UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Uroš Rac

Robna Schwarzova lema

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2019

Kazalo

Robna Schwarzova lema

POVZETEK

V diplomskem delu bomo povedali nekaj o obnašanju holomorfnih preslikav, definiranih na zaprtem enotskem disku. Posebno pozornost bomo posvetili vrednostim odvodov holomorfnih preslikav v robnih negibnih točkah oz. točkah, ki ležijo na robu enotskega diska. Za ocenjevanje njihovih vrednosti se bomo sklicevali na posplošitve Schwarzove leme, kot je Juliajeva neenakost. V kolikor uvedemo dodatne predpostavke, lahko še bolj natančno ocenimo vrednosti odvodov v robnih negibnih točkah holomorfnih preslikav, kar nam lepo ponazorita robni princip maksima za holomorfne preslikave in Wolffova trditev.

Boundary Schwarz lemma

ABSTRACT

In this thesis, we will say something about the behavior of holomorphic mappings defined on the closed unit disk. We will dedicate special attention to the values of the derivatives of holomorphic mappings at the boundary fixed points that lie on the boundary of the unit disk. For estimating their values we will refer to the generalization of the Schwarz Lemma, such as Julia's inequality. In so far as we introduce additional assumptions we can even more accurately estimate the values of the derivatives at fixed boundary points of holomorphic mappings, which is well illustrated by the Anti-calculus proposition for holomorphic mappings and Wolff's proposition.

Math. Subj. Class. (2010): 30A10, 30C80, 30E25, 30J99

Ključne besede: holomorfne preslikave, Schwarzova lema, Liouvillov izrek, Schwarz-Pickova lema, robni princip maksima za holomorfne preslikave, Juliajeva neenakost, Wolffova trditev

Keywords: holomorphic mappings, Schwarz lemma, Liouville's theorem, Schwarz-Pick lemma, Anti-calculus proposition, Julia's inequality, Wolff's proposition

Zahvala. Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Miranu Černetu in vodji diplomskega seminarja izred. prof. dr. Sašu Strletu za pomoč pri pisanju diplomskega dela. Zahvaljujem se tudi vsem ostalim, ki so mi pomagali in me podpirali v toku študija. Brez vas mi ne bi uspelo.

1. Uvod

V tem diplomskem delu si bomo podrobneje pogledali nekatere rezultate, ki sledijo iz Schwarzove leme in nekaterih njenih posplošitev. Zanimalo nas bo predvsem obnašanje holomorfnih preslikav blizu robnih točk njihovega definicijskega območja D, kar bo neprazna odprta povezana množica [5, definicija 57]. Od tod tudi izhaja naslov tega diplomskega dela *Robna Schwarzova lema*.

Za opazovano območje bomo vzeli kompleksno ravnino oz. množico vseh kompleksnih števil, ki jo označimo s $\mathbb{C}$, in odprte povezane podmnožice le te. Posebej zanimiv bo odprt enotski disk, ki ga označimo z $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. To so vsa kompleksna števila, ki so na razdalji manjši od ena od koordinatnega izhodišča. Vemo, da je množica vseh holomorfnih avtomorfizmov enotskega diska enaka $\mathrm{Aut}(\Delta) = \{z \mapsto e^{i\vartheta}\frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z};\ \vartheta \in \mathbb{R},\ \zeta \in \Delta\}$ [1, izrek 13.15]. To so preslikave, ki so holomorfne na odprtem enotskem disku in odprt enotski disk bijektivno preslikajo na odprt enotski disk. Prav tako lahko opazimo, da so holomorfne v okolici enotskega diska, saj edini pol te racionalne preslikave leži izven zaprtega enotskega diska. Zgornja polravnina je označena s $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, kar je množica vseh kompleksnih števil, ki imajo imaginarno komponento večjo od nič. Vemo, da so avtomorfizmi zgornje polravnine oblike $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, kjer velja $ad - bc > 0$ [1, izrek 13.17]. Velja, da je holomorfna preslikava z odvodom, ki nima ničel, konformna, torej ohranja kote v vsaki točki definicijskega območja. Vemo, da je vsaka konformna preslikava, ki slika zgornjo polravnino na enotski disk, oblike $\tau_{\zeta,\varphi}(z) = e^{i\varphi}\left(\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right)$, kjer je $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$ [1, izrek 13.16]. Bijektivne preslikave oblike $\zeta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, kjer je $ad - bc \neq 0$ za kompleksna števila a, b, c in d, imenujemo lomljene linearne preslikave [1, poglavje, 13.2 točka II], za katere je značilno, da množico premic in krožnic slikajo v premice in krožnice [1, izrek 13.11]. Posebno pozornost bomo namenili robnim točkam definicijskega območja D. Točka območja D je robna, če vsaka njena še tako poljubno majhna odprta okolica seka D in njen komplement D^C. Rekli bomo, da je preslikava holomorfna v neki robni točki, če je definirana in holomorfna tudi v neki njeni odprti okolici.

Opomba 1.1. Denimo, da je območje $D \subsetneq \mathbb{C}$, če je $\alpha \in \partial D$ robna točka območja D in je preslikava f holomorfna na D in v robni točki α, potem je holomorfna tudi v neki odprti okolici robne točke α.

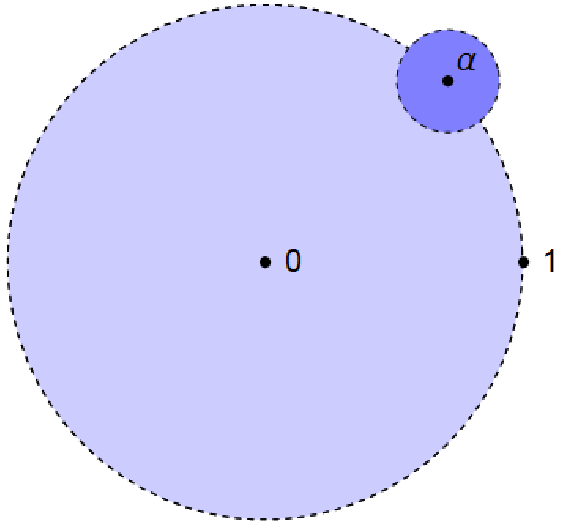
Za holomorfno preslikavo $f = u(x, y) + iv(x, y)$ velja Cauchy-Riemannov sistem enačb [5, izrek 43]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Prav tako veljata Wirtingerjeva odvoda

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Za vsako nekonstantno holomorfno preslikavo velja izrek o odprti preslikavi.



SLIKA 1. Holomorfnost v neki okolici robne točke $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Izrek 1.2 (*Izrek o nekonstantni holomorfni preslikavi kot odprti preslikavi* [1, izrek 7.1])**.** *Naj bo f nekonstantna holomorfna preslikava na območju D. Potem je slika vsake odprte množice s preslikavo f odprta množica.*

Opomba 1.3. Vredno je omeniti, da če holomorfna preslikava f, definirana na nekem območju D, notranjo točko slika na rob kodomene, potem je preslikava f po izreku o nekonstantni holomorfni preslikavi kot odprti preslikavi nujno konstantna.

2. SCHWARZOVA LEMA

2.1. **Dokaz Schwarzove leme.** Najprej omenimo, kaj nam pove Schwarzova lema. Pove nam, kako se obnašajo nekatere holomorfne preslikave, ki imajo negibno točko v izhodišču odprtega enotskega diska in le tega slikajo v zaprt enotski disk. Dopuščamo, da se kakšne notranje točke slikajo tudi v rob diska. Če se to zgodi, je holomorfna preslikava konstantna.

Izrek 2.1 (*Princip maksima* [1, izrek 6.13])**.** *Nekonstantna holomorfna preslikava na območju D ne doseže maksimuma po absolutni vrednosti v notranji točki območja D.*

Posledica 2.2. *Naj bo f holomorfna na območju D in naj bo K kompaktna podmnožica v D. Tedaj je* $\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|$.

Dokaz. Očitno velja $\max_K |f| \geq \max_{\partial K} |f|$, saj je kompakt zaprta podmnožica v D [6, izrek 2.26 točka (3)]. Dokazati moramo še, da je $\max_K |f| \leq \max_{\partial K} |f|$. Preslikava $z \mapsto |f(z)|$ je zvezna, torej $|f|$ zavzame maksimum na kompaktu K [6, posledica 2.32]. Naj bo $\zeta \in K$, da je $|f(\zeta)| = \max_K |f(z)|$. Imamo dve možnosti. Če je $\zeta \in \partial K$, smo zavzeli maksimum na robu. Če je $\zeta \in \mathrm{Int}(K)$, potem naj bo Ω povezana komponenta v $\mathring{K}$, ki vsebuje točko ζ. Po principu maksima je $|f|$ konstantna na Ω in zaradi zveznosti tudi na $\overline{\Omega}$ oz. na $\partial\Omega \subseteq \partial K$. $\square$

Lema 2.3 (*Schwarzova lema* [1, lema 7.2])**.** *Naj bo f holomorfna preslikava na* $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$*, za katero velja:*

i) $f(0) = 0$,

ii) $f : \Delta \to \overline{\Delta}$.
Potem je $|f'(0)| \leq 1$ *in* $|f(z)| \leq |z|$ *za vsak* $z \in \Delta$.
V posebnem primeru velja: če je ali $|f'(0)| = 1$ *ali* $|f(z)| = |z|$ *za neki* $z \in \Delta\backslash\{0\}$, *potem je* f *rotacija oblike* $f(z) = \alpha z$ *za neki* $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

Dokaz. Zapišemo $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ in opazimo, da ima preslikava g izolirano singularnost v točki nič. Izračunamo limito preslikave g v točki nič in dobimo

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0).$$

Upoštevali smo, da je nič negibna točka preslikave f. Torej ima preslikava g odpravljivo singularnost v točki nič. Zato lahko zapišemo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & ; z \neq 0 \\ f'(0) & ; z = 0. \end{cases}$$

Kar pa pomeni, da je g holomorfna na odprtem enotskem disku. Vzemimo sedaj neki $r \in (0, 1)$ in opazujmo $g : \overline{\Delta(0, r)} \to \mathbb{C}$. Po posledici principa maksima 2.2 sledi

$$\max_{\overline{\Delta(0,r)}} |g| = \max_{|z|=r} |g| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

Sledi, da za vsak $z \in \Delta$ velja $|g(z)| \leq 1$. Ločimo dva primera.

Za $z \neq 0$

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1 \text{ in sledi } |f(z)| \leq |z|.$$

Za $z = 0$

$$|g(0)| = |f'(0)| \leq 1.$$

Če je v prvem primeru dosežena enakost za neki $z_0 \in \Delta\backslash\{0\}$ ali, če dosežemo enakost v drugem primeru, potem preslikava $|g|$ doseže maksimum v notranji točki odprtega enotskega diska. Po principu maksima sledi, da je g konstantna preslikava in velja $g(z) = \alpha$ za neki $|\alpha| = 1$. Sledi $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, torej je $f(z) = \alpha z$. □

2.2. **Dokazovanje Liouvillovega izreka s pomočjo Schwarzove leme.** Iz kompleksne analize je znan Liouvillov izrek [1, izrek 5.10], ki pravi, da v kolikor je preslikava cela (holomorfna na celotni kompleksni ravnini) in omejena, sledi, da je konstantna. Klasični dokaz Liouvillovega izreka poteka s pomočjo Cauchyjevih ocen. Zanimivo je dejstvo, da se ga da dokazati tudi s pomočjo Schwarzove leme.

Izrek 2.4 (*Liouvillov izrek*)**.** *Naj bo* f *holomorfna in omejena preslikava na* $\mathbb{C}$. *Potem je* f *konstantna.*

Dokaz. Pomagali si bomo s Schwarzovo lemo 2.3. Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna in omejena na kompleksni ravnini. Če je f identično enaka nič, izrek velja. Denimo sedaj, da f ni identično enaka nič in definirajmo

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{\sup\limits_{w\in\mathbb{C}} |f(w)| + |f(0)|}, \text{ za vsak } z \in \mathbb{C}.$$

Za $R > 0$ definirajmo $g_R(z) = g(Rz)$. Opazimo, da preslikava g_R slika odprt enotski disk v zaprt enotski disk, saj velja

$$|g_R(z)| = \frac{|f(Rz) - f(0)|}{\sup\limits_{w\in\mathbb{C}} |f(w)| + |f(0)|} \leq \frac{|f(Rz)| + |f(0)|}{\sup\limits_{w\in\mathbb{C}} |f(w)| + |f(0)|} \leq 1.$$

Uporabili smo trikotniško neenakost in upoštevali, da je vrednost v imenovalcu pozitivna. Prav tako opazimo, da bo absolutna vrednost v števcu vedno manjša ali enaka vrednosti v imenovalcu za vsak z iz kompleksne ravnine.

Izračunamo vrednost preslikave g_R v točki nič

$$g_R(0) = \frac{f(R \cdot 0) - f(0)}{\sup\limits_{w \in \mathbb{C}} |f(w)| + |f(0)|} = 0.$$

Opazimo, da je nič negibna točka preslikave g_R. Torej za preslikavo $g_R(z)$ lahko uporabimo Schwarzovo lemo in dobimo $|g_R(z)| \leq |z|$ za vsak z iz odprtega enotskega diska. Vpeljimo $w = Rz$. Potem velja $|w| < R$ in $|g(w)| \leq \frac{|w|}{R}$. Ko pošljemo R preko vsake meje, bo šla desna stran enačbe proti nič. To pa pomeni, da je $g(w) = 0$ za vsak w iz kompleksne ravnine. Od tod sledi, da je f konstantna preslikava. $\square$

3. Zamenjava negibne točke

3.1. Zamenjava notranje točke enotskega diska. Schwarzovo lemo lahko uporabimo tudi, kadar ima holomorfna preslikava $f : \Delta \to \overline{\Delta}$ negibno točko, ki ni enaka koordinatnemu izhodišču. Kaj pa, če ima preslikava f dve negibni točki v odprtem enotskem disku? Ali lahko v tem primeru še vedno uporabimo Schwarzovo lemo?

Trditev 3.1. *Za $\zeta \in \Delta$ definirajmo preslikavo*

$$\varphi_\zeta(z) = \frac{\zeta - z}{1 - \overline{\zeta} z}.$$

Ta preslikava je holomorfen avtomorfizem enotskega diska oz. je holomorfna preslikava, ki disk bijektivno preslika vase. Za preslikavo φ_ζ veljajo naslednje izjave:

i) φ_ζ je holomorfna na $\overline{\Delta}$ in njena slika je vsebovana v $\overline{\Delta}$.
ii) φ_ζ je bijektivna preslikava in njen inverz je φ_ζ.
iii) φ_ζ preslika točko nič v točko ζ in točko ζ preslika v točko nič.
iv) Velja: $\varphi_\zeta : \Delta \to \Delta$ in $\varphi_\zeta : \partial\Delta \to \partial\Delta$.
v) Odvod preslikave φ_ζ v točki $z \in \Delta$ je enak $\varphi'_\zeta(z) = \frac{|\zeta|^2 - 1}{(1-\overline{\zeta} z)^2}$.

