UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Tea Štrekelj

Schwarzova lema in njene posplošitve

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2018

Kazalo

Schwarzova lema in njene posplošitve

Povzetek

Schwarzova lema se smatra za eno od elementarnih in najlepših lastnosti holomorfnih funkcij iz enotskega diska nazaj v enotski disk. Tudi njen dokaz uporablja zgolj osnovna sredstva. Odgovori pa nam na kratko in jedrnato vprašanje, kako hitro lahko taka funkcija narašča skozi izhodišče. Ta preprosta lema hkrati odpira številna vprašanja o možnih posplošitvah, o uporabah na drugih področjih in nenazadnje o svojem izvoru. V diplomski nalogi poskušamo razširiti njen domet in se približati spoznanju imena rože.

The Schwarz Lemma and Its Generalizations

Abstract

The Schwarz lemma is considered to be one of the most elementary and beautiful properties of the holomorphic functions between unitary discs in the complex plane. To prove it one only needs to be familiar with the basic properties of holomorphic functions. It gives us an answer to a most short and simple question, namely how large can a derivative of such a function be at the origin. At the same time this simple lemma happens to bring up many intricate questions about possible generalizations, applications in other fields, and finally about its origin. In this diploma we endeavour to extend its scope and try to approach the case of the name of the rose.

Math. Subj. Class. (2010): 30A10, 30J99

Ključne besede: holomorfne funkcije, harmonične funkcije, princip maksimuma, lastnost povprečne vrednosti, Cauchyjeva formula, Poissonova formula, Schwarzova lema

Keywords: holomorphic functions, harmonic functions, maximum principle, mean value property, Cauchy integral formula, Poisson integral formula, Schwarz lemma

1. Uvod

Temo se da opisati hkrati jedrnato in poljubno razširjeno, vendar v principu opazujemo obnašanje določenih preslikav domen v Evklidski ravnini.

Najbrž se ob pogledu na naslov zastavi vprašanje, kakšne vrste posplošitev imamo v mislih. Schwarzova lema govori o holomorfnih funkcijah iz enotskega diska nazaj v enotski disk in v osnovi podaja oceno odvoda take funkcije v izhodišču. Vendar pa so holomorfne funkcije v bistvu zelo posebne preslikave ravnine, opremljene s strukturo obsega. Zato se lahko vprašamo, kaj analognega (ali pa tudi ne) lahko povemo za preslikave, ki izpolnjujejo manj pogojev ali drugačne pogoje kot holomorfne. V mislih imamo harmonične preslikave.

Poleg tega nam osnovna lema podaja le oceno za velikost prvega odvoda v izhodišču. Iz Cauchyjevih ocen hitro dobimo sorodno oceno za odvod poljubne stopnje v izhodišču. Kaj pa lahko povemo o velikosti višjih odvodov v poljubni točki diska?

Zavedamo se tudi, da je enotski disk posebna domena. Schwarzovo lemo sicer enostavno posplošimo na primer holomorfne funkcije med diskoma poljubnih radijev, vendar smo lahko tudi nekoliko bolj ambiciozni. Za začetek, kaj lahko povemo v primeru, ko ne slikamo v disk, temveč v neko splošno domeno v kompleksni ravnini? Odgovor na zadnje vprašanje je hkrati točka, kjer se srečata in začneta prepletati kompleksna analiza in diferencialna geometrija.

2. Schwarzova lema za holomorfne funkcije

2.1. **Osnovne lastnosti.** V tem razdelku se bomo v osnovi posvetili holomorfnim, torej kompleksno odvedljivim, in pa harmoničnim funkcijam, tj. tistim v jedru Laplaceovega operatorja. Navedimo zato uvodoma nekaj osnovnih lastnosti obeh vrst funkcij in poudarimo, v čem se razlikujeta in v čem sta si podobni.

Ena najosnovnejših lastnosti holomorfnih funkcij je *princip maksimuma.* Ta pove, da holomorfna funkcija, ki je definirana na odprti povezani množici in tam nekonstantna, ne doseže niti šibkega lokalnega maksimuma. Če je zvezna na zaprtju svoje domene in je le ta omejena, potem maksimum doseže na robu. Ta princip sledi iz dejstva, da so take funkcije kot preslikave odprte.

Poleg tega znamo holomorfno funkcijo izraziti kot integral s parametrom po robu primerne omejene domene. Za funkcijo zahtevamo, da je zvezna do roba in holomorfna v notranjosti domene. Če je temu zadoščeno, pod integral vstavimo to isto funkcijo in *Cauchyjevo jedro*, nekakšno utež. Tako dobimo izražavo prvotne funkcije v točkah v notranjosti domene. To reprezentacijo izpeljemo iz t. i. *Greenove formule.* Imenujemo jo *Cauchyjeva reprezentacijska formula*, večino zgoraj opisanega pa povzamemo v naslednjem izreku.

Izrek 2.1 (Cauchyjeva formula [8, izrek 10.15])**.** *Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ omejena domena s koherentno orientiranim odsekoma $\mathcal{C}^1$ robom in f zvezna preslikava na zaprtju ter holomorfna v notranjosti svoje domene. Tedaj za vsako točko z iz D velja*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Ker lahko Cauchyjevo jedro razvijemo v konvergentno geometrijsko vrsto, je ta formula močno sredstvo pri dokazu, da lahko vsako holomorfno funkcijo na poljubnem disku, vsebovanem v domeni, razvijemo v konvergentno vrsto.

Kar nas sedaj bolj zanima, pa je drugačna uporaba Cauchyjeve formule. Vzemimo za domeno (dovolj majhen) disk s središčem v točki z. Vstavimo polarne koordinate

$\zeta = z + re^{\mathrm{i}t}$ in z upoštevanjem $d\zeta = \mathfrak{i}\, re^{\mathrm{i}t}\, dt$ dobimo *lastnost povprečne vrednosti*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt. \tag{1}$$

Geometrijsko interpretirano je povprečna vrednost holomorfne funkcije na krožnici enaka vrednosti funkcije v središču te krožnice (torej v točki z). Na tej točki pa se prvič dotaknemo harmoničnih funkcij. Zanje po definiciji velja

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Vemo, da lahko vsako holomorfno funkcijo f zapišemo kot $f = u + \mathfrak{i}v$, kjer sta u in v harmonični. Ta nastavek sedaj vstavimo v formulo (1):

$$f(z) = (u + \mathfrak{i}v)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt + \frac{\mathfrak{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt.$$

Sledi:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt \quad \text{in} \quad v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt.$$

Ugotovimo, da potrebujemo blažji pogoj na funkcijo kot je kompleksna odvedljivost, da zanjo velja lastnost povprečne vrednosti (1). Zadosten pogoj je harmoničnost.

Velja pa še več, ta pogoj je tudi potreben, saj so harmonične funkcije z lastnostjo povprečne vrednosti karakterizirane. Če torej neka zvezna funkcija zadošča tej lastnosti, je harmonična (več o tem v [8, izrek 11.13]).

Opremljeni s to značilnostjo lahko ugotovimo, da tudi za harmonične funkcije velja princip maksimuma. Še več, z uporabo holomorfnih avtomorfizmov enotskega diska in s smiselno vpeljavo nove spremenljivke iz nje izpeljemo *Poissonovo reprezentacijsko formulo*:

Izrek 2.2 (Poissonova formula [8, izrek 11.9]). *Naj bo u zvezna preslikava na zaprtju ter dvakrat zvezno parcialno odvedljiva v notranjosti enotskega diska $\mathbb{D}$. Poleg tega naj bo u na $\mathbb{D}$ harmonična. Potem za vsako točko z iz $\mathbb{D}$ velja*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathbb{D}} u(\zeta)\frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, |d\zeta|,$$

kjer $|d\zeta|$ označuje element ločne dolžine na enotski krožnici.

Analogno kot holomorfno lahko harmonično funkcijo predstavimo kot integral po robu primerne domene. Pod integralom imamo funkcijo samo in še izraz, ki ga imenujemo *Poissonovo jedro*; ta integral ustrezno uteži.

Vendar pa je zgornji opis dokaj površen. Cauchyjeva in Poissonova formula izgledata podobno, a se v marsičem razlikujeta. Motivacija za Poissonovo reprezentacijo je iskanje rešitve t. i. *homogenega Dirichletovega problema*. Ta je zastavljen na sledeči način.

Na enotski krožnici imamo predpisano zvezno funkcijo f (ki jo razumemo kot 2π-periodično funkcijo na $\mathbb{R}$). Radi pa bi konstruirali funkcijo u, definirano na zaprtju in harmonično v notranjosti diska. Zanjo si želimo, da bi na robu sovpadala s f, z drugimi besedami torej iskani funkciji u predpišemo robne vrednosti. Izkaže se, da Poissonov integral vrne želeno rešitev in ker smo zgolj iz robnih vrednosti rekonstruirali celo funkcijo, ugotovimo, da so harmonične funkcije z njimi že določene. Velja:

Izrek 2.3 ([8, izrek 11.8]). *Naj bo f zvezna funkcija na enotski krožnici. Potem je funkcija, definirana s predpisom*

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial \mathbb{D}} f(\zeta) \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} \, |d\zeta|; & z \in \mathbb{D} \\ f(z); & z \in \partial \mathbb{D} \end{cases}$$

zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$ in harmonična na $\mathbb{D}$. Je torej rešitev homogenega Dirichletovega problema.

