UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Žiga Kodrič

Robustne mere tveganja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Damjan Škulj

Ljubljana, 2019

Kazalo

Robustne mere tveganja

Povzetek

V globaliziranem finančnem svetu so primerne in učinkovite mere tveganja osrednjega pomena za njegovo stabilnost. V zadnjem času se vse več poudarka daje lastnostim, katerim naj bi mere tveganja zadoščale.

V mojem delu diplomskega seminarja predstavim eno izmed njih in sicer robustnost. Mera tveganja je robustna, če je neobčutljiva na napačno specifikacijo modela in na majhne spremembe podatkov. Robustnost zagotavlja, da so vse finančne institucije obravnavane enako, glede na tveganje, ki so mu izpostavljene. Zato je smiselna zahteva za mere tveganja, ki so predpisane z baselskimi dogovori. Gre za mednarodne finančne dogovore, ki urejajo regulacijo bank. V delu diplomskega seminarja preučim robustnost pomembnejših mer tveganja in pokažem, da so mere tveganja iz baselskih dogovorov robustne.

Robust risk measures

Abstract

In globalized financial world, adequate and effective risk measures are central to its stability. More and more emphasis has recently been put on the characteristics which risk measures should fulfill.

In my diploma seminar I introduce one of them, robustness. A risk measure is robust if it is insensitive to wrong specification of the model and small changes in data. It ensures that all financial institutions are treated equally, given the risks they bear. Robustness therefore makes sense for risk measures that are prescribed by the Basel agreements. These are international financial agreements governing the regulation of banks. In the Diploma Seminar thesis, I examine the robustness of major risk measures and show that the measures prescribed by Basel agreements are robust.

Math. Subj. Class. (2010): 62P05, 97M30

Ključne besede: mera tveganja, tvegana vrednost, baselski dogovori, robustnost

Keywords: risk measure, value at risk, Bassel Accords, robustness

1. Uvod

Mere tveganja so danes v središču zanimanja finančne industrije. Vsaka kriza nam znova pokaže, kako velika je potreba po primernih merah tveganja. Napačna izbira le teh lahko ogrozi celoten bančni sistem. Neprimerne mere pa lahko povzročijo, da se tveganja na nekaterih trgih preveč podcenjujejo (primer hipotekarnega trga v ZDA). Hkrati so mere tveganja zajete tudi v nekaterih mednarodnih finančnih dogovorih. Najpomebnejši primer so dogovori iz Basla, ki definirajo mero tveganja glede na katero se določa kapitalska ustreznost bank. Izbira primerne mere tveganja je zato izredno pomembna ne le za investitorje in banke, ampak za celotno gospodarstvo. Hkrati pa se pojavljaja tudi vprašanje, katerim lastnostim naj zadoščajo le te.

V mojem delu diplomskega seminarja najprej definiram mere tveganja in predstavim nekatere pomembnejše družine mer tveganja. V drugem poglavju predstavim baselske dogovore in mere tveganja, ki nastopajo v njih. V naslednjem poglavju definiram statistike tveganja ter predstavim dva načina za izračun le teh. Nato formalno definiram robustnost z poudarkom na teoriji, ki jo potrebujemo za preučevanje robustnosti tvegane vrednosti. V šestem poglavju robustnost preverim za nekatere mere tveganja in pokažem, da je tvegana vrednost robustna mera tveganja. Nato v naslednjem poglavju definiram naravne statistike tveganja. Gre za družino statistik tveganja, ki vključujejo tvegano vrednost in za katero se izkaže, da vsebuje poddružino, ki je robustna. Pokažem tudi, da so mere tveganja iz baselskih dogovorov robustne mere tveganja. V zadnjem poglavju predstavim še rezultate, ki sem jih pridobil pri preučevanju robustnosti mer tveganja v programskem jeziku R.

2. Mere tveganja

Mero tveganja definiramo na naslednji način:

Definicija 2.1. Naj bo Ω množica vseh stanj v času opazovanja in naj bo $\mathcal{L}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ množica slučajnih spremenljivk, ki ponazarjajo finančno izgubo. Potem je *mera tveganja* preslikava $\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, ki zadošča naslednjim lastnostim:

(1) $\rho(0) = 0$;
(2) $\rho(X + a) = \rho(Z) + a, X \in \mathcal{L}, a \in \mathbb{R}$;
(3) Če $X_1, X_2 \in \mathcal{L}, X_1 \leq X_2$, potem $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.

Prva zahteva pravi, da mora biti tveganje enako nič, če nimamo nobene naložbe. Drugo zahtevo lahko interpretiramo v smislu, da nam zagotova izguba v velikosti a prinese k tveganju točno a. Tretja zahteva pa pravi, da če je izguba X_1 manjša od izgube X_2 v vsakem stanju, potem mora biti tveganje za X_1 manjše od tveganja X_2.

Mere tveganja glede na uporabo ločimo na eksterne in interne. Interne se uporabljajo za upravljanje s tveganji znotraj določene institucije (na primer v bankah). Eksternepa se uporabljajo za zunanje nadzore in se zato nanašajo na vse relevantne institucije. Interne so zasnovane tako, da zasledujejo cilje delničarjev oziroma managerjev družb, medtem ko so eksterne uporabljene s strani agencij, ki preverjajo stabilnost družbe. Mera, ki se uporablja za eksterni nadzor, torej ni nujno primerna za interni nadzor in obratno.

2.1. **Tvegana vrednost (VaR).**

Tvegana vrednost je ena najbolj pogosto uporabljanih mer tveganja. Uporabljajo jo tako banke, kot regulatorji. Meri največjo možno izgubo, ki naj bi jo utrpel investitor v določeno finančno naložbo ob danem intervalu zaupanja in v določenem obdobju. VaR je torej kvantil pričakovane izgube glede na časovno obdobje[9].

Definicija 2.2. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki ponazarja izgubo in $F(x)$ njena porazdelitvena funkcija. Naj bo $\alpha \in (0,1)$. Potem je VaR pri stopnji zaupanja α definiran kot:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\} = F^{-1}(\alpha)$$

.

Za izračun VaRa poznamo več metod, ključne pa so naslednje tri:

- metoda variance-kovariance,
- pristop na podlagi zgodovinskih podatkov,
- Monte Carlo simulacija.

VaR ni dosledna mera tveganja, zato različni pristopi za njegov izračun dajejo različne rezultate. Nedoslednost izhaja iz dejstva, da pri vsakem izračunu uporabimo drugačno predpostavko. Pri metodi variance-kovariance predpostavimo, da je izguba porazdeljena normalno. Pri pristopu na podlagi zgodovinskih podatkov pa porazdelitveno funkcijo izračunamo glede na empirične podatke [9].

2.2. **Koherentne mere tveganja.** Artenzer s soavtorji [2] je predlagal koherentnost mer tveganja. Kdaj je mera koherentna, nam pove naslednja definicija.

Definicija 2.3. Mera tveganja $\rho\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ je koherentna, če zadošča naslednjim aksiomom:

(i) $\rho(aX+b) = a\rho(X) + b, \forall a \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{L}$;
(ii) $\rho(X) \leq \rho(Y), \forall X \leq Y$;
(iii) $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{L}$.

Zaradi pogoja subaditivnosti se izkaže, da tvegana vrednost ni koherentna mera tveganja[11]. Avtorji so v [2] kot mero, ki naj bi nadomestila VaR predlagali *pričakovani primanjkljaj*, ki ga definiramo kot povprečje α repne porazdelitve slučajne spremenljivke.

Definicija 2.4. Mera tveganja pričakovani primanjkljaj je definirana kot:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \text{povprečje } \alpha\text{-repne porazdelitve X},$$

kjer je α-repna porazdelitev slučajne spremenljivke X definirana s porazdelitveno funkcijo:

$$F_{\alpha,X}(x) = \begin{cases} 0 & x < VaR_\alpha(X) \\ \frac{F(x)-\alpha}{1-\alpha} & x \geq VaR_\alpha(X) \end{cases}$$

Izračunamo jo kot $\mathrm{ES}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\alpha,X}(x)$. Pričakovani primanjkljaj in pogojna tvegana vrednost (CVaR), ki sta jo predlagala Rockafellar in Uryasev[13], sta enaki meri tveganja.

Pomanjkljivost koherentnih mer tveganja je, da ne vsebujejo tvegane vrednosti. Ta namreč ni subaditivna.

2.3. **Spektralne mere tveganja.** Širša družina mer tveganja, ki vsebuje tudi ES, se imenuje *spektralne mere tveganja.* Vse koherentne mere tveganja so članice te družine[12]. Definiramo jo na naslednji način.

Definicija 2.5. Naj bo $\phi : [0,1] \to (0,\infty)$ gostota verjetnosti na [0,1] in naj velja, da je $u \to \phi(u)$ padajoča. Potem je spektralna mera tveganja definirana kot:

$$\rho_\phi(F) = \int_0^1 \mathrm{VaR}_u(F)\phi(u)du.$$

2.4. **Zavarovalne mere tveganja.** Definirajmo najprej *komonotonost*:

Definicija 2.6. $\tilde{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^m,) \in \mathbb{R}^n$ in $\tilde{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^m) \in \mathbb{R}^n$ sta *komonotona*, če za $\forall i$, $\forall 1 \leq j,\, k \leq n_i$ velja $(x^i_j - x^i_k)(y^i_j - y^i_k) \geq 0$.

Avtorji v [15] definirajo *zavarovalne mere tveganja* na sledeči način:

Definicija 2.7. Mera tveganja $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ je zavarovalna mera tveganja, če zadošča pogojem:

(i) $\rho(X) = \rho(Y)$, če imata X in Y enako porazdelitev;
(ii) $\rho(X) \leq \rho(Y)$, če $X \leq Y$ skoraj gotovo, tj. $P(\rho(X) > \rho(Y)) = 0$;
(iii) $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$, če sta X in Y komonotoni;
(iv) zveznost: $\lim_{d \to 0} \rho((X - d)^+) = \rho(X^+)$, $\lim_{d \to -\infty} \rho(\max(X, d)) = \rho(X)$ in $\lim_{d \to \infty} \rho(\min(X, D)) = \rho(X)$, kjer je $f^+ = \max\{f, 0\}$;
(v) $\rho(1) = 1$.

Tvegana vrednost je zavarovalna mera tveganja. Izkaže pa se, da VaR izračunan na podlagi različnih scenarijev zaradi zahteve komonotone aditivnosti ni vsebovan v tej družini[11].