Dokaz. Da je preslikava holomorfna povsod, kjer je definirana, je očitno, saj je racionalna preslikava v z. Vse, kar je potrebno videti, je, da je definirana na zaprtem disku. Edini pol je v točki $\frac{1}{\overline{\zeta}}$, ki pa leži zunaj diska, saj je ζ v notranjosti diska.

Za preslikavo φ_ζ velja $\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta = \mathrm{id}$, kar lahko izračunamo

$$(\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta)(z) = \varphi_\zeta\left(\frac{\zeta - z}{1 - \overline{\zeta} z}\right) = \frac{\zeta - \left(\frac{\zeta - z}{1 - \overline{\zeta} z}\right)}{1 - \overline{\zeta}\left(\frac{\zeta - z}{1 - \overline{\zeta} z}\right)} = \frac{\frac{\zeta(1-\overline{\zeta}z)-(\zeta - z)}{1-\overline{\zeta}z}}{\frac{1-\overline{\zeta}z-\overline{\zeta}(\zeta-z)}{1-\overline{\zeta}z}}$$

$$= \frac{(\zeta - \zeta\overline{\zeta}z - \zeta + z)}{(1 - \overline{\zeta}z - \overline{\zeta}\zeta + \overline{\zeta}z)} = \frac{z(1 - \zeta\overline{\zeta})}{(1 - \overline{\zeta}\zeta)} = z.$$

Izraz evalviramo tako, da dvakrat uporabimo preslikavo φ_ζ in vse skupaj poenostavimo. Dobili smo, da je preslikava φ_ζ bijektivna in da je njen inverz enak φ_ζ.

Preslikava φ_ζ slika točko nič v točko ζ

$$\varphi_\zeta(0) = \frac{\zeta - 0}{1 - \overline{\zeta} \cdot 0} = \frac{\zeta}{1} = \zeta.$$

Preslikava φ_ζ slika točko ζ v točko nič

$$\varphi_\zeta(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta}{1 - \bar{\zeta}\zeta} = \frac{0}{1 - |\zeta|^2} = 0.$$

Vemo, da je ζ je notranja točka enotskega diska, zato je $1 - |\zeta|^2 \neq 0$.

Za dokaz naslednje točke trditve dokažimo enakost

$$\left|\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}\right|^2 = 1 - \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2)}{\left|1 - \bar{\zeta}z\right|^2}. \tag{3}$$

Najprej izračunajmo levo stran enakosti

$$\left|\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}\right|^2 = \frac{(\zeta - z)(\overline{\zeta - z})}{(1 - \bar{\zeta}z)(\overline{1 - \bar{\zeta}z})} = \frac{\zeta\bar{\zeta} - \zeta\bar{z} - z\bar{\zeta} + z\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z} - \bar{\zeta}z + \bar{\zeta}z\zeta\bar{z}} = \frac{|\zeta|^2 - \zeta\bar{z} - z\bar{\zeta} + |z|^2}{1 - \zeta\bar{z} - \bar{\zeta}z + |\zeta|^2 |z|^2}.$$

Upoštevamo definicijo absolutne vrednosti in poenostavimo števec ter imenovalec. Tako dobimo

$$= 1 - \frac{1 - |z|^2 - |\zeta|^2 + |\zeta z|^2}{1 - \zeta\bar{z} - \bar{\zeta}z + |\zeta z|^2} = 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{(1 - \bar{\zeta}z)(\overline{1 - \bar{\zeta}z})} = 1 - \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2)}{\left|1 - \bar{\zeta}z\right|^2}.$$

Sedaj obravnavajmo primera, ko je z iz diska ali na njegovem robu.

Za z iz diska opazimo $(1 - |\zeta|^2) \in (0, 1)$ in $(1 - |z|^2) \in (0, 1)$. Torej je $(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2) \in (0, 1)$ in $\left|1 - \bar{\zeta}z\right|^2 > 0$. Iz česar sledi $\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{\left|1-\bar{\zeta}z\right|^2} > 0$, in zato velja $\varphi_\zeta : \Delta \to \Delta$.

Za z iz roba diska opazimo $(1 - |\zeta|^2) \in (0, 1)$ in $(1 - |z|^2) = 0$. Torej je $(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2) = 0$ in $\left|1 - \bar{\zeta}z\right|^2 > 0$. Iz česar sledi $\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{\left|1-\bar{\zeta}z\right|^2} = 0$, kar pa pomeni, da je $\left|\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}\right|^2 = 1$ in $\varphi_\zeta : \partial\Delta \to \partial\Delta$.

Izračunajmo odvod preslikave φ_ζ

$$\varphi'_\zeta(z) = \frac{(-1)(1 - \bar{\zeta}z) - (\zeta - z)(-\bar{\zeta})}{(1 - \bar{\zeta}z)^2} = \frac{-1 + \bar{\zeta}z + \zeta\bar{\zeta} - z\bar{\zeta}}{(1 - \bar{\zeta}z)^2} = \frac{|\zeta|^2 - 1}{(1 - \bar{\zeta}z)^2}. \qquad \square$$

Iz dokaza trditve 3.1 točke ii) opazimo, da za preslikavo φ_ζ velja

$$\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta = \mathrm{id}. \tag{4}$$

To lahko dokažemo tudi s pomočjo Schwarzove leme.

Dokaz enačbe (4). Pomagali si bomo s Schwarzovo lemo. Po prejšnji trditvi 3.1 točke iv) sledi

$$\varphi_\zeta : \Delta \to \Delta, \text{ prav tako sledi, da je } \varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta : \Delta \to \Delta.$$

Iz trditve 3.1 točke iii) lahko sklepamo, da sta nič in ζ negibni točki preslikave $\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta$. Iz posebnega primera Schwarzove leme sledi

$$(\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta)(z) = \alpha z \text{ za neki } \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1.$$

Sedaj vstavimo točko ζ v enakost

$$\zeta = (\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta)(\zeta) = \alpha\zeta.$$

Dobimo, da je $\alpha = 1$, kar pomeni, da je $\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta$ res identiteta. $\square$

Zadnji dokaz nakazuje naslednjo trditev.

Trditev 3.2. *Naj bo $f : \Delta \to \Delta$ holomorfna preslikava, ki ima dve različni notranji negibni točki $\zeta, \eta \in \Delta$. Potem je f identiteta.*

Dokaz. Definirajmo
$$g(z) = (\varphi_\zeta \circ f \circ \varphi_\zeta)(z).$$
Zaradi trditve 3.1 točke iii) ima ta preslikava negibno točko nič in iz iste trditve točke iv) zanjo velja $g : \Delta \to \Delta$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da za neki $\nu \in \Delta \backslash \{0\}$ velja $\varphi_\zeta(\eta) = \nu$, kar je po enačbi (4) ekvivalentno $\varphi_\zeta(\nu) = \eta$. Izračunamo sedaj vrednost preslikave g v točki ν
$$g(\nu) = (\varphi_\zeta \circ f \circ \varphi_\zeta)(\nu) = \varphi_\zeta(f(\eta)) = \varphi_\zeta(\eta) = \nu.$$

Upoštevali smo, da je η negibna točka preslikave f in opazimo, da je ν negibna točka preslikave g. Iz posebnega primera Schwarzove leme sledi $g(z) = \alpha z$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$. Glede na to, da je ν negibna točka preslikave g, velja
$$\nu = g(\nu) = \alpha\nu$$
in odtod, da je $\alpha = 1$. Torej je g identiteta in po enačbi (4) sledi, da je
$$f(z) = (\varphi_\zeta \circ g \circ \varphi_\zeta)(z) = (\varphi_\zeta \circ \mathrm{id} \circ \varphi_\zeta)(z) = (\varphi_\zeta \circ \varphi_\zeta)(z) = \mathrm{id}.$$
Kar pomeni, da je tudi f identična preslikava. □

Pravkar smo dokazali, da je edina holomorfna preslikava, ki ima poljubni različni notranji negibni točki, nujno identiteta. S tem smo si pripravili osnovno orodje za analizo preslikav, ki nimajo negibne točke v koordinatnem izhodišču.

3.2. **Schwarz-Pickova lema.** Poglejmo si primer uporabe Schwarzove leme. Dokažimo naslednjo trditev.

Trditev 3.3 ([2, poglavje 3, enačbi (3) in (4)]). *Naj bo $f : \Delta \to \overline{\Delta}$ holomorfna preslikava, φ_ζ holomorfen avtomorfizem enotskega diska in $\zeta \in \Delta$. Potem veljata naslednji izjavi*

i) $|f'(\zeta)| \leq \frac{1-|f(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}$ *(posplošena Schwarzova lema).*

ii) $\left|\varphi_{f(\zeta)}(f(z))\right| \leq |\varphi_\zeta(z)|$, *za vsak $z \in \Delta$ (Schwarz-Pickova lema).*

Dokaz. Naj bo $\zeta \in \Delta$ poljubna točka in $f : \Delta \to \overline{\Delta}$ poljubna holomorfna preslikava. Brez težav lahko opazimo, da iz trditve 3.1 točke iv) sledi $\varphi_{f(\zeta)} \circ f \circ \varphi_\zeta : \Delta \to \overline{\Delta}$ ter da ima preslikava po isti trditvi točke iii) negibno točko nič. To pomeni, da lahko uporabimo Schwarzovo lemo in dobimo neenakosti
$$\left|(\varphi_{f(\zeta)} \circ f \circ \varphi_\zeta)'(0)\right| \leq 1 \qquad \text{in} \qquad \left|(\varphi_{f(\zeta)} \circ f \circ \varphi_\zeta)(z)\right| \leq |z|\,, \text{ za vsak } z \in \Delta.$$

Izraz iz prve neenakosti, upoštevajoč pravilo za odvajanje kompozituma, nam da
$$\left|(\varphi_{f(\zeta)} \circ f \circ \varphi_\zeta)'(0)\right| = \left|\varphi'_{f(\zeta)}(f(\varphi_\zeta(0)))f'(\varphi_\zeta(0))\varphi'_\zeta(0)\right| = \left|\varphi'_{f(\zeta)}(f(\zeta))f'(\zeta)\varphi'_\zeta(0)\right|.$$
Upoštevamo še izraz za odvod preslikave φ_ζ iz trditve 3.1 točke v) in dobimo
$$= \left|\left(-\frac{1}{1-|f(\zeta)|^2}\right) f'(\zeta)\left(|\zeta|^2 - 1\right)\right| = \left|f'(\zeta)\frac{1-|\zeta|^2}{1-|f(\zeta)|^2}\right|.$$

Upoštevamo prvo neenakost, ki smo jo dobili iz Schwarzove leme, in imamo

$$|f'(\zeta)| \leq \frac{1-|f(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}. \tag{5}$$

Točki ζ in $f(\zeta)$ ležita v notranjosti enotskega diska, zato je vrednost ulomka pozitivna in dobimo posplošeno Schwarzovo lemo.

Poglejmo še, kaj nam da druga neenakost. Naj bo w iz odprtega enotskega diska, potem imamo

$$\left|(\varphi_{f(\zeta)} \circ f \circ \varphi_\zeta)(w)\right| \le |w|\,,$$

od koder, upoštevamo enačbo (4), dobimo

$$\left|(\varphi_{f(\zeta)} \circ f)(\varphi_\zeta(w))\right| \le |(\varphi_\zeta(\varphi_\zeta(w))|\,.$$

Po trditvi 3.1 točke iv) upoštevamo, da je $\varphi_\zeta : \Delta \to \Delta$ in pišemo $z = \varphi_\zeta(w)$, tako imamo

$$\left|\varphi_{f(\zeta)}(f(z))\right| \le |\varphi_\zeta(z)|\,, \text{ za vsak } z \in \Delta. \tag{6}$$

To se imenuje Schwarz-Pickova lema. □

Če upoštevamo definicijo preslikave φ_ζ, lahko iz trditve 3.3 točke ii) izrazimo

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{1 - \overline{f(\zeta)} f(z)}\right| \le \left|\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z}\right|, \text{ za vsak } z \in \Delta. \tag{7}$$

4. Negibne točke na robu enotskega diska

4.1. **Riemannov upodobitveni izrek.** Pri kompleksni analizi lahko Schwarzovo lemo uporabimo tudi, ko se ukvarjamo s poljubnim enostavnim povezanim območjem v kompleksni ravnini, ki ni enako $\mathbb{C}$. Območje $D \subseteq \mathbb{C}$ je enostavno povezano, če lahko vsako sklenjeno krivuljo v D zvezno deformiramo znotraj D v neko točko območja D [5, definicija 55]. Naj bo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ interval in $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Preslikavo $\gamma(t)$ imenujemo pot v kompleksni ravnini, kjer parameter t preteče interval $[a, b]$ in ima lastnosti gladkega loka [5, definicija 37]. Pot je sklenjena, če velja $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Izrek 4.1 (*Riemannov upodobitveni izrek* [1, poglavje 14.2])**.** *Vsako enostavno povezano odprto območje $D \subsetneq \mathbb{C}$ je biholomorfno ekvivalentno Δ. Oziroma za vsako enostavno povezano odprto območje D, ki ni cela kompleksna ravnina, obstaja biholomorfna preslikava $f : D \to \Delta$.*

Trditev 4.2. *Naj veljajo predpostavke Riemannovega upodobitvenega izreka in naj bo $\alpha \in D$. Potem obstaja natanko en biholomorfizem $f : D \to \Delta$, da velja $f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) > 0$.*

Dokaz. Obstoj biholomorfizma sledi iz Riemannovega upodobitvenega izreka. Dokažimo še enoličnost. Denimo, da obstajata dva biholomorfizma, za katera velja $f : D \to \Delta$, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) > 0$ in $g : D \to \Delta$, $g(\alpha) = 0$, $g'(\alpha) > 0$.

Potem je $h = g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$, saj velja

$$h(0) = \left(g \circ f^{-1}\right)(0) = g(\alpha) = 0$$

in je vrednost preslikave h v točki nič enaka nič. Izračunajmo odvod preslikave h v točki nič, kjer upoštevamo pravilo za odvod inverzne preslikave

$$h'(0) = \left(g \circ f^{-1}\right)'(0) = g'\left(f^{-1}(0)\right) \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)} > 0$$

in dobimo, da je vrednost odvoda preslikave h v točki nič večja od nič.