Če pa bi se vprašali, ali lahko iz podanih robnih vrednosti na podoben način s Cauchyjevo formulo konstruiramo holomorfno funkcijo v notranjosti diska, odgovor v splošnem ne bi bil pozitiven. Za predpis robnih vrednosti lahko na primer vzamemo funkcijo $f(z) = \frac{1}{z}$, holomorfno na $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Reševanja problema se lahko lotimo tako, da na način kot v izreku 2.3 posebej razširimo realni in imaginarni del robnih vrednosti f do harmoničnih funkcij na disku. Dobljeni funkciji nato okličemo za realno in imaginarno komponentno razširitve preslikave f. Zanjo tedaj tudi vemo, da je harmonična (ker sta taka njen realni in imaginarni del). Toda, ali bi bila taka funkcija res holomorfna? Holomorfne funkcije so natanko določene z vrednostmi na množici s stekališčem, zato je njena edina možna razširitev na $\overline{\mathbb{D}}$ ravno $\frac{1}{z}$, ki pa ni niti zvezna v 0. Torej ugotovimo ne samo, da nam zgornja konstrukcija ni dala ustrezne prelikave, temveč tudi, da rešitev opisanega robnega problema ne obstaja.

Sicer pa obstajajo tudi druge razlike med reprezentacijama. Oblika Poissonovega jedra je odvisna od domene, zgornja formula torej res velja le, če za domeno izberemo enotski disk. Naravno jo lahko posplošimo na primer diska poljubnega radija R, saj v se tem primeru le enica v števcu jedra spremeni v R^2. V primeru, da bi radi uporabili formulo na neki splošni omejeni domeni v kompleksni ravnini, pa moramo zanjo na primer zahtevati, da je enostavno povezana. Tedaj nam Riemannov upodobitveni izrek zagotovi biholomorfno preslikavo na enotski disk in tako primer z uvedbo nove spremenljivke (kljub nekaj morebitnim tehničnim zapletom, na primer razširitev biholomorfizma do roba) prevedemo na že znanega. Po drugi strani Cauchyjeva formula velja za splošno omejeno domeno.

Za dokaz zadnje izmed osnovnih lastnosti potrebujemo le reprezentacijo na disku. Ker znamo Poissonovo jedro razviti v konvergentno vrsto, si s tem pomagamo pri dokazu, da lahko harmonično funkcijo lokalno razvijemo v konvergentno Taylorjevo vrsto. Z drugimi besedami, izpeljemo, da so harmonične funkcije realno-analitične. To dejstvo sicer sledi tudi iz tega, da je vsaka harmonična funkcija lokalno realni del neke holomorfne. Za te pa vemo, da so celo kompleksno-analitične.

2.2. **Schwarzova lema.** Omejimo se sedaj na preslikave enotskega diska, za katere velja, da ohranjajo izhodišče. S takimi se je ukvarjal nemški matematik Hermann A. Schwarz, ko je poskušal izpeljati prepričljiv dokaz Riemannovega upodobitvenega izreka o obstoju biholomorfizma med vsako enostavno povezano domeno, ki ni celotna kompleksna ravnina, in enotskim diskom. V resnici je bila po njem imenovana lema prvotno le neznaten del zapiskov na to temo. Zato ni presenetljivo, da je formulacijo in dokaz v obliki, kot jo največkrat srečamo, prispeval nekdo drug, namreč grško-nemški matematik Constantin Carathéodory.

Lema 2.4 (Schwarzova lema za holomorfne funkcije [8, izrek 12.2]). *Za holomorfno funkcijo f, ki slika iz enotskega diska v enotski disk in ohranja izhodišče, tj. $f(0) = 0$, veljata spodnji neenakosti:*

- $|f(z)| \leq |z|$,
- $|f'(0)| \leq 1$.

Pri tem velja ocena iz prve alineje za vsako točko z iz enotskega diska. Če v neki točki $z \neq 0$ velja enakost v prvi alineji ali če je odvod v izhodišču po absolutni vrednosti enak ena, je f rotacija enotskega diska.

Dokaz. Naj bo f holomorfna funkcija, ki slika med enotskima diskoma, za katero velja $f(0) = 0$.

Vemo, da jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča, konvergentno na celotnem disku, torej zapišemo v obliki $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = z \cdot g(z)$, kjer je g tudi holomorfna funkcija, definirana na enotskem disku, ter $a_1 = f'(0)$. Po predpostavki pa velja, da je prosti člen v razvoju ničeln. Izberimo r iz intervala $(0,1)$ in upoštevaje $|f(z)| \leq 1$ ter $|z| = r$ ocenimo:

$$|g(z)| \;=\; \frac{|f(z)|}{|z|} \;\leq\; \frac{1}{r}$$

Funkcija g je holomorfna na množici $\{|z| \leq r\}$, zato je po principu maksimuma v notranjosti tega diska, tj. za $|z| < r$, še kvečjemu manjša kot na robu. Torej velja

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

za vsak z, ki zadošča $|z| \leq r$. Leva stran gornje neenakosti je neodvisna od r. Zato dobimo v limiti, ko pošljemo $r \nearrow 1$, želeno šibko neenakost:

$$|g(z)| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |f(z)| \leq |z| \tag{2}$$

za vsak z iz enotskega diska. Ker pa je $g(0) = f'(0)$, velja tudi:

$$|g(0)| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Oglejmo si še primer, ko v neki točki z_0 iz diska velja enakost v 2. Tedaj imamo $|g(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = 1$. Iz neenakosti 2 vemo, da je holomorfna funkcija g povsod na disku po absolutni vrednosti manjša od ena, hkrati pa v notranji točki z_0 svoj maksimum tudi doseže. To je po principu maksimuma mogoče le v primeru, ko je g konstantna, v našem primeru $|g| = 1$. Zato velja $f(z) = z\, e^{\mathrm{i}\theta}$ za neko realno število θ, z drugimi besedami je f tedaj rotacija diska.

Zelo podoben sklep naredimo, če velja $|f'(0)| = 1 = |g(0)|$. V tem primeru namreč holomorfna funkcija g spet v neki notranji točki zavzame svoj maksimum. Torej je konstantna. □

Primer 2.5. Vprašajmo se o prvi možni posplošitvi. Kaj lahko povemo v primeru, ko je f holomorfna funkcija med diskoma splošnih radijev R_1 in R_2 z lastnostjo $f(0) = 0$? Le malo jo popravimo v

$$F(z) \;:=\; \frac{1}{R_2} f(R_1 z).$$

Ta je definirana na enotskem disku in zadošča pogojem iz osnovne leme. Zato velja $|F(z)| \leq |z|$ in tako z zamenjavo spremenljivke dobimo neenakost

$$|f(z)| \;\leq\; \frac{R_2}{R_1}|z|$$

za vsak z iz $\mathbb{D}_{R_1}$. To pa je iskana nekoliko splošnejša različica Schwarzove leme. ◇

Za dokaz ocene odvoda iz Schwarzove leme imamo na voljo še eno sredstvo, prav hitro namreč sledi iz Cauchyjeve formule. Racionalno gledano sicer najbrž ni smiselno osnovnih sredstev iz zgornjega dokaza zamenjati za globlji rezultat, bo pa spodnji dokaz iztočnica za namene naslednjega poglavja.

Alternativen dokaz ocene odvoda. Kot že omenjeno, si pri tem dokazu pomagamo z izrekom 2.1, tj. s Cauchyjevo formulo. Izrek sicer velja, če je dana holomorfna funkcija f zvezna na zaprtju svoje domene, v tem primeru enotskega diska. To pa v splošnem ne drži, zato formulo uporabimo na manjšem disku radija $r < 1$. Po izreku 2.1 je f v osnovi integral s parametrom in tega želimo odvajati pod integralskim znakom. To tudi smemo, saj je integrand zvezen. Za vsako točko z iz enotskega diska tedaj dobimo:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Vstavimo v enakost točko $z = 0$ in ocenimo:

$$|f'(0)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^2}\, |d\zeta|.$$

Funkcija f po predpostavki slika nazaj v disk, torej je $|f(z)| \leq 1$. Poleg tega velja $|\zeta| = r$, zato dobimo:

$$|f'(0)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{|\zeta|=r} |d\zeta| \;=\; \frac{1}{2\pi r^2} \cdot 2\pi r \;=\; \frac{1}{r}.$$

V neenakosti $|f'(0)| \leq \frac{1}{r}$, katere leva stran je neodvisna od r, sedaj naredimo limitni prehod $r \nearrow 1$ ter tako dobimo želeno oceno. $\square$

3. Ocene višjih odvodov

Izhodišče tega razdelka je nepresenetljivo prav Cauchyjeva formula. Za začetek bomo premislili o ocenah višjih odvodov holomorfne funkcije na enotskem disku v izhodišču. Oprli se bomo na zadnji dokaz prejšnjega razdelka in tokrat kar privzeli zveznost dane funkcije na zaprtju svoje domene (sicer zopet integriramo po robu diska polmera $r < 1$ in nadaljujemo analogno kot v alternativnem dokazu ocene odvoda iz leme 2.4). Vemo, da lahko zaradi zveznosti integranda Cauchyjevo formulo odvajamo pod integralom in tako dobimo izražavo odvoda poljubne stopnje.

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

Zato hitro dobimo spodnjo oceno, ki zelo spominja na tisto v Schwarzovi lemi.

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(0)| \;&\leq\; \frac{n!}{2\pi} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}\, |d\zeta| \\ &\leq\; \frac{n!}{2\pi} \oint_{\partial\mathbb{D}} |d\zeta| \;=\; n! \end{aligned}$$

Naj bo sedaj $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ razvoj f v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča. Vemo, da tedaj velja $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$. Zato dobimo še (Cauchyjevo) oceno:

$$|a_n| \;\leq\; \frac{1}{n!}\, |f^{(n)}(0)| \;\leq\; \frac{1}{n!}\, n! \;\leq\; 1. \tag{3}$$

Sedaj lahko postanemo bolj ambiciozni in se vprašamo o oceni odvoda v poljubni točki diska. Odgovor nam daje spodnja trditev.

Trditev 3.1 ([2, trditev 1.1.2]). *Naj bo f holomorfna funkcija med enotskima diskoma in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Tedaj za vsak z iz $\mathbb{D}$ velja*

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{1-|f(z)|^2} \;\leq\; n!\,(1+|z|)^{n-1}\,\frac{1}{(1-|z|^2)^n}.$$

Za dokaz izreka si moramo najprej pripraviti ključno sredstvo, in sicer spodnjo lemo.

