1{,}1025 & 123{,}42 \\ 1{,}1025 & 100{,}98 \end{bmatrix} \text{ in } c_u = \begin{bmatrix} 1{,}05 \\ 112{,}2 \end{bmatrix}.$$

Iščemo θ_u, da velja $\overline{V_1(\theta_u)} = M_u\theta_u = \begin{bmatrix} 28{,}1819 \\ 7{,}912857 \end{bmatrix}$, in dobimo $\theta_u = \begin{bmatrix} -75{,}5536 \\ 0{,}90326 \end{bmatrix}$.

V času $t = 1$ v stanju d velja

$$M_d = \begin{bmatrix} 1{,}1025 & 100{,}98 \\ 1{,}1025 & 82{,}62 \end{bmatrix} \text{ in } c_d = \begin{bmatrix} 1{,}05 \\ 91{,}8 \end{bmatrix}.$$

Iščemo θ_d, da velja $\overline{V_1(\theta_d)} = M_d\theta_d = \begin{bmatrix} 7{,}912857 \\ 0 \end{bmatrix}$, in dobimo $\theta_d = \begin{bmatrix} -32{,}2974 \\ 0{,}43098 \end{bmatrix}$.

V času $t = 2$ v stanju u^2 velja

$$M_{u^2} = \begin{bmatrix} 1{,}157625 & 135{,}762 \\ 1{,}157625 & 111{,}078 \end{bmatrix} \text{ in } c_{u^2} = \begin{bmatrix} 1{,}1025 \\ 123{,}42 \end{bmatrix}.$$

Iščemo θ_{u^2}, da velja $\overline{V_2(\theta_{u^2})} = M_{u^2}\theta_{u^2} = \begin{bmatrix} 35{,}762 \\ 11{,}078 \end{bmatrix}$, in dobimo $\theta_{u^2} = \begin{bmatrix} -86{,}38376 \\ 1 \end{bmatrix}$.

V času $t = 2$ v stanju ud velja

$$M_{ud} = \begin{bmatrix} 1{,}157625 & 111{,}078 \\ 1{,}157625 & 90{,}882 \end{bmatrix} \text{ in } c_{ud} = \begin{bmatrix} 1{,}1025 \\ 100{,}98 \end{bmatrix}.$$

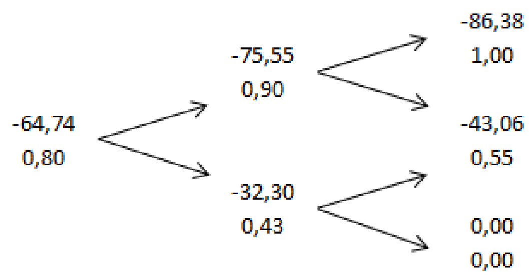
Iščemo θ_{ud}, da velja $\overline{V_2(\theta_{ud})} = M_{ud}\theta_{ud} = \begin{bmatrix} 11{,}078 \\ 0 \end{bmatrix}$, in dobimo $\theta_{ud} = \begin{bmatrix} -43{,}06317 \\ 0{,}548524 \end{bmatrix}$.

V času $t = 2$ v stanju d^2 velja

$$M_{d^2} = \begin{bmatrix} 1{,}157625 & 90{,}882 \\ 1{,}157625 & 74{,}358 \end{bmatrix} \text{ in } c_{d^2} = \begin{bmatrix} 1{,}1025 \\ 82{,}62 \end{bmatrix}.$$

Iščemo θ_{d^2}, da velja $\overline{V_2(\theta_{d^2})} = M_{d^2}\theta_{d^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, in dobimo $\theta_{d^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Če imetnik ameriške nakupne opcije te ne izvrši do zapadlosti, se bo število enot na našem bančnem računu in število delnic spreminjalo tako, kot prikazuje slika 4, kjer zgornja številka prikazuje število enot na bančnem računu in spodnja število delnic. Opozorimo, da v vsakem vozlišču v času t prikazujemo portfelj, ki ga držimo v obdobju $[t, t+1]$.



Slika 4. Zaščitni portfelji v časih $t = 0, 1, 2$.

Vse to bi veljalo le v primeru, da bi bil naš trg popoln in brez trenj oziroma, da ne bi bilo nobenih drugih stroškov – to na realnem trgu ni možno, kar bomo kasneje videli v nadaljevanju.

3.3. **Predčasna izvršitev ameriške nakupne opcije.** Imetniki ameriške opcije lahko opcijo izvršijo prej ali kasneje iz različnih razlogov. Recimo, da imamo v lasti ameriško nakupno opcijo, ki se splača. Skrbi nas, da bo na trgu prišlo do težav in posledično do kolapsa. Kaj je v tem primeru naša najboljša strategija? Lahko bi prodali opcijo, lahko bi prodali njeno zaščitno strategijo, lahko pa bi opcijo kar izvršili. Teorija v [1] nam pravi, naj opcijo prodamo, ali pa prodamo njeno zaščitno strategijo. Če trgujemo na neorganiziranem trgu (ang. OTC) in so prisotni znatni stroški trgovanja z osnovnim premoženjem, potem nam ostane le možnost, da opcijo izvršimo predčasno.

Oglejmo si preprost scenarij, kjer kupimo nakupno opcijo, saj verjamemo, da se bo cena osnovnega premoženja močno zvišala. Če do tega res pride, bomo prišli do velikega povračila. Recimo, da osnovno premoženje ne izplačuje dividend. Potem nam teorija pove, da opcije ni nikoli optimalno izvršiti pred datumom zapadlosti. Zdaj pa predpostavimo, da je v resnici prišlo do povišanja vrednosti osnovnega premoženja, npr. delnice, ampak vse ekonomske napovedi kažejo na to, da se bo vsak hip zgodil neizbežen padec. Najbolj logična in očitna možnost je, da se opcije znebimo s prodajo in tako zavarujemo svoj dobiček, saj za opcijo iztržimo vsaj toliko, kot je njena notranja vrednost. Velikokrat se zgodi, da prodaja mi možna, sploh če gre za opcijo na prostem trgu. V tem primeru obdržimo opcijo in prodamo njeno zaščitno strategijo in jo izvajamo do datuma zapadlosti. Ta možnost je relativno enostavna, če gre za opcijo, ki se močno splača in je napisana na zelo likvidno delnico. Če temu ni tako in obstajajo visoki stroški, povezani s prodajo in nakupom osnovnega premoženja, vse skupaj ne bo tako zelo enostavno. V številnih primerih svoj dobiček lahko zavarujemo le še na način, da opcijo predčasno izvršimo. Imetnik opcije lahko opcijo preprosto izvrši po občutku ali pa se poslužuje celo strategije, kjer maksimizira koristnost pri izvrševanju. Iz tega lahko sklepamo, da se bo izvršitveni čas imetnika opcije le redko ujemal s tistim, ki ga je predvidel izdajatelj in je optimalen v teoretičnem modelu. Ob izdaji opcije je izdajatelj v zameno prejel opcijsko premijo, ki je bila izračunana na podlagi tega, da bo opcija izvršena ob nekem optimalnem času. Kot smo videli v primeru triobdobnega binomskega modela, nam optimalna izvršitvena strategija na koncu vrne najvišjo teoretično vrednost opcije.