2.5. **Mere na podlagi porazdeliteve.** Definirajmo še družino *porazdelitvenih mer tveganja.*

Definicija 2.8. Pravimo, da je mera tveganja $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ porazdelitvena mera tveganja, če velja $\rho(X) = \rho(Y)$, kadar je $F_X = F_Y$.

Za nas je pomembna naslednja podmnožica mer tveganja na podlagi porazdelitve:

$$\rho_m(F) = -\int_0^1 \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\} m(d\alpha), \tag{1}$$

kjer je m verjetnostna mera na [0,1]. Z D_m označimo še množico porazdelitev, kjer je integral končen. Ta podmnožica vključuje tako tvegano vrednost kot pričakovani primankljaj.

3. Baselski dogovori

Baselski komite za nadzor bank (BCBS) je bil ustanovljen leta 1974 s strani guvernerjev centralnih bank članic G10 (deset najbolj industrijsko razvitih držav), kot odgovor na propad bank BankhausHerstatt v Nemčiji in Franklin National Bank v ZDA. Baselski dogovori, predlagani s strani BCBS, se osredotočajo na obvladovanje tveganja bank in finančnih trgov. Cilj dogovorov je zagotoviti, da imajo finančne institucije dovolj kapitala, da lahko poplačajo vse obveznosti in prenesejo nepričakovane izgube. Do sedaj so bili sprejeti trije dogovori.

3.1. **Basel I.** Prvi dogovor je bil sprejet leta 1988. Osredotoča se predvsem na kreditna tveganja. Cilja dogovora sta okrepiti stabilnost mednarodnega bančnega sistema in preprečiti neenakost med mednarodnimi bankami zaradi razlik v državnih kapitalskih zahtevah. Minimalne kapitalske zahteve postavi na 8% utežnega tveganja naložb. Naložbe glede na tveganje razdeli v pet razredov:

(1) 0% - depoziti, dolg centralne banke in države,
(2) 10% - dolg javnega sektorja,
(3) 20% - dolg bank iz držav v razvoju, dolg držav v razvoju,
(4) 50% - hipoteke rezidentov,

(5) 100% - dolg privatnega sektorja, nepremičnine, finančni instrumenti drugih bank.

Razred 0% pomeni, da naložba v tem razredu ne nosi tveganja in se pri izračunu ne upošteva. Naložbe v tretjem razredu veljajo za manj tvegane in se pri izračunu tveganja upoštevajo le 20%. Medtem ko naložbe v zadnjem razredu veljajo za zelo tvegane in se v izračunu upoštevajo v celoti.

Basel I je nudil bankam po vsem svetu učinkovit okvir, s katerim so lahko ocenjevale svojo kapitalsko ustreznost. Kot njegovo največjo pomanjkljivost se navaja, da se osredotoča le na kreditna tveganja, medtem ko so banke soočene z različnimi vrstami tveganja. Prav tako je 8% razmerje vedno enako, čeprav tveganje ni konstantno. V času gospodarske krize se poveča, v času rasti pa zmanjša.

3.2. **Basel II.** Drugi dogovor iz Basla je bil predstavljen leta 2004, sprejet pa 2006. Basel II je osnovan na treh stebrih:

(1) minimalne kapitalske zahteve,
(2) regulativni nadzor,
(3) tržna disciplina.

Prvi steber posodobi minimalne regulatorne kapitalske zahteve (kapital, ki ga mora banka imeti zaradi tveganja). Loči kreditna in operativna tveganja, ter določi različne načine za njihov izračun. Bankam prav tako dovoli, da pri določanju tveganja svojih naložb uporabljajo interne modele. Tako se za izračun kapitalskih zahtev lahko uporablja tvegana vrednost, ki se računa dnevno. S tem tveganje ni več konstantno, ampak se spreminja glede na stanje gospodarstva.

Z regulativnim nadzorom dogovor zahteva, da regulatorji zagotovijo učinkovito ocenjevanje kapitalske ustreznosti bank, glede na njihovo podvrženostjo tveganju. Prav tako zahteva, da nadzorujejo vzdrževanje minimalnega kapitala in da posredujejo v primeru, ko banke te ravni ne dosegajo.

Dogovor v zvezi s tržno disciplino pa zahteva, da banke razkrijejo določeno izpostavljenost tveganju, strukturo kapitala, proces določanja tveganja in kapitalsko ustreznost. S tem naj bi okrepili položaj vseh deležnikov na trgu in spodbudili banke, da imajo večji delež kapitala.

Definira tudi mero tveganja, s katero naj bi se kapitalska ustreznost ocenjevala (glej poglavje 7).

3.3. **Basel III.** Basel III je najnovejši dogovor in gre za naslednika dogovorov Basel I in Basel II. Nastal je kot odgovor na finančno krizo v letih 2007-2008. Osredotoča se na povečanje odpornosti posameznih bank. S tem naj bi se zmanjšalo tveganje šokov na celotnem trgu. Cilji dogovora so okrepiti globalni bančni kapital, likvidnostni položaj in odpornost bank na šoke. Basel III je uvedel nove zahteve v zvezi z regulatornim kapitalom za velike banke, s čimer naj bi blažile ciklične spremembe v svojih bilancah. Tako morajo banke v času kreditne ekspanzije imeti na voljo dodaten kapital, v času kreditnega krča pa se kapitalske zahteve ublažijo. Prav tako predlaga razvrščanje bank v skupine glede na velikost in pomembnost banke za gospodarstvo. Za sistemsko pomembne banke veljajo višje kapitalske zahteve. Z Baslom III so uvedene zahteve po večji likvidnosti, kot zaščita pred čezmernimi posojili in kot zagotovilo, da v primeru finančne krize likvidnost banke ni ogrožena.

3.4. **Mere tveganja v baselskih dogovorih.** Baselski dogovori uvajajo mere tveganja za določanje kapitalske ustreznosti bank. Prvi poskusi definiranja mere za izračun se pojavijo že v prvem dogovoru, z Baslom II pa se uvede eksaktna mera.

Tretji dogovor mero občutno izboljša, ter doda novo mero namenjeno predvsem večjim bankam. Načeloma gre za eksterne mere, vendar dogovor dopušča, da regulatorji oz. banke pri izračunu le teh deloma uporabljajo svoje podatke. Basel II uvaja formulo za izračun minimalnih kapitalskih sredstev (to so sredstva, ki so enaka sredstvom, ki jih je banka vložila, pomnožena s tehtano povprečno ceno teh sredstev) banke glede na dan t:

$$c_t = \max\left\{\mathrm{VaR}_{t-1}, k \cdot \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{VaR}_{t-i}\right\}, \tag{2}$$

kjer se VaR izračuna glede na slučajno spremenljivko X, ki ponazarja izgubo banke in je k konstanta večja od 3. k določi regulator glede na primernost internih modelov banke. VaR_{t-i} je 10 dnevni VaR pri stopnji zaupanja $\alpha = 99\%$ izračunan na dan $t-i$, $i = 1, \ldots, 60$. Izračunan je na podlagi podatkov, ki so znani na dan $t-i$. VaR_{t-i} portfelja, ki vsebuje opcije, je tako izračunan pogojno na vrednosti opcij, donosnosti do dospetja, ipd. na dan $t-i$. Tvegana vrednost, s katero je določena mera tveganja v Baslu II, je tako tvegana vrednost izračunana na podlagi 60 različnih scenarijev[16]. $\mathrm{VaR}_{t-i}(X)$ je običajno ocenjen na podlagi podatkovnega niza $\tilde{x}^i = (x_1^i, ..., x_{n_i}^i \in \mathbb{R}^{n_i})$, ki se izračuna na podlagi zgodovinskih podatkov ali pa z Monte Carlo simulacijami[9].

Mere tveganja, ki so izračunane na podlagi večjega števila opazovanj (kot je mera določena z Baslom II), so prociklične[1]. Mera je v primeru gospodarske krize visoka, v času gospodarske rasti pa nizka. Cikličnost onemogoča efektivno regulacijo. Izkaže se tudi, da mera ni dovolj konzervativna. V primeru finančne krize, ki se je začela 2008, so bile izgube bank precej večje od kapitalskih zahtev, ki so jih postavili glede na mero[16].

Baselski komite je kot odgovor na te probleme v dogovoru Basel III predlagal dopolnjeno mero. V meri se upoštevajo tudi scenariji, ki izrazito slabo vplivajo na stanje banke (npr. scenarij zadnje finančne krize). Definirana je kot:

$$c_t = \max\left\{\mathrm{VaR}_{t-1}, k \cdot \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{VaR}_{t-i}\right\} + \max\left\{\mathrm{sVaR}_{t-1}, l \cdot \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{sVaR}_{t-i}\right\}, \tag{3}$$

kjer je VaR_{t-i} enak kot v prejšnji meri in k ter l konstanti večji od 3. sVaR_{t-i} je tvegana vrednost pod pogoji stresa na dan $t-i$ in pri stopnji zaupanja $\alpha = 99\%$. Izračunan je glede na scenarij v katerem banka doživi hude izgube. Dodatni kapital, ki ga s tem zahtevamo, blaži procikličnost mere in bistveno poveča kapitalske zahteve[16].

Basel III uvaja tudi dodatne kapitalske zahteve (IRC). Dodatni kapital je namenjen zaščiti pred tveganjem v primeru neplačil, kreditne migracije, ipd. IRC kapital na dan t je definiran kot:

$$\mathrm{IRC}_t = \max\left\{\mathrm{VaR}_{t-1}^{ir}, \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{VaR}_{t-i}^{ir}\right\}, \tag{4}$$

kjer je VaR_{t-1}^{ir} definiran kot 99% VaR knjigovodske izgube zaradi zgoraj omenjenih tveganj, glede na enoletno obdobje, izračunan na dan $t-i$. Izračunan mora biti pod predpostavko, da je porftelj uravnotežen glede na želeno tveganje in da imajo vse manj likvidne naložbe dolgo obdobje likvidnosti[3]. Najnovejši dogovor, ki pa še ni dokončno zaživel, predlaga, da se za izračun kapitalskih zahtev namesto VaR-a uporablja CVaR (oz. ekvivalentna mera ES). V okviru nove mere tveganja se kapitalske zahteve za skupino trgovalnih instrumentov, ki imajo podobne dejavnike tveganja, kot so kapital, kredit, obrestna mera in valuta, opredeli kot CVaR izgube, ki jo lahko povzroči ta skupina trgovalnih instrumentov[16]. Izračunan naj bi bil na podlagi stresnih scenarijev. Mera je definirana kot:

$$c_t = \max\left\{\mathrm{sCVaR}_{t-1}, \frac{l}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{sCVaR}_{t-i}\right\},$$

kjer je sCVaR_{t-i} CVaR pod pogoji stresa izračunan na dan $t-i$. Stopnja zaupanja pa naj bi bila manjša od 99%, saj je CVaR pri visokih stopnjah izredno težko računati[16].