Vemo, da je $h(z) = e^{i\vartheta} \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z}$, za neki $\vartheta \in [0, 2\pi)$ in neki $\zeta \in \Delta$. Izračunamo

$$0 = h(0) = e^{i\vartheta} \zeta,$$

odtod sledi $\zeta = 0$, kar pomeni, da je $h(z) = -e^{i\vartheta} z$. Ko preslikavo h odvajamo, v točki nič dobimo

$$0 < h'(0) = -e^{i\vartheta},$$

kar pa pomeni, da mora biti $e^{i\vartheta} = -1$ in sledi, da je $h(z) = z$. Posledično je h identiteta in velja

$$id = g \circ f^{-1},$$

kar nam da $f = g$. □

Torej, če imamo neko enostavno povezano odprto območje $D \subsetneq \mathbb{C}$, lahko območje D z ustreznimi biholomorfnimi preslikavami ekvivalentno prevedemo na odprt enotski disk, na katerem lahko uporabimo Schwarzovo lemo, v kolikor opazujemo situacijo, v kateri je vsaj ena notranja točka območja D negibna. Izberimo ustrezno biholomorfno preslikavo, za katero velja, da $\varphi : D \to \Delta$, potem lahko za neko holomorfno preslikavo $f : D \to D$ določimo preslikavo $g : \Delta \to \Delta$, ki je definirana kot $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Mi bomo za D vzeli zgornjo polravnino. Situacijo na odprtem enotskem disku bomo ekvivalentno reševali na zgornji polravnini, kjer eno robno točko enotskega diska slikamo v točko v neskončnosti.

4.2. **Robni princip maksima za holomorfne preslikave.** V nadaljevanju si poglejmo zanimiv rezultat kompleksne analize, pripisan matematiku Erdősu, ki pove, kako se obnašajo holomorfne preslikave, definirane na zaprtem enotskem disku, ki po absolutni vrednosti zavzamejo maksimum v robni točki.

Trditev 4.3 (*Robni princip maksima za holomorfne preslikave* [1, poglavje 6.15]). *Naj bo preslikava f holomorfna na zaprtem enotskem disku in naj f po absolutni vrednosti zavzame maksimum v robni točki α enotskega diska. Potem je $f'(\alpha) \neq 0$, razen če je f konstantna.*

Dokaz. Če je preslikava f konstantna, je njen odvod povsod trivialno enak nič. Denimo sedaj, da preslikava f ni konstantna in predpostavimo, da je $f'(\alpha) = 0$. Razvijmo preslikavo f v okolici točke α v Taylorjevo vrsto [4, definicija 102]

$$f(\alpha + \xi) = f(\alpha) + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\xi^k + O\left(\xi^{k+1}\right)$$

za vsak kompleksen ξ, ki je po absolutni vrednosti poljubno majhen, in $k \geq 2$ tako najmanjše naravno število, za katerega velja $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Če sedaj zgornji izraz pomnožimo z njegovo konjugirano vrednostjo, dobimo

$$|f(\alpha + \xi)|^2 = |f(\alpha)|^2 + \frac{2}{k!}\mathrm{Re}\left(\overline{f(\alpha)} f^{(k)}(\alpha)\xi^k\right) + O\left(\xi^{k+1}\right).$$

Upoštevali smo definicijo absolutne vrednosti in realne komponente kompleksnega števila. Prav tako smo upoštevali, da je $2k > k + 1$.

Preslikava f v točki α doseže maksimum na zaprtem enotskem disku, zato vrednost preslikave f v točki α ni enaka nič. Lahko zapišemo $\overline{f(\alpha)} f^{(k)}(\alpha) = Ce^{i\gamma}$ za neki $C > 0$ in $\gamma \in [0, 2\pi)$. Naj bo $e^{i\vartheta} = \frac{\xi}{|\xi|}$ za neki $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Tedaj sledi

$$|f(\alpha + \xi)|^2 = |f(\alpha)|^2 + \frac{2C}{k!}|\xi|^k \cos(k\vartheta + \gamma) + O\left(\xi^{k+1}\right).$$

Če nesemo $|f(\alpha)|^2$ na levo stran in izraz na levi poenostavimo, dobimo

$$(|f(\alpha + \xi)| + |f(\alpha)|)(|f(\alpha + \xi)| - |f(\alpha)|) = \frac{2C}{k!}|\xi|^k \cos(k\vartheta + \gamma) + O\left(\xi^{k+1}\right).$$

Sedaj delimo z $|\xi|^k$ in izraz poenostavimo, da dobimo

$$\frac{(|f(\alpha+\xi)|+|f(\alpha)|)(|f(\alpha+\xi)|-|f(\alpha)|)}{|\xi|^k}=\frac{2C}{k!}\cos(k\vartheta+\gamma)+\frac{O\left(\xi^{k+1}\right)}{|\xi|^{k+1}}|\xi|.$$

Za ξ z dovolj majhno absolutno vrednostjo bo veljalo, da ima $|f(\alpha+\xi)|-|f(\alpha)|$ enak predznak kot $\cos(k\vartheta+\gamma)$. Sledi, da za vsak ϑ iz enega od naslednjih intervalov

$$\left(\frac{-\pi+4\pi l-2\gamma}{2k},\frac{\pi+4\pi l-2\gamma}{2k}\right), \tag{8}$$

$l=0,1,\ldots,k-1$, obstaja tak $\varepsilon_\vartheta>0$, da za vsak $0<r<\varepsilon_\vartheta$ velja

$$|f(\alpha+re^{i\vartheta})|>|f(\alpha)|.$$

Ker je $f'(\alpha)=0$, sledi, da je $k\geq 2$. Torej bo vsaj eden izmed intervalov (8) gotovo sekal zaprt enotski disk, saj bosta v najslabšem primeru, ko je $k=2$, obstajala dva taka nasprotno ležeča loka s sovršnima kotoma, da bo ena od premic skozi krajišči nasprotno ležečih lokov tangentna na zaprt enotski disk. To pa pomeni, da vsaj eden izmed lokov seka zaprt enotski disk in zato preslikava f ne doseže maksimuma po absolutni vrednosti na zaprtem enotskem disku v robni točki α. Prišli smo do protislovja, zato je $f'(\alpha)\neq 0$. □

4.3. **Juliajeva neenakost.** V tem poglavju bomo dokazali pomemben izrek kompleksne analize – Juliajevo neenakost in si ogledali nekaj njenih posledic. Preden se lotimo dokazovanja, si pripravimo nekaj definicij in orodij za dokazovanje neenakosti.

Definicija 4.4. Naj bo $a\in\mathbb{C}$ in $r>0$ pozitivno realno število. Potem je množica $K(a,r)=\{z\in\Delta;\ |z-a|=r\}$ krožnica s središčem v točki a in polmerom r in $D(a,r)=\{z\in\Delta;\ |z-a|<r\}$ disk s središčem v točki a in polmerom r.

Trditev 4.5. *Vzemimo biholomorfno preslikavo iz zgornje polravnine*

$$\tau_{\zeta,\varphi}(z)=e^{i\varphi}\left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right),$$

kjer velja $\varphi\in[0,2\pi)$ in $\operatorname{Im}(\zeta)>0$. Potem veljajo naslednje izjave:

i) $\tau_{\zeta,\varphi}$ *je holomorfna za vsak* $z\in\overline{\mathbb{H}}$.

ii) $\tau_{\zeta,\varphi}$ *je bijektivna preslikava iz zgornje polravnine v enotski disk in njen inverz je enak* $\tau^{-1}_{\zeta,\varphi}(w)=\frac{w\overline{\zeta}-e^{i\varphi}\zeta}{w-e^{i\varphi}}$.

iii) $\tau_{\zeta,\varphi}$ *točko* ζ *preslika v točko nič.*

iv) Velja $\tau_{\zeta,\varphi}:\mathbb{H}\to\Delta$ *in* $\tau_{\zeta,\varphi}:\partial\mathbb{H}\to\partial\Delta$.

v) Velja $\tau^{-1}_{\zeta,\varphi}:\Delta\to\mathbb{H}$ *in* $\tau^{-1}_{\zeta,\varphi}:\partial\Delta\to\partial\mathbb{H}$.

vi) Odvod preslikave $\tau_{\zeta,\varphi}$ *v točki* z *iz zgornje polravnine je enak*

$$\tau'_{\zeta,\varphi}(z)=e^{i\varphi}\left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{(z-\overline{\zeta})^2}\right).$$

vii) Preslikava $\tau_{\zeta,\varphi}$ *slika poljubno krožnico iz zgornje polravnine v neko krožnico iz odprtega enotskega diska in poljuben disk iz zgornje polravnine v neki disk iz odprtega enotskega diska. Enako velja za inverz* $\tau^{-1}_{\zeta,\varphi}$.

Dokaz. Preslikava $\tau_{\zeta,\varphi}$ je holomorfna na zgornji polravnini, saj je holomorfna preslikava iz zgornje polravnine. Prav tako je $\tau_{\zeta,\varphi}$ holomorfna na robu zgornje polravnine oz. realni osi, saj je produkt rotacije in racionalne preslikave, ki ima pol v spodnji polravnini.

Označimo $w = \tau_{\zeta,\varphi}(z)$ in izračunajmo inverz
$$w = e^{i\varphi}\left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right) \Leftrightarrow w(z-\overline{\zeta}) = e^{i\varphi}(z-\zeta) \Leftrightarrow wz - w\overline{\zeta} = e^{i\varphi}z - e^{i\varphi}\zeta.$$
Zapišemo enačbo in poenostavimo, da dobimo
$$wz - e^{i\varphi}z = w\overline{\zeta} - e^{i\varphi}\zeta \Leftrightarrow z(w-e^{i\varphi}) = w\overline{\zeta} - e^{i\varphi}\zeta \Leftrightarrow z = \frac{w\overline{\zeta} - e^{i\varphi}\zeta}{w - e^{i\varphi}}.$$
Ko izrazimo spremenljivko z, dobimo enačbo inverza.

Preslikava $\tau_{\zeta,\varphi}$ slika točko ζ v točko nič
$$\tau_{\zeta,\varphi}(\zeta) = e^{i\varphi}\left(\frac{\zeta-\zeta}{\zeta-\overline{\zeta}}\right) = e^{i\varphi}\left(\frac{0}{\zeta-\overline{\zeta}}\right) = 0,$$
saj velja $\zeta - \overline{\zeta} \neq 0$, ker je $\overline{\zeta}$ iz spodnje polravnine.

Za dokaz naslednje točke dokažimo enakost
$$\left|e^{i\varphi}\left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right)\right|^2 = 1 - \frac{4\mathrm{Im}(\zeta)\mathrm{Im}(z)}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^2}. \tag{9}$$

Začnemo z leve strani
$$\left|e^{i\varphi}\left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right)\right|^2 = \left|e^{i\varphi}\right|^2\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|^2 = \frac{(z-\zeta)(\overline{z}-\overline{\zeta})}{(z-\overline{\zeta})(\overline{z}-\zeta)} = \frac{|z|^2 - z\overline{\zeta} - \zeta\overline{z} + |\zeta|^2}{|z|^2 - z\zeta - \overline{\zeta}\overline{z} + |\zeta|^2},$$
najprej v enačbi razpišemo števec in imenovalec tako, da uporabimo definicijo absolutne vrednosti kompleksnega števila
$$= 1 - \frac{z\overline{\zeta} - z\zeta + \zeta\overline{z} - \overline{\zeta}\overline{z}}{(z-\overline{\zeta})(\overline{z}-\zeta)} = 1 - \frac{4(\zeta-\overline{\zeta})(z-\overline{z})}{4i^2\left|z-\overline{\zeta}\right|^2} = 1 - \frac{4\mathrm{Im}(\zeta)\mathrm{Im}(z)}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^2}.$$
Imenovalec preoblikujemo in upoštevamo definicijo imaginarne komponente kompleksnega števila.

Za z iz zgornje polravnine opazimo, da je $\mathrm{Im}(z) > 0$ in $\left|z-\overline{\zeta}\right|^2 > 0$, saj je z iz zgornje in $\overline{\zeta}$ iz spodnje polravnine, torej je $\frac{4\mathrm{Im}(\zeta)\mathrm{Im}(z)}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^2} > 0$. Iz česar sledi $\tau_{\zeta,\varphi} : \mathbb{H} \to \Delta$.

Za z iz roba zgornje polravnine opazimo, da je $\mathrm{Im}(z) = 0$ in $\left|z-\overline{\zeta}\right|^2 > 0$, saj je z na robu in $\overline{\zeta}$ iz spodnje polravnine, torej je $\frac{4\mathrm{Im}(\zeta)\mathrm{Im}(z)}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^2} = 0$. Iz česar sledi $\tau_{\zeta,\varphi} : \partial\mathbb{H} \to \partial\Delta$.

Iz točk ii) in iv) te trditve sledi, da $\tau_{\zeta,\varphi}^{-1} : \Delta \to \mathbb{H}$ in $\tau_{\zeta,\varphi}^{-1} : \partial\Delta \to \partial\mathbb{H}$.

Izračunajmo odvod preslikave $\tau_{\zeta,\varphi}$
$$\tau_{\zeta,\varphi}(z) = \left(e^{i\varphi}\left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right)\right)' = (e^{i\varphi})'\left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right) + e^{i\varphi}\left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right)',$$
kjer upoštevamo pravilo za odvod produkta in dobimo
$$= 0 \cdot \left(\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right) + e^{i\varphi}\left(\frac{1\cdot(z-\overline{\zeta}) - (z-\zeta)\cdot 1}{(z-\overline{\zeta})^2}\right) = e^{i\varphi}\left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{(z-\overline{\zeta})^2}\right).$$
Upoštevali smo pravilo za odvod kvocienta in da je odvod konstante enak nič.

Za preslikavo $\tau_{\zeta,\varphi}$ velja
$$e^{i\varphi}\cdot(-\overline{\zeta}) - (-e^{i\varphi}\zeta)\cdot 1 = e^{i\varphi}\left((-\overline{\zeta}) - (-\zeta)\right) = e^{i\varphi}(\zeta-\overline{\zeta}) \neq 0.$$
Ker je $\tau_{\zeta,\varphi}$ lomljena linearna preslikava, slika množico premic in krožnic v množico premic in krožnic. Ker po točki iv) te trditve preslikava $\tau_{\zeta,\varphi}$ slika iz zgornje polravnine

v enotski disk, bo slika vsake krožnice iz zgornje polravnine neka krožnica v enotskem disku. Pol preslikave $\tau_{\zeta,\varphi}$ leži v spodnji polravnini, zato se bo notranjost krožnice v zgornji polravnini slikala v notranjost krožnice v enotskem disku.