Lema 3.2 ([2, lema 1.1.3]). *Naj bo g holomorfna funkcija med enotskima diskoma in naj bo $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ njen razvoj v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča. Potem za vsako naravno število k velja*

$$|a_k| \;\leq\; 1-|a_0|^2.$$

Dokaz. Fiksirajmo neko naravno število n in označimo $\omega_k := e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}k}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Po definiciji so števila ω_k ničle polinoma $x^n - 1$. Zato lahko tega zapišemo tudi drugače, in sicer $x^n - 1 = (x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_n)$. Sedaj izenačimo koeficienta pri x^{n-1} in dobimo zvezo $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 0$.

Če vse n-te korene enote $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ potenciramo na isto število s med 1 in $n-1$, je nastala množica $\{\omega_k^s\}_{k=1}^n$ podmnožica prvotne. Če je s tuj n, ji je enaka, sicer pa dobimo s potenciranjem r-krat ponovljene m-te korene enote za neka $r, m < n$ (oziroma $n = r \cdot m$). V vsakem primeru zato za s iz množice $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ velja:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^s = 0 \qquad \text{in} \qquad \sum_{k=1}^{n} \omega_k^n = n. \tag{4}$$

Enakosti držita tudi za s večji od $n-1$, saj velja $\omega_k^s = \omega_k^{s \pmod n}$.

Označimo sedaj še $\bar{g}(z) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\omega_k z)$ za $z \in \mathbb{D}$. Očitno je tudi $\bar{g}$ holomorfna funkcija iz enotskega diska nazaj vanj. Njen Taylorjev razvoj pa je zaradi lastnosti (4) za vsak z iz enotskega diska takle:

$$\bar{g}(z) \;=\; a_0 + a_n\, z^n + a_{2n}\, z^{2n} + \cdots$$

Poleg tega definirajmo

$$h \;:=\; \frac{\bar{g} - a_0}{1 - \overline{a_0}\bar{g}}.$$

Tudi h je holomorfna na enotskem disku. Če nekoliko razpišemo njen predpis, dobimo:

$$h(z) \;=\; \frac{a_n\, z^n + a_{2n}\, z^{2n} + \cdots}{1-|a_0|^2 - \overline{a_0}a_n\, z^n - \cdots} \;=\; b_0 + b_1\, z + \cdots$$

S primerjavo koeficientov v razvoju zaključimo, da se vrsta za h začne s členom z z^n, tj. $h(z) = b_n\, z^n + \cdots$ Pri tem je

$$b_n \;=\; \frac{a_n}{1-|a_0|^2}.$$

Za konec se spomnimo na Cauchyjevo oceno (3) in željeni rezultat sledi. □

Sedaj se lahko lotimo dokaza trditve 3.1.

Dokaz trditve 3.1. Fiksirajmo točko z iz diska in označimo

$$g_z(w) \;:=\; f\left(\frac{w+z}{1+\bar{z}w}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)\, w^k.$$

Iz zgornjega izrazimo funkcijo f.

$$f(w) \;=\; g_z\left(\frac{w-z}{1-\bar{z}w}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(z)\left(\frac{w-z}{1-\bar{z}w}\right)^k \tag{5}$$

Zanima nas n-ti odvod funkcije f v točki z. Po nekaj računanja se izkaže, da ga lahko zapišemo na spodnji način.

$$f^{(n)}(w)\Big|_{w=z} \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k(z)\frac{z^{n-k}}{(1-|z|^2)^n}\frac{n!(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

Iz definicije oziroma iz (5) vidimo, da je $c_0(z) = f(z)$, iz leme 3.2 pa imamo $|c_j(z)| \leq 1-|c_0(z)|^2 = 1-|f(z)|^2$ za vsako naravno število j. Zato lahko začnemo ocenjevati.

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z)| \;&\leq\; \frac{n!(1-|f(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}|z|^{n-k} \\
&=\; \frac{n!(1-|f(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}|z|^{j} \\
&=\; \frac{n!(1-|f(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}|z|^{j} \\
&=\; \frac{n!(1-|f(z)|^2)}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1}
\end{aligned}$$

Dobili smo ravno neenakost iz izreka. Potrebno je poudariti, da v nasprotju z oceno v Schwarzovi lemi, nimamo dokaza, da je ta ocena optimalna. Iskanje boljše ocene ali funkcije, pri kateri je dosežena enakost, je še vedno odprt problem. □

Opomba 3.3. Zgornje je hkrati tudi dokaz posplošene Schwarzove leme iz razdelka 5. Zanimivo je zato, ker se ne opre na osnovno verzijo Schwarzove leme. V razdelku 5 pa bomo tudi videli, da je v primeru, ko vzamemo $n = 1$, ocena odvoda optimalna.

4. Schwarzova lema za harmonične funkcije in preslikave

Sedaj bi radi zamenjali okoliščine, namreč nadomestili holomorfne preslikave s harmoničnimi. Vemo, da je vsaka holomorfna preslikava tudi harmonična, obratno pa ni nujno res. Ena ključnih razlik je na primer ta, da v nasprotju s holomorfnimi, kompozitum harmoničnih preslikav ni nujno harmonična preslikava. Kljub temu smo v uvodnem razdelku zasledili veliko analognih lastnosti med tema razredoma preslikav oziroma funkcij in Schwarzova lema ni izjema.

Lema 4.1 (Schwarzova lema za harmonične funkcije [1, lema 6.24])**.** *Obstaja univerzalna harmonična funkcija U na enotskem disku $\mathbb{D}$, da za vsako harmonično funkcijo u iz $\mathbb{D}$ v interval $(-1,1)$ z lastnostjo $u(0) = 0$ velja:*

- $|u(z)| \;\leq\; U(\mathrm{i}|z|)$, *za vsak z iz $\mathbb{D}$,*
- $|\nabla u(0)| \;\leq\; \frac{4}{\pi}$.

Če velja enakost v spodnji alineji ali če za točko $z \neq 0$ velja enakost v zgornji alineji, je $u = U \circ T$, kjer je T rotacija diska.

Opomba 4.2. Lastnosti funkcije U bomo razkrili v nadaljevanju.

Neenakost v prvi alineji je podobna tisti v lemi 2.4, saj dano harmonično funkcijo po absolutni vrednosti navzgor ocenimo z neko določeno funkcijo, pri holomorfnih je to preprosto razdalja do izhodišča, tukaj pa je to nekaj nekoliko bolj zapletenega. Opazimo tudi, da potrebujemo predpis za univerzalno funkcijo le na pozitivni imaginarni osi, le tam jo namreč evalviramo. To pa zato, ker se izkaže, da tam najhitreje narašča.

Oglejmo si še oceno iz druge alineje. Najprej velja opozoriti, da odvoda harmonične funkcije v splošnem ne moremo zapisati na tako kompakten način kot odvoda holomorfne, zato ocenjujemo velikost gradienta. Če smo v lemi za holomorfne funkcije dobili oceno odvoda s konstanto 1, smo gradient harmonične funkcije navzgor ocenili s $\frac{4}{\pi}$, kar pomeni, da je harmoničnim preslikavam diska dovoljeno v izhodišču hitreje naraščati kot holomorfnim. To mogoče ni presenetljivo, saj smo za funkcijo zahtevali, da zadošča blažjim pogojem, zato je rezultat bolj groba ocena. Hitro se pojavi vprašanje, ali jo lahko kako izboljšamo. Vendar pa je odgovor negativen. Ocena je optimalna, saj je gradient univerzalne funkcije v izhodišču enak $\frac{4}{\pi}$.

Opomba 4.3. Naj bo u harmonična preslikava enotskega diska in z točka na disku. Izberimo še kompleksno število α iz enotske krožnice, tako da $\alpha\, u(z)$ leži na pozitivni realni osi in je torej enako $|u(z)|$. Sedaj uporabimo oceno iz leme 4.1 za realni del preslikave $\alpha\, u$ in dobimo:

$$|u(z)| \;=\; \alpha\, u(z) \;=\; \Re(\alpha\, u(z)) \;\leq\; U(\mathrm{i}|z|). \tag{6}$$

V resnici je to ocena iz leme 4.1 za harmonično preslikavo u v vsaki točki iz diska. V viru [1, lema 6.24] trdijo tudi, da je v primeru enakosti v (6) v neki neničelni točki z dana preslikava oblike $u = \lambda\,(U \circ T)$, kjer je λ število iz enotske krožnice in T rotacija diska.

Kako lahko v tem primeru tudi intuitivno interpretiramo dodatek na koncu leme? Če v neki točki $z \neq 0$ velja enakost v prvi alineji, je harmonična preslikava u v bistvu univerzalna funkcija U, ki jo z leve in desne mogoče komponiramo z nekima rotacijama. To pomeni, da ima preslikava u v resnici enodimenzionalno sliko, namreč interval $(-1, 1)$, zavrten okoli izhodišča. Njena zaloga vrednosti torej leži na premici skozi izhodišče.

Preden se lotimo dokaza, moramo seveda sploh povedati, kaj je univerzalna funkcija U in kaj zanjo velja.

4.1. **Lastnosti univerzalne funkcije U.** Definiramo jo kot Poissonov integral funkcije, ki je enaka 1 oziroma -1 na zgornji oziroma spodnji enotski polkrožnici. Torej je nezvezna v (kompleksnih) točkah 1 in -1.

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathbb{D}} \left[\chi_{S^+} - \chi_{S^-}\right] \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\,|d\zeta|$$

Zakaj je opisana funkcija intuitivno dobra kandidatka? Želimo jo narediti takšno, da bo maksimizirala gradient v izhodišču. Če hočemo, da kar se da hitro narašča skozi središče diska, jo na enem koncu (npr. na zgornji polkrožnici) naredimo največjo možno, torej 1, na nasprotnem (torej na spodnji polkrožnici) pa najmanjšo možno, torej -1.

S podobno situacijo smo se že srečali v 1. razdelku, ko smo omenili Dirichletov problem iskanja harmonične funkcije s predpisanimi robnimi vrednostmi (izrek 2.3).