4. Statistike tveganja

Recimo, da imamo mero tveganja ρ, s katero želimo oceniti tveganje našega portfelja. Verjetnostna izguba je definirana kot slučajna spremenljivka $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Potrebujemo neko oceno porazdelitvene funkcije F_X, glede na katero lahko z ρ ocenimo tveganje. Funkcijo, ki ocenjuje naše tveganje imenujemo *statistika tveganja*.

Definicija 4.1. Naj bo $\mathcal{X} = \cup_{n\geq 1}\mathbb{R}^n$ množica vseh možnih podatkov, ρ mera tveganja in $M : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ocena porazdelitvene funkcije izgube. Potem je statistika tveganja preslikava $\hat{\rho} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, definirana kot

$$\mathbf{x} \to \hat{\rho}(\mathbf{x}) = \rho(\hat{F}_X),$$

ki ocenjuje $\rho(F_X)$ glede na podatke $\mathbf{x}$.

Za izračun statistike tveganja poznamo dva načina. Prva možnost je, da jo izračunamo na podlagi zgodovinskih podatkov. Lahko pa jo dobimo s parametričnim pristopom, torej tako, da ocenimo njene parametre.

4.1. Zgodovinski pristop.

Naj bo ρ mera tveganja. Statistiko tveganja $\hat{\rho}^h$ lahko pridobimo na podlagi zgodovinskih podatkov, če uporabimo ρ na empirično pridobljeni porazdelitveni funkciji $\hat{F}_{\mathbf{x}} = F_{\mathbf{x}}^{emp}$:

$$\hat{\rho}^h = \rho(F_{\mathbf{x}}^{emp}).$$

Za mero tveganja ρ_m oblike (1) je statistika tveganja potem[12]:

$$\hat{\rho}_m^h = \rho_m(F_{\mathbf{x}}^{emp}) = \sum_{i=1}^{n} w_{n,i}x_{(i)}, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kjer je $x_{(k)}$ k-ta vrstilna statistika (po velikosti urejen niz $\{x_i\}_{i\leq n}$, kjer je $x_{(1)}$ najmanjši element), $w_{n,i} = m((\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])$ za $i = 1, \ldots, n-1$ in $w_{n,n} = m(\frac{n-1}{n}, 1)$.

Primer 4.2. Statistika tveganja za VaR izračunana na podlagi zgodovinskih podatkov, je:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = -x_{(\lfloor n\alpha\rfloor+1)}.$$

◊

4.2. **Parametrični pristop.** Pri parametričnem pristopu za oceno porazdelitve izgube F_X ocenjujemo parametre na podlagi podatkov. Z $\mathcal{D}$ označimo množico vseh porazdelitvenih funkcij. Izberimo si družino parametrov porazdelitve izgube $\mathcal{D}_\Theta = (F_\theta)_{\theta\in\Theta} \subset \mathcal{D}$, kjer je Θ niz parametrov. Predpostavimo, da D_θ vsebuje našo porazdelitev. Za mero tveganja $\rho : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, lahko preslikamo parameter porazdelitve v oceno tveganja kot:

$$r(\theta) = \rho(F_\theta),\ \theta \in \Theta.$$

Za vsak parameter θ lahko potem glede na podatke dobimo njegovo oceno $\hat{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$. Statistika tveganja, pridobljena na parametričen način je torej:

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \rho(F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}) = r(\hat{\theta}(\mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

Oceno izgube na parametričen način pridobimo z rešitvijo problema:

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \max_{\theta\in\Theta} \sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i, \theta);\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X},$$

za neko funkcijo Ψ. Če ima F_θ pozitivno gostoto f_θ in za Ψ vzamemo $\Psi = \log f_\theta(x)$, potem oceno izgube pridobimo z metodo največjega verjetja. Statistiko tveganja bomo izračunali za lokacijsko-merilne porazdelitvene funkcije.

Definicija 4.3. Naj bo $F \in \mathcal{D}$ porazdelitev. Družina lokacijsko-merilnih porazdelitvenih funkcij glede na F je:

$$\mathcal{D}_F = \left\{ F_{\mu,s}\,;\ \mu \in \mathbb{R}, s > 0 \text{ kjer je } F_{\mu,s} = F\left(\frac{x-\mu}{s}\right) \right\}.$$

Naj bo sedaj mera tveganja ρ oblike (1). Potem velja[12]:

$$\rho(F_{\mu,s}) = -\mu + \rho(F)s.$$

Statistika tveganja $\hat{\rho}$ pridobljena z metodo največjega verjetja je torej za vse lokacijsko-merilne funkcije:

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = -\hat{\mu} + \rho(F)s.$$

Primer 4.4. Izračunajmo statistiko tveganja za Laplaceovo porazdelitev. Laplaceova porazdelitev ima gostoto:

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp(-\frac{|x-\mu|}{\lambda}),$$

kjer sta μ in λ parametra. Njuni oceni pridobljeni z metodo največjega verjetja sta:

$$\hat{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \hat{s}(\mathbf{x}) = \hat{\lambda}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \hat{\mu}(\mathbf{x})|.$$

Določiti moramo še c. Recimo, da računamo tvegano vrednost. Potem je:

$$c = \mathrm{VaR}_\alpha(F) = -\log(2\alpha),\ \alpha \in (0, \frac{1}{2}].$$

Statistika tveganja je torej:

$$\hat{\rho} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \log(2\alpha)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \hat{\mu}(\mathbf{x})|.$$

5. Robustnost

Mera tveganje je robustna, če je neobčutljiva na:

(1) napačno specifikacijo modela,
(2) majhne spremembe podatkov.

Pri določanju kapitalske ustreznosti bank regulatorji določijo mero tveganja in hkrati dovolijo bankam, da pri izračunu le te uporabljajo svoje interne modele in podatke. Vendar so ti podatki lahko pomankljivi in nezanesljivi, modeli pa ne dovolj natančni. Zato morajo biti eksterne mere neobčutljive na pomankljivost modelov in na manjše spremembe podatkov. Eksterna mera tveganja mora biti jasna, stabilna in primerna za uporabo za vse relavantne institucije, ne glede na to na kakšne modele se le te zanašajo. Če se pravilni model ne da določiti, lahko dve instituciji z enakima portfeljema uporabita različna interna modela. Zaradi različnih modelov lahko regulator od njiju zahteva različno kapitalsko ustreznost, čeprav bi morala biti enaka, saj nosita enako tveganje. Zato mora biti mera robustna, saj tako iz vidika bank kot regulatorjev, mora biti stopnja kapitala enaka za enako izpostavljenost tveganju. Prav tako mora biti mera robustna, ker lahko drugače prihaja do manipulacij. Banke lahko uporabljajo prilagojene podatke, kar lahko občutno zmanjša zahtevano raven kapitala[11].

5.1. Definicija robustnosti.

Za definicijo robustnosti potrebujemo razdaljo med dvema porazdelitvenima funkcijama. Definirajmo Levyevo razdaljo.

Definicija 5.1. Naj bo $\mathcal{D}$ množica vseh konveksnih porazdelitvenih funckija na $\mathbb{R}$. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki in $F, G \in \mathcal{D}$ njuni porazdelitveni funckiji. Levyeva razdalja med F in G je definirana kot:

$$d(F,G) = \inf\{\varepsilon > 0 : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Več o Levyevih razdaljah in dokaz, da je dana metrika res metrika, najdemo v [7]. Definirajmo še naslednji pojem.

Definicija 5.2. Naj bo ρ mera tveganja in $\widehat{\rho}$ statistika tveganja. Naj bo $\mathcal{X}$ množica slučajnih spremenljivk, ki ponazarjajo izgubo. Za vzorec velikosti $n \geq 1$ in $F \in \mathcal{D}$, definiramo porazdelitveni zakon ocene tveganja:

$$\mathcal{L}_n(\widehat{\rho}, F) \sim \widehat{\rho}(X_1, \ldots, X_n),$$

kjer so $X_1, X_2, \ldots, X_n \in F$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke.

Robustnost lahko sedaj definiramo s pomočjo Levyeve razdalje. Naj bo množica $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ množica porazdelitev možnih izgub. Za $F \in \mathcal{C}$ predpostavimo, da ni izolirana točka. To pomeni, da za nek $\delta > 0$ obstaja $G \in \mathcal{C}$, $G \neq F$, da velja $d(F,G) \leq \delta$.

Definicija 5.3. Statistika tveganja $\widehat{\rho}$ je $C-robustna$ glede na F če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ in $n_0 \geq 1$, da velja:

$$G \in C, d(F,G) \leq \delta \longrightarrow d(\mathcal{L}_n(\widehat{\rho}, F), \mathcal{L}_n(\widehat{\rho}, G)) \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Statistika tveganja je torej $\mathcal{C}$-robustna za F, če majhna sprememba podatkov za F (pri čemer je F še vedno v $\mathcal{C}$) povzroči majhno spremembo v porazdelitvi statistike tveganja. Večja kot je množica $\mathcal{C}$, manjša je verjetnost, da bo statistika robustna.

5.2. **Robustnost statistik tveganja.** Poglejmo si pogoje pri katerih je statistika tveganja robustna. Posebej si bomo pogledali statistike tveganja pridobljene na zgodovinskih podatkih in tiste, pridobljene s parametričnem načinom. V nadaljevanju bo pomemben pojem doslednosti statistike.

Definicija 5.4. Statistika tveganja $\widehat{\rho}$ je dosledna glede na ρ za $F \in D_\rho$, če velja:

$$\mathcal{L}_n(\widehat{\rho}, F) \to \rho(F), \text{ ko gre } n \to \infty.$$

5.2.1. *Zgodovinske statistike tveganja.* Recimo, da lahko porazdelitveno funkcijo F^h, ki nam predstavlja verjetnosto izgubo, pridobimo na podlagi empiričnih podatkov. Potem lahko definiramo zgodovinsko statistiko tveganja $\hat{\rho}^h(x) = \rho(F^h)$. Naslednji izrek poveže robustnost in zveznost.

Izrek 5.5. *Naj bo ρ mera tveganja, $F \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Če je $\widehat{\rho^h}$ dosledna z ρ za vsak $G \in \mathcal{C}$, potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*
(1) zoožitev ρ na $\mathcal{C}$ je zvezna na F
(2) $\widehat{\rho^h}$ je $C-$robustna na F.