Ker preslikava $\tau_{\zeta,\varphi}$ slika vsako krožnico in vsak disk iz zgornje polravnine v neko krožnico in neki disk enotskega diska, bo inverz $\tau_{\zeta,\varphi}^{-1}$ slikal poljubno krožnico in poljuben disk iz enotskega diska v neko krožnico in neki disk v zgornji polravnini. □

Definicija 4.6. Lomljena linearna preslikava, definirana kot $\tau(z) = \lambda z + a$ za $\lambda > 0$ in $a \in \mathbb{C}$, se imenuje afina linearna preslikava. *Center* afine linearne preslikave je njena negibna točka.

Trditev 4.7. *Za afino linearno preslikavo $\tau(z) = \lambda z + a$, kjer je $\lambda > 0$ in $a \in \mathbb{C}$ velja, da bijektivno preslika krožnico iz kompleksne ravnine s središčem v točki $c \in \mathbb{C}$ in polmerom $r \in (0, \infty)$ na krožnico iz kompleksne ravnine s središčem v točki $\tau(c)$ in polmerom λr.*

Dokaz. Afina linearna preslikava je lomljena linearna preslikava, zato je bijektivna.

Naj bo $|z - c| = r$ krožnica s središčem v točki c in polmerom r. Potem za preslikavo τ velja

$$|\tau(z) - \tau(c)| = |\lambda z + a - (\lambda c + a)| = |\lambda z - \lambda c| = |\lambda|\,|z - c| = \lambda r.$$

Pogledamo, kako se obnaša preslikana krožnica, ki ima središče v točki $\tau(c)$. Ko izračunamo vrednosti afine linearne preslikave, upoštevamo polmer prvotne krožnice in pozitivnost števila λ. Vidimo, da ima preslikana krožnica polmer λr. □

Posledica 4.8. *Obstaja natanko ena afina linearna preslikava, ki neko krožnico bijektivno preslika na natanko določeno krožnico.*

Dokaz. Denimo, da obstajata dve afini linearni preslikavi $\tau(z) = \lambda z + a$ in $\rho(z) = \mu z + b$ za $\lambda, \mu > 0$ in $a, b \in \mathbb{C}$, ki neko krožnico bijektivno preslikata na natanko določeno krožnico. Po prejšnji trditvi bo veljalo $\lambda = \mu$. Denimo, da je $c \in \mathbb{C}$ središče krožnice, ki jo slikamo, potem po prejšnji trditvi velja $\tau(c) = \rho(c)$, kar nam da

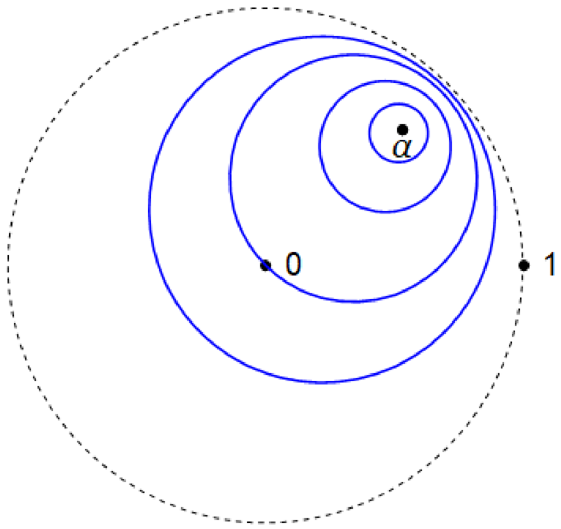
$$\lambda c + a = \mu c + b \Leftrightarrow \lambda c + a = \lambda c + b \Leftrightarrow a = b.$$

Dobili smo, da sta koeficienta raztegov λ in μ enaka in dobimo, da sta tudi prosta člena a in b enaka. To dokaže, da je največ ena taka preslikava. Pokazati je potrebno, da taka preslikava obstaja. Naj bosta $r, R > 0$ polmera krožnic in $a, A \in \mathbb{C}$ njuni središči. Tedaj preslikava $\tau(z) = (R/r)z + (A - (R/r)a)$ slika krožnico $K(a, r)$ na krožnico $K(A, R)$. □

Definicija 4.9. [3, izrek 2.3] Naj bosta $\alpha \in \Delta$ in $r \in (0, 1)$, potem definiramo *horocikel* kot množico $C(\alpha, r) = \{z \in \Delta;\ |\varphi_\alpha(z)| = r\} = \varphi_\alpha^{-1}(K(0, r))$, za holomorfen avtomorfizem enotskega diska φ_α, kjer sta α neevklidski center in r neevklidski polmer horocikla.

Trditev 4.10. *Za $\alpha \in \Delta$ in $r \in (0, 1)$ je horocikel $C(\alpha, r)$ krožnica v Δ.*

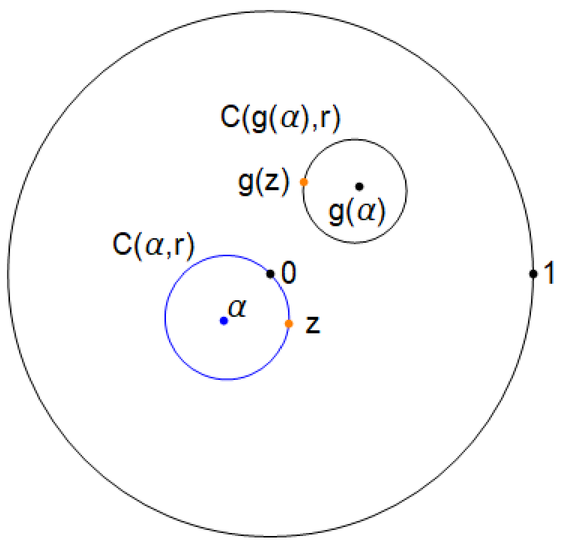
Dokaz. Po prejšnji definiciji množica $C(\alpha, r)$ leži v odprtem enotskem disku. Opazimo, da je horocikel $C(\alpha, r)$ s preslikavo φ_α praslika krožnice s središčem v točki nič in polmerom $r \in (0, 1)$. Za preslikavo φ_α pa vemo, da je lomljena linearna, velja namreč $(-1)1 - \alpha(-\overline{\alpha}) = |\alpha|^2 - 1 \neq 0$ in zato slika množico premic in krožnic v premice in krožnice. Se pravi, da bo premico ali krožnico slikala v premico ali krožnico v kodomeni. Glede na to, da je $C(\alpha, r) \subset \Delta$, bo ta horocikel nujno krožnica. □



SLIKA 2. Horocikli z neevklidskimi polmeri v točki $\alpha = \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Trditev 4.11. *Naj bo* $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ *nekonstantna holomorfna preslikava. Za* $\alpha \in \Delta$ *in* $r \in (0,1)$ *naj bosta* $C(\alpha, r)$ *in* $C(g(\alpha), r)$ *horocikla z enakima neevklidskima polmeroma. Potem veljata naslednji izjavi:*

i) g *točke iz horocikla* $C(\alpha, r)$ *slika na ali v notranjost horocikla* $C(g(\alpha), r)$*.*
ii) Če je g *bijektivna, potem* g *horocikel* $C(\alpha, r)$ *slika na horocikel* $C(g(\alpha), r)$*.*



SLIKA 3. Horocikla v enotskem disku.

Dokaz. Izberimo neko točko α iz odprtega enotskega diska in definirajmo horocikel kot $C(\alpha, r)$ z nekim neevklidskim polmerom $r \in (0,1)$. Po izreku o nekonstantni holomorfni preslikavi kot odprti preslikavi 1.2 bo točka $g(\alpha)$ ležala v odprtem enotskem disku, za katero definiramo horocikel $C(g(\alpha), r)$. Po trditvi 3.3 točke ii) oz. Schwarz-Pickovi lemi holomorfne preslikave iz enotskega diska v enotski disk slikajo $C(\alpha, r)$ v zaprt krog, ki ga omejuje $C(g(\alpha), r)$.

Če je g bijektivna, potem po ii) točki trditve 3.3 oz. Schwarz-Pickovi lemi velja enakost, kar pomeni, da prvi horocikel slikamo na drugega. $\square$

Trditev 4.12. *Naj bo sedaj $f : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{H}}$ nekonstantna holomorfna preslikava, ki ima robno negibno točko ν. Ko pošljemo z proti ν vzdolž vertikalne osi, bo veljalo*

$$\lim_{\substack{x=\nu \\ y\to 0}} \frac{\operatorname{Im}(f(z))}{\operatorname{Im}(z)} = f'(\nu),$$

tako, da bo odvod pozitiven.

Dokaz. Ker f slika zgornjo polravnino v zgornjo polravnino, je ta limita nenegativna.

$$\lim_{\substack{x=\nu \\ y\to 0}} \frac{\operatorname{Im}(f(z))}{\operatorname{Im}(z)} = \lim_{y\to 0} \frac{v(\nu,y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{v(\nu,y)-v(\nu,0)}{y-0} = \frac{\partial v}{\partial y}(\nu,0)$$

Upoštevali smo, da z iz zgornje polravnine pošljemo proti robni negibni točki ν vzdolž vertikalne osi, zato je $z = \nu + iy$ za $y > 0$, ko bomo y poslali proti nič. Holomorfno preslikavo f zapišemo v obliki $f = u(x,y) + iv(x,y)$ in upoštevamo definicijo imaginarne komponente. Števec in imenovalec dopolnimo, kjer upoštevamo, da je ν negibna točka preslikave f. Zato je $v(\nu,0) = 0$. Na koncu upoštevamo definicijo parcialnega odvoda z limito.

Za izračun odvoda preslikave f v točki nič uporabimo prvi Wirtingerjev odvod (2)

$$f'(\nu) = \frac{\partial f}{\partial z}(\nu,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\nu,0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(\nu,0)\right).$$

Nadaljujemo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\nu,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\nu,0) - i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(\nu,0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(\nu,0)\right)\right)$$

preslikavo $f = u(x,y) + iv(x,y)$ smo razpisali po komponentah. Nadaljujemo upoštevajoč Cauchy-Riemannov sistem (1)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(\nu,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\nu,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\nu,0) + \frac{\partial v}{\partial y}(\nu,0)\right),$$

enačbo poenostavimo in dobimo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}(\nu,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\nu,0)\right).$$

Razvijmo $f(\nu)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke ν, dobimo

$$f(z) = f(\nu) + f'(\nu)(z-\nu) + O((z-\nu)^2) = \nu + f'(\nu)(z-\nu) + O((z-\nu)^2).$$

Upoštevali smo, da je ν negibna točka preslikave f.

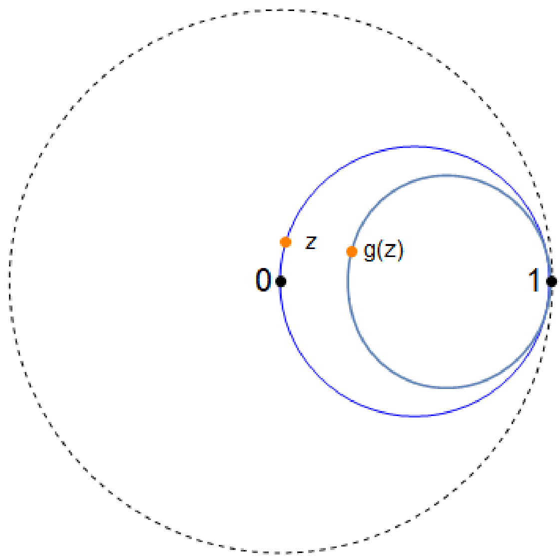
Pokažimo, da je $f'(\nu) > 0$. Res, če bi bil $f'(\nu) = 0$, potem bi veljalo $f(z) = \nu + O((z-\nu)^2)$ in bi preslikava f v okolici točke ν kote množila s faktorjem dva ali več, kar pa je v nasprotju s tem, da f slika zaprto zgornjo polravnino v zaprto zgornjo polravnino in sledi, da je $f'(\nu) \neq 0$.

Prav tako velja $f'(\nu) = |f'(\nu)|\, e^{i\cdot arg(f'(\nu))}$, kjer je $arg(f'(\nu)) = 0$. Res, če bi bil $arg(f'(\nu)) \neq 0$ bi za neki $\varphi \in (0, 2\pi)$ veljalo

$$f(z) = \nu + |f'(\nu)|\, e^{i\varphi}(z-\nu) + O((z-\nu)^2) = e^{i\varphi}(e^{-i\varphi}\nu + |f'(\nu)|\,(z-\nu) + e^{-i\varphi}O((z-\nu)^2)).$$

To bi pomenilo, da preslikava f v okolici točke ν zgornje polravnine ne preslika nase, kar je spet v nasprotju s tem, da f slika zaprto zgornjo polravnino v zaprto zgornjo polravnino in zato velja $f'(\nu) > 0$, posledično bo njena imaginarna komponenta enaka nič. $\square$

Definicija 4.13. Holomorfna preslikava $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{C}$, *zožuje* krožnico, če vsako točko, ki leži na krožnici, nese na rob ali v notranjost iste krožnice.



SLIKA 4. Zoževanje krožnice v odprtem enotskem disku.

Lema 4.14. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ holomorfna preslikava. Definirajmo preslikavo*

$$f(z) = \left(\tau_{\zeta,\varphi}^{-1} \circ g \circ \tau_{\zeta,\varphi}\right)(z), \tag{10}$$

kjer je $\tau_{\zeta,\varphi}$ biholomorfna preslikava iz zgornje polravnine v enotski disk. Potem preslikava f slika zaprto zgornjo polravnino v zaprto zgornjo polravnino. Naj bo sedaj η iz zaprtega enotskega diska negibna točka preslikave g in naj bo $\xi = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\eta)$ točka iz zaprte zgornje polravnine. Potem veljajo naslednje izjave

i) Preslikava f ima negibno točko ξ.
ii) Odvod preslikave f v negibni točki ξ je enak odvodu preslikave g v negibni točki η.
iii) g je nekonstantna natanko tedaj, ko je f nekonstantna.
iv) g zožuje neko krožnico natanko tedaj, ko f zožuje neko krožnico.
v) g ima notranjo oz. robno negibno točko natanko tedaj, ko ima f notranjo oz. robno negibno točko.

Dokaz. Iz točk *iv*) in *v*) trditve 4.5 sledi, da preslikava f slika zaprto zgornjo polravnino v zaprto zgornjo polravnino. Dokažimo sedaj, da je ξ negibna točka preslikave f. Izračunajmo

$$f(\xi) = \left(\tau_{\zeta,\varphi}^{-1} \circ g \circ \tau_{\zeta,\varphi}\right)(\xi) = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(g(\eta)) = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\eta) = \xi.$$

Vidimo, da ima preslikava f res negibno točko ξ. Izračunajmo odvod preslikave f v negibni točki ξ

$$f'(\xi) = \left(\tau_{\zeta,\varphi}^{-1} \circ g \circ \tau_{\zeta,\varphi}\right)'(\xi) = \frac{1}{\tau'_{\zeta,\varphi}(\tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(g(\tau_{\zeta,\varphi}(\xi))))} \cdot g'(\tau_{\zeta,\varphi}(\xi)) \cdot \tau'_{\zeta,\varphi}(\xi),$$

kjer uporabimo pravilo za odvod kompozituma preslikav, ter pravilo za odvod inverzne preslikave

$$= \frac{1}{\tau'_{\zeta,\varphi}(\xi)} \cdot g'(\eta) \cdot \tau'_{\zeta,\varphi}(\xi) = g'(\eta).$$

Vrednosti evalviramo in izraz krajšamo. Dobimo ravno odvod preslikave g v negibni točki η.