Takrat smo zahtevali, da je funkcija, ki jih podaja, zvezna, kar pa v tem primeru ne drži. Kljub temu to odsekoma zvezno funkcijo vstavimo v Poissonov integral in ta nam vrne želeno harmonično funkcijo na $\mathbb{D}$, njene robne vrednosti pa ostanejo tisto, kar smo vstavili pod integral. Da je ta postopek utemeljen, je razvidno iz dokaza izreka 2.3 (tega najdemo v [8, poglavje 11]).

Opomba 4.4. Seveda bi katerakoli rotacija funkcije U tudi maksimizirala gradient v izhodišču, le njegova smer bi se primerno zavrtela. Z drugimi besedami, kandidatk za univerzalno funkcijo je neštevno mnogo. V primeru, da bi izbrali katero drugo funkcijo U, bi se le za malenkost spremenila prva alineja leme za harmonične funkcije, namreč U bi morali namesto na pozitivni y-osi izvrednotiti na nekem drugem poltraku iz izhodišča (poleg tega bi se dokaz po nepotrebnem zapletel). Do rotacije domene natančno je torej funkcija U v resnici ena sama.

Z analizo tako definirane funkcije U pridemo do nekaj zanimivih lastnosti. Omenili smo, da je harmonična na disku in da so njene robne vrednosti modula ena. Po principu maksimuma je zato v notranjosti strogo manjša od ena.

Izračunajmo še njeno vrednost v izhodišču. Ker je Poissonovo jedro pri $z = 0$ identično enako ena, velja:

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^+} |d\zeta| \;-\; \frac{1}{2\pi}\int_{S^-} |d\zeta| \;=\; 0$$

Torej tudi univerzalna funkcija ohranja izhodišče. Direktno iz definicije lahko ugotovimo še več, namreč da je ničelna na celotnem intervalu $(-1,1)$ in celo zrcalno simetrična glede na realno os, tj. $U(\bar{z}) = -U(z)$. To izpeljemo na spodnji način, pri čemer upoštevamo zvezo $|z| = |\bar{z}|$.

$$\begin{aligned} U(\bar{z}) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathbb{D}} \left[\chi_{S^+} - \chi_{S^-}\right] \frac{1-|\bar{z}|^2}{|\zeta - \bar{z}|^2}\,|d\zeta| \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathbb{D}} \left[\chi_{S^+} - \chi_{S^-}\right] \frac{1-|z|^2}{|\bar{\zeta} - z|^2}\,|d\zeta| \\ &=\; -\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathbb{D}} \left[\chi_{S^+} - \chi_{S^-}\right] \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\,|d\zeta| \\ &=\; -U(z) \end{aligned}$$

Da tretja enakost drži, se prepričamo z uvedbo nove spremenljivke $\xi = \bar{\zeta}$. Če ζ leži na zgornji polkrožnici, potem spremenljivka ξ teče po spodnji polkrožnici in velja zveza $|d\zeta| = -|d\xi|$ med diferencialoma. Tako dobimo enakost:

$$\int_{S^+} \frac{1-|z|^2}{|\bar{\zeta} - z|^2}\,|d\zeta| \;=\; -\int_{S^-} \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2}\,|d\xi|,$$

pri čemer S^+ in S^- označujeta zgornjo oziroma spodnjo polkrožnico.

Obstaja tudi eksplicitna formula (izpeljana v [1, Trditev 6.27]), ki se izraža na sledeči način. Pri tem spremenljivki spet pišemo ločeno.

$$U(x,y) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

Za točke oblike $\mathrm{i}|z|$ oziroma $(0,|z|)$ se izraz poenostavi v

$$U(0,|z|) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{2|z|}{1-|z|^2}. \tag{7}$$

Z uporabo formule za dvojne kote za tangens, ki se glasi

$$\tan 2\varphi \;=\; \frac{2\tan\,\varphi}{1-\tan^2\,\varphi}, \tag{8}$$

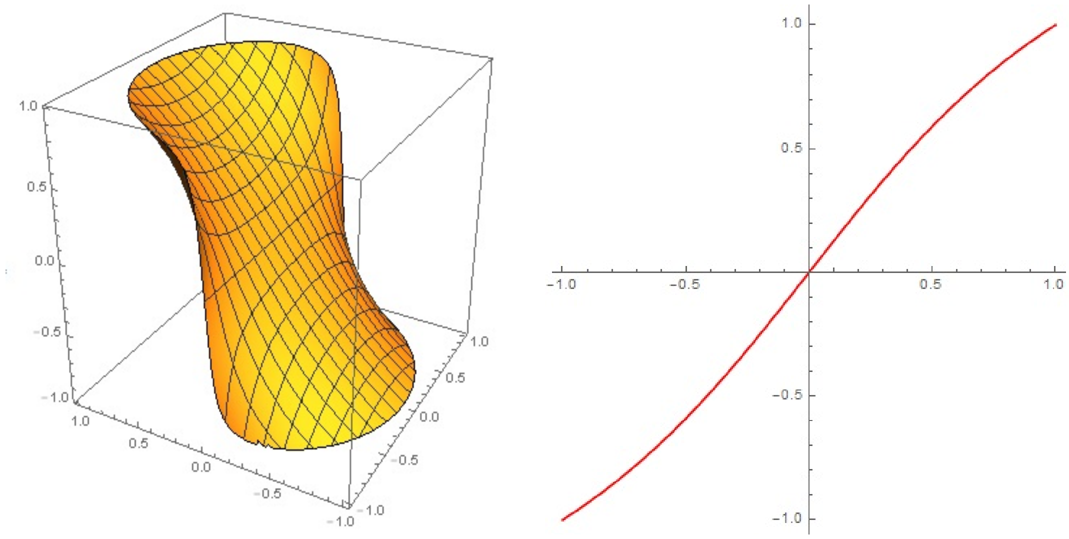
pa lahko predpis še poenostavimo. Opazimo, da je desna stran (7) analog izraza v argumentu arkus tangensa v (8) za izbiro $\varphi = \arctan\,|z|$, torej da velja

$$\frac{2|z|}{1-|z|^2} \;=\; \tan\left(2\arctan\,|z|\right).$$

Zato lahko zapišemo predpis za U v točkah oblike $\mathfrak{i}|z|$ takole:

$$U(\mathfrak{i}|z|) = \frac{4}{\pi}\arctan\,|z|.$$

Dokaz zgornjih dejstev izpustimo, saj formuli ne izražata pravega pomena univerzalne funkcije, sta pa koristni zato, da laže izračunamo njen gradient v izhodišču in seveda dobimo $|\nabla U(0)| = \frac{4}{\pi}$. O vseh omenjenih lastnostih se lahko do neke mere prepričamo s pogledom na zožitev grafa na enotski disk ter na y-os, prikazano na sliki 1.



Slika 1. Zožitev univerzalne funkcije na enotski disk in na y-os.

Dokaz leme 4.1. Radi bi izpeljali neenakost iz prve alineje leme v vsaki točki, zato fiksirajmo z iz enotskega diska. Razmislimo sedaj o nekaterih poenostavitvah.

Oceno je dovolj dokazati za točke, ki ležijo na pozitivni y-osi in za vsako harmonično funkcijo u. Če točka z ne leži na pozitivni y-osi, jo tja spravimo s primerno rotacijo, tako da je točka $\alpha\, z$ oblike $\mathfrak{i}|z|$ za neki α iz S^1. Označimo s $\varphi(w) = \frac{1}{\alpha}\,w$ rotacijo. Tedaj je $u \circ \varphi$ harmonična funkcija (saj lahko u na disku predstavimo kot realni del holomorfne funkcije f in je tedaj $u \circ \varphi$ realni del holomorfne funkcije $f \circ \varphi$) in zanjo velja ocena

$$\big|(u \circ \varphi)(w)\big| \leq U(\mathfrak{i}|w|)$$

za vsak w iz pozitivne y-osi. Zato drži tudi

$$\big|u(z)\big| \;=\; \big|(u \circ \varphi)(\alpha\, z)\big| \;\leq\; U(\mathfrak{i}|\alpha\, z|) \;=\; U(\mathfrak{i}|z|)$$

za vsako točko z iz diska.

Ker smo U definirali kot Poissonov integral, bi radi tudi u izrazili v taki obliki. To lahko preprosto naredimo, če je ta zvezna do roba. V tem primeru velja Poissonova formula in je u enaka svojem Poissonovemu integralu. Če ta predpostavka ni izpolnjena, pa u rahlo popravimo. Definiramo namreč družino funkcij $u_r := u(rz)$ za $r < 1$, katere članice so harmonične na disku polmera $\frac{1}{r}$, ki vsebuje enotskega. Torej so zvezne na zaprtju enotskega diska in so zato zanje izpolnjene predpostavke za uporabo Poissonove formule. Če za tako funkcijo u_r dokažemo lemo, dobimo najprej oceno

$$|u(r\,z)| \leq U(\mathfrak{i}|z|).$$

Ker je desna stran dobljene neenakosti neodvisna od r, lahko izvedemo limitni prehod, tj. pošljemo $r \nearrow 1$. Željeni rezultat sledi.