Zvezna mera tveganja ρ ima dosledno oceno tveganja na podlagi zgodovinskih podatkov. Zaradi tega dejstva, je posledica prejšnjega izreka naslednja.

Posledica 5.6. *Če je ρ zvezna na $\mathcal{C}$, potem je $\widehat{\rho^h}$ C-robustna za vsak $F \subseteq C$.*

Dokaz. Fiksirajmo $G \in \mathcal{C}$ in naj bo $(X_n)_{n\leq 1}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z porazdelitvijo G. Potem bo Glivenko-Cantellijevemu izreku [12] velja:

$$d(F^{emp}_{\mathbf{X}(\omega)}, G) \longrightarrow 0,$$

ko gre $n \to \infty$ za skoraj vse ω, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Zaradi zveznosti ρ na G za skoraj vse ω velja:

$$\hat{\rho}(\mathbf{X}(\omega)) = \rho(F^{emp}_{\mathbf{X}(\omega)}) \longrightarrow \rho(G),$$

iz česar sledi doslednost $\hat{\rho}$ z ρ na G. Iz izreka 5.5. sledi robustnost $\hat{\rho}$ na $\mathcal{C}$. □

Za nas je pomembna množica, ki jo je definiral Huber[7]. Naj bo m gostota verjetnosti na $[0, 1]$. Množica $\mathcal{A}_m = \{\alpha \in [0, 1]; m(\alpha) > 0\}$ je množica vseh točk α, za katere je m pozitivna.

Izrek 5.7. *Naj bo ρ_m mera tveganja oblike* (1). *Če spekter m ne vsebuje niti 0 niti 1, potem je ρ_m zvezna za vsak $F \in \mathcal{D}$, za katerega velja $inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\} = inf\{x \mid F(x) > \alpha\}$ za vsak $\alpha \in \mathcal{A}_m$.*

5.2.2. *Parametrične statistike.* Naj bo ρ mera oblike (1). Poglejmo si robustnost statistik tveganja pridobljenih na parametričen način z metodo največjega verjetja. Izberimo si $F \in \mathcal{D}$ in fiksirajmo parameter μ, $\mu = \mu_0$. Naj bo f gostota F. Potem lahko definiramo množico $\mathcal{D}_{F,\mu_0} = \{F_{\mu_0,s};\ s > 0\}$. Z $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$ označujemo množici vseh porazdelitvenih funkcij z enim oz. dvema parametroma. Definirajmo funkcijo:

$$\psi(x) = -1 - x\frac{f'(x)}{f(x)},$$

kjer je $f(x)$ gostota glede na F. Z $s(F)$ označimo merilni parameter za F. $s(F)$ je rešitev enačbe[12]:

$$\int \psi \left(\frac{x - \mu_0}{s} \right) dF = 0, \; F \in \mathcal{D}_{F,\mu_0}$$

Če izračunamo merilni parameter za $F_{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$, kjer je F pridobljena glede na neke empirične podatke, potem dobimo oceno parametra $\hat{s}(\mathbf{x})$ definiranega v prejšnjem poglavju.

Primer 5.8. Funkcija ψ za Laplaceovo porazdelitev je enaka[12]:

$$\psi(x) = -1 + |x|.$$

Če vzamemo $\mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_1$, je ocena za s z metodo največjega verjetja enaka:

$$\hat{s}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu_0|.$$

$\diamondsuit$

Spet se izkaže, da je robustnost povezana z zveznostjo. Naslednji izrek nam poveže ta dva pojma.

Izrek 5.9. *Naj bo $\mathcal{D}_\psi$ merilna družina in $s : \mathcal{D}_\psi \to \mathbb{R}^+$ merilna funkcija. Naj bo ψ monotono naraščajoča in liha na $\mathbb{R}^+$. Naj bo definirana tako za pozitivna kot negativna števila. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(1) s je zvezen v $F \in \mathcal{D}_\psi$,
(2) ψ je omejena in $\int \psi(\frac{x-\mu_0}{s})dF = 0$ ima enolično rešitev $s = s(F)$ za $F \in \mathcal{D}_\psi$.

Dokaz najdemo v [12]. Če torej veljajo predpostavke izreka in je F pridobljena glede na empirične podatke, potem je statistika tveganja robustna. To nam pove izrek 5.5.

6. Robustnost nekaterih mer tveganja

V tem poglavju si bomo pogledali robustnost nekaterih mer tveganja. Definirali bomo tudi nekatere pojme s katerimi robustnost lahko preverjamo.

6.1. Robustnost tvegane vrednosti.

Oglejmo si robustnost tvegane vrednosti. Privzemimo, da VaR računamo na podlagi zgodovinskih podatkov. Potem robustnost sledi direktno iz izrekov prejšnjega poglavja.

Izrek 6.1. *Naj bo $\alpha \in (0, 1)$ in*

$$C_\alpha = \{F \in D; \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\} = \inf\{x \mid F(x) > \alpha\}\},$$

potem je VaR_α na podlagi zgodovinskih podatkov C_α-robusten za vsak $F \in C_\alpha$.

Dokaz. Po izreku 5.5. vemo, da je VaR_α zvezen za vsak $F \in \mathcal{C}_\alpha$. Posledica 5.6. pa nam pove, da je VaR_α $\mathcal{C}_\alpha$ robusten za vsak $F \in \mathcal{C}_\alpha$.

Izrek nam torej pove, da če je kvantil enolično določen, potem je VaR robustna mera tveganja.

6.2. **Robustnost mer iz baselskih dogovorov.** Mera tveganja iz dogovora Basel II (2) je robustna do določene mere, ker je vsaka statistika tveganja tvegana vrednost. Ta pa je robustna mera tveganja. Prav tako vključuje dve vrsti apriori porazdelitev za niz scenarijev. Natančneje, prva vrsta predhodne verjetnosti dodeli verjetnost $\frac{1}{k}$ scenariju na dan $t-1$ in $1-\frac{1}{k}$ nekemu izmišljenemu scenariju, po katerem je izguba enaka 0. Druga vrsta pa določi verjetnost $\frac{1}{60}$ za vsak scenarij, ki se zgodi na dan $t-i$, $i=1,\dots,60$.

Mera tveganja iz Basel III (3) je izboljšana verzija mere (2). Je bolj robustna kot (2), saj vsebuje 60 dodatnih scenarijev in posledično vključuje dve dodatni vrsti predhodnih verjetnosti za niz scenarijev.

Mera IRC (4) je robustna iz podobnih razlogov kot mera (2). Vsaka statistika tveganja VaR_{t-i}^{ir} je robustna in mera tveganja vključuje dve vrsti verjetnosti za niz scenarijev.

6.3. **Sredinski primanjkljaj.** Avtorji v [11] definirajo novo mero tveganja, imenovano *sredinski primanjkljaj (MS)*.

Definicija 6.2. Naj bo $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka, ki ponazarjo izgubo in $\alpha \in (0,1)$ stopnja zaupanja. Potem definiramo sredinski primanjkljaj kot:

$$\mathrm{MS}_\alpha(X) = F_{\alpha,X}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \inf\left\{x \mid F_{\alpha,X} \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

MS pri stopnji α zajame tudi tveganje repa porazdelitve, ki presega VaR pri stopnji α in pri tem upošteva velikost in verjetnost izgube. Meri namreč velikosti izgube pogojno na to, da izguba preseže VaR pri stopnji α. Pokazati se da, da je mera enaka[10]:

$$\mathrm{MS}_\alpha = \mathrm{VaR}_{\frac{1+\alpha}{2}}(X).$$

Robustnost mere si poglejmo s pomočjo funkcije vpliva[8]. Naj bo F porazdelitvena funkcija X, $\tilde{x} = (x_1,\dots,x_n)$ vzorec vrednosti X in F_n porazdelitvena funkcija, dobljena glede na vzorec. Želimo oceniti $\mathrm{MS}(F)$. Oceno lahko pridobimo s pomočjo F_n. In sicer MS lahko zapišemo kot $\mathrm{MS}_\alpha(F) = F^{-1}(\frac{1+\alpha}{2})$. Ocena pridobljena iz F_n je tako[11]:

$$\mathrm{MS}_\alpha(F_n) = x_{(\lceil \frac{n(1+\alpha)}{2} \rceil)}.$$

Definirajmo sedaj *funkcijo vpliva.*

Definicija 6.3. Naj bo $T(F_n)$ ocena T na podlagi podatkov in F porazdelitvena funkcija T-ja. Funkcija vpliva je definirana kot:

$$IF(y,T,F) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(T((1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_y) - T(F)}{\varepsilon},$$

kjer je δ_y diracova mera v točki y.

Funkcija IF meri občutljivost ocene tveganja če dodamo nov niz podatkov k velikemu vzorcu.

Huber in Ronchetti[8] pokažeta, da če je funkcija vpliva omejena:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |IF(y,T,F)| < \infty,$$

potem je $T(F_n)$ robustna. Če IF ni omejena, potem $T(F_n)$ ni robustna in odstopanja v podatkih lahko povzročijo velike spremembe $T(F_n)$. Poglejmo si funkcijo vpliva sredinskega primanjkljaja.

Izrek 6.4. *Če ima F gostoto f, ki je zvezna in pozitivna za $MS_\alpha(F)$, potem je funkcija vpliva MS_α enaka:*

$$IF(y, MS_\alpha, F) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{2f(MS_\alpha(F))} & y < MS_\alpha(F) \\ 0 & y = MS_\alpha(F) \\ \frac{\alpha+1}{2f(MS_\alpha(F))} & y > MS_\alpha(F) \end{cases}$$

Funkcija vpliva je omejena, torej je sredinski primanjkljaj robustna mera tveganja.

6.4. **Asimptotična točka preloma.** O robustnosti mere tveganja nam veliko pove tudi *asimptotična točka preloma*. Navedimo le osnovne pojme in najpomembnejše rezultate, podroben opis z vsemi dokazi pa najdemo v [9]. Gre za najmanjši delež podatkov, ki lahko povzroči, da mera zavzame poljubno velike nenormalne vrednosti. Želimo, da je točka preloma velika. Naj bo F porazdelitvena funkcija izgube in T_n statistika tveganja. Najprej definirajmo Levyevo okolico:

$$\mathcal{P}_\varepsilon(F_0) = \{F; F_0(t-\varepsilon) \leq F(t) \leq F_0(t+\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Definirajmo $M(F, T_n)$ kot mediano porazdelitvenega zakona $[T_n - T(F_0)]$. Zanima nas robustnost naših podatkov. Robustnost lahko preverimo z preučevanjem asimptotoske pristranskosti porazdelitvenega zakona $M(F, T_n)$ na okolici $\mathcal{P}_\varepsilon$. Maksimalno asimptotsko pristranskost definiramo kot:

$$b(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \sup_{F\in\mathcal{P}_\varepsilon} |M(F, T_n)|$$

.