To vrednost izdajatelj dobi ne glede na to, kdaj je opcija potem zares izvršena, kar bi pomenilo, da izdajatelj ne more nikoli izgubiti. Najslabše, kar se lahko zgodi iz vidika izdajatelja, je to, da je opcija izvršena ob teoretičnem optimalnem času, ko imetnik opcije dobi največji izkupiček. Ta možnost je že vključena v izvršitveni strategiji in posledično všteta v premijo, ki jo dobi izdajatelj [1].

Vrnimo se k našemu konkretnemu primeru. Recimo, da se do časa 1 zgodi dober razvoj trga u in cena delnice zdaj znaša 112, vrednost opcije pa je 22,01. Privzemimo, da smo v času 0 kupili ameriško nakupno opcijo, v času 1 pa opcije ne želimo več. Kaj lahko storimo?

- Najenostavneje je, da opcijo prodamo na trgu in s tem zaslužimo njeno premijo v višini 22,01.
  Lahko se zgodi, da opcija ni likvidna, zanjo na trgu ni nobenega interesa, ali pa kupci ponujajo nižje cene kot bi želeli. Taka možnost prodaje potem za nas ni optimalna.
- Druga možnost je, da opcijo obdržimo in prodamo njeno zaščitno strategijo. Začetni zaščitni portfelj v stanju u torej pravi, da na banko naložimo 75,55 enot bančnega računa, kar pomeni $75{,}55 \cdot 1{,}05 = 79{,}33$ denarnih enot in kratko prodamo 0,9 delnice. Z zaščitno strategijo nadaljujemo vse do konca življenjske dobe opcije oziroma do zapadlosti. Podobno velja tudi za zaščitni portfelj, ustvarjen v času 2, ko v stanjih u^2 oziroma ud določi izposojo 86,39 oziroma 43,06 enot bančnega računa ter kratko prodajo 1 oziroma 0,55 delnice.
  Recimo, da kratka prodaja delnice ni možna – tudi če je, so transakcijski stroški trgovanja z delnico lahko visoki, zato prodaja zaščitne strategije ni optimalna.
- Na koncu ostane le še možnost, da opcijo izvršimo in dobimo izplačilo 12,2, čeprav je vrednost opcije takrat enaka 22,01.

Opcije ponavadi izdajajo velike finančne institucije, ki delujejo na skoraj popolnem trgu. Nasprotno: kupci so večinoma investitorji, katerih trg ni popoln. To vodi v drugačno modeliranje problema in ravno zato tudi v drugačne odločitve posamezne strani. Naš namen v nadaljevanju bo preučiti, kdaj je ameriško opcijo pametno izvršiti pred datumom zapadlosti in zakaj bi nosilec ameriške opcije sprejel neoptimalne odločitve.

4. Modela predčasnih izvršitev ameriških opcij

4.1. **Diskretni enoobdobni model.** V tem razdelku si bomo ogledali model, ki so ga predstavili avtorji članka [4], in spoznali, da pravilo izvrševanja ameriških nakupnih opcij na delnico, ki ne izplačuje dividend le ob zapadlosti, drži tudi ob nekaterih minimalnih trenjih. Videli bomo, da je zgodnja izvršitev zares optimalna, ko so trenja ostrejša in je cena pod notranjo vrednostjo oziroma se imetnik opcije sooča z visokimi stroški kratke prodaje in financiranja.

Zamislimo si enoobdobni model trga s tremi vrednostnimi papirji, s katerimi lahko trgujemo ob časih 0 in 1. Vse parametre modela lahko nastavimo tako, da izražajo dejansko stanje na trgu. Prvi vrednostni papir je netvegan bančni račun ali kak drug netvegan vrednostni papir z obrestno mero $R > 0$, drug vrednostni papir je delnica brez dividend in zadnji ameriška nakupna opcija na delnico z izvršilno ceno K ter datumom zapadlosti $T = 1$. Kot smo definirali že na začetku, bomo s S_t označili vrednost osnovnega premoženja oziroma v tem primeru delnice v času t in s C_t notranjo vrednost nakupne opcije v času t. Cena delnice v času $t = 1$ je neznana ob času $t = 0$ in velja $S_1 \in [0, \infty)$. Privzemimo, da so vsi agenti trga racionalni, njihov cilj pa je maksimiziranje premoženja. Ob tem se srečujejo z naslednjimi finančnimi trenji:

- Vsak agent i se srečuje s sorazmernim transakcijskim stroškom na dolar prodane delnice, ki ga bomo označili z $\lambda^{i,S} \in [0, 1]$.
- Podobno definiramo tak strošek na dolar prodane opcije, ki ga označimo z $\lambda^{i,C} \in [0, 1]$.
- Če agent i kratko proda delnico ob času $t = 0$, v času $t = 1$ plača provizijo za posojanje, ki jo označimo z $S_0 L^i$, kjer $L^i \geq 0$.
- V primeru, da je agent i ob času $t = 0$ lastnik delnice, jo lahko posodi in pri tem v času $t = 1$ dobi provizijo, ki jo označimo z $S_0 l^i$, kjer $l^i \in [0, L^i]$.
- Agent i pa se sooča tudi s stroški financiranja v času $t = 0$, ki jih označimo kot $F^i(x, y)$, če se odloči, da bo $x \in \mathbb{R}$ denarnih enot vložil v delnice, $y \in \mathbb{R}$ pa v opcije. Ti stroški so seveda enaki 0, če velja $x = y = 0$.

V modelu rečemo, da je *trgovalna strategija dominirana*, če obstaja neka druga trgovalna strategija, ki generira vsaj tako visoke denarne tokove v vsakem časovnem obdobju v vsakem stanju in strogo višje tokove v nekem možnem stanju. Nadalje rečemo, da je *zgodnja izvršitev opcije dominirana*, če je katerakoli možna trgovalna strategija, ki vključuje zgodnjo izvršitev, dominirana. Da bo model smiseln, predpostavimo, da ne obstaja arbitraža, saj bi taka strategija trivialno dominirala vse ostale.

Trditev 4.1 navaja pogoje, pod katerimi zgodnja izvršitev ameriške nakupne opcije ni optimalna.