Če je g nekonstantna preslikava, potem obstajata dve različni točki zaprtega enotskega diska, ki ju bo g slikala v dve različni točki zaprtega enotskega diska in zato bo tudi preslikava f slikala dve različni točki zaprte zgornje polravnine v dve različni točki zaprte zgornje polravnine in bo zato f nekonstantna. Podobno bo zaradi biholomorfnosti preslikave $\tau_{\zeta,\varphi}$ preslikava g nekonstantna, če je preslikava f nekonstantna.

Po lemi 4.5 točke vii) sledi, da preslikava $\tau_{\zeta,\varphi}$ slika neko krožnico iz zgornje polravnine na neko krožnico iz enotskega diska, potem preslikava g zoži krožnico v enotskem disku in, ker $\tau_{\zeta,\varphi}^{-1}$ slika disk iz enotskega diska v disk iz zgornje polravnine, bo preslikava f zožila krožnico iz zgornje polravnine. Podobno bo zaradi biholomorfnosti preslikave $\tau_{\zeta,\varphi}$ preslikava g zoževala neko krožnico, če preslikava f zožuje neko krožnico.

Če ima preslikava g notranjo oz. robno negibno točko, jo ima tudi preslikava f, saj po lemi 4.5 točke iv) sledi, da preslikava f slika notranjo oz. robno negibno točko v notranjo oz. robno negibno točko. Podobno ima zaradi biholomorfnosti preslikave $\tau_{\zeta,\varphi}$ tudi preslikava g notranjo oz. robno negibno točko, če ima preslikava f notranjo oz. robno negibno točko. □

Definicija 4.15. Naj bosta $\xi \in \mathbb{H}$ in $\hat{r} \in (0,1)$, potem definiramo *horocikel v zgornji polravnini* kot množico $K(\xi,\hat{r}) = \{w \in \mathbb{H};\ |\tau_{\xi,0}(w)| = \hat{r}\} = \tau_{\xi,0}^{-1}(K(0,\hat{r}))$, za biholomorfno preslikavo $\tau_{\xi,0}(w) = \frac{w-\xi}{w-\overline{\xi}}$ iz zgornje polravnine v enotski disk, kjer sta ξ neevklidski ceter in $\hat{r}$ neevklidski polmer horocikla.

Trditev 4.16 (*Schwarz-Pickova lema v zgornji polravnini*[7, Schwarz–Pickov izrek]). *Naj bo $f : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{H}}$ holomorfna preslikava. Potem velja Schwarz-Pickova lema v zgornji polravnini*

$$\left|\tau_{f(\xi),0}(f(w))\right| \leq |\tau_{\xi,0}(w)| \quad \textit{za vsaka } \xi, w \in \mathbb{H}.$$

Dokaz. Definiramo *Cayleyjevo preslikavo* $\tau_{i,0}(w) = \frac{w-i}{w+i}$. Schwarz-Pickovo lemo v enotskem disku (7) zapišemo v obliki

$$\left|\frac{(\tau_{i,0}\circ f\circ \tau_{i,0}^{-1})(z) - (\tau_{i,0}\circ f\circ \tau_{i,0}^{-1})(\zeta)}{1-\overline{(\tau_{i,0}\circ f\circ \tau_{i,0}^{-1})(z)}(\tau_{i,0}\circ f\circ \tau_{i,0}^{-1})(\zeta)}\right| \leq \left|\frac{(\tau_{i,0}\circ \tau_{i,0}^{-1})(z) - (\tau_{i,0}\circ \tau_{i,0}^{-1})(\zeta)}{1-\overline{(\tau_{i,0}\circ \tau_{i,0}^{-1})(z)}(\tau_{i,0}\circ \tau_{i,0}^{-1})(\zeta)}\right|,$$

za vsaka $\zeta, z \in \Delta$, saj tako $(\tau_{i,0}\circ f\circ \tau_{i,0}^{-1})$ kot $(\tau_{i,0}\circ \tau_{i,0}^{-1})$ slikata iz enotskega diska v enotski disk, kjer velja $\tau_{i,0}^{-1}(z) = w$ in $\tau_{i,0}^{-1}(\zeta) = \xi$ za $\xi, w \in \mathbb{H}$.

Ekvivalentno zapišemo

$$\left|\frac{(\tau_{i,0}\circ f)(w) - (\tau_{i,0}\circ f)(\xi)}{1-\overline{(\tau_{i,0}\circ f)(w)}(\tau_{i,0}\circ f)(\xi)}\right| \leq \left|\frac{\tau_{i,0}(w) - \tau_{i,0}(\xi)}{1-\overline{\tau_{i,0}(w)}\tau_{i,0}(\xi)}\right|.$$

Razpišemo desno stran enakosti in dobimo

$$\left|\frac{\frac{w-i}{w+i} - \frac{\xi-i}{\xi+i}}{1-\overline{\frac{w-i}{w+i}}\frac{\xi-i}{\xi+i}}\right| = \left|\frac{\frac{(w-i)(\xi+i)-(\xi-i)(w+i)}{(w+i)(\xi+i)}}{\frac{(\overline{w}-i)(\xi+i)-(\overline{w}+i)(\xi-i)}{(\overline{w}-i)(\xi+i)}}\right| = \left|\frac{((w-i)(\xi+i)-(\xi-i)(w+i))(\overline{w}-i)}{((\overline{w}-i)(\xi+i)-(\overline{w}+i)(\xi-i))(w+i)}\right|$$

vrednosti damo na skupni imenovalec in poenostavimo

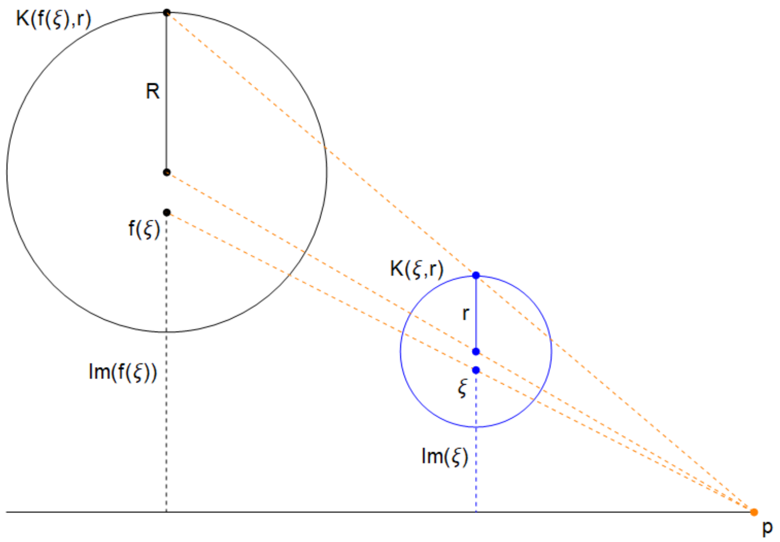
$$= \left|\frac{(2iw - 2i\xi)(\overline{w+i})}{(2i\overline{w} - 2i\xi)(w+i)}\right| = \left|\frac{(w-\xi)(\overline{w+i})}{(\overline{w}-\xi)(w+i)}\right| = \left|\frac{w-\xi}{\overline{w}-\xi}\right|\left|\frac{\overline{w+i}}{w+i}\right| = \left|\frac{w-\xi}{\overline{w}-\xi}\right|.$$

Po poenostavitvi smo upoštevali normo števila i, absolutno vrednost produkta kompleksnih števil in da je absolutna vrednost konjugiranega kompleksnega števila enaka kompleksnemu številu. S tem smo dokazali desno stran neenakosti. Podobno dokažemo levo stran. □

Trditev 4.17. *Naj bo $f : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{H}}$ nekonstantna holomorfna preslikava. Naj bosta $K(\xi, \hat{r})$ in $K(f(\xi), \hat{r})$ horocikla v zgornji polravnini za $\xi \in \mathbb{H}$ in $\hat{r} \in (0, 1)$. Potem veljajo naslednje izjave:*

i) f točke iz horocikla $K(\xi, \hat{r})$ preslika na ali v notranjost horocikla $K(f(\xi), \hat{r})$.
ii) Če je f bijektivna, potem f horocikel $K(\xi, \hat{r})$ slika na horocikel $K(f(\xi), \hat{r})$.
iii) Naj bosta r in R evklidska polmera horociklov $K(\xi, \hat{r})$ in $K(f(\xi), \hat{r})$, potem velja naslednje razmerje

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{Im}(f(\xi))}{\operatorname{Im}(\xi)}.$$



Slika 5. Razmerja horociklov v zgornji polravnini.

Dokaz. Izberimo neko točko ξ iz zgornje polravnine in definirajmo horocikel kot $K(\xi, \hat{r})$ z nekim neevklidskim polmerom $\hat{r} \in (0, 1)$. Po izreku o nekonstantni holomorfni preslikavi kot odprti preslikavi 1.2 bo točka $f(\xi)$ ležala v zgornji polravnini, za katero definiramo horocikel kot $K(f(\xi), \hat{r})$. Po trditvi 4.16 oz. Schwarz-Pickovi lemi v zgornji polravnini holomorfna preslikava f iz zgornje polravnine v zgornjo polravnino slika $K(\xi, \hat{r})$ v zaprt krog, ki ga omejuje $K(f(\xi), \hat{r})$.

Če je f bijektivna, potem po trditvi 4.16 oz. Schwarz-Pickovi lemi v zgornji polravnini velja enakost, kar pomeni, da prvi horocikel slikamo na drugega.

Točki ξ in $f(\xi)$ povežemo s premico. Obravnavajmo primera, ko premica seka realno os ali je vzporedna realni osi. Naj premica seka realno os v točki p. S translacijo

$w \mapsto w - p$ premaknemo presečišče premice z realno osjo v točko nič. Premik za realni p je avtomorfizem zgornje polravnine in ohranja tako neevklidske kot evklidske polmere. Sedaj $\xi - p$ in $f(\xi) - p$ ležita v zgornji polravnini na istem poltraku, ki ima izhodišče v nič. Torej obstaja tak $\lambda > 0$, da je $f(\xi) = \lambda\xi$. Torej tudi za imaginarne dele velja $\mathrm{Im} f(\xi) = \lambda \mathrm{Im}(\xi)$. Oglejmo si avtomorfizem zgornje polravnine, definiran kot $w \mapsto \lambda w$. Ker je avtomorfizem, ohranja neevklidske polmere horociklov in množi evklidske polmere z λ. Poleg tega slika $\xi - p$ v $f(\xi) - p$. Torej slika horocikel $C(\xi - p, \hat{r})$ natanko na horocikel $C(f(\xi) - p, \hat{r})$. Razmerja evklidskih polmerov teh dveh krožnic pa sta enaka $\lambda = \mathrm{Im}(f(\xi))/\mathrm{Im}(\xi)$. Po drugi strani sta tudi evklidska polmera horociklov v razmerju $\lambda r = R$. Naj premica ne seka realne osi, potem imata točki ξ in $f(\xi)$ enaki imaginarni komponenti, zato obstaja translacija $w \mapsto w + \mathrm{Re}(f(\xi) - \xi)$, ki je avtomorfizem zgornje polravnine in prvi horocikel bijektivno preslika na drugi horocikel in neevklidski center prvega horocikla v neevklidski center drugega horocikla, tako bosta evklidska polmera horociklov v enakem razmerju kot imaginarni komponenti. $\square$

Lema 4.18. *Za različni kompleksni števili z in ν velja zveza*

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z-\nu}\right) = -\frac{\mathrm{Im}(z-\nu)}{|z-\nu|^2}.$$

Dokaz. Brez težav lahko preverimo zvezo tako, da upoštevamo definicijo imaginarne komponente in izraz poenostavimo

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z-\nu}\right) = \frac{\frac{1}{z-\nu} - \frac{1}{\overline{z-\nu}}}{2i} = \frac{\frac{\overline{(z-\nu)} - (z-\nu)}{(z-\nu)\overline{(z-\nu)}}}{2i} = -\frac{(z-\nu) - \overline{(z-\nu)}}{2i(z-\nu)\overline{(z-\nu)}} = -\frac{\mathrm{Im}(z-\nu)}{|z-\nu|^2}. \quad \square$$

Lema 4.19. *Za neki $R > 0$ in realno število ν parametrizirajmo krožnico $r(\varphi) = \nu + R(i + e^{i\varphi})$, ki gre skozi točko ν s središčem v točki $\nu + iR$. Potem velja*

$$\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{r(\varphi) - \nu}\right) = \frac{1}{2R}, \text{ za vsak } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dokaz. Izračunajmo

$$\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{r(\varphi)-\nu}\right) = \frac{\mathrm{Im}(r(\varphi)-\nu)}{|r(\varphi)-\nu|^2} = \frac{\mathrm{Im}(R(i+e^{i\varphi}))}{|R(i+e^{i\varphi})|^2} = \frac{\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{R\,|i+e^{i\varphi}|^2}.$$

Upoštevamo rezultat leme 4.18 in parametrizacijo krožnice, prav tako iz imaginarne komponente v števcu izpostavimo R in iz absolutne vrednosti v imenovalcu izpostavimo R^2

$$= \frac{\mathrm{Im}(\cos(\varphi) + \mathrm{i}(1+\sin(\varphi)))}{R\,|\cos(\varphi) + i(1+\sin(\varphi))|^2} = \frac{1+\sin(\varphi)}{R(\cos^2(\varphi) + (1+\sin(\varphi))^2)}.$$

Izraz zapišemo v kartezični obliki in spet upoštevamo definicijo imaginarne komponente ter definicijo norme kompleksnega števila

$$= \frac{1+\sin(\varphi)}{R(\cos^2(\varphi) + (1 + 2\sin(\varphi) + \sin^2(\varphi)))} = \frac{1+\sin(\varphi)}{2R(1+\sin(\varphi))} = \frac{1}{2R}.$$

Ko izraz poenostavimo, dobimo vrednost imaginarne komponente. $\square$

Izrek 4.20 (*Juliajeva neenakost* [2, poglavje 5, enačbi (10) in (11)]). *Naj bo sedaj $f : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{H}}$ nekonstantna holomorfna preslikava, ki ima robno negibno točko ν.*