Za ε=1 imamo na voljo največjo okolico porazdelitvenih funkcij, zato je $b(1)$ najslabši možni rezultat.

Definicija 6.5. Asimptotična točka preloma T glede na F_0 je:

$$\varepsilon^\star = \sup\{\varepsilon; b(\varepsilon) < b(1)\}.$$

Poglejmo si asimptotično točko preloma sredinskega primanjkljaja. Spomnimo, da se mera da zapisati kot $\mathrm{MS}_\alpha = \mathrm{VaR}_{\frac{1+\alpha}{2}}(X)$. Z upoštevanjem lastnosti, ki veljajo za Levyeve razdalje in Strasserjevega izreka[9] dobimo:

$$\varepsilon^\star = 1 - \alpha.$$

MS ima torej dokaj veliko točko preloma, torej je robustna mera tveganja.

6.5. **Robustnost pričakovanega primanjkljaja.** Mera tveganja pričakovani primankljaj ni robustna. Podobno kot za sredinski primankljaj lahko izpeljemo funkcijo vpliva. Upoštevamo, da ES lahko zapišemo kot:

$$\mathrm{ES}_\alpha(F) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F^{-1}(s)ds.$$

Če ima F pozitivno gostoto f, potem je funkcija vpliva:

$$\mathrm{IF}(y, \mathrm{ES}_\alpha, F) = \begin{cases} F^{-1}(\alpha) - \mathrm{ES}_\alpha(F) & y \leq F^{-1}(\alpha) \\ \frac{y}{1-\alpha} - \mathrm{ES}_\alpha(F) - \frac{\alpha}{1-\alpha} F^{-1}(\alpha) & y > F^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

Celotno izpeljavo in dokaz lahko najdemo v [11]. Občutljivost ES_α je linearna v y in torej neomejena, kar pomeni, da pričakovani primanjkljaj ni robustna mera tveganja.

Če izračunamo še asimptotično točko preloma (izračun najdemo v [11]), dobimo:

$$\varepsilon^\star = 0,$$

kar ponovno kaže na to, da ES ni robustna mera tveganja.

Pokažimo še formalno, da ES ni robustna. Označimo z $\mathcal{D}^p$, $p \geq 1$, množico porazdelitev, ki imajo p-ti moment:

$$\mathcal{D}^p = \int_{\mathbb{R}} |x|^p dF(x) < \infty.$$

Spomnimo, da pričakovani primanjkljaj pripada družini spektralnih mer tveganja, definiranih v 2.3. Pokažimo, da spektralne mere tveganja niso robustne. Spet predpostavimo, da mero ρ_ϕ računamo na podlagi zgodovinskih podatkov. Osnova za dokaz je naslednji izrek:

Izrek 6.6. *Za $F \in \mathcal{D}^p$ je mera ρ_ϕ $\mathcal{D}^p$ robustna na F tedaj in natanko tedaj ko za nek $\varepsilon > 0$ velja:*

$$\phi(u) = 0, \ \forall u \in (0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1).$$

(tj. mera ϕ "izgine"v okolici 0 in 1).

Dokaz. Iz definicije in lastnosti sledi, da je $\hat{\rho}^h_\phi$ dosledna z mero ρ_ϕ za vsak $F \in \mathcal{D}_p$. Ker za nek $\varepsilon > 0$ velja zgornja formula, sledi, da je množica $\mathcal{A}_m$ prazna. Ker je prazna je po izreku 5.2. ρ zvezna na $\mathcal{D}_p$. Potem pa po posledici 5.6. sledi robustnost.

Če zgornja enačbe ne velja za noben ε, potem $\mathcal{A}_m$ vsebuje 0 ali 1. Potem ρ_ϕ ni zvezna za nobeno porazdelitev iz $\mathcal{D}_p$. Iz izreka 4.9. sklepamo, da ni robustna na $\mathcal{D}_p$ za noben F. □

Posledica 6.7. *Statistika tveganja, pridobljena na podlagi zgodovinskih podatkov, za katerokoli spektralno mero tveganja ρ_ϕ definirano na $\mathcal{D}^p$ ni $\mathcal{D}^p$ robustna za noben $F \in \mathcal{D}^p$. V posebnem, ES_α ni $\mathcal{D}^1$ robustna za noben $F \in \mathcal{D}^1$.*

Dokaz. Po definicija spektralnih mer tveganja je gostota ϕ padajoča in torej ne more izginiti v okolici 0 (v tem primeru bi izginila za celoten interval [0,1]). □

Izrek 6.6. kaže na konflikt med pojmoma subaditivnost in robustnost. Takoj ko zahtevamo, da je mera ρ_m koherentna (in torej zadošča tudi subaditivnosti), njena statistika tveganja ne more biti robustna.

6.6. **Laplaceova statistika tveganja.** V primeru 4.4. smo izračunali statistiko tveganja za Laplaceovo porazdelitev:

$$\hat{\rho} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \log(2\alpha)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \hat{\mu}(\mathbf{x})|$$

Naslednji izrek nam pove, da statistika tveganja ni robustna.

Izrek 6.8. *Laplaceova statistika tveganja ni $\mathcal{D}_1$ robustna za noben $F \in \mathcal{D}_2$.*

Dokaz. Naj bo $\hat{\rho} = -\mu_0 + c\hat{s}(\mathbf{x})$ statistika tveganja. Opazimo, da je funkcija ψ liha in naraščajoča. Prav tako je definirana za pozitivna in negativna števila. Ker ψ ni omejena, po izreku 5.9 ni zvezna. Ker je statistika tveganja dosledna za vsak $F \in \mathcal{D}_1$, po izreku 5.2 sledi, da ni robustna.

□

7. Naravne statistike tveganja

Pri vseh družinah mer tveganja, ki sem jih predstavil obstajajo določene težave. Pri koherentnih merah tveganja je pogoj subaditivnosti postavljen preveč strogo, pri zavarovalnih merah tveganja pa komonotona aditivnost. Posledično obe družini izključujeta VaR (oziroma VaR s scenariji)[11]. Zato želimo imeti družino mer tveganja, ki bo vključevala tudi VaR (oziroma VaR z upoštevanjem različnih scenarijev).

V nadaljevanju predpostavimo, da se verjetnosta izguba $\mathcal{L}$ da predstaviti z vektorjem $\tilde{x} = (\tilde{x^1}, \tilde{x^2}, ...\tilde{x^m}) \in \mathbb{R}^n$,kjer je $\tilde{x^i} = (x^i_1, ..., x^i_n) \in \mathbb{R}^n_i$ vektor, ki predstavlja izgubo za i-ti scenarij in n_i velikost vektorja $\tilde{x}_i$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Vrednost $\tilde{x^i}$ lahko izračunamo na podlagi zgodovinskih podatkov oziroma različnih simulacij. Statistika tveganj je v tem primeru preslikava $\widehat{\rho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Če torej verjetnostno izgubo $\mathcal{L}$ lahko predstavimo z vektorjem $\tilde{x}$, nam statistika tveganja preslika ta vektor v $\hat{\rho}(\tilde{x})$, torej mero tveganja za $\mathcal{L}$. Namesto mer tveganja pa bi imeli raje statistike tveganja, ker z statistikami tveganja lahko tveganje merimo direktno iz vzorca, kar zmanjša napako zaradi napačne specifikacije modela. Prav tako lahko v oceno tveganja vključimo vse dogodke, za katere vemo, da so se zgodili in za katere predvidevamo, da se bodo zgodili. Statistika tveganja lahko vključi več predhodnih verjetnosti za niz scenarijev, ki odražajo prepričanje o verjetnosti pojava različnih scenarijev[11].

Naj $\tilde{x}$ in $\tilde{y}$ predstavljata vzorec naključnih izgub X in Y. Predpostavimo, da sta X in Y komonotona (definicija 2.4.). Komonotonost $\tilde{x}$ in $\tilde{y}$ pomeni, da se X in Y gibljeta v isti smeri za vsak scenarij $i, i = 1, \dots, m$[11]. Sedaj lahko definiramo novo družino statistik, ki bodo zadoščale prej navedenim lastnostim.

Definicija 7.1. Statistika tveganja $\hat{\rho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *naravna statistika tveganja*, če zadošča naslednim pogojem:

(1) $\hat{\rho}(a\tilde{x} + b\mathbf{1}) = a\hat{\rho}(\tilde{x}) + sb$, $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \forall a \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}$, kjer je $s > 0$ faktor razmerja in $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
(2) $\hat{\rho}(\tilde{x}) \leq \hat{\rho}(\tilde{y})$, če $\tilde{x} \leq \tilde{y}$, torej $x^i_j \leq y^i_j, j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, m$
(3) $\hat{\rho}(\tilde{x} + \tilde{y}) \leq \hat{\rho}(\tilde{x}) + \hat{\rho}(\tilde{y})$, za $\tilde{x}$ in $\tilde{y}$, ki sta komonotone
(4) $\hat{\rho}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^m) = \hat{\rho}(x^1_{p_{1,1}}, \dots, x^1_{p_{1,n_1}}, x^2_{p_{2,1}}, \dots, x^2_{p_{2,n_2}}, \dots, x^m_{p_{m,1}}, \dots, x^m_{p_{m,n_m}})$ za vsako permutacijo $(p_{i,1}, \dots, p_{i,n_i})$ od $(1, 2, \dots, n_i), i = 1, \dots, m$

Pogoja (1) in (2) sta podobna pogojema za koherentne mere tveganja. Prvi pogoj nam zagotavlja, da velja $\hat{\rho}(0 \cdot \mathbf{1}) = 0$ in $\hat{\rho}(b\mathbf{1}) = sb$, za vsak $b \in \mathbb{R}$. Če $\hat{\rho}$ zadošča tema pogojema, se izkaže, da je zvezna. Če za $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ in $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\tilde{x} - \varepsilon\mathbf{1} < \tilde{y} < \tilde{x} + \varepsilon\mathbf{1}$$

z upoštevanjem (2) dobimo:

$$\hat{\rho}(\tilde{x} - \varepsilon\mathbf{1}) \leq \hat{\rho}(\tilde{y}) \leq \hat{\rho}(\tilde{x} + \varepsilon\mathbf{1}).$$

Če upoštevamo še prvi pogoj, se neenakost pretvori v:

$$\hat{\rho}(\tilde{x}) - s\varepsilon \leq \hat{\rho}(\tilde{y}) \leq \hat{\rho}(\tilde{x}) + s\varepsilon,$$

kar nam zagotavlja zveznost $\hat{\rho}$[11]. Spomnimo, da nam zveznost po izreku 5.5. na primernih množicah že zagotavlja robustnost.