Trditev 4.1. *Zgodnja izvršitev ameriške nakupne opcije je dominirana za agenta i, za katerega velja vsaj ena od naslednjih možnosti:*

(1) *ima ničelne stroške kratke prodaje in financiranja, t.j. $L^i = F^i = 0$;*
(2) *ima prihodek od prodaje opcije večji od notranje vrednosti, t.j. $C_0(1 - \lambda^{i,C}) > S_0 - K$. Zadosten pogoj za takšen prihodek od prodaje so ničelni transakcijski stroški opcije, t.j. $\lambda^{i,C} = 0$, in obstoj drugega agenta j z ničelnimi stroški kratke prodaje, stroški financiranja in transakcijski stroški delnice, t.j. $L^j = F^j = \lambda^{j,S} = 0$.*

Prvi del trditve 4.1 pravi, da transakcijski stroški sami po sebi ne morejo upravičiti racionalne zgodnje izvršitve. Razlogi za to so naslednji. Agent opcijo izvrši zato, da bi ali dobil osnovno premoženje oziroma delnico ali pa denar. V primeru, da agent želi denar, je strategija predčasne izvršitve in takojšnje prodaje delnice dominirana z držanjem opcije in prodajo njene zaščitne strategije. Transakcijski strošek prodaje delnice ob zgodnji izvršitvi je enak transakcijskemu strošku kratke prodaje delnice, zato transakcijski stroški delnice sami po sebi ne morejo utemeljiti zgodnje izvršitve. V drugem primeru, ko imetnik opcije želi delnico, je zgodnja izvršitev dominirana s strategijo, kjer opcijo zadržimo in jo izvršimo kasneje, hkrati pa diskontirano izvršilno ceno, t.j. $\frac{K}{1+R}$, investiramo v netvegan vrednosti papir. Agent torej dobi delnico in dodatno še zasluži obresti iz netveganega vrednostnega papirja. Ta strategija nima direktne povezave s trgovanjem delnice in zato tu ni vpliva transakcijskih stroškov. V teh dveh primerih oziroma strategijah nismo vključili opcijskih transakcij, zato dominirata zgodnjo izvršitev tudi v primeru visokih opcijskih transakcijskih stroškov.

Drugi del trditve 4.1 pravi, da je zgodnja izvršitev dominirana tudi v primeru, ko čisti prihodki od prodaje opcije presegajo njeno notranjo vrednost. V tem primeru je za imetnika bolje, da opcijo proda kot pa predčasno izvrši. Če obstaja agent j, ki nima nikakršnih stroškov kratke prodaje, financiranja in transakcijskih stroškov delnice, potem agent j opcijo vrednoti na več kot je njena notranja vrednost. Zato agent i opcijo raje proda agentu j kot da bi jo izvršil.

Trditev 4.2 navaja pogoje, pod katerimi zgodnja izvršitev ameriške nakupne opcije postane optimalna.

Trditev 4.2. *Naj za agenta i velja* $S_0(1-\lambda^{i,S}) > K$. *Zgodnja izvršitev ni dominirana za agenta i, če je njegov prihodek od prodaje opcije nizek, t.j.* $C_0(1-\lambda^{i,C}) \leq S_0(1-\lambda^{i,S}) - K$, *in velja vsaj ena od naslednjih možnosti:*

(1) *stroški kratke prodaje* L^i *so dovolj visoki;*

(2) *stroški financiranja* F^i *so dovolj visoki.*

Pogoj $C_0(1-\lambda^{i,C}) \leq S_0(1-\lambda^{i,S}) - K$ *je izpolnjen, če je opcijski transakcijski strošek* $\lambda^{i,C}$ *dovolj visok in/ali je cena opcije dovolj nizka.*

Da bi razumeli intuicijo o optimalni izvršitvi, si zamislimo imetnika opcije, ki denar želi takoj, brez tveganja za negativen denarni tok v času 1. Tak agent lahko ali proda opcijo, proda njeno izvedbeno strategijo ali jo predčasno izvrši. Prva možnost v primeru nizkega prihodka, zmanjšanega za transakcijske stroške, odpade. Prav tako odpade druga opcija v primeru, da stroški financiranja ali stroški kratke prodaje ali obeh skupaj naredijo zavarovanje opcije zelo drago. Takemu agentu ostane le še zadnja možnost in sicer zgodnja izvršitev opcije.

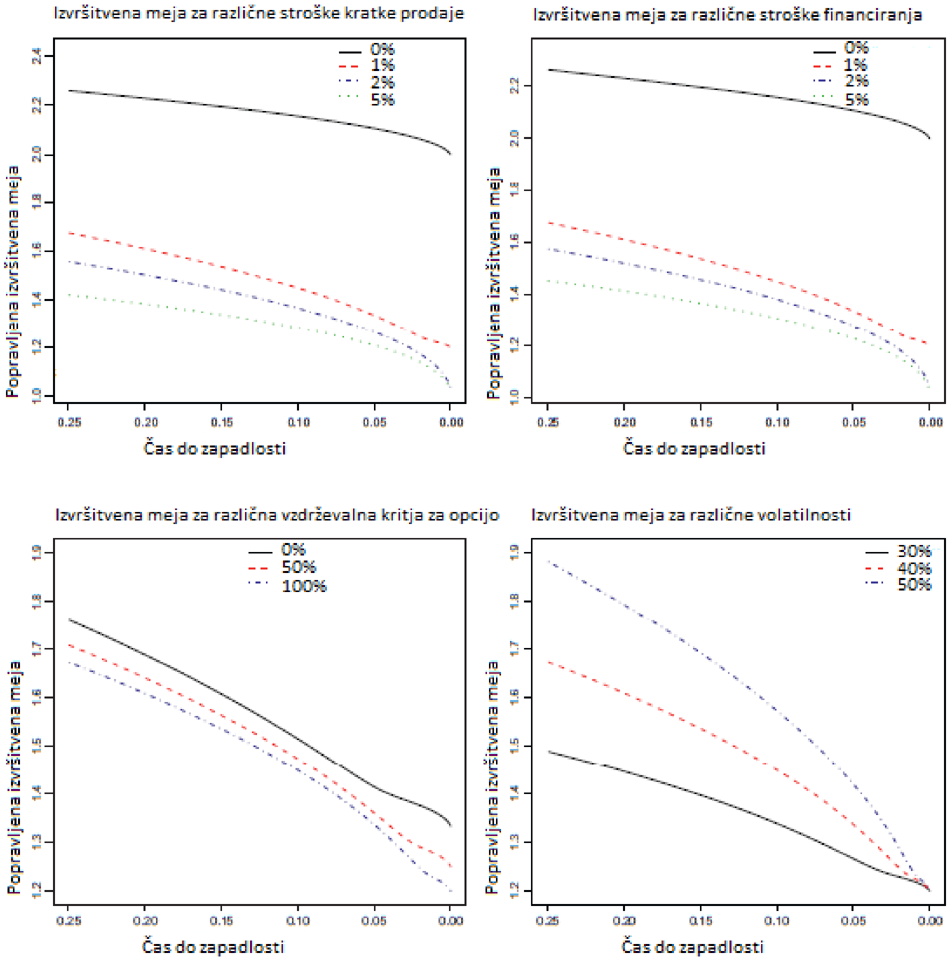
4.2. **Model z zveznim časom.** Avtorji članka [4] so razvili še model, katerega kvantitativne posledice so potem lahko preverili v empirični analizi. Mi bomo ta model pogledali le na kratko, saj je kot celota zahteven in ga za naše potrebe analiziranja kot takega ne potrebujemo. Cilj modela je določiti spodnjo izvršitveno mejo $\underline{B}(T-t)$ v odvisnosti od časa $T-t$ do zapadlosti opcije. Izvršitvena meja je kritična vrednost cene delnice, nad katero je izvršitev opcije optimalna. Na ta način je možno empirično raziskati, ali agenti dejansko opcijo izvršijo, ko je cena delnice nad spodnjo izvršitveno mejo. Rešitev takšnega modela pa prav tako omogoča pridobitev primerjalnih statistik, ki kažejo optimalnost odločitve o izvršitvi opcije v odvisnosti od parametrov trga. Pri tem je treba privzeti, da delnica nima nobenih transakcijskih stroškov.