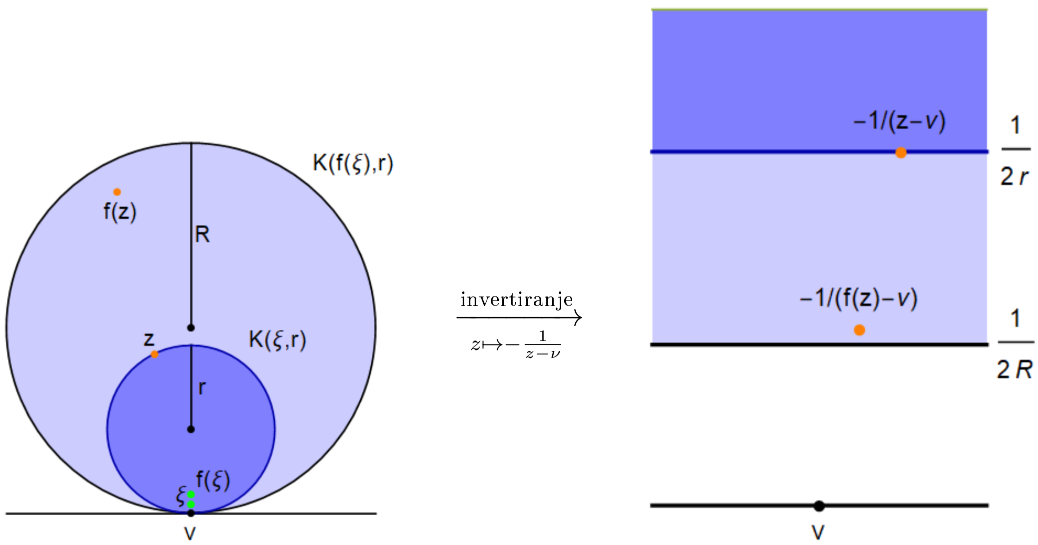
Potem velja Juliajeva neenakost

$$f'(\nu)\frac{\mathrm{Im}(f(z))}{|f(z)-\nu|^2} \geq \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z-\nu|^2} \text{ za vsak } z \in \mathbb{H}.$$

Dokaz. Naj bosta $K(\xi, \hat{r})$ in $K(f(\xi), \hat{r})$ horocikla iz zgornje polravnine za $\hat{r} \in (0, 1)$.

Predpostavimo sedaj, da ξ leži na vertikalni osi pravokotni na realno os v točki ν in pošljimo ξ vzdolž te osi proti ν, kjer ostane evklidski polmer r horocikla $K(\xi, \hat{r})$ fiksen, potem bo horocikel $K(\xi, \hat{r})$ v limitni situaciji tangenten na realno os v točki ν. Ker je ν negibna točka preslikave f, bo horocikel $K(f(\xi), \hat{r})$ prav tako tangenten na realno os v točki ν.

Vpeljimo sedaj novo spremeljivko z iz zgornje polravnine, ki leži na horociklu $K(\xi, \hat{r})$. Glede na preslikavo $z \mapsto -\frac{1}{z-\nu}$ se bo horocikel $K(\xi, \hat{r})$ z evklidskim polmerom r po lemi 4.19 slikal v zgornjo polravnino tako, da bo njegova imaginarna komponenta enaka $\frac{1}{2r}$, podobno se bo po isti lemi horocikel $K(f(\xi), \hat{r})$ z evklidskim polmerom R in njegova notranjost slikala v zgornjo polravnino, kjer bo imaginarna komponenta večja ali enaka $\frac{1}{2R}$.



SLIKA 6. Invertiramo horocikla iz zgornje polravnine.

Iz leme 4.12 in trditve 4.17 točke iii) sledi $f'(\nu) = \frac{R}{r}$. Če obe strani enačbe pomnožimo z $\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{f(z)-\nu}\right)$, dobimo

$$f'(\nu)\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{f(z)-\nu}\right) = \frac{R}{r}\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{f(z)-\nu}\right).$$

Poglejmo sedaj, kaj se zgodi z desno stranjo enakosti

$$\frac{R}{r}\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{f(z)-\nu}\right) \geq \frac{R}{r}\frac{1}{2R} = \frac{1}{2r} = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{z-\nu}\right).$$

Ker se po trditvi 4.17 točke i) točke iz horocikla $K(\xi, \hat{r})$ preslikajo na ali v notranjost horocikla $K(f(\xi), \hat{r})$, bo veljalo $\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{f(z)-\nu}\right) \geq \frac{1}{2R}$.

Tako dobimo prvo obliko Juliajeve neenakosti

$$f'(\nu)\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{f(z)-\nu}\right) \geq \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{z-\nu}\right), \text{ za vsak } z \in \mathbb{H}.$$

Upoštevamo zvezo iz leme 4.18 in dobimo ekvivalentno obliko

$$f'(\nu)\frac{\mathrm{Im}(f(z)-\nu)}{|f(z)-\nu|^2} \geq \frac{\mathrm{Im}(z-\nu)}{|z-\nu|^2}, \text{ za vsak } z \in \mathbb{H}.$$

Upoštevamo aditivnost imaginarne komponente kompleksnega števila in upoštevamo, da je ν realno število, da dobimo

$$f'(\nu)\frac{\mathrm{Im}(f(z))}{|f(z)-\nu|^2} \geq \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z-\nu|^2}, \text{ za vsak } z \in \mathbb{H}.$$

Kar je prav tako Juliajeva neenakost. □

Poglejmo si sedaj nekaj splošnih rezultatov, ki sledijo iz Juliajeve neenakosti.

Posledica 4.21. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ nekonstantna holomorfna preslikava, ki ima robno negibno točko α. Potem velja $g'(\alpha) > 0$.*

Dokaz. Uporabimo preslikavo (10). Iz leme 4.14 sledi, da preslikava f slika iz zaprte zgornje polravnine v zaprto zgornjo polravnino. Prav tako iz iste leme točke i) sledi, da ima f neko točko $\xi = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\alpha)$ iz zgornje polravnine za negibno in iz točke ii) te leme sledi, da je odvod preslikave f v točki ξ enak odvodu preslikave g v točki α. Po lemi 4.12 sledi, da je $g'(\alpha) > 0$. □

Vidimo, da za nekonstantno holomorfno preslikavo, ki slika zaprt enotski disk v zaprt enotski disk in ima negibno točko na robu, velja, da mora biti odvod v robni negibni točki nujno večji od nič. Trditev 3.2 nam pove, da mora biti holomorfna preslikava, ki slika enotski disk v enotski disk in ima dve poljubni notranji negibni točki, nujno identiteta. V tem primeru so vse točke holomorfne preslikave negibne. Po drugi strani pa obstajajo holomorfne preslikave iz zaprtega enotskega diska v zaprt enotski disk, različne od identične preslikave, ki imajo razen notranje negibne točke še vsaj eno ali več robnih negibnih točk.

Lema 4.22. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ holomorfna preslikava. Definirajmo preslikavo $h(z) = \left(\varphi_{\zeta,\vartheta} \circ g \circ \varphi_{\zeta,\vartheta}^{-1}\right)(z)$, kjer je $\varphi_{\zeta,\vartheta}$ holomorfen avtomorfizem enotskega diska. Potem preslikava h slika zaprt enotski disk v zaprt enotski disk. Naj bo sedaj η iz zaprtega enotskega diska negibna točka preslikave g, kjer je $\varphi_{\zeta,\vartheta}(\eta) = \xi$ za neki ξ iz zaprtega enotskega diska. Potem veljajo naslednje izjave*

i) Preslikava h ima negibno točko ξ.
ii) Odvod preslikave h v negibni točki ξ je enak odvodu preslikave g v negibni točki η.

Dokaz. Dokaz te leme je identičen dokazu točk i) in ii) leme 4.14, le da imamo namesto biholomorfne preslikave $\tau_{\zeta,\varphi}$ iz zgornje polravnine v enotski disk holomorfen avtomorfizem enotskega diska $\varphi_{\zeta,\vartheta}$. □

Izrek 4.23. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ holomorfna preslikava, ki ima notranjo negibno točko ζ in robno negibno točko η. Tedaj sledi, da je $g'(\eta) \geq 1$.*

Dokaz. Uporabimo preslikavo (10). Iz leme 4.14 sledi, da preslikava f slika iz zaprte zgornje polravnine v zaprto zgornjo polravnino. Po trditvi 4.5 točke v) bo veljalo $\xi = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\zeta)$ za neki ξ iz zgornje polravnine in $\nu = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\eta)$ za neki ν iz roba zgornje polravnine. Po lemi 4.14 točke i) ima preslikava f negibni točki ξ in ν. Uporabimo

Juliajevo neenakost oz. izrek 4.20 v robni negibni točki ν in jo evalviramo v notranji točki ξ, da dobimo

$$f'(\nu)\frac{\operatorname{Im}(f(\xi))}{|f(\xi)-\nu|^2} \geq \frac{\operatorname{Im}(\xi)}{|\xi-\nu|^2}.$$

Ker je ξ negibna točka za f, od tod sledi

$$f'(\nu)\frac{\operatorname{Im}(\xi)}{|\xi-\nu|^2} \geq \frac{\operatorname{Im}(\xi)}{|\xi-\nu|^2}.$$

Upoštevamo, da je ξ negibna točka preslikave f, zaradi česar sta kvocieta na levi in desni strani enaka, prav tako imaginarni vrednosti. Po krajšanju dobimo, da je odvod preslikave f v robni točki ν večji ali enak ena. Iz točke ii) leme 4.14 sledi, da je odvod preslikave f v robni točki ν enak odvodu preslikave g v robni točki η. Sledi, da je $g'(\eta) \geq 1$. □

V kolikor holomorfna preslikava slika iz zaprtega enotskega diska v zaprt enotski disk in ima poleg nekaterih robnih negibnih točk še vsaj eno notranjo negibno točko, bo odvod v robni negibni točki večji ali enak ena. V primeru, ko je preslikava različna od identične preslikave, pa celo nujno večji od ena, kar nam pove naslednja posledica.

Posledica 4.24. *Naj veljajo predpostavke izreka 4.23. Če je $g \neq \mathrm{id}$, potem velja $g'(\eta) > 1$.*

Dokaz. Dokažimo kontrapozicijo. Po pravkar dokazanem $g'(\eta) \geq 1$ in uporabi predpostavke sledi, da je $g'(\eta) = 1$. Dokazujemo, da je g identiteta. Vzemimo avtomorfizem diska, ki preslika točko ζ v točko nič in točko η v točko ena

$$\varphi(z) = \left(\frac{1-\bar{\zeta}\eta}{\zeta-\eta}\right)\cdot\left(\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\right).$$

Definirajmo preslikavo

$$\widetilde{g}(z) = \left(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}\right)(z).$$

Preslikava $\widetilde{g}(z)$ ima po lemi 4.22 točke i) negibni točki nič in ena, prav tako preslikava $\widetilde{g}(z)$ po isti lemi slika iz zaprtega enotskega diska v zaprt enotski disk.

Kot v dokazu Schwarzove leme zapišemo

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\widetilde{g}(z)}{z} & ; z \neq 0 \\ \widetilde{g}'(0) & ; z = 0. \end{cases}$$

Izračunamo limito preslikave h v točki 0

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\widetilde{g}(z)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\widetilde{g}(z)-0}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{\widetilde{g}(z)-\widetilde{g}(0)}{z-0} = \widetilde{g}'(0).$$

Preslikavo h lahko holomorfno razširimo na zaprt enotski disk. Tako kot v dokazu Schwarzove leme dokažemo, da za vsak z iz zaprtega enotskega diska velja $|h(z)| \leq 1$. Kar pomeni, da h slika zaprt enotski disk v zaprt enotski disk.

Izračunajmo vrednost preslikave h v točki ena

$$h(1) = \frac{\widetilde{g}(1)}{1} = \widetilde{g}(1) = 1.$$

Ker je ena negibna točka preslikave $\widetilde{g}$, sledi, da bo ena tudi negibna točka preslikave h. Torej ima preslikava h v točki ena maksimum po absolutni vrednosti.

Izračunajmo odvod preslikave h

$$h'(z) = \frac{\widetilde{g}'(z)z - \widetilde{g}(z)}{z^2}$$

in ga evalviramo v točki ena

$$h'(1) = \frac{\widetilde{g}'(1) \cdot 1 - \widetilde{g}(1)}{1^2} = \widetilde{g}'(1) - 1.$$

Upoštevali smo, da je ena negibna točka preslikave $\widetilde{g}$. Po lemi 4.22 točke ii) velja $\widetilde{g}'(1) = 1$, zato je $h'(1) = 0$. Po trditvi 4.3 oz. Robnem principu maksima za holomorfne preslikave velja, da je h konstantna in zato identično enaka ena. Torej velja $\widetilde{g}(z) = z$. Izrazimo preslikavo g

$$\text{id} = (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1})(z) \Leftrightarrow g = \text{id}.$$

Sledi, da je g identična preslikava. $\square$

Za dokaz prejšnje posledice smo uporabili robni princip maksima za holomorfne preslikave.

Zgled 4.25. Vzemimo $g(z) = z^{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$. Za to preslikavo velja:

- g slika iz zaprtega enotskega diska v zaprt enotski disk.
  Velja $|g(z)| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1} \leq 1^{n+1} = 1$ za vsak z iz zaprtega enotskega diska.
- g ni identična preslikava.
  Očitno, saj je g vsaj druga potenca z.
- Edina notranja negibna točka je nič in množica negibnih točk na robu je enaka $\left\{e^{\frac{2\pi ik}{n}};\ k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}$.
  Negibne točke iščemo med $g(z) = z \Leftrightarrow z^{n+1} = z$. Vidimo, da $z = 0$ reši enačbo. Če je $z \neq 0$ enačbo delimo z z in imamo $z^n = e^{2\pi ik}$ za $k \in \mathbb{Z}$. Rešitve so torej n-ti koreni enote.
- Odvod v robnih negibnih točkah je enak $n + 1$.
  $g'(z) = (n+1)z^n$, ko evalviramo v robni negibni točki dobimo $g'\left(e^{\frac{2\pi ik}{n}}\right) = n + 1$. $\diamondsuit$

Sedaj pa si poglejmo še splošnejši rezultat, ki sledi iz Juliajeve neenakosti.

Lema 4.26. *Naj bo $f : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ holomorfna preslikava, ki ima negibno točko nič in ki ni identično enaka nič tako, da $|f|$ doseže maksimum v robni točki α enotskega diska.*

Definirajmo

$$G(z) = \frac{f(\alpha z)}{f(\alpha)} \text{ za vsak } z \in \overline{\Delta}.$$

Potem veljajo naslednje izjave:

i) $G : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$.
ii) $G(0) = 0$.
iii) $G(1) = 1$ *in v tej točki je dosežen maksimum po absolutni vrednosti.*
iv) $G'(1) = \frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}$.