Privzemimo sedaj vse tri zgornje poenostavitve, označimo Poissonovo jedro s $P(z,\zeta)$ in zapišimo

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^+} P(z,\zeta)|d\zeta| \;-\; \frac{1}{2\pi}\int_{S^-} P(z,\zeta)|d\zeta|$$

ter analogno

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^+} u(\zeta)P(z,\zeta)\,|d\zeta| \;+\; \frac{1}{2\pi}\int_{S^-} u(\zeta)P(z,\zeta)\,|d\zeta|. \tag{9}$$

Neenakost $u(z) \leq U(z)$ lahko pomnožimo z 2π in prepišemo v ekvivalentno obliko

$$\int_{S^-}(1+u(\zeta))P(z,\zeta)\,|d\zeta| \;\leq\; \int_{S^+}(1-u(\zeta))P(z,\zeta)\,|d\zeta|. \tag{10}$$

Sedaj pa uporabimo dejstvo, da točka z leži na pozitivni y-osi. V tem primeru namreč Poissonovo jedro izgleda takole:

$$P(z,\zeta) = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2|z|\zeta_2},$$

kjer je ζ oblike $\zeta_1 + \mathfrak{i}\zeta_2$. Neenakost (10) se po krajšanju z neničelnim izrazom $1-|z|^2$ (ta ne vsebuje integracijske spremenljivke) prevede na obliko, iz katere bomo izhajali.

$$\int_{S^-}\frac{1+u(\zeta)}{1+|z|^2-2|z|\zeta_2}\,|d\zeta| \;\leq\; \int_{S^+}\frac{1-u(\zeta)}{1+|z|^2-2|z|\zeta_2}\,|d\zeta|$$

Začeli bomo z levo stranjo in po korakih prišli do desne. Ker je ζ_2 na spodnji polkrožnici negativen, lahko najprej izpustimo sumand, v katerem nastopa, in dobimo kvečjemu več, tj.

$$\int_{S^-}\frac{1+u(\zeta)}{1+|z|^2-2|z|\zeta_2}\,|d\zeta| \;\leq \int_{S^-}\frac{1+u(\zeta)}{1+|z|^2}\,|d\zeta|. \tag{11}$$

Tu velja pripomniti, da neenakost res velja, saj je izraz $1+u(\zeta)$ pozitiven. Sedaj pa se spomnimo na še neuporabljeno predpostavko, da u ohranja izhodišče. Opazimo, da je Poissonovo jedro pri $z=0$ identično enako 1, tj. $P(0,\zeta)=1$ za vsak ζ iz S^1, ter ustavimo v izraz (9). Dobimo:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^+} u(\zeta)\,|d\zeta| \;+\; \frac{1}{2\pi}\int_{S^-} u(\zeta)\,|d\zeta| = 0$$

oziroma ekvivalentno

$$\int_{S^+} u(\zeta)\,|d\zeta| \;=\; -\int_{S^-} u(\zeta)\,|d\zeta|.$$

S tem v mislih nadaljujemo oceno iz (11), in sicer tako, da integral po spodnji polkrožnici zamenjamo s tistim po zgornji. Ker pa je na zgornji polkrožnici ζ_2 pozitiven, lahko prej odstranjeni sumand spet priključimo in s tem dobimo kvečjemu več, tj.

$$\begin{aligned}
\int_{S^-} \frac{1+u(\zeta)}{1+|z|^2-2|z|\zeta_2}\,|d\zeta| \;&\leq\; \int_{S^-} \frac{1+u(\zeta)}{1+|z|^2}\,|d\zeta| \\
&=\; \int_{S^+} \frac{1-u(\zeta)}{1+|z|^2}\,|d\zeta| \\
&\leq\; \int_{S^+} \frac{1-u(\zeta)}{1+|z|^2-2|z|\zeta_2}\,|d\zeta|.
\end{aligned}$$

Tako smo izpeljali željeno neenakost. Vprašamo se, kdaj bi nastopajoči neenakosti zgoraj lahko postali enakosti. Integranda v drugi neenakosti sovpadata natanko pri $\zeta_2 = 0$ in pripadajoča integrala bosta enaka le v primeru, ko bosta oba nič. To pa pomeni, da mora biti u enaka 1 skoraj povsod na zgornji polkrožnici. Z enakim premislekom vidimo tudi, da bi za izpolnitev prve neenakosti u morala biti enaka -1 skoraj povsod na spodnji polkrožnici. Z drugimi besedami, robne vrednosti, ki smo jih vstavili v Poissonova integrala za u in U, bi morale sovpadati. Torej bi veljalo $u = U$.

Dokazati moramo še oceno gradienta dane funkcije v izhodišču. V ta namen definiramo novo funkcijo $V(z) := U(\mathfrak{i}|z|)$. Vemo, da obe funkciji, tako u kot V, ohranjata izhodišče. Poleg tega smo pravkar dokazali, da V dominira u v vsaki točki. Radi bi dokazali, da iz tega sledi

$$|\nabla u(0)| \;\leq\; |\nabla V(0)|,$$

pri čemer je $|\nabla V(0)| = |\nabla U(0)| = \frac{4}{\pi}$.

Denimo, da velja nasprotno, torej $|\nabla u(0)| > |\nabla V(0)|$. Ker vrednosti funkcij sovpadata v izhodišču, tedaj obstaja neka neničelna točka z v okolici izhodišča, v kateri velja

$$|u(z)| \;>\; |V(z)| \;=\; U(\mathfrak{i}|z|). \tag{12}$$

Taka točka res obstaja. Za dokaz izberimo ustrezni števili α in β iz enotske krožnice, tako da bosta gradienta funkcij u in V kazala v smeri pozitivne x-osi. Tako dosežemo, da je gradient vsake od funkcij kar njen parcialni odvod po x. Sedaj po definiciji (parcialnega) odvoda obstaja točka x, v kateri je $\alpha u(x) > \beta V(x)$. Iz zapisanega takoj sledi tudi neenakost v (12), kar pa je v nasprotju s prej dokazano prvo oceno iz leme 4.1.

Recimo še, da bi za dano funkcijo u veljala enakost

$$|\nabla u(0)| = \frac{4}{\pi}.$$

Tedaj bi zaradi sovpadajočih vrednosti $u(0)$ in $V(0)$ v okolici izhodišča obstajala taka točka z, različna od nič, da bi veljalo

$$|u(z)| = |V(z)| = U(\mathfrak{i}|z|).$$

Potem bi po dodatku v lemi 4.1 bila u oblike $u = U \circ T$, kjer je T rotacija diska. $\square$

Zanimivo je primerjati ekstremalne holomorfne oziroma harmonične funkcije. Schwarzova lema za prve pove, da so rotacije diska, torej zvezne do roba. Po drugi strani iz pravkar dokazanega vidimo, da imajo harmonične preslikave, ki maksimizirajo gradient, na robu točki nezveznosti.

Imamo pa še eno primerjavo. Za dokaz osnovne leme za holomorfne funkcije smo na prvi pogled potrebovali le princip maksimuma in sposobnost razvoja v vrsto na celotnem disku. Vemo, da je harmonična finkcija realno-analitična in zato njena Taylorjeva vrsta lokalno konvergira in se pravilno sešteje. V resnici vrsta konvergira na celotnem disku, saj lahko harmonično funkcijo na disku izrazimo kot realni del holomorfne in uporabimo njen Taylorjev razvoj. Edino, kar nam manjka, da bi lahko izpeljali (strožji) oceni iz leme za holomorfne funkcije, je kompaktnejši zapis u v obliki $u(z) = z\,v(z)$, kjer je v harmonična na disku. Tega v splošnem na moremo narediti, saj Taylorjeve vrste za u skoraj nikoli ne moremo izraziti s potencami z, ampak le v obliki $u(x, y) = \sum_{j,k} a_{jk} x^j\, y^k$.

5. Preslikave diska na splošnejše domene

V osnovni Schwarzovi lemi nas mogoče nekoliko moti pogoj, da mora funkcija ohranjati izhodišče. S tem je povezano tudi dejstvo, da dobimo oceno odvoda le v izhodišču. Zato bi se te predpostavke sedaj radi znebili.

Lema 5.1 (Schwarz-Pickova lema za holomorfne funkcije [8, izrek 12.6])**.** *Naj bo f holomorfna funkcija iz enotskega diska v enotski disk. Potem v vsaki točki z iz diska velja neenakost*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - \left|f(z)\right|^2} \;\leq\; \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Če velja enakost v neki točki, velja enakost tudi v vsaki drugi točki in je f avtomorfizem diska.

Opomba 5.2. Naj funkcija izpolnjuje še pogoj $f(0) = 0$. Če tedaj vstavimo v neenakost $z = 0$, dobimo že znano oceno odvoda v izhodišču iz osnovne leme.

Dokaz. Ideja dokaza je prevedba na osnovno verzijo leme. V ta namen konstruiramo funkcijo, ki izpolnjuje pogoj, ki smo se ga želeli znebiti, tj. ohranja izhodišče.

Fiksirajmo točko z iz $\mathbb{D}$. Prednost tega, da gledamo preslikave enotskega diska, je v tem, da točno poznamo obliko avtomorfizmov te preproste domene. Za a iz $\mathbb{D}$ označimo

$$\varphi_a(\zeta) \;=\; \frac{a - \zeta}{1 - \bar{a}\zeta}.$$

Preslikava φ_a je avtomorfizem diska in ima lastnost, da izmenja izhodišče in točko a. Oglejmo si sedaj kompozitum $g := \varphi_{-f(z)} \circ f \circ \varphi_z$. Funkcija g slika med enotskima diskoma in zanjo velja:

$$g(0) = \varphi_{-f(z)}(\, f(\varphi_z(0))) \;=\; \varphi_{-f(z)}(\, f(z)) \;= 0.$$

Zato lahko uporabimo osnovno Schwarzovo lemo in imamo oceno $|g'(0)| \leq 1$. Po verižnem pravilu nato izračunamo:

$$g'(0) \;=\; \varphi'_{-f(z)}(f(z))\, f'(z)\, \varphi'_z(0).$$

Direkten račun pokaže, da za φ_a velja

$$\varphi'_a(0) \;=\; 1 - |a|^2.$$

Za avtomorfizme φ_a imamo tudi enostavno formulo za inverz, namreč $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$. Zato po formuli za odvod inverza dobimo:

$$(\varphi_a^{-1})'(a) \;=\; \frac{1}{\varphi'_{-a}(0)} \;=\; \frac{1}{1-|a|^2}.$$

Sedaj samo še poberemo vse skupaj v končen rezultat.

$$|g'(0)| \;=\; \left|\frac{1}{1-|f(z)|^2}\, f'(z)\, (1-|z|^2)\right| \;\le\; 1,$$

pri čemer opazimo, da je desna neenakost točno tista, ki smo jo dokazovali.