Model izhaja iz klasičnega Black-Scholes-Mertonovega modela, v katerem agenti na trgu vlagajo v netvegan vrednostni papir z obrestno mero $r \geq 0$ in delnico s cenovnim procesom S_t, ki je podan kot: $dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$, pri čemer je μ tendenca, σ volatilnost in W_t Brownovo gibanje (matematični model, ki opisuje naključno gibanje). Avtorji so v model dodali dve finančni trenji, in sicer stroške kratke prodaje ter stroške financiranja.

Glede na te predpostavke o dinamiki gibanja delnice in finančnih trenjih so avtorji članka želeli določiti optimalno izvršitveno politiko oziroma strategijo za imetnika opcije. To so storili tako, da so hkrati reševali problem vrednotenja ameriške nakupne opcije in določanja spodnje meje izvršitve $\underline{B}$. Problem vključuje štiri robne pogoje. Prvi pogoj je standarden pogoj za vrednost opcije ob času zapadlosti T. Drugi pogoj pravi, da če je delnica brez vrednosti, je to res tudi za opcijo. Tretji pogoj pravi, da je vrednost opcije ekvivalentna svoji notranji vrednosti na in nad izvršitveno mejo. Četrti pogoj pa zagotavlja, da izvršitvena meja maksimizira vrednost opcije. Hkrati model dopušča še, da je lahko izvršitvena meja enaka ∞ v primeru, ko zgodnja izvršitev ni optimalna za nobeno ceno delnice ob času t.

V modelu je možno tudi na splošno pokazati, da spodnja izvršitvena meja $\underline{B}$ pada pri znižanju stroškov kratke prodaje, znižanju stroškov financiranja in znižanju zahtevanih vzdrževalnih kritij za opcije in za delnice. Avtorji so se lotili računanja izvršitvene meje na konkretnem primeru, kjer ima agent i dolgo pozicijo v nakupni opciji in kratko proda delnico brez dividend. Vnaprej so določili netvegano obrestno mero $r = 2\,\%$, volatilnost $\sigma = 40\,\%$, strošek financiranja $\psi^i = 1\,\%$, strošek kratke prodaje $L^i = 1\,\%$, vzdrževalno kritje za delnico $m^{i,S} = 50\,\%$ in za opcijo $m^{i,C} = 100\,\%$.

Slika 5 prikazuje štiri grafe, kjer je na vodoravni osi čas do zapadlosti $T - t$ in na navpični osi popravljena spodnja izvršitvena meja. Kot popravljeno vrednost razumemo izvršitveno mejo $\underline{B}(T - t)$, ki jo delimo z izvršilno ceno K, torej $\underline{B}(T - t)/K$. To pomeni, da če je prikazana vrednost enaka 1,6, bi bila zgodnja izvršitev optimalna, ko bi bila cena delnice vsaj $60\,\%$ nad izvršilno ceno oziroma bi veljalo $S(t) \geq \underline{B}(T - t)$ in posledično $S(t)/K \geq \underline{B}(T - t)/K$. Graf levo zgoraj kaže vpliv višine stroškov kratke prodaje na višino izvršitvene meje. Opazimo, da z rastjo stroškov kratke prodaje izvršitvena meja pada. Graf desno zgoraj kaže vpliv stroškov financiranja na višino izvršitvene meje. Zopet opazimo, da z rastjo stroškov financiranja izvršitvena meja pada. Graf levo spodaj kaže vpliv višje zahtevane stopnje za kritje za opcijo na višino izvršitvene meje. Tudi v tem primeru opazimo, da z rastjo zahtevane stopnje za kritje izvršitvena meja pada. Graf desno spodaj pa kaže vpliv volatilnosti na višino izvršitvene meje. Opazimo, da z rastjo volatilnosti izvršitvena meja raste, na koncu, ko je čas do zapadlosti enak 0, pa volatilnost na izvršitveno mejo nima vpliva. Če opazujemo vse grafe naenkrat, lahko opazimo, da izvršitvena meja pada s približevanjem zapadlosti. To pojasnimo tudi tako, da če je optimalno izvršiti dalj časa trajajočo opcijo, potem mora biti tudi optimalno izvršiti manj časa trajajočo opcijo, saj se kot lastnik opcije odpoveš manj možnostim izbire.