Tretji pogoj nadomešča pogoj subaditivnosti in ga zahteva samo za slučajne spremenljivke, ki so komonotone. Pogoj (4) pa pomeni, da če imata $\tilde{x}$ in $\tilde{y}$ enako porazdelitev za vsak scenarij, potem morata $\tilde{x}$ in $\tilde{y}$ dati enako mero tveganja[11].

Naslednji izrek nam pove, kdaj oz. katere statistike tveganja so naravne statistike tveganja.

Izrek 7.2. *(1) Naj bo $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ in in $\mathcal{W} = \{\tilde{w}\} \subset \mathbb{R}^n$ množica uteži. Naj za vsako utež $\tilde{w} = (\tilde{w}_1^1, \ldots, \tilde{w}_{n_1}^1, \ldots, \tilde{w}_1^m, \ldots, \tilde{w}_{n_m}^m) \in \mathcal{W}$ velja:*

$$\sum_{j=1}^{n_1} w_j^1 + \sum_{j=1}^{n_2} w_j^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n_m} w_j^m = 1,$$

$$w_j^i \geq 0, j = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, m.$$

Če definiramo statistiko tveganja $\hat{\rho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kot:

$$\hat{\rho}(\tilde{x}) = s \cdot \sup_{\tilde{w} \in \mathcal{W}} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} w_j^1 x_{(j)}^1 + \cdots + \sum_{j=1}^{n_m} w_j^m x_{(j)}^m \right\}, \forall \tilde{x} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m) \in \mathbb{R}^n,$$

kjer je $(x_{(1)}^i, \ldots, x_{(n_i)}^i)$ zaporedje vrstilnih statistik in je $x_{(n_i)}^i$ največja, potem je $\hat{\rho}$ naravna statistika tveganja.

(2) Če je $\hat{\rho}$ naravna statistika tveganja, potem obstaja množica uteži $\mathcal{W} = \{\tilde{w}\} \subset \mathbb{R}^n$, da vsaka utež $\tilde{w} = (w_1^1, \ldots, w_{n_1}^1, \ldots, w_1^m, \ldots, w_{n_m}^m) \in \mathcal{W}$ zadošča pogojema iz (1) in velja:

$$\hat{\rho}(\tilde{x}) = s \cdot \sup_{\tilde{w} \in \mathcal{W}} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} w_j^1 x_{(j)}^1 + \cdots + \sum_{j=1}^{n_m} w_j^m x_{(j)}^m \right\}, \forall \tilde{x} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m) \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz najdemo v [11].

7.1. **Robustnost naravnih statistik tveganja.** Naravne statistike tveganja vsebujejo podmnožico statistik tveganja, ki so robustne v smislu:

(1) So neobčutljive na napačno specifikacijo modela, ker vsebujejo več scenarijev, apriori verjetnostne mere in statistike tveganja za vsak scenarij.
(2) So neobčutljive na majhne spremembe v podatkih, ker so robustne za vsak scenarij.

Naj bo $\hat{\rho}$ naravna statistika tveganja definirana v 5.4. (1), ki ustreza množici uteži $\mathcal{W}$. Definirajmo preslikavo $\Phi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{w} \to \Phi(\tilde{w}) = (\tilde{p}, \tilde{q})$, kjer je $\tilde{p} = (p^1, \ldots, p^m)$, $p^i = \sum_{j=1}^{n_i} w_j^i$, $i = 1, \ldots, m$ in $\tilde{q} = (q_1^1, \ldots, q_{n_1}^1, \ldots, q_1^m, \ldots, q_{n_m}^m)$, $q_j^i = \mathbf{1}_{\{p^i > 0\}} \frac{w_j^i}{p^i}$. Ker velja $p^i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^m p^i = 1$ na $\tilde{p}$ lahko gledamo kot na apriori verjetnostno porazdelitev za dane scenarije. Potem lahko $\hat{\rho}$ zapišemo kot:

$$\hat{\rho}(\tilde{x}) = s \cdot \sup_{(\tilde{p},\tilde{q}) \in \Phi(\mathcal{W})} \left\{ \sum_{i=1}^m p^i \hat{\rho}^{i,\tilde{q}}(\tilde{x}^i) \right\}, \quad \hat{\rho}^{i,\tilde{q}}(\tilde{x}^i) = \sum_{j=1}^{n_i} q_j^i x_{(j)}^i.$$

Vsaka utež $\tilde{w} \in \mathcal{W}$ ustreza $\Phi(\tilde{w}) = (\tilde{p}, \tilde{q}) \in \Phi(\mathcal{W})$. To nam za vsak scenarij določa:

(1) apriori verjetnost $\tilde{p}$,
(2) pomožno statistiko tveganja $\hat{\rho}^{i,\tilde{q}}$.

Če v naš model za vsak scenarij vključimo apriori verjetnosti $\tilde{p}$ statistike tveganja $\hat{\rho}^{i,\tilde{q}}$, potem je $\hat{\rho}$ robustna glede na napačno specifikacijo modela. Če velja še, da je vsaka statistika $\hat{\rho}^{i,\tilde{q}}$ robustna, potem je tudi mera tveganja robustna za manjše spremembe podatkov[11].

7.2. **Primeri.** Poglejmo si nekaj mer tveganja, ki spadajo v družino naravnih statistik tveganja in so robustne. Primeri so povzeti po [11].

(1) Sredinski primanjkljaj (MS) spada v družino naravnih statistik tveganja in je robustna mera tveganja, kar smo že pokazali. Posledično v to družino spada tudi VaR pri visokih stopnjah zaupanja.

(2) *Obrezana tvegana vrednost* (Var tav), definiran kot:

$$\rho_{tav}(X) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} F^{-1}(u) du,$$

Kjer je $0 < \alpha < \beta < 1$, $\alpha = 99\%$, $\beta = 99,9$. ρ_{tav} je robustna, ker ne vsebuje nobenih kvantilov stopnje večje od β. Če velja, da je $\alpha < \frac{1}{n}$, kjer je n velikost vzorca, je mera skoraj enaka pričakovanemu primanjkljaju[12].

(3) Mere tveganja iz baselskih dogovorov so robustne mere tveganja. Več sledi v naslednjem poglavju.

7.3. **Naravne statistike tveganja in baselski dogovori.** Posebni primeri naravnih statistik tveganja so tudi mere iz baselskih dogovorov.

Trditev 7.3. *Mere tveganja* (2), (3) *in* (4) *so posebni primeri naravnih statistik tveganja.*

Dokaz. Naj bo $\tilde{x}^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i) \in \mathbb{R}^{n_i}$ niz podatkov iz katerih izračunamo $\mathrm{VaR}_{t-i}, i = 1 \ldots, 60$. Naj bo $\tilde{x}^{i+60} = (x_1^{i+60}, \ldots, x_{n_{i+60}}^{i+60}) \in \mathbb{R}^{n_{i+60}}$ niz podatkov iz katerih računamo $\mathrm{sVaR}_{t-i}, i = 1, \ldots, 60$. Naj bo 121 scenarij definiran kot :

$$\tilde{x}^{121} = 0,\ n_{121} = 1 \text{ in } n = \textstyle\sum_{i=1}^{121} n_i.$$

Definirajmo $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^{121})$ in naj bo $\omega_j^i = 1_{\{j=[0.99n_i]\}}$, $1 \leq j \leq n_i$, $i = 1, \ldots, 121$. Potem lahko zapišemo:

$$\text{(A1)} \qquad \mathrm{VaR}_{t-i} = \sum_{j=1}^{n_i} \omega_j^i x_{(j)}^i, \mathrm{sVaR}_{t-i} = \sum_{j=1}^{n_{i+60}} \omega_j^{i+60} x_{(j)}^{i+60}; i = 1, \ldots, 60.$$

Z upoštevanjem (A1) se mera (2) prevede na:

$$\text{(A2)} \qquad k \times \max \left\{ \sum_{i=1}^{121} \sum_{j=1}^{n_i} u_j^i x_{(j)}^i, \sum_{i=1}^{121} \sum_{j=1}^{n_i} v_j^i x_{(j)}^i \right\},$$

kjer sta $\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^{121})$ in $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^{121})$ uteži, definirani kot

$$\begin{array}{llll} \tilde{u}^1 = \frac{1}{k}\tilde{w}^1, & \tilde{u}^i = 0, \quad i = 2, \ldots, 120, & \tilde{u}^{121} = \frac{k-1}{k}\tilde{w}^{121} & , \\ \tilde{v}^i = \frac{1}{60}\tilde{w}^i, & i = 1, \ldots, 60, \quad \tilde{v}^i = 0, & i = 61, \ldots, 121. & \end{array}$$

Po izreku 7.3. je (2) naravna statistika tveganja, ki za $s = k$ zadošča prvemu pogoju za naravne statistike tveganja. Mero tveganja (3) lahko s pomočjo (A1) zapišemo kot:

$$\text{(A3)} \quad k \cdot \max \left\{ \sum_{i=1}^{121} \sum_{j=1}^{n_i} u_j^i x_j^i, \sum_{i=1}^{121} \sum_{j=1}^{n_i} v_j^i x_j^i \right\} + l \cdot \max \left\{ \sum_{i=1}^{121} \sum_{j=1}^{n_i} g_j^i x_j^i, \sum_{i=1}^{121} \sum_{j=1}^{n_i} h_j^i x_j^i \right\},$$

kjer sta $\tilde{g}^i = (\tilde{g}^1, \ldots, \tilde{g}^{121})$ in $\tilde{h}^i = (\tilde{h}^1, \ldots, \tilde{h}^{121})$ uteži, definirani kot:

$$\begin{array}{l} g^i = 0 \quad \forall i \neq 61 \text{ in } i \neq 121, \quad \tilde{g}^{61} = \frac{1}{l}\tilde{w}^{61}, \quad \tilde{g}^{121} = \frac{l-1}{l}\tilde{w}^{121} \\ \tilde{h}^i = 0, \quad i = 1 \ldots, 60; \quad \tilde{h}^i = \frac{1}{60}\tilde{w}^i, \quad i = 61, \ldots, 120, \quad \tilde{h}^{121} = 0. \end{array}$$

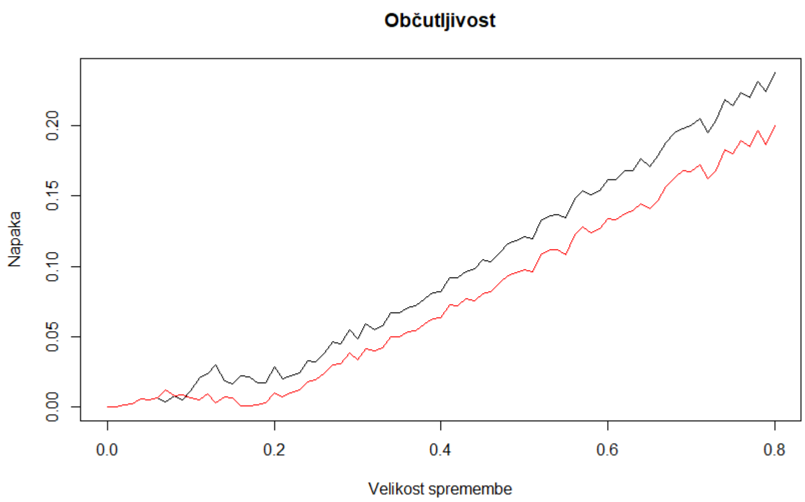
(A3) zadošča vsem pogojem, ki definirajo naravne statistike tveganja, če vzamemo $s = k + l$ v prvem pogoju. (3) je torej naravna statistika tveganja.