Ostane nam še primer, ko v neki točki velja enakost. To pa je ekvivalentno temu, za g maksimizira odvod v izhodišču, tj. $|g'(0)| = 1$. Po osnovni lemi je zato g rotacija, poseben primer avtomorfizma. Dana funkcija f pa je oblike $\varphi_{f(z)} \circ g \circ \varphi_{-z}$ in kot kompozitum takih je tudi sama avtomorfizem enotskega diska. □

Prepišimo sedaj neenakost iz leme v obliki z diferenciali, upoštevajoč, da za holomorfno funkcijo velja $df = f'(z)\,dz$. Dobimo:

$$\frac{|df|}{1-\left|f(z)\right|^2} \;\le\; \frac{|dz|}{1-|z|^2} \tag{13}$$

Osredotočimo se na izraz na desni strani. Ključen miselni preskok je ta, da ga razumemo kot element dolžine oziroma kot novo infinitezimalno enoto dolžine na disku, tj. kot navadno evklidsko enoto, popravljeno z radialno utežjo. Na ta način lahko na novo definiramo dolžine poti na disku. Utež v imenovalcu vsebuje oddaljenost točke do roba, zato bodo poti tem daljše, čim bolj se bodo približale robu.

Naj bo torej $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ neka pot na enotskem disku. Njeno dolžino definiramo kot:

$$\mathcal{L}_P(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\| \,\frac{dt}{1-\|\gamma(t)\|^2},$$

kjer je $\|\cdot\|$ evklidska norma. Ker je utež radialno simetrična, bo v resnici najkrajša pot od poljubne točke do izhodišča še vedno daljica. Za ostale pare točk pa to ne bo res. Najkrajša pot med točkama, od katerih nobena ni izhodišče, je tista po krožnici, ki seka rob diska pravokotno (več o tem v [7, Trditev 11.3.5]).

Za razdaljo med poljubnima točkama z in w iz diska vzamemo dolžino najkrajše poti med njima, natančneje:

$$d_P(z,w) \;:=\; \inf \mathcal{L}_P(\gamma).$$

kjer gre infimum po vseh možnih poteh γ med z in w. Na ta način smo enotski disk opremili s t. i. *Poincaréjevo metriko*. Ta se sicer očitno razlikuje od evklidske, vendar pa je tako porojena topologija na disku ekvivalentna standardni evklidski topologiji na ravnini $\mathbb{R}^2$ (več o tem v [5, 4. poglavje, Trditev 3]).

To je intuitivno razumljivo, saj so baza topologije v vsaki točki nekoliko (središčno) raztegnjeni krogi. Pa tudi metriko smo definirali tako, da je rob diska neskončno daleč od vsake točke, tako kot je obzorje ravnine nedosegljivo.

Vrnimo se k neenakosti (13). Leva stran je zelo podobna desni. Ker v kodomeni funkcije f za holomorfno koordinato vzamemo $f(z)$, je leva stran po analogiji Poincaréjev element dolžine v sliki. Zaradi neenakosti bodo dolžine poti in s tem razdalje med točkami v kodomeni krajše kot v domeni. Schwarz-Pickova lema nam torej pove, da holomorfne funkcije zmanjšujejo razdalje v Poincaréjevi metriki. Ali drugače, enotski disk lahko opremimo s tako metriko, da postanejo holomorfne funkcije na njem skrčitve.

Poleg tega lahko sklepamo, da v primeru, ko funkcija ohrani razdaljo med dvema različnima točkama, velja, da se v sliki ohrani razdalja med poljubnima točkama. Z drugimi besedami je v tem primeru funkcija f izometrija te metrike. Iz leme 5.1 torej razberemo, da so holomorfni avtomorfizmi enotskega diska izometrije Poincaréjeve metrike.

Primer 5.3. Kako bi si lahko z zgornjim premislekom in s Schwarzovo lemo pomagali do splošnega predpisa za razdaljo med poljubnima točkama z in w v tej metriki? Omejimo se najprej na lažji primer, ko želimo izračunati razdaljo med izhodiščem in neko točko x na pozitivni realni osi. Za ta primer smo že premislili, da je najkrajša pot γ med točkama kar daljica. V namen izračuna integrala jo parametriziramo z $\gamma : [0, x] \to \mathbb{D}$, $\gamma(t) = t$, zato je hitrost $\|\dot{\gamma}(t)\|$ enaka ena v vsaki točki. Računamo po definiciji:

$$d_P(0, x) := \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \tanh^{-1} x$$

Ker je utež $\frac{1}{1-\|\gamma(t)\|^2}$ radialno simetrična, velja podobna formula za razdaljo poljubne točke diska do izhodišča, in sicer je $d_P(0, z) = \tanh^{-1} |z|$.

Da bi dobili splošen predpis, pa se moramo spomniti, da so holomorfni avtomorfizmi diska izometrije Poincaréjeve metrike. Poleg tega imajo določeni med njimi lastnost, da izmenjajo izbrano točko z izhodiščem. Lahko izberemo tak avtomorfizem φ, ki slika točko z v izhodišče, in sicer $\varphi(s) = \frac{s-z}{1-\bar{z}s}$. Zato po zgornjem računu velja:

$$d_P(z, w) = d_P(\varphi(z), \varphi(w)) = d_P(0, \varphi(w)) = \frac{1}{2} \log \frac{|1-\bar{z}w| + |w-z|}{|1-\bar{z}w| - |w-z|}.$$

Tako smo izpeljali predpis za razdaljo med poljubnima točkama diska. ♢

Hitro se pojavi ideja, da bi evklidski element dolžine utežili s kakšno drugo funkcijo in tako definirali metriko tudi na neki splošnejši domeni Ω v kompleksni ravnini. Tako definirana metrika je določena z izbiro uteži in posledično enote dolžine. To zato označimo z $ds_h^2 := h\ |dz|^2$ in zahtevamo, da je h pozitivna dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija na Ω (tako smo res definirali metriko).

Če zapišemo zadnji predpis v nekoliko drugačni obliki, tj. $h\,|dz|^2 = h\ (dx^2 + dy^2)$, vidimo, da je taka metrika v kompleksnem ustreznica Riemannove metrike oziroma prve fundamentalne forme s koeficienti $E = G = h$ in $F = 0$. Pripadajoča matrika skalarnega produkta na tangentnem prostoru je v vsaki točki večkratnik identitete (se od evklidske metrike $dx^2 + dy^2$ razlikuje za multiplikativen faktor $h(z)$), zato se v primerjavi z evklidsko metriko sicer dolžine vektorjev spremenijo, koti med njimi pa se ohranjajo.

Posplošimo sedaj Schwarzovo lemo na primer holomorfne funkcije iz enotskega diska $\mathbb{D}$ v neko poljubno domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Lema 5.4 (Ahlforsova lema [4, izrek 2.1])**.** *Naj bo f holomorfna preslikava iz $\mathbb{D}$ v neko odprto povezano množico $\Omega \subset \mathbb{C}$. Opremimo $\mathbb{D}$ s Poincaréjevo metriko in domeno Ω z metriko $ds_h^2 = h\ |dz|^2$, kjer je h pozitivna $\mathcal{C}^2$ funkcija na Ω, za katero velja zahteva*

$$\frac{1}{4} \Delta \log h \geq Ch \tag{14}$$

za neko realno konstanto $C > 0$. Tedaj velja

$$h(f(z))\,|f'(z)|^2|dz|^2 \;\leq\; \frac{1}{C}\,\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2},$$

oziroma ekvivalentno:

$$|f'(z)| \;\leq\; \frac{2}{\sqrt{C\,h(f(z))}}\,\frac{1}{1-|z|^2}.$$

Če velja enakost v eni sami točki, velja enakost v vsaki točki in je f izometrija.

Opomba 5.5. Rezultat leme je ocena odvoda preslikave v poljubni točki. Tega navzgor omejimo z izrazom, odvisnim od vrednosti preslikave v izbrani točki. In taka ocena je možna za vsako holomorfno preslikavo iz diska v dano domeno. Metriko, ki omogoča to lastnost, imenujemo *hiperbolična.*

Definicija 5.6. Če je preslikava f kot v zgornji lemi, imenujemo infinitezimalni element dolžine v domeni *povlek* metrike (na domeno $\mathbb{D}$). Označimo ga s $f^*(ds_h^2)$.

Dokaz. Naj bo torej $f^*(ds_h^2)$ povlek metrike $ds_h^2 = h\,|dz|$, definirane na območju Ω. Ker je funkcija f holomorfna, zopet izkoristimo zvezo $df = f'(z)\,dz$ in dobimo:

$$f^*(ds_h^2) \;=\; (h\circ f)\,|f'|^2\,|dz|^2 \;=\; \hat{h}\,|dz|^2.$$

Označimo Poincaréjev element dolžine z $ds_P^2 := g(z)|dz|^2$, kjer je torej $g(z) := \frac{1}{(1-|z|^2)^2}$, in definirajmo še novo funkcijo na enotskem disku s predpisom:

$$u := \frac{\hat{h}}{g} \;=\; \hat{h}\,(1-|z|^2)^2.$$

Iz predpostavk sledi, da je u povsod pozitivna. Ugotovimo tudi, da je ocena iz leme sedaj ekvivalentna spodnji zahtevi.

$$\sup_{\mathbb{D}} u \;\leq\; \frac{2}{C}$$

Iz predpisa za funkcijo u je razvidno, da je ta identično enaka nič na enotski krožnici, če je le f (in s tem $\hat{h}$) tam zvezna. To seveda v splošnem ni res, vendar si lahko v tem primeru pomagamo z že znanim trikom. Definiramo namreč družino funkcij $u_r(z) := \frac{\hat{h}(rz)}{g(z)}$. Te so holomorfne na disku polmera $1/r$, ki vsebuje enotskega, in ničelne na robu enotskega diska. Ko zanje dokažemo trditev, dobimo neenakost, katere desna stran je neodvisna od r in lahko pošljemo r proti ena.