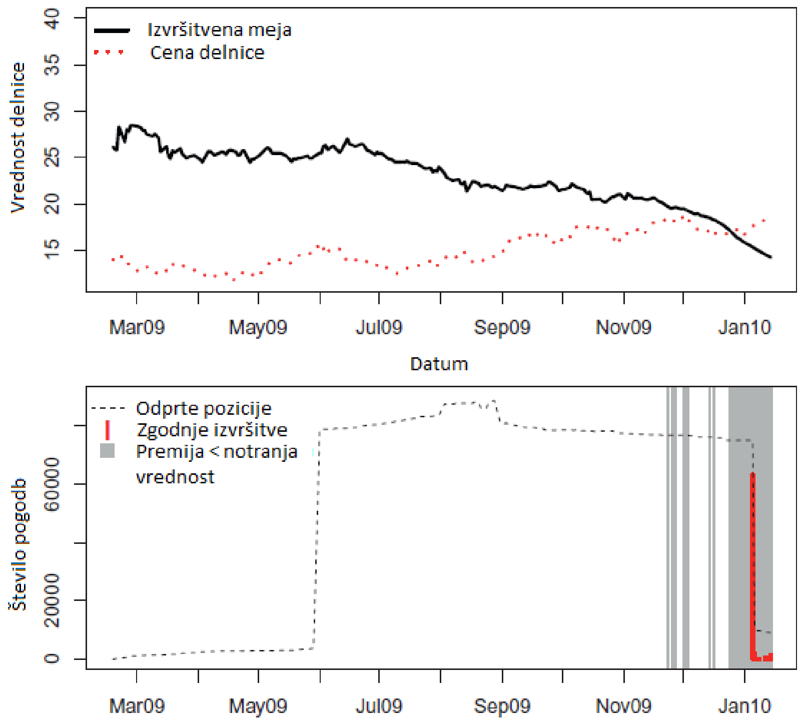


SLIKA 5. Spodnja izvršitvena meja glede na finančna trenja s spremenljivimi parametri. Slika prikazuje štiri grafe s teoretično spodnjo izvršitveno mejo za opcije s finančnimi trenji. Vsak graf posebej prikazuje spremenljive parametre, pri čemer je osnovni primer določen z netvegano obrestno mero $r = 2\,\%$, volatilnostjo $\sigma = 40\,\%$, stroškom financiranja $\psi^i = 1\,\%$, stroškom kratke prodaje $L^i = 1\,\%$, zahtevanim vzdrževalnim kritjem za delnico $m^{i,S} = 50\,\%$ in za opcijo $m^{i,C} = 100\,\%$. (Vir: [4, str. 285])

5. Empirična analiza predčasnih izvršitev ameriških opcij

V tem poglavju si bomo od blizu ogledali raziskavo, ki so jo opravili avtorji članka [4] na unikatnih podatkih realnega trga. Model iz prejšnjega poglavja so uporabili na vsaki opciji iz velikega seta podatkov. Avtorji so analizirali, ali v realnem svetu pride do izvršitev, ko cena delnice preseže s pomočjo modela vnaprej izračunano izvršitveno mejo. Še prej pa si poglejmo enostavnejši primer, ki nas bo vpeljal v izvršitve opcij na realnih trgih.

5.1. **Primer opcij, pisanih na delnico iShares Silver Trust.** Oglejmo si primer ameriških nakupnih opcij, ki so napisane na delnico podjetja iShares Silver Trust, ki ne izplačuje dividend. Zgornji graf na sliki 6 prikazuje časovno obdobje od začetka leta 2009 do začetka leta 2010. Na njem z rdečo barvo označena dnevna zaključna cena delnice, s črno pa spodnja meja izvršitev, ki jo vrne model iz prejšnjega poglavja. Spodnji graf pa prikazuje število sklenjenih ameriških nakupnih opcij na to delnico v istem časovnem obdobju, kjer s črtkano črto označimo odprte pozicije, s sivo podlago obdobja, ko tržna premija opcije pade pod notranjo vrednost opcije, z rdečo pa predčasne izvršitve opcij. Iz slike lahko razberemo, da investitorji dejansko opcijo izvršijo pred zapadlostjo. Takih opcij je kar 84 % [4].



Slika 6. Nakupna opcija na delnico iShares Silver Trust z izvršilno ceno $K = 14$ in datumom zapadlosti 16. 1. 2010. (Vir: [4, str. 280])

V nadaljevanju bomo empirično raziskali vzroke za predčasno izvršitev ameriških opcij. Na tem mestu si lahko postavimo več pomembnih vprašanj. Zakaj prihaja do predčasnih izvršitev in kateri finančni razlogi oziroma kakšna trenja imajo na to največji vpliv? Ali stranke borznih posrednikov, ustvarjalci trga in drugi investitorji opcije dejansko v praksi predčasno izvršujejo? Ali so dodatni stroški in finančna trenja dovolj veliki, da spodbudijo zgodnjo izvršitev?

5.2. **Podatki.** Avtorji članka [4] so opravili obširno raziskavo predčasnih izvršitev ameriških nakupnih opcij na delnice na naslednjih zelo specifičnih in unikatnih podatkih, ki niso javno dostopni.

- Podatke o cenah delnic in dividendah so dobili v bazi CSRP (Center for Research in Security Prices), ki zajemajo vse informacije od leta 1985 do leta 2011 in se nanašajo na 23.597 vrednostnih papirjev (vseh opazovanj je bilo 18.314.652).
- Dejanske podatke o pravih izvršitvah opcij so dobili iz baze OCC Exercises (Options Clearing Corporation), kjer se dnevne izvršitve deli v 3 skupine

glede na udeležence trga (ustvarjalci trga, stranke trgovalcev in trgovalci na lasten račun). Opazovano obdobje izvršitev je bilo od leta 2001 do leta 2010, zbrali pa so podatke o 821.052 nakupnih opcijah na 5.727 vrednostnih papirjev (vseh opazovanj je bilo 7.852.739).

- Cene opcij, transakcijske stroške, odprte pozicije, volatilnosti in pričakovane dividende so vzeli iz baze OptionMetrics, in sicer za leta med 1996 in 2012. Podatki se nanašajo na 3.949.199 nakupnih opcij in 7.509 vrednostnih papirjev (vseh opazovanj je bilo 355.259.334).
- Informacije o stroških kratke prodaje so pridobili iz baze Data Explorers, kjer so se osredotočili na Daily Cost of Borrow Score (DCBS), ki kot številka od 1 do 10 kaže na nizke (1) in visoke (10) stroške. Podatki segajo od leta 2002 do leta 2012 in zajemajo 41.188 vrednostnih papirjev (vseh opazovanj je bilo 55.139.348).
- Informacije o obrestnem razmiku LIBOR–OIS (med London Interbank Offeered Rate in Overnight Indexed Swap Rate obrestnima merama) so pridobili iz baze podatkov Bloomberg med letoma 1990 in 2013 (vseh opazovanj je bilo 8.620).
- Podatke o izdaji novih delnic, lastniškem kapitalu, združitvah in prevzemih so dobili iz baze Thomson One, in sicer za obdobje med letoma 1963 in 2015, pri čemer se podatki nanašajo na 402.101 vrednostni papir (vseh opazovanj je bilo 439.456).