Dokaz. Preverimo, da $G : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$.

$$|G(z)| = \left|\frac{f(\alpha z)}{f(\alpha)}\right| = \frac{|f(\alpha z)|}{|f(\alpha)|} \leq 1.$$

Upoštevali smo definicijo absolutne vrednosti in lastnost, da preslikava $|f|$ v točki α doseže maksimum. Prav tako sledi $|\alpha z| = |\alpha|\,|z| = |z| \leq 1$, kar pa pomeni, da αz leži v zaprtem enotskem disku in $f(\alpha z)$ prav tako.

Nič je negibna točka preslikave G

$$G(0) = \frac{f(\alpha \cdot 0)}{f(\alpha)} = \frac{f(0)}{f(\alpha)} = \frac{0}{f(\alpha)} = 0.$$

Ena je negibna točka preslikave G

$$G(1) = \frac{f(\alpha \cdot 1)}{f(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{f(\alpha)} = 1.$$

Po točki i) te leme je v točki ena dosežen maksimum po absolutni vrednosti. Izračunajmo odvod preslikave G

$$G'(z) = \frac{\alpha f'(\alpha z)}{f(\alpha)}.$$

Evalvacija v točki ena nam da

$$G'(1) = \frac{\alpha f'(\alpha \cdot 1)}{f(\alpha)} = \frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}.$$ □

Izrek 4.27. *Naj veljajo predpostavke leme 4.26. Potem je* $\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \geq 1$.

Dokaz. Uporabimo prejšnjo lemo. Za holomorfno preslikavo $G(z) = \frac{f(\alpha z)}{f(\alpha)}$ velja, da slika zaprt enotski disk v zaprt enotski disk in ima notranjo negibno točko nič in robno negibno točko ena. Zato iz prejšnje leme točke iv) in izreka 4.23 sledi $\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \geq 1$. □

4.4. **Wolffova trditev.** Za konec dokažimo pomembno Wolffovo trditev iz kompleksne analize, ki nam pove, kako se obnašajo vrednosti odvodov v robnih negibnih točkah nekonstantne holomorfne preslikave, ki ima vse negibne točke na robu.

Trditev 4.28. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ nekonstantna holomorfna preslikava in naj vse njene negibne točke ležijo na robu. Potem obstaja Denjoy-Wolffova robna negibna točka α, v kateri je odvod $g'(\alpha) \in (0, 1]$ in v vseh ostalih negibnih točkah velja: če je $\beta \in \partial\Delta \backslash \{\alpha\}$ negibna točka, potem velja $g'(\beta) \geq \frac{1}{g'(\alpha)}$. V posebnem velja $g'(\beta) > 1$.*

Dokazovanja trditve se bomo lotili sistematično. Navedimo nekaj pomožnih lem in trditev ter njihovih rezultatov, ki nam bodo pomagali v nadaljevanju.

Nadaljujmo s trditvijo, ki nam pove, da je produkt odvodov holomorfne preslikave v dveh različnih robnih negibnih točkah večji ali enak ena.

Trditev 4.29. *Naj bosta α in β različni robni negibni točki holomorfne preslikave $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$. Potem je $g'(\alpha)g'(\beta) \geq 1$.*

Dokaz. Uporabimo preslikavo (10). Po lemi 4.14 sledi, da preslikava f slika iz zaprte zgornje polravnine v zaprto zgornjo polravnino in iz iste leme točke i) sledi, da ima preslikava f robni negibni točki $\nu = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\alpha)$ in $\kappa = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\beta)$. Po isti lemi točke ii) sta odvoda v robnih negibnih točkah α in ν ter β in κ enaka, zato lahko uporabimo Juliajevo nenenakost oz. izrek 4.20 v robni negibni točki ν. Obe strani neenakosti množimo z $\frac{|f(z)-\nu|^2}{\mathrm{Im}(z)}$ in poenostavimo

$$f'(\nu)\frac{\mathrm{Im}(f(z))}{|f(z)-\nu|^2}\frac{|f(z)-\nu|^2}{\mathrm{Im}(z)} \geq \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z-\nu|^2}\frac{|f(z)-\nu|^2}{\mathrm{Im}(z)} \Leftrightarrow f'(\nu)\frac{\mathrm{Im}(f(z))}{\mathrm{Im}(z)} \geq \frac{|f(z)-\nu|^2}{|z-\nu|^2}.$$

Sedaj pošljimo z proti robni negibni točki κ vzdolž vertikalne osi, ki je vzporedna imaginarni osi, in na desni strani neenakosti dobimo

$$\frac{|f(z)-\nu|^2}{|z-\nu|^2} = \frac{|f(\kappa)-\nu|^2}{|\kappa-\nu|^2} = \frac{|\kappa-\nu|^2}{|\kappa-\nu|^2} = 1.$$

Upoštevali smo, da ima po lemi 4.14 točke i) preslikava f robno negibno točko κ in da sta robni negibni točki različni.

Poglejmo sedaj levo stran

$$f'(\nu)\frac{\mathrm{Im}(f(z))}{\mathrm{Im}(z)}.$$

Po lemi 4.12 velja, da je $\lim_{\substack{x=\kappa \\ y\to 0}} \frac{\mathrm{Im}(f(z))}{\mathrm{Im}(z)} = f'(\kappa)$, ko pošljemo $z = x + iy$ vzdolž vertikalne osi proti robni negibni točki κ. Dobimo izraz

$$f'(\nu)f'(\kappa) \geq 1.$$

Če upoštevamo lastnost leme 4.14 točke ii), dobimo

$$g'(\alpha)g'(\beta) \geq 1. \qquad \square$$

Izrek 4.30 (*Rouchéjev izrek* [1, izrek 10.10]). *Naj bosta f in h holomorfni preslikavi na in znotraj sklenjene krivulje γ brez samopresečnih točk v kompleksni ravnini. Naj velja $|h(z)| < |f(z)|$ za vsak $z \in \gamma$. Potem imata preslikavi f in $f+h$ v notranjosti krivulje γ enako število ničel, štetih s kratnostjo.*

Lema 4.31. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ holomorfna preslikava in definirajmo preslikavo s predpisom*

$$g_n(z) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) g(z), \text{ kjer } n \in \mathbb{N}.$$

Potem ima preslikava g_n natanko eno negibno točko α_n v odprtem enotskem disku.

Dokaz. Za dokaz te leme bomo potrebovali Rouchéjev izrek. V našem primeru sta $f(z) = -z$ in $h(z) = g_n(z)$ holomorfni preslikavi na zaprtem enotskem disku. Za preslikavo f na robu enotskega diska velja

$$|f(z)| = |-z| = 1.$$

Pogledamo absolutno vrednost preslikave h na robu enotskega diska

$$|h(z)| = |g_n(z)| = \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)g(z)\right| = \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| |g(z)| \leq \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| < 1.$$

Upoštevali smo, da preslikava g slika iz zaprtega enotskega diska v zaprt enotski disk in da je n pozitivno naravno število.

Po Rouchéjevem izreku 4.30 sledi, da ima preslikava $g_n(z) - z$ enako število ničel štetih s kratnostjo v odprtem enotskem disku kot $-z$. Torej natanko eno ničlo, zato lahko zapišemo $g_n(\alpha_n) - \alpha_n = 0$ za neki α_n iz odprtega enotskega diska in dobimo $g_n(\alpha_n) = \alpha_n$. Kar pa pomeni, da ima g_n negibno točko v odprtem enotskem disku. $\square$

Posledica 4.32. *Naj veljajo predpostavke leme 4.31. Predpostavimo sedaj, da preslikava g nima negibnih točk v notranjosti enotskega diska. Potem stekališča zaporedja α_n ležijo na robu enotskega diska.*

Dokaz. Po prejšnji lemi imamo zaporedje negibnih točk α_n preslikav g_n v notranjosti enotskega diska. Denimo, da obstaja podzaporedje negibnih točk α_m preslikav g_m, ki konvergira k neki notranji točki α enotskega diska za m, ki teče po naravnih številih tega podzaporedja. Potem velja

$$\alpha_m = g_m(\alpha_m) \Leftrightarrow \alpha_m = \left(1 - \frac{1}{m}\right) g(\alpha_m).$$

Uporabimo definicijo zaporedja preslikav g_n iz prejšnje leme in pošljemo m proti neskončnosti. Tako dobimo $g(\alpha) = \alpha$. Torej je α notranja negibna točka preslikave g, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da preslikava g nima notranjih negibnih točk. Torej zaporedje α_n nima stekališča v neki notranji točki enotskega diska. $\square$

Lema 4.33. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ nekonstantna holomorfna preslikava brez notranjih negibnih točk enotskega diska. Potem preslikava g zožuje horocikel, ki je tangenten na enotski disk v neki robni točki α.*

Dokaz. Preslikava g po izreku o odprti preslikavi 1.2 notranjo točko enotskega diska slika v notranjo točko enotskega diska. Prav tako za preslikave g_n iz leme 4.31 velja, da slikajo iz odprtega enotskega diska v odprt enotski disk, saj velja

$$|g_n(z)| = \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) g(z)\right| = \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| |g(z)| < 1,$$

kjer je n pozitivno naravno število in z iz odprtega enotskega diska. Zato lahko uporabimo Schwarz-Pickovo lemo iz trditve 3.3 točke ii) in velja

$$\left|\varphi_{g_n(\alpha_n)}(g_n(z))\right| \leq |\varphi_{\alpha_n}(z)|, \text{ za vsak } z \in \Delta,$$

kjer sta $\varphi_{g_n(\alpha_n)}$ in φ_{α_n} holomorfna avtomorfizma enotskega diska. Ker je po lemi 4.31 α_n negibna točka preslikave g_n, lahko zapišemo

$$|\varphi_{\alpha_n}(g_n(z))| \leq |\varphi_{\alpha_n}(z)|, \text{ za vsak } z \in \Delta.$$

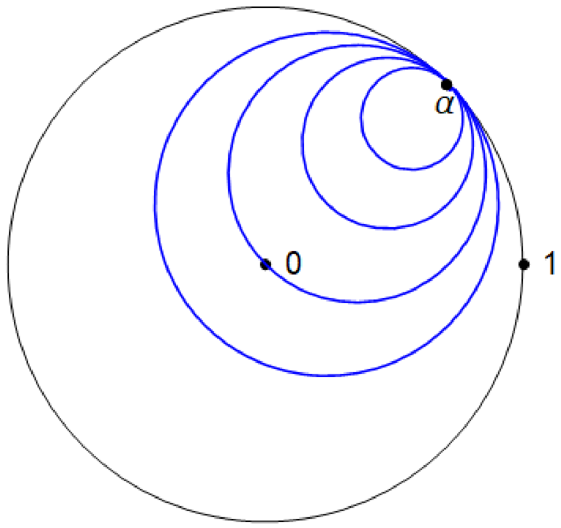
Kar pa pomeni, da preslikava g_n točko na horociklu $C(\alpha_n, r)$ slika na ali v notranjost tega horocikla za neki $r \in (0, 1)$. Po posledici 4.32 neko podzaporedje α_m, kjer m teče po naravnih številih tega podzaporedja, konvergira k neki robni točki α enotskega diska, ko gre m v neskončnost. Prav tako se bodo horocikli $C(\alpha_m, r)$ približevali k horociklu, ki je tangenten na enotski disk v robni točki α, ko bomo m poslali v neskončnost. Za preslikave g_m bo veljalo, da je $\lim_{m\to\infty} g_m(z) = g(z)$. Torej tudi preslikava g zožuje horocikel, ki je tangenten na enotski disk v robni točki α. $\square$

Poglejmo sedaj, kako se obnaša kvocient $\frac{\mathrm{Im}(f(z))}{\mathrm{Im}(z)}$ holomorfne preslikave $f : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{H}}$ v odvisnosti od z iz zgornje polravnine, ko ga pošljemo vzdolž vertikalne osi proti negibni točki preslikave f na realni osi.

Lema 4.34. *Naj bo $f : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{H}}$ holomorfna preslikava in naj bosta $K(\xi, \hat{r})$ in $K(f(\xi), \hat{r})$ horocikla v zgornji polravnini z evklidskima polmeroma r in R. Ko pošljemo ξ iz zgornje polravnine vzdolž vertikalne osi proti negibni točki ν na robu zgornje polravnine, bo za točko w iz zgornje polravnine ob pogoju $\mathrm{Im}(w) = 2r$ veljalo $\frac{\mathrm{Im}(f(w))}{\mathrm{Im}(w)} \leq f'(\nu)$, kjer je $f'(\nu)$ pozitiven.*

Dokaz. Naj bosta $K(\xi, \hat{r})$ in $K(f(\xi), \hat{r})$ horocikla v zgornji polravnini z evklidskima polmeroma r in R za neki $\hat{r} \in (0, 1)$ in ξ iz zgornje polravnine. Pošljimo ξ vzdolž vertikalne osi proti ν in izberimo tak w iz zgornje polravnine, da bo ležal na horociklu $K(\xi, \hat{r})$ s fiksnim polmerom r in bo veljalo $\mathrm{Im}(w) = 2r$. Glede na to, da je ν po lemi

4.14 točke i) negibna točka preslikave f, bo horocikel $K(f(\xi),\hat{r})$ tangenten na realno os v točki ν. Po trditvi 4.17 točke i) $f(w)$ leži na ali znotraj horocikla $K(f(\xi),\hat{r})$ in bo $\mathrm{Im}(f(w)) \leq 2R$. Kar nam da $\frac{\mathrm{Im}(f(w))}{\mathrm{Im}(w)} \leq \frac{R}{r}$. Vemo, da je zaradi trditve 4.17 točke iii) razmerje $\frac{R}{r}$ enako razmerju $\lim_{\substack{x=\nu \\ y\to 0}} \frac{\mathrm{Im}(f(\xi))}{\mathrm{Im}(\xi)}$, kar nam da $\frac{\mathrm{Im}(f(w))}{\mathrm{Im}(w)} \leq \lim_{\substack{x=\nu \\ y\to 0}} \frac{\mathrm{Im}(f(\xi))}{\mathrm{Im}(\xi)}$. Ker smo ξ poslali vzdolž vertikalne osi proti ν, bo po lemi 4.12 veljalo $\frac{\mathrm{Im}(f(w))}{\mathrm{Im}(w)} \leq f'(\nu)$, kjer je $f'(\nu)$ pozitiven. □



SLIKA 7. Horocikli, tangentni na enotski disk v robni točki $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Lema 4.35. *Naj bo $g : \overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$ nekonstantna holomorfna preslikava, ki ima v robni negibni točki β enotskega diska odvod manjši ali enak ena. Potem preslikava g zožuje horocikle, ki so tangentni na enotski disk v robni negibni točki β.*