8. Primeri robustnosti mer tveganja v R

Robustnost mer tveganja sem preverjal tudi z raznimi simulacijami v programskem jeziku R. Najprej sem ustvaril portfelj iz delnic Forda, Appla, Amazona in Microsofta. V njem je 30% delnic Forda, 15% delnic Appla, 20% delnic Amazona in 35% delnic Microsofta. Uporabil sem podatke o cenah delnic od leta 2006 pa do leta 2019 in sicer o dnevni donosnosti delnic. Programski jezik R ima vgrajeno funkcijo, ki nam izračuna pričakovano vrednost in pričakovani primanjkljaj. V mojem primeru sta meri enaki in sicer imata pri 99% stopnji zaupanja vrednost 0.07423012.

Robustnost mer lahko preverimo tako, da v podatkih ustvarimo motnjo. Ustvarjanje motnje nam omogoča funkcija dither. Vsakemu elementu vektorja doda naključno število iz intervala, ki si ga izberemo. Na grafu je prikazana napaka tvegane vrednosti in pričakovanega primanjkljaja, če v podatkih ustvarjamo motnje v velikosti od 0 do 0.8. Razvidno je, da je tvegana vrednost bolj robustna od pričakovanega primanjkljaja. Za majhne motnje sta obe meri točni. Pri motnji v velikosti 0.1 pa je napaka ES-ja že precej večja kot napaka VaR-a. Razlika v točnosti se z večanjem motnje samo še povečuje.

Slika 1. Napake VaR-a in ES-ja glede na motnjo

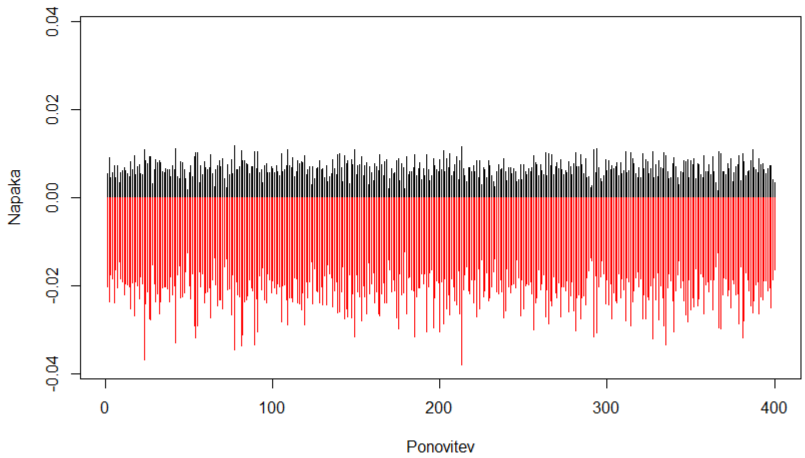


Za boljšo ilustracijo si poglejmo primer, ko izračun ponovimo 400 krat in v vseh primerih ustvarjamo motnjo v velikosti 0.2. Vidimo, da je napaka pričakovanega primanjklaja v povprečju še enkrat večja kot napaka tvegane vrednosti. Povprečna napaka pri računanju VaR-a je 0.006767994, ES-ja pa 0.02177427.

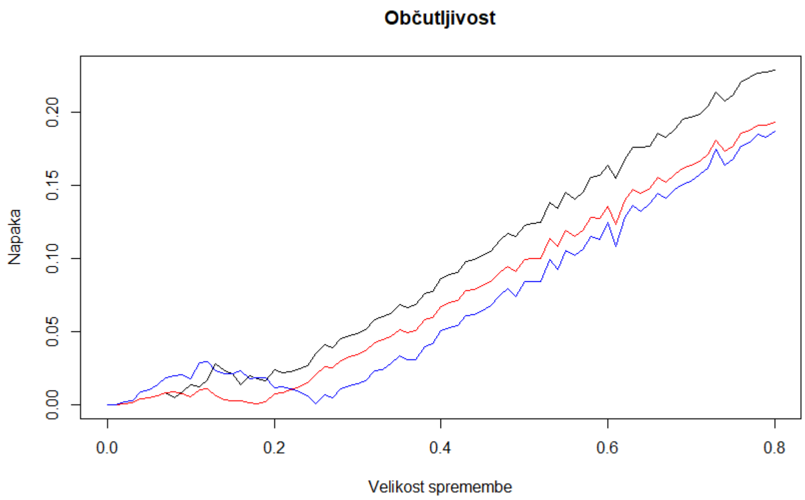
Preverimo še robustnost sredinskega primanjkljaja. MS je za manjše spremembe manj robustna od VaR-a. Je pa precej bolj robustna za večje motnje v podatkih.

Poglejmo še kritično točko MS-ja. To je velikost motnje, da pri izračunu mere ne prihaja do velike napake. Za srednji primanjkljaj je kritična točka enaka $\varepsilon^\star = 1 - \alpha$. MS računamo pri stopnji zaupanja $\alpha = 0.99$, torej je kritična točka enaka $\varepsilon^\star = 0.01$. Graf nam prikazuje napako pri izračunu MS-ja pri motnjah v velikost od 0 do 0.02. Povprečna napaka pri motnjah do velikosti 0.01 je 0.0002365708 (rdeča črta), pri

Slika 2. Napaka VaR-a in ES-ja pri ponovitvah



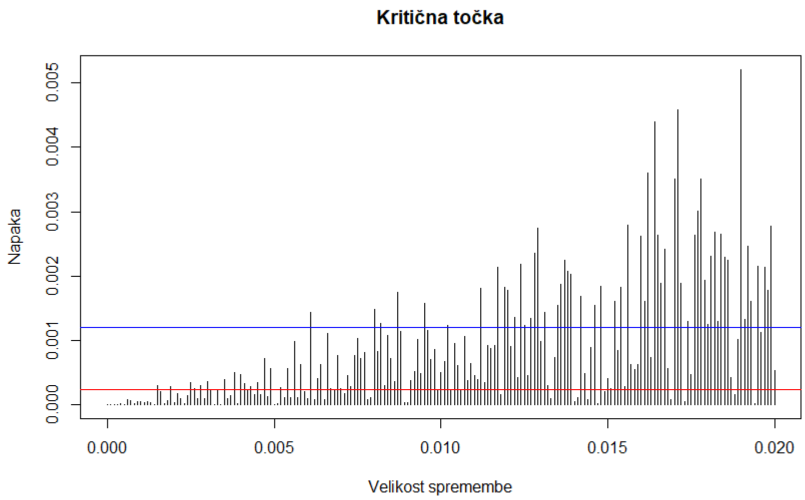
Slika 3. Napake MS, VaR-a in ES-ja glede na motnjo



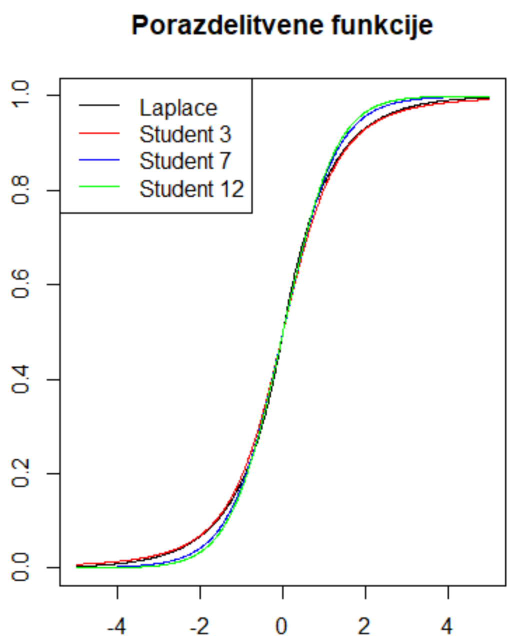
večjih motnjah pa 0.001208795 (modra črta). Kritična točka je torej res v 0.01 oz. bližnji okolici.

Poglejmo si sedaj drug primer robustnosti. Imamo dano slučajno spremenljivko X, ki predstavlja izgubo, vendar ne moremo natančno določiti kako je porazdeljena. Zato izberemo neko oceno. Radi bi, da je razlika pri meri tveganja čim manjša glede na pravilno porazdelitev. Recimo, da je X porazdeljena Laplacevo, mi pa ocenimo, da je porazdeljena Studentovo. Studentova porazdelitev je dober približek porazdelitvene funkcije Laplaca, kar vidimo na grafu. Vzemimo Studentove porazdelitve z 3, 7 in 12 prostorskimi stopnjami. Poglejmo si VaR in ES glede na Studentove porazdelitve in stopnjo zaupanja. Studentova pozradelitev z 3 prostimi parametri je najboljši približek Laplaceve porazdelitve. Zato je tudi razlika med VaR-om teh dve porazdelitev najmanjša. Iz grafov je razvidno, da je razlika manjša v primeru VaR-a, torej je tvegana vrednost bolj robustna od pričakovanega primankljaja.