Za analizo predčasnih izvršitev ameriških nakupnih opcij so se avtorji osredotočili na opcije na delnice, ki ne izplačujejo dividend. To pomeni, da so izključili tiste serije opcij v bazi OptionMetrics, ki imajo neničelne pričakovane dividende v življenjski dobi opcije. Prav tako so izključili tiste opcije, ki so bile izvršene na dan zapadlosti, da so se zares osredotočili na predčasne izvršitve. Dodatno pa so izključili še tiste opcije, ki ne sledijo standardni praksi o dnevu zapadlosti na dan po tretjem petku v določenem mesecu. Za vsako serijo opcij so potem združili podatke z ujemajočo se delnico iz baze CSRP. Omeniti je treba, da baza OCC Exercises vsebuje le tiste informacije o izvršitvah, ki so se dejansko zgodile. V vzorcu niso vključene tiste opcije, ki nikoli niso bile izvršene predčasno ali na datum zapadlosti.

Tabela 1 vsebuje povzetek podatkov za prečiščeni in urejeni vzorec, kjer lahko opazimo veliko število in vrednost zgodnjih izvršitev. Podatki vsebujejo 1.806 milijonov takšnih izvršitev, kar predstavlja skupno vrednost izvršitev 36,3 milijarde \$ ali skupno notranjo vrednost 22,8 milijarde \$.

Podatki o predčasnih izvršitvah so razvrščeni glede na to ali se opcija splača, na čas do zapadlosti in tip agenta. Glede na to, ali se opcija splača, podatke razdelimo v tri skupine, in sicer se splača ali se ne splača, kot je definirano že v začetku dela, in se močno splača (ang. deep in the money), če je cena delnice za več kot 25 % višja od izvršilne cene. Pri času so podatki prav tako razdeljeni v tri skupine glede na mesece do zapadlosti ter podobno v tri skupine pri agentu, ki opcijo izvršuje.

- Iz zgornjega dela tabele vidimo, da je največ zgodnje izvršenih opcij takih, ki se splačajo, ter opcij, ki se močno splačajo. Vzorec vsebuje tudi manjši del opcij, ki se ne splačajo, kar je morda posledica napak ali pa namerna poteza

TABELA 1. Zgodnje izvršitve nakupnih opcij na delnice v prečiščenem vzorcu. Tabela je razdeljena glede na to, ali se opcija splača, glede na čas do zapadlosti in glede na tip agenta, ki z opcijo operira. (Vir: [4, str. 287])

	Izvršitve (število pogodb, v mio)	Izvršitve (vrednost izvršitve, v mio \$)	Izvršitve (notranja vrednost, v mio \$)
Skupaj	1.806	36.250	22.811
Glede na to, ali se splača			
Se ne splača	2	38	-1
Se splača	480	14.170	1.942
Se močno splača	1.324	22.042	20.870
Glede na čas do zapadlosti			
Manj kot 3 mesece	1.720	35.422	21.199
Med 3 in 9 mesecev	72	690	1.006
Več kot 9 mesecev	13	137	605
Glede na tip agenta			
Stranka trgovalca	808	16.007	6.338
Trgovalec zase	81	1.955	998
Ustvarjalci trga	916	18.288	15.475

investitorjev, ki so opcijo izvršili, da bi prihranili na transakcijskih stroških za čas, ko dejansko želijo delnico.

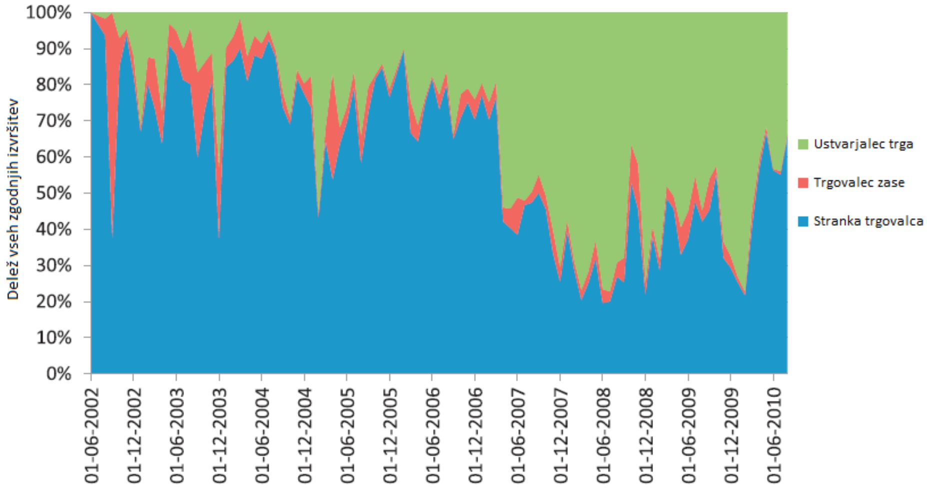
- Sredinski del tabele prikazuje izvršitve glede na čas do zapadlosti, kjer je večja koncentracija zgodnjih izvršitev v predelu kratkoročnih opcij. Razlog se morda skriva v tem, da ponujajo manj izbirnosti ali pa da je za take opcije preprosto več interesa.
- Spodnji del tabele kaže, da vse tri vrste agentov opcije predčasno izvršujejo. Ustvarjalci trga izvršijo največ opcij, sledijo jim stranke trgovalcev, najmanj izvršitev pa izvedejo trgovalci na lasten račun.

Slika 7 prikazuje razvoj relativnega deleža zgodnjih izvršitev skozi čas za tri različne skupine agentov. S pregledom časovne komponente podatkov so avtorji ugotovili, da je delež trgovalcev na lasten račun ves čas majhen, deleža strank trgovalcev in ustvarjalcev trga pa se močno spreminjata.

5.3. **Vpliv parametrov trga na zgodnje izvršitve opcij.** Avtorje [4] je podrobneje zanimalo, kakšen je delež opcij, ki so bile predčasno izvršene, in kako se to povezuje z lastnostmi trga, predvsem transakcijskimi stroški opcije in stroški kratke prodaje.

Transakcijske stroške opcije so izmerili kot relativni razpon med ponudbeno ceno (ang. bid price) in ceno povpraševanja (ang. ask price), kar zapišemo kot

$$TCOST = \frac{ask\ price - bid\ price}{(ask\ price + bid\ price)/2}.$$



Slika 7. Zgodnje izvršitve opcij glede na tip agenta skozi čas. (Vir: [4, str. 289])

Stroške kratke prodaje za vsako delnico so določili s pomočjo DCBS indikatorja.