Dokaz. Uporabimo preslikavo (10). Po trditvi 4.14 točke iii) je f nekonstantna holomorfna preslikava. Naj bosta $K(\xi,\hat{r})$ in $K(f(\xi),\hat{r})$ za neki $\hat{r} \in (0,1)$ horocikla v zgornji polravnini. Fiksirajmo evklidski polmer r horocikla $K(\xi,\hat{r})$ in predpostavimo, da ξ leži na vertikalni osi pravokotni na točko $\kappa = \tau^{-1}_{\zeta,\varphi}(\beta)$, ter ga pošljimo vzdolž vertikalne osi proti tej točki. Ker je β robna negibna točka preslikave g, bo po lemi 4.14 točke i) κ robna negibna točka preslikave f, zato bo iz leme 4.12 sledilo

$$\lim_{\substack{x=\kappa \\ y\to 0}} \frac{\mathrm{Im}(f(\xi))}{\mathrm{Im}(\xi)} = f'(\kappa) \leq 1.$$

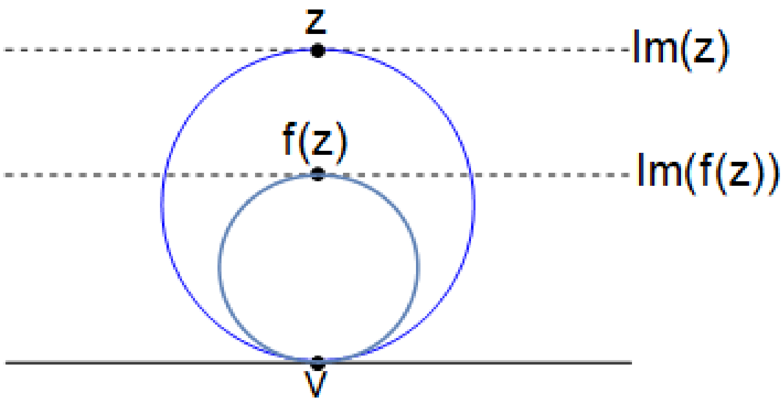
Limita kvocienta imaginarnih komponent je enaka odvodu preslikave f v robni točki κ, ki je zaradi trditve 4.14 točke ii) manjši ali enak ena.

Po lemi 4.34 bo razmerje kvocientov $\frac{\mathrm{Im}(f(\xi))}{\mathrm{Im}(\xi)}$, ko bomo ξ poslali vzdolž vertikalne osi proti κ, manjše ali enako vrednosti odvoda, zato bo po trditvi 4.17 točke iii) veljalo $R \leq r$, kjer je R evklidski polmer horocikla $K(f(\xi),\hat{r})$ in zato preslikava f po isti trditvi točke i) zožuje horocikel $K(\xi,\hat{r})$. Posledično bo po lemi 4.14 točke iv) preslikava g zoževala horocikle, tangentne na enotski disk v robni točki β. □

Dokažimo sedaj trditev 4.28.

Dokaz trditve 4.28. Uporabimo preslikavo (10). Ker po lemi 4.33 preslikava g zožuje horocikel, ki je tangenten na enotski disk v neki robni točki α in bo po lemi 4.14 točke iv) tudi preslikava f zoževala horocikel, ki je po isti lemi točke i) tangenten na realno os v točki $\nu = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\alpha)$.

Ker preslikava f zožuje horocikle tangentne na realno os v točki ν, bo limita preslikave $f(z)$, ko bomo z poslali iz zgornje polravnine proti robni točki ν vzdolž vertikalne osi, enaka ν. Kar pa pomeni, da je ν negibna točka preslikave f in zato mora biti po lemi 4.14 točke i) α negibna točka preslikave g.



SLIKA 8. Zoževanje horocikla v zgornji polravnini, ki je tangenten na realno os v Denjoy-Wolffovi robni negibni točki.

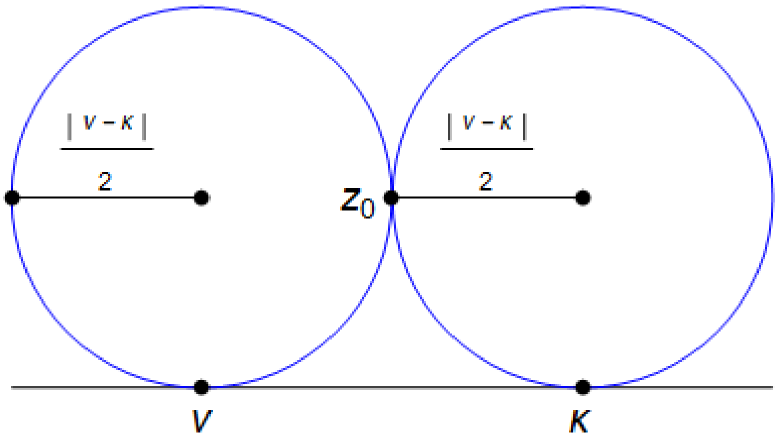
Iz lastnosti zoževanja horociklov, ki so tangentni na realno os v robni negibni točki ν, sledi, da je $\mathrm{Im}(f(z)) \leq \mathrm{Im}(z)$, ko je z na vertikalni osi, ki je pravokotna na realno os v robni negibni točki ν. Ekvivalentno velja $\frac{\mathrm{Im}(f(z))}{\mathrm{Im}(z)} \leq 1$, ko je z na vertikalni osi, ki je pravokotna na realno os v robni negibni točki ν.

Po lemi 4.12 limita kvocienta $\lim_{\substack{x=\nu \\ y\to 0}} \frac{\mathrm{Im}(f(z))}{\mathrm{Im}(z)} \leq 1$ obstaja, ko gre z iz zgornje polravnine proti robni negibni točki ν vzdolž vertikalne osi in je pozitivno število, tako bo vrednost limite kvocienta $f'(\nu) \in (0, 1]$.

Po lemi 4.14 točke ii) je odvod preslikave f v robni negibni točki ν enak odvodu preslikave g v robni negibni točki α enotskega diska. Kar pa pomeni, da je $g'(\alpha) \in (0, 1]$ in bo zato α Denjoy-Wolffova robna negibna točka.

Po lemi 4.33 smo videli, da preslikava g zožuje horocikle v Denjoy-Wolffovi robni negibni točki α enotskega diska. Denimo, da imamo sedaj poleg Denjoy-Wolffove robne negibne točke α še vsaj eno robno negibno točko $\beta \in \partial\Delta \backslash \{\alpha\}$. Če velja $g'(\beta) \leq 1$, potem po lemi 4.35 preslikava g zožuje horocikle, ki so tangentni na enotski disk v robni negibni točki β. Zato po lemi 4.14 točk i) in iv) preslikava f zožuje horocikle, ki so tangentni na realno os v robnih točkah $\nu = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\alpha)$ in $\kappa = \tau_{\zeta,\varphi}^{-1}(\beta)$.

Izberimo dva horocikla s polmeroma $\frac{|\nu-\kappa|}{2}$ tako, da bo eden tangenten na realno os v robni točki ν in drugi tangenten na realno os v robni točki κ. Ta dva horocikla sta disjunktna in se sekata v natanko eni notranji točki $z_0 = \min(\nu, \kappa) + \frac{|\nu-\kappa|+|\nu-\kappa|i}{2}$, ki ju poskuša preslikava f zožiti v en in drug horocikel, kar pa pomeni, da je z_0 notranja negibna točka preslikave f in po lemi 4.14 točke v) ima tudi preslikava g notranjo negibno točko, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da preslikava g nima notranjih negibnih točk.



SLIKA 9. Horocikla v zgornji polravnini tangentna na realno os v robnih negibnih točkah ν in κ z enakima evklidskima polmeroma.

Torej je $g'(\beta) > 1$ in po trditvi 4.29 sledi $g'(\beta) \geq \frac{1}{g'(\alpha)}$. □

Opomba 4.36. Iz dokaza Denjoy-Wolffove trditve opazimo, da je Denjoy-Wolffova robna negibna točka ena sama, saj vrednost njenega odvoda leži na intervalu $(0, 1]$. V vseh ostalih robnih negibnih točkah je vrednost odvodov večja od ena, kar pa pomeni, da ima zaporedje iz leme 4.32 natanko eno stekališče, ki je hkrati tudi limita tega zaporedja.

Zgled 4.37. Vzemimo preslikavo

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z} \right)^2.$$

Za to preslikavo velja, da je nekonstantna in holomorfna na zaprtem enotskem disku. Da je preslikava holomorfna povsod, kjer je definirana, je očitno, saj je racionalna preslikava v z. Vse, kar je potrebno videti, je, da je definirana na zaprtem enotskem disku. Edini pol ima v točki -2, ki leži izven zaprtega enotskega diska.

Preslikava slika iz zaprtega enotskega diska v zaprt enotski disk, velja namreč $|g(z)| = \left|(-\varphi_{-\frac{1}{2}}(z))^2\right| = \left|\varphi_{-\frac{1}{2}}(z)\right|^2 \leq 1$, saj po trditvi 3.1 točke iv) za vsak z iz zaprtega enotskega diska preslikava $\varphi_{-\frac{1}{2}}$ slika v zaprt enotski disk.

Negibne točke preslikave g zadoščajo pogoju

$$\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z} \right)^2 = z.$$

Ekvivalentno lahko zapišemo

$$\frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}z\right)^2} - z = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - z\left(1 + \frac{1}{2}z\right)^2 = 0.$$

Spremenljivko z smo nesli na levo stran enačbe in izraz poenostavili tako, da smo ga pomnožili z imenovalcem

$$z^2 + z + \frac{1}{4} - z - z^2 - \frac{1}{4}z^3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(z^3 - 1) = 0$$

enačbo poenostavimo in opazimo, da so negibne točke rešitve enačbe $z^3 = 1$

$$z^3 = e^{2\pi i k} \Leftrightarrow z = e^{\frac{2\pi i k}{3}} \text{ za } k = -1, 0, 1.$$

Tako dobimo množico negibnih točk preslikave g, ki ležijo na robu enotskega diska

$$\left\{1, e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Odvodi v robnih negibnih točkah so enaki $g'(1) = \frac{2}{3}$, $g'\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2$. Te rezultate dobimo tako, da izračunamo odvod preslikave g

$$g'(z) = \left((-\varphi_{-\frac{1}{2}}(z))^2\right)' = 2(\varphi_{-\frac{1}{2}}(z))(\varphi'_{-\frac{1}{2}}(z))$$

po trditvi 3.1 točke v) smo upoštevali definicijo odvoda preslikave $\varphi_{-\frac{1}{2}}$

$$2\left(\frac{-\frac{1}{2} - z}{1 - \overline{\left(-\frac{1}{2}\right)}z}\right)\left(\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|^2 - 1}{\left(1 - \overline{\left(-\frac{1}{2}\right)}z\right)^2}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{2z+1}{2+z}\right)\left(\frac{-3}{(2+z)^2}\right) = \frac{12z+6}{(2+z)^3} = \frac{12z+6}{z^3 + 6z^2 + 12z + 8}$$

in smo enačbo poenostavili. Izračunajmo sedaj vrednosti odvodov v robnih negibnih točkah preslikave g. Izračunajmo vrednost odvoda preslikave g v točki ena

$$g'(1) = \frac{12(1) + 6}{(1)^3 + 6(1)^2 + 12(1) + 8} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

Izračunajmo vrednost odvoda preslikave g v točkah $e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$

$$g'\left(e^{i\frac{\pm 2\pi}{3}}\right) = \frac{12\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) + 6}{\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 + 6\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 + 12\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) + 8}$$

vrednosti $e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ vstavimo v enačbo

$$= \frac{12\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) + 6}{\left(e^{\pm i2\pi}\right) + 6\left(e^{\pm i\frac{4\pi}{3}}\right) + 12\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) + 8}$$

$$= \frac{12\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6}{1 + 6\left(-\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 12\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 8}.$$

Enačbo poenostavimo tako, da upoštevamo rotacije in pogledamo vrednost izraza v kartezični obliki ter poenostavimo

$$\frac{\left(-6 \pm 6i\sqrt{3}\right) + 6}{1 + 3\left(-1 \mp i\sqrt{3}\right) + 6\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right) + 8} = \frac{\pm 6i\sqrt{3}}{\pm 3i\sqrt{3}} = 2.$$

Po poenostavitvi izraza dobimo vrednost odvoda v robnih negibnih točkah.

Očitno velja $g'\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) > 1$ in recipročni pogoj $g'\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) \geq \frac{1}{g'(1)}$. Opazimo, da je

$$g'\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2 > 1.$$

In preverimo recipročni pogoj

$$g'\left(e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2 \geq \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{g'(1)}. \qquad \diamondsuit$$

Opomba 4.38. V diplomskem delu smo zaradi lažjega dokazovanja privzeli holomorfnost na robu enotskega diska in na robu zgornje polravnine, čeprav bi bilo dovolj privzeti holomorfnost samo v okolici robnih negibnih točk. Tako Robni princip maksima za holomorfne preslikave, Juliajeva neenakost in Wolffova trditev veljajo za nekonstantne holomorfne preslikave.

Slovar strokovnih izrazov

Anti-calculus proposition robni princip maksima za holomorfne preslikave
biholomorphism biholomorfizem - bijektivna in holomorfna preslikava, ki ima holomorfen inverz
compact set kompaktna množica - množica, pri kateri za vsako odprto pokritje obstaja končno podpokritje
conformal mapping konformna preslikava - holomorfna preslikava, ki ohranja kote
connected component povezana komponenta - odprta povezana množica
holomorphic mapping holomorfna preslikava
horocycle horocikel
Julia's inequality Juliajeva neenakost
Maximum principle Princip maksima
Wirtinger derivatives Wirtingerjevi odvodi
Wolff's proposition Wolffova trditev

Literatura

[1] J. Bak in D. J. Newman, *Complex analysis 3rd ed.*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2010.
[2] H. P. Boas, *Julius and Julia: Mastering the art of the schwarz lemma*, Amer. Math. Monthly **117** (2010) 770–785; dostopno tudi na `www.jstor.org/stable/10.4169/000298910x521643`.
[3] R. B. Burckel, *Iterating analytic self-maps of discs*, Amer. Math. Monthly **88** (1981) 396–407, dostopno tudi na `www.jstor.org/stable/2321822`.
[4] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010; dostopno tudi na `www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf`.
[5] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 2*, verzija 10. 8. 2010, [ogled 24. 6. 2019], dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf`.
[6] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2017.
[7] *Schwarz lemma*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 11. 7. 2019], dostopno na `www.wikipedia.org/wiki/Schwarz_lemma`.