Slika 4. Kritična točka MS-ja



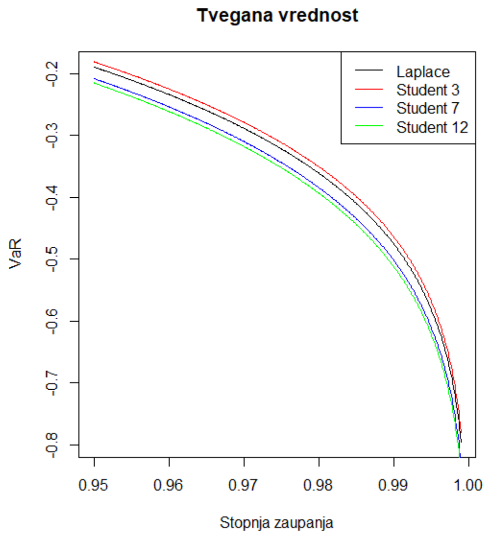
Slika 5. Primerjava Laplaceove in Studentovih porazdelitev



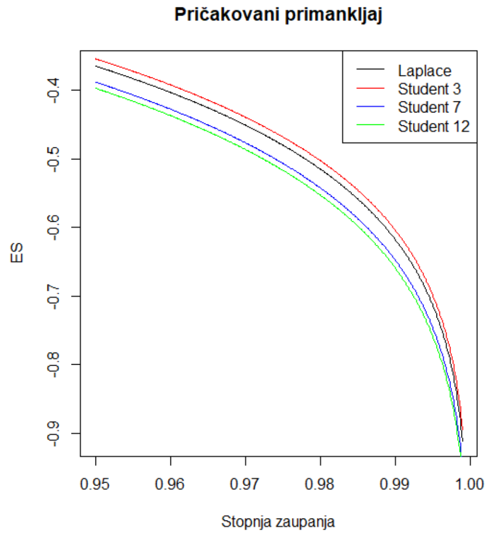
j

Poglejmo si še robustnost sredinskega primanjkljaja. Iz grafa je razvidno, da je napaka pri tej meri najmanjša. Sredinski primanjkljaj je torej robustna mera tveganja. Je bolj robusten tako od tvegane vrednosti kot od sredinjskega primanjkljaja. Če Laplaceovo porazdelitev ocenjujem z Studentovo porazdelitev z 7 prostorskimi stopnjami je povprečna napaka pri ocenjevanju z mero MS enaka 0.02093144. Pri VaR-u je ta napaka 0.02311546, pri ES-ju pa 0.02732826. Torej je bolj robusten od obeh mer.

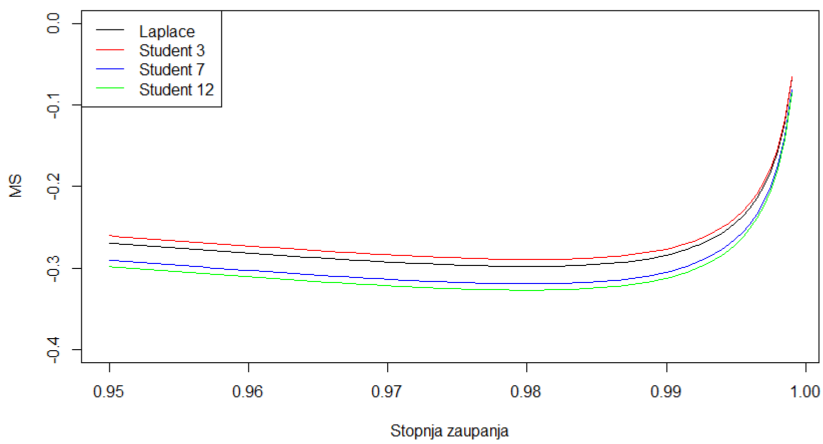
SLIKA 6. Tvegana vrednost



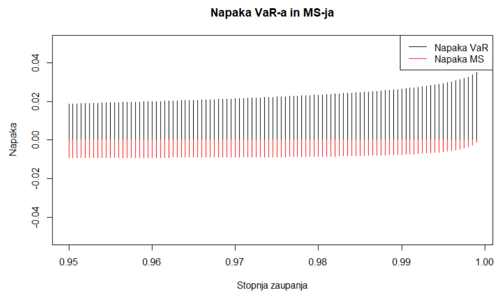
SLIKA 7. Pričakovani primanjkljaj

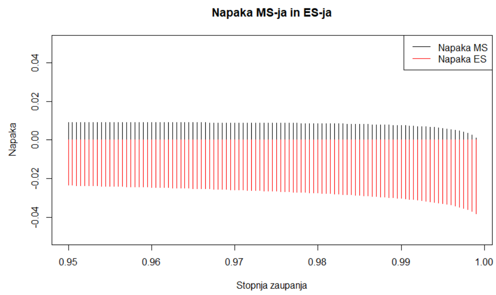


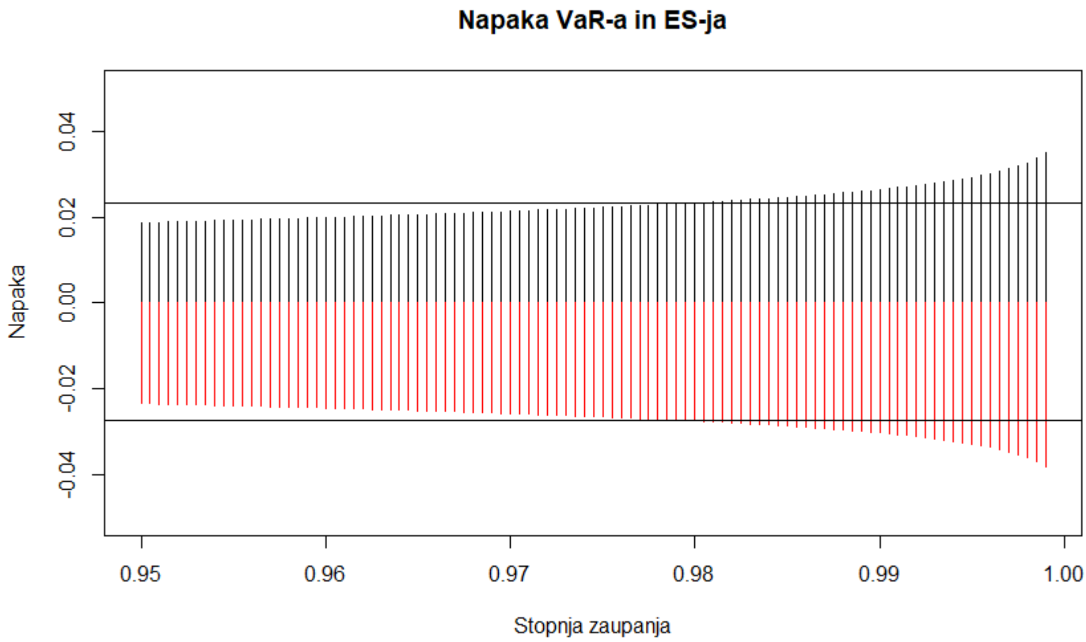
SLIKA 8. Sredinski primanjkljaj



S primerjavo napak med merami pri različnih stopnjah zaupanja je razlika v robustnosti mer očitna. Pri MS-ju prihaja do veliko manjših napak kot pri ostalih dveh merah, kar kaže na to, da je MS robustna mera tveganja. Hkrati je vidno, da je VaR bolj robusten od ES-ja.


Napaka VaR-a in MS-ja
Napaka VaR
Napaka MS
Napaka
Stopnja zaupanja


Napaka MS-ja in ES-ja
Napaka MS
Napaka ES
Napaka
Stopnja zaupanja


Napaka VaR-a in ES-ja
Napaka
Stopnja zaupanja

Slovar strokovnih izrazov

asymptotic asimptotično
bias pristranskost
breakdown point točka preloma
comonotonicity komonotonost
consistency doslednost
density gostota
distance razdalja
distribution porazdelitev
expected shortfall pričakovani primanjkljaj
risk tveganje
robustness robustnost
maximum likelihood največje verjetje
measure mera
neighborhood okolica
influence function funkcija vpliva
shortfall primanjkljaj
spectrum spekter
statistics statistika
tail distribution repna porazdelitev
value at risk tvegana vrednost

Literatura

[1] T. Adrian in MK. Brunnermeier, *CoVar*, . Federal Reserve Bank of New York Staff Report 348, Federal Reserve Bank, 2008

[2] F. Artzner, F. Delbaen, J. Eber in D. Heath, *Coherent measures of risk*, . Mathematical Finance 9 **3** (1999) 203-228.

[3] Basel Comitte on Banking Supervision, *Guideliness for computing capital for incremental risk in the trading Book*, . Report, Bank for International Settelments, Basel, 2009

[4] J. Berkowitz in J. O'Brien, *How Accurate are Value-at-Risk Models at Commercial Banks*, . FEDS Working Paper, verzija 2001-31, [ogled 12. 2. 2019], dostopno na `https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=278547`

[5] M.A. ElBannan, *The Financial Crisis, Basel Accords and Bank Regulations: An Overview*, . International Journalof Accounting and Financial Reporting. 7 **2** (2017) 225-275.

[6] F.R.. Hampel , *The influence curve and its role in robust estimation*, . Journal of American Statistical Associatio **69** (1974) 383-393.

[7] P.J. Huber, *Robust Statistics*, **1**, John Wiley & Sons, New York, 1981

[8] P.J. Huber in EM. Ronchetti, *Robust Statistics, 2nd ed.*, **2**, John Wiley & Sons, Hoboken, New York, 2009

[9] P. Jorion, *Value at risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, **3**, McGraw-Hill, Boston, 2007

[10] S. Kou in X. Peng, *On the Measurement of Economic Tail Risk*, . Operations Research 64 **5** (2016) 1053-1176.

[11] S. Kou, X. Peng in C. Hyde, *External Risk Measures and Basel Accords*, . Mathematics of operations research 38 **3** (2013) 393-417.

[12] C. Rama, R. Deguest in G. Scandolo, *Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures*, . Quantitative Finance 10 **6** (2010) 593-606.

[13] R.T. Rockafellar in S. Uryasev, *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, . Journal of bank & fin. 26 **7** (2002) 1443-1471.

[14] P. Soni in B.L. Heda, *An overview adn emergence of Basel Accords*, . International Journal of Current Research. 7 **4** (2015) 14393-14396.

[15] S. Wang, V. Young in H. Panjer, *Axiomatic characterization of insurance prices*, . Insurance: Mathematics and Economics 21 **2** (1997) 173-183.

[16] Z. Wen, X. Peng, X. Liu, X. Bai in X. Sunk , *Asset Allocation under the Basel Accord Risk Measures*, . SSRN Electronic Journal (2013).