5.3.1. *Stroški kratke prodaje.* Tabela 2 prikazuje, kako se delež zgodnjih izvršitev spreminja glede na stroške kratke prodaje. V tabeli je zapisano dnevno število zgodnjih izvršitev kot delež odprtih pozicij prejšnjega dne, pri čemer tabelo zopet razdelimo glede na to, ali se opcija splača, glede na zapadlost in tip agenta. Opazimo lahko, da se ta delež monotono povečuje s stroški kratke prodaje v vsaki izmed izbranih skupin posebej. Med opcijami z minimalnimi stroški kratke prodaje je delež predčasno izvršenih opcij le $0,17\,\%$, med opcijami z najvišjimi stroški kratke prodaje pa je delež nad $4\,\%$. Iz tabele lahko še razberemo, da opcije, ki se ne splačajo, niso predčasno izvršene, in je večina izvršitev koncentrirana okoli opcij, ki se močno splačajo, kar je seveda pričakovano. Vidimo tudi, da so izvršitve pogostejše za kratkoročne opcije, saj so prednosti odlaganja izvršitve zelo majhne. V spodnjem delu tabele se lepo vidi, da vsi izmed tipov agentov opcije izvršujejo predčasno, in sicer bolj pogosto takrat, ko so stroški višji.

5.3.2. *Transakcijski stroški opcije.* Tabela 3 prikazuje, kako se delež zgodnjih izvršitev spreminja glede na transakcijske stroške, ki jih izmerimo preko funkcije TCOST definirane zgoraj. Opazovanja so razvrščena v kvantile po transakcijskih stroških od 1 do 5, kjer 5 pomeni visoke stroške. Tudi tu lahko opazimo, da se ta delež monotono povečuje s transakcijskimi stroški v vsaki izmed izbranih skupin posebej. Absolutne razlike med najmanjšimi in najvišjimi stroški so v drugi tabeli v povprečju manjše kot v prvi.

V skladu z opisanimi rezultati ugotovimo, da je zgodnejša izvršitev verjetnejša, če so stroški kratke prodaje za delnico višji, so transakcijski stroški opcije višji, opcija se bolj splača in ima krajši rok do zapadlosti. Te ugotovitve so zaradi velike količine podatkov statistično izjemno zanesljive. Poleg tega ugotovimo, da vsaka vrsta agenta

Tabela 2. Zgodnje izvršitve opcij na delnice glede na stroške kratke prodaje. Tabela prikazuje povprečno število zgodnjih izvršitev opcij kot delež odprtih pozicij prejšnjega dne, sortiranih glede na stroške kratke prodaje. Z 1 označimo nizke stroške, z 10 pa visoke. Vrednosti v tabeli so podane v %. (Vir: [4, str. 290])

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skupaj	0,17	0,31	0,44	0,58	0,85	1,21	1,74	2,57	3,05	4,28
Glede na to, ali se splača										
Se ne splača	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
Se splača	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
Se močno splača	0,31	0,55	0,78	1,06	1,51	2,23	3,13	4,52	5,75	8,44
Glede na čas do zapadlosti										
Manj kot 3 mesece	0,28	0,51	0,71	0,99	1,49	2,10	2,79	4,51	5,32	7,58
Med 3 in 9 mesecev	0,02	0,05	0,09	0,10	0,21	0,29	0,48	0,61	0,88	1,15
Več kot 9 mesecev	0,01	0,03	0,07	0,08	0,10	0,14	0,23	0,53	0,40	0,29
Glede na tip agenta										
Stranka trgovalca	0,11	0,19	0,24	0,32	0,43	0,56	0,76	0,96	1,24	1,76
Trgovalec zase	0,01	0,02	0,02	0,03	0,06	0,01	0,11	0,13	0,17	0,17
Ustvarjalci trga	0,05	0,11	0,18	0,23	0,37	0,58	0,86	1,48	1,64	2,36

Tabela 3. Zgodnje izvršitve opcij na delnice glede na transakcijske stroške opcije. Tabela prikazuje povprečno število zgodnjih izvršitev opcij kot delež odprtih pozicij prejšnjega dne, sortiranih glede na transakcijske stroške. Z 1 označimo nizke stroške, s 5 pa visoke. Vrednosti v tabeli so podane v %. (Vir: [4, str. 293])

	1	2	3	4	5
Skupaj	0,13	0,16	0,21	0,27	0,50
Glede na to, ali se splača					
Se ne splača	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Se splača	0,02	0,03	0,05	0,11	0,35
Se močno splača	0,25	0,34	0,47	0,62	0,98
Glede na čas do zapadlosti					
Manj kot 3 mesece	0,29	0,31	0,36	0,42	0,62
Med 3 in 9 mesecev	0,04	0,04	0,04	0,05	0,07
Več kot 9 mesecev	0,02	0,02	0,04	0,04	0,03
Glede na tip agenta					
Stranka trgovalca	0,06	0,08	0,11	0,16	0,35
Trgovalec zase	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02
Ustvarjalci trga	0,07	0,07	0,08	0,10	0,12

izvršuje opcije predčasno in da je pri vsakem tipu to bolj verjetno, ko so trenja večja.

5.3.3. *Preverjanje modela.* Na zgoraj opisani način so avtorji predstavili vpliv transakcijskih stroškov in stroškov kratke prodaje na zgodnje izvršitve opcij. Naslednji korak pa je bil preverjanje teoretičnega modela iz prejšnjega razdelka na vsako izvršeno opcijo, pri čemer so primerjali spodnjo izvršitveno mejo, ki jo porodi model, in najvišjo vrednost delnice na dan izvršitve te posamezne opcije. Zgodnja izvršitev opcije je racionalna, če je cena delnice presegla spodnjo izvršitveno mejo. Deleži racionalnih zgodnjih izvršitev so zajeti v tabeli 4, pri čemer so opcije tokrat po vrsticah razvrščene nekoliko drugače, saj so avtorji pripravili več analiz. Prvi sklop vrstic zajame vse zgodaj izvršene opcije skupaj, drugi sklop vrstic izvzame tiste izvršitve opcij, pri katerih je v času njihovega življenja prišlo do kakršnega koli korporativnega dogodka (npr. prevzem, združitev), tretji sklop vrstic pa zajame le tiste opcije, ki imajo do zapadlosti več kot devet mesecev. Vsak sklop se potem deli še glede na tip agenta in sicer ali je to stranka trgovalca ali trgovalec na lasten račun ali ustvarjalec trga.

Vsak stolpec tabele ustreza določenemu nizu predpostavk modela, pri čemer se od leve proti desni povečuje konservativnost predpostavk pri ocenjeni volatilnosti, stroških kratke prodaje in financiranja.

- V prvem stolpcu sta za vsako delnico ocenjeni volatilnost, ki temelji na 60-dnevni zgodovinski volatilnosti, in strošek kratke prodaje kot mediana stroškov kratke prodaje ustrezne delnice ali skupine sorodnih delnic iz baze DCBS.

- Drugi stolpec uporabi nižjo oceno volatilnosti kot prvi, in sicer manjšo od vrednost trenutne 60-dnevne volatilnosti in njene mediane iz vzorca iz baze podatkov OptionMetrics (med leti 2001 in 2012).