Sedaj lahko predpostavimo, da je u ničelna na robu. Ker pa je (v notranjosti) povsod pozitivna, mora (kot zvezna funkcija na kompaktu) svoj maksimum zavzeti v neki notranji točki diska, recimo ji z_0. Če je maksimum enak nič, je u ničelna povsod in želena ocena postane trivialna. Obravnavajmo torej primer, ko je $u(z_0) > 0$.

Očitno tedaj tudi funkcija $\log u$ v z_0 doseže svoj lokalni maksimum. Zato je njena Hessejeva matrika v tej točki nepozitivno definitna. Še več, ker je $\log u$ funkcija dveh spremenljivk, to pomeni, da je sled njene Hessejeve matrike nepozitivna. Krajše lahko ugotovitev zapišemo kot

$$\Delta\,\log u(z_0) \;\leq\; 0.$$

Po definiciji lahko to neenakost prepišemo na sledeč način:

$$\Delta\,\log u(z_0) \;=\; \Delta\,\log \hat{h}(z_0) \;-\; \Delta\,\log g(z_0) \;\leq\; 0 \tag{15}$$

Za utež Poincaréjeve metrike velja soroden pogoj (vendar z enakostjo) kot tisti za utež h, in sicer

$$\Delta \log g(z) = 8\, g(z). \tag{16}$$

To lahko direktno izračunamo takole:

$$\begin{aligned}
\Delta \log \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2} &= -2\,\Delta \log(1-x^2-y^2) \\
&= -2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1-x^2-y^2) - 2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(1-x^2-y^2) \\
&= 4\,\frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2} + 4\,\frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \\
&= \frac{8}{(1-x^2-y^2)^2}
\end{aligned}$$

Če dobljeno zvezo (16) vstavimo v neenakost (15) dobimo

$$\Delta \log \hat{h}(z_0) \;\leq\; 8\, g(z_0)$$

in ob upoštevanju pogoja (14) na funkcijo h iz leme še

$$4\,\hat{h}(z_0)\, C \;\leq\; 8\, g(z_0).$$

Ko delimo z (nenegativnim) izrazom $4C\, g(z_0)$, dobimo želeno lastnost:

$$u(z_0) \;\leq\; \frac{2}{C}.$$

Dokaz dodatka, ki govori o primeru enakosti v neki točki, ne sledi direktno iz zgornjega dokaza in je bolj zapleten (najdemo ga v [2, Trditev 1.2.1]). □

Seveda je Schwarz-Pickova lema direktna posledica Ahlforsove. Le za domeno Ω vzamemo enotski disk, opremljen s Poincaréjevo metriko.

Razkrijmo še pomen pogoja (14) iz leme. Količino $-\frac{1}{2h}\Delta \log h$ imenujemo *ukrivljenost* in jo označimo s K_h ali kar K. Je lastnost metrike, s katero smo opremili domeno. V kontekstu diferencialne geometrije ta izraz imenujemo *Gaussova ukrivljenost* in ta nam pove, koliko se ploskev lokalno odklanja od svoje tangentne ravnine v neki točki.

Da bi prišli do pojma ukrivljenosti z vidika diferencialne geometrije, se bomo poslužili dejstva, da lahko Gaussovo ukrivljenost ploskve izračuna vsak njen prebivalec, ki sicer zna meriti razdalje, a ne vidi sveta izven matične ploskve. Drugače povedano, Gaussova ukrivljenost je odvisna le od koeficientov prve fundamentalne forme na ploskvi (te pa smo v našem primeru določili z izbiro metrike). To ugotovitev je dokazal sam Gauss in ustrezen izrek poimenoval kot odličnega. V standardnih oznakah za koeficiente E, F, G prve forme, pri čemer privzamemo $F = 0$ (kar je primer, ki nas zanima), velja t. i. *Brioschijeva formula* ([7, izrek 10.2.1]):

$$K \;=\; -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{G_x}{\sqrt{EG}} \;+\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\right).$$

Konkretneje, pri nas velja $E = G = h$. Tako dobimo

$$K \;=\; -\frac{1}{2h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_x}{h} \;+\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{h_y}{h}\right) \;=\; -\frac{1}{2h}\Delta \log h.$$

Smiselno se je vprašati o dobri definiranosti pojma ukrivljenosti. Izkaže pa se, da je biholomorfna invarianta. Z drugimi besedami, pravilno se transformira pri biholomorfni zamenjavi spremenljivke, zato je definicija dobra. Pa dokažimo to.

Trditev 5.7 ([3, izrek 1.8]). *Naj bo f biholomorfna preslikava med domenama Ω_1 in Ω_2 in naj bo metrika na Ω_2 podana z $ds^2_{\Omega_2} = h\,|dz|^2$. Ukrivljenost K je tedaj invariantna na f, tj. velja*

$$K_{ds^2_{\Omega_2}}(f(z)) \;=\; K_{f^*(ds^2_{\Omega_2})}(z) \;=\; K_{ds^2_{\Omega_1}}(z) \tag{17}$$

v vsaki točki z, kjer je $f'(z)$ neničeln.

Dokaz. Ekvivalentno lahko zgornjo formulo interpretirano takole. Na domeni ne znamo meriti ukrivljenosti drugače, kot da si pomagamo s tem, kako jo merimo v kodomeni.

Označimo torej metriko na Ω_2 z $ds^2_{\Omega_2} = h\,|dz|^2$ in njen povlek na Ω_1 s $f^*(ds^2_{\Omega_2}) = (h\circ f)|f'|^2\,|dz|^2$. Razpišimo oba izraza, ki nastopata v enakosti (17).

$$K_{ds^2_{\Omega_2}}(f(z)) \;=\; -\frac{1}{2\,h(f(z))}\Big(\Delta\,\log\,h\Big)(f(z))$$

$$K_{f^*(ds^2_{\Omega_2})}(z) \;=\; -\frac{1}{2\,h(f(z)|f'(z)|^2}\,\Delta\left(\log\,h(f(z)) + \log|f'(z)|^2\right) \tag{18}$$

Spomnimo se, da za odvod kompozituma dveh preslikav kompleksne ravnine velja spodnje verižno pravilo (več o tem v [6, 1. poglavje]).

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z} \;=\; \left(\frac{\partial g}{\partial w}\circ f\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial z} \;+\; \left(\frac{\partial g}{\partial \bar w}\circ f\right)\cdot\frac{\partial \bar f}{\partial z}$$

Zgornjo zvezo sedaj uporabimo na prvem členu v oklepaju v (18). Dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial z}\log h(f(z)) \;=\; \frac{\partial \log h}{\partial w}(f(z))\;\cdot f'(z)$$

in

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar z\partial z}\log h(f(z)) \;=\; \frac{\partial^2 \log h}{\partial \bar w\partial w}(f(z))\;\cdot f'(z)\overline{f'(z)}.$$

Iz znane zveze

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar z\partial z} = \frac{1}{4}\,\Delta$$

dobimo na koncu spodnjo enakost.

$$\Delta\,\log\,h(f(z)) \;=\; \Delta\left(\log\,h\right)\Big|_{f(z)}|f'(z)|^2$$

Drugi člen pa pospravimo z naslednjo lastnostjo. Če je g holomorfna, je logaritem njene absolutne vrednosti, tj. $\log\,|g|$, harmonična v vseh točkah, kjer je g neničelna. V okolici take točke je kompleksni logaritem $\log g(z) = \log\,|g(z)| + \mathrm{i}\arg g(z)$ dobro definirana in holomorfna funkcija, njen realni del pa je posledično harmonična funkcija. Zato je v teh točkah izraz $\Delta\log\,|g|$ enak nič. Tu dobimo vpogled v težavo, ki nastane, če bi hoteli direktno zamenjati holomorfnost s harmoničnostjo. V takem primeru se drugega člena v (18) ne bi mogli kar tako znebiti.

Če upoštevamo obe poenostavitvi in ju ustavimo v (18), se nam izraz preuredi v $K_{ds^2_{\Omega_2}}(f(z))$. □

Pogoj v lemi je torej ekvivalenten zahtevi o negativni ukrivljenosti K metrike na Ω, tj.

$$K \;\le\; -2C \;<\; 0.$$

Direkten račun (ekvivalenten izpeljavi enakosti (16) v dokazu leme 5.4) pokaže, da je ukrivljenost Poincaréjeve metrike konstantna in negativna. Zato je skrivnost Schwarzove leme (in tudi Ahlforsove kot njene nadgradnje) pravzaprav v tem, da je posledica negativne ukrivljenosti Poincaréjeve metrike na enotskem disku.

Že človek, po katerem se imenuje slavna metrika, Henry Poincaré, se je zavedal povezave med kompleksno analizo in hiperbolično geometrijo na disku. Za razkritje bistva Schwarzove leme pa je zaslužen finski matematik Lars V. Ahlfors. Žal (v kolikor ni v njegovem spominu lema ostala le obroben zapis) je to spoznanje prišlo prepozno, da bi zanj izvedel sam Schwarz.

6. Posplošena Schwarzova lema za harmonične funkcije

Ali obstajajo sorodni rezultati Ahlforsovi lemi tudi za harmonične funkcije in preslikave? Težave imamo na primer že z definicijo ukrivljenosti, ta namreč ni invariantna pri zamenjavi spremenljivke s harmonično preslikavo. Zato je način, ki se ga poslužujemo pri ustvarjanju analogij, ta, da harmonično funkcijo vidimo kot realni del holomorfne.

To je zgolj en možen pristop in ta nam omogoča, da si odgovorimo na vprašanje o posplošitvi osnovne Schwarzove leme za harmonične funkcije na primer, ko funkcija izhodišča ne ohranja nujno.