- Tretji stolpec uporabi nižjo oceno volatilnosti in hkrati še višjo oceno stroškov kratke prodaje, pri čemer namesto mediane opazovanih stroškov uporabi 90. percentil stroškov kratke prodaje v vsaki skupini.

- Zadnji stolpec pa uporabi mejo izvršitve, ki znaša 90 % ocenjene meje izvršitve prejšnjega stolpca.

Pri vseh primerih predpostavk modela je moč opaziti, da se večina izvršitev zgodi, ko je vrednost cene delnice nad spodnjo izvršitveno mejo, ki jo določa opisani model. Največji delež izvršitev se zgodi pri ustvarjalcih trga, saj se ta vrsta agentov sooča z najmanjšimi finančnimi trenji, prav tako pa so prav oni najbolj aktivni udeleženci na trgu. Vidimo pa tudi, da se delež izvršitev, ki so skladne z modelom, povečuje od levega stolpca proti desnemu oziroma z bolj ostrimi in konservativnimi predpostavkami. Na primer, model lahko pojasni kar 98 % izvršitev ustvarjalcev trga, kar je ogromno glede na vsa preostala trenja. Če na kratko analiziramo številke med prvim in drugim sklopom, lahko opazimo, da so pri drugem povsod višje, kar kaže, da izvzem korporativnih dogodkov odstrani mnogo zgodnjih izvršitev, ki jih model ne pojasni. Prav tako so glede na prvi sklop tudi v tretjem številke pri vseh predpostavkah večje, največji delež zopet pripada ustvarjalcem trga. Če povzamemo, se skupno gledano v vsakem sklopu odločitve o zgodnjih izvršitvah v vzorcu zgodijo v več kot 60 %, ko je cena delnice nad iz modela dobljeno izvršitveno mejo. Ustvarjalci trga se najbolj skladajo z modelom, ki so ga postavili avtorji, saj se njihove odločitve ujemajo z modelom v več kot 80 % primerov. Nasprotno, stranke trgovalcev sprejmejo največ odločitev, ki jih ni možno pojasniti z modelom, saj se soočajo z največjimi finančnimi trenji.

Tabela 4. Zgodnje izvršitve opcij na delnice glede na spodnjo izvršitveno mejo, ki jo implicira teoretični model. Tabela prikazuje delež odločitev opazovanih zgodnjih izvršitev, ki jih je moč razložiti z modelom, in sicer v treh različnih sklopih. Sklopi zajemajo zgodnje izvršitve na celotnem vzorcu, na vzorcu, ki izvzema korporativne dogodke in na vzorcu, kjer imajo opcije več kot devet mesecev do zapadlosti. Vrednosti v tabeli so podane v %. (Vir: [4, str. 294])

	S>$\underline{B}$, (1)	S>$\underline{B}$, (2)	S>$\underline{B}$, (3)	S>$\underline{B}$, (4)
Celoten vzorec	65,8	75,1	79,4	84,2
Glede na tip agenta				
Stranka trgovalca	41,3	51,3	58,2	66,8
Trgovalec zase	64,2	76,6	79,7	84,2
Ustvarjalci trga	86,0	94,4	96,7	98,4
Izvzeti korporativni dogodki	69,4	77,3	81,8	86,4
Glede na tip agenta				
Stranka trgovalca	45,0	54,0	61,3	70,0
Trgovalec zase	70,4	80,6	83,9	87,8
Ustvarjalci trga	88,1	94,9	97,3	98,9
Več kot 9 mesecev do zapadlosti	82,9	88,4	89,8	90,1
Glede na tip agenta				
Stranka trgovalca	53,0	65,3	69,2	70,3
Trgovalec zase	72,9	90,7	91,1	91,3
Ustvarjalci trga	98,3	99,5	99,7	99,7

Ugotovimo tudi, da obstajajo še alternativni razlogi za zgodnje izvršitve, kot na primer korporativni dogodki ali pa zgolj gola neracionalnost agentov.

6. Sklep

Na začetku dela diplomskega seminarja smo dokazali posledico 2.3, ki pravi, da se v teoriji na popolnem finančnem trgu ameriške nakupne opcije na delnico, ki ne izplačuje dividend, ne splača izvršiti pred datumom zapadlosti. Raziskovalno vprašanje, ki je osnova tega dela, se nanaša na izvršitve ameriških opcij na realnih trgih. Na tem mestu lahko torej sklenemo, da teorije o predčasnih izvršitvah ne moremo aplicirati na realne trge. V praksi obstajajo različna finančna trenja in drugi alternativni razlogi za predčasne izvršitve, prav tako je možna tudi neracionalnost agentov. Vse to teorija zanemari in je zato na realnem trgu dogajanje povsem drugačno. Predčasne izvršitve ameriških nakupnih opcij na realnih trgih so torej lahko povsem mogoče in dobro utemeljene.

Slovar strokovnih izrazov

ask price cena povpraševanja
at the money (opcija) je na meji
bid price ponudbena cena
deep in the money (opcija) se močno splača
delta hedging zaščitna strategija

early exercise zgodnja izvršitev
exercising the option izvršitev opcije
expiration date zapadlost
hedge ratio količnik varovanja pred tveganjem
in the money (opcija) se splača
intrinsic value notranja vrednost
lower exercise boundary spodnja izvršitvena meja
market makers ustvarjalci trga
option holder nosilec opcije
option writer izdajatelj opcije
out of the money (opcija) se ne splača
over-the-counter market prosti trg
proprietary traders borzni trgovalci na lasten račun
strike price izvršilna cena
the underlying asset osnovno premoženje
time value časovna vrednost

Literatura

[1] H. Ahn, P. Wilmott, *On Exercising American Options: The Risk of Making More Money than You Expected*, Wilmott magazine, 2003, 212–234.

[2] J. Chen, *Delta Hedging*, verzija 22. 5. 2019, [ogled 27. 5. 2019], dostopno na `https://www.investopedia.com/terms/d/deltahedging.asp`.

[3] J. C. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2009.

[4] M. V. Jensen, L. H. Pedersen, *Early option exercise: Never say never*, Journal of Financial Economics, 2016, 278–299.

[5] T. Košir, *Finančna matematika 1 – zapiski predavanj*, verzija 2018, dostopno na spletni učilnici FMF.

[6] T. Košir, K. Pugelj in A. Toman, *Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike*, DMFA, 2016, [ogled 22. 3. 2019], dostopno na `http://www.dmfa.si/Tekmovanja/Gradiva/FMS_gradivo_2016.pdf`.

[7] S. M. Ross, *An Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics*, Cambridge University Press, New York, 2003.