Izrek 6.1 ([3, izrek 1.8]). *Naj bo u harmonična funkcija iz enotskega diska v interval $(-1,1)$. Tedaj za vsako točko z iz diska velja*

$$\frac{|\nabla u(z)|}{1-\left|u(z)\right|^2} \quad\le\quad \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-\left|z\right|^2}.$$

Dokaz. Problem želimo prevesti na že znanega, torej na posplošeno Schwarzovo lemo za holomorfne funkcije. Iz osnovne teorije kompleksne analize vemo, da ima na enostavno povezani domeni, primer katere je enotski disk, vsaka harmonična funkcija svojo harmonično konjugiranko. Torej za dano funkcijo u obstaja taka harmonična funkcija v, da je $f := u + \mathrm{i}\, v$ holomorfna na disku.

Slika u je vsebovana v intervalu $(-1,1)$, vrednosti f pa so vsebovane v pokončnem traku $S := \{z;\ -1 < \Re(z) < 1\}$.

Da bi prevedli na že znani primer, moramo konstruirati neko preslikavo enotskega diska. Pri tem si v nadaljevanju pomagamo s konformno preslikavo g, ki tudi (tako kot f) slika iz $\mathbb{D}$ na S, s to razliko, da je ta bijektivna. Definiramo jo takole:

$$g(z) \;:=\; \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

Potrebno je komentirati, da je tako definirana preslikava večlična. Vendar pa nas reši dejstvo, da je njena domena enostavno povezani enotski disk. Na tem obstaja dobro definirani kompleksni logaritem (izberemo primerno vejo). Tako dobimo spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \\ \mathbb{D} \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Sedaj označimo s $h := g^{-1} \circ f$ funkcijo, za katero diagram komutira in eksplicitno zapišimo zvezo med f, g in h.

$$f(z) \;=\; \frac{2\mathrm{i}}{\pi} \log \frac{1+h(z)}{1-h(z)}$$

Tako dobljena preslikava h je holomorfna funkcija iz enotskega diska nazaj vanj in zato zanjo velja lema 5.1. Natančneje, za vsak z iz $\mathbb{D}$ velja

$$|h'(z)| \;\leq\; \frac{1-\left|h(z)\right|^2}{1-|z|^2}. \tag{19}$$

Preden povemo idejo, kako pridemo do končne ocene, si pripravimo še zvezo med odvodoma funkcij h in f. Uporabimo verižno pravilo in dobimo

$$f'(z) \;=\; \frac{4\mathrm{i}}{\pi} \frac{h'(z)}{1-h(z)^2}. \tag{20}$$

Potrebujemo pa še zvezo med kompleksnim odvodom f in gradientom u. Najprej se spomnimo na znano zvezo:

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + \mathrm{i}\, v).$$

Sedaj z upoštevanjem Cauchy-Riemannovega sistema enačb ($u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$) preoblikujemo izraz $|f'(z)|$.

$$\begin{aligned} |f'(z)| \;&=\; \frac{1}{2}\sqrt{(u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2} \\ &=\; \frac{1}{2}\sqrt{(2\,u_x)^2 + (2\,u_y)^2} \\ &=\; \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \end{aligned}$$

Dobimo nekoliko presenetljiv zaključek:

$$\left|\nabla u(z)\right| \;=\; |f'(z)|. \tag{21}$$

Začnimo se prebijati do želene neenakosti. V osnovi bi radi za točke z iz enotskega diska izpeljali oceno oblike

$$|\nabla u(z)| \;\leq\; C\,\frac{1-\left|u(z)\right|^2}{1-|z|^2}$$

in izbrali optimalno (realno) pozitivno konstanto C. In sicer tako, da bo enakost dosežena pri določenih predstavnicah harmoničnih funkcij s posebej lepimi lastnostmi. Pomagamo si z izpeljanima sredstvoma (19) in (20) ter ju združimo v spodnjo neenakost.

$$\left|f'(z)\right| \;\leq\; \frac{4}{\pi}\,\frac{1-\left|h(z)\right|^2}{\left|1-h(z)^2\right|}\,\frac{1}{1-|z|^2}$$

Sedaj upoštevamo zvezo (21) med odvodom f in gradientom u ter optimistično nastavimo:

$$|\nabla u(z)| \;\leq\; \left|f'(z)\right| \;=\; \frac{4}{\pi}\,\frac{1-\left|h(z)\right|^2}{\left|1-h(z)^2\right|}\,\frac{1}{1-|z|^2} \;\leq\; C\,\frac{1-\left|\Re\left(f(z)\right)\right|^2}{1-|z|^2}, \tag{22}$$

pri čemer bo za dokaz želene neenakosti zadostovalo obravnavati drugo neenakost v zgornji verigi. V (22) bi se radi znebili funkcije f in jo izrazili s h. To naredimo tako, da izpeljemo izraz za realni del f iz njene definicije. Velja:

$$\Re(f) \;=\; -\frac{2}{\pi}\,\arg\frac{1+h}{1-h}$$

Torej se (22) prevede v spodnjo obliko, pri čemer spotoma še množimo z (neničelnim) faktorjem $1-|z|^2$.

$$\frac{4\,\pi}{\pi^2-4\left|\arg\frac{1+h}{1-h}\right|^2}\,\frac{1-\left|h\right|^2}{\left|1-h^2\right|} \;\leq\; C \tag{23}$$

kjer se spomnimo, da je $|h(z)|\leq 1$ za vsako točko z iz diska.

Da bi si poenostavili razmišljanje, zapišimo $\frac{1+h}{1-h} = r\,e^{\mathrm{i}t}$. Preslikava $\frac{1+z}{1-z}$ trak S preslika na desno polravnino, zato spremenljivka t teče med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$. Sedaj se h izraža na spodnji način.

$$h \;=\; \frac{r\,e^{\mathrm{i}t}+1}{r\,e^{\mathrm{i}t}-1}$$

Izraza v (23), ki vsebujeta h, dobita obliko:

$$1-|h|^2 \;=\; \frac{4r\,\cos\,t}{r^2+2r\,\cos\,t+1}$$

in

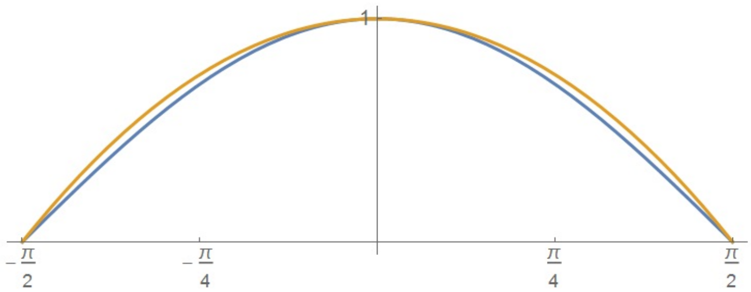
$$|1-h^2| \;=\; \frac{4r\,|e^{\mathrm{i}t}|}{r^2+2r\,\cos\,t+1}.$$

Celotna neenakost (23) pa se prepiše v sledečo:

$$\frac{|\cos\,t|}{1-\frac{4}{\pi^2}t^2} \;\leq\; 1.$$

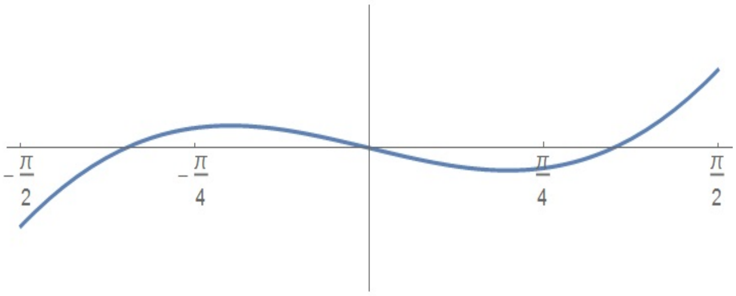
Na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ je kosinus pozitiven, zato je dovolj pokazati

$$\cos\,t-(1-\frac{4}{\pi^2}t^2) \;\leq\; 0. \tag{24}$$



Slika 2. Grafa kosinusa (moder) in parabole (oranžen) na relevantnem območju.

Iz slike je očitno, da je graf kosinusa na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ pod dano parabolo. Za točnejši dokaz pa razmislimo takole. Označimo $p(t) := \cos\,t-(1-\frac{4}{\pi^2}t^2)$. Funkcija p ima ničle v $\pm\frac{\pi}{2}$ in 0, v točkah $\pm\frac{\pi}{4}$ pa je negativna.



SLIKA 3. Graf odvoda funkcije p.

Prav tako p doseže svoj minimum v ničli ter maksimuma v točkah $\pm t_0$, kjer je t_0 nekje med $\frac{\pi}{4}$ in $\frac{\pi}{2}$. Iz obnašanja njenega odvoda lahko zato zaključimo, da (24) res velja. Odvod je namreč negativen med $-\frac{\pi}{2}$ in svojo ničlo t_1, tam razlika med grafoma narašča in p je vse bolj negativna. Od t_1 do izhodišča pa je odvod pozitiven, p pa posledično vse manj negativna. Podoben razmislek velja za pozitivne argumente funkcije p. □

Sedaj se lahko vprašamo še o situaciji, ki je sicer izrek 6.1 ne obravnava. Kaj, če bi v neki točki veljala enakost? Če se sprehodimo po dokazu, ugotovimo, da tedaj za h v (19) velja enakost. Po posplošeni Schwarzovi lemi je torej h avtomorfizem diska, torej oblike $e^{\mathrm{i}t}\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$ za neko realno število t in neki α iz enotskega diska. Iz zveze $f = g \circ h$ tudi sledi, da je f biholomorfna preslikava diska na trak S. Zato je dana harmonična funkcija oblike

$$u(z) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{1 + e^{\mathrm{i}t}\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}}{1 - e^{\mathrm{i}t}\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}}.$$

Nekoliko površno lahko rečemo, da se tudi v primeru harmoničnih funkcij, ki ne ohranjajo izhodišča, ekstremalne funkcije izražajo s funkcijo arkus tangens. Če za parametra t in α vzamemo π oziroma nič, se nam (po nekaj računanja) izraz poenostavi v znano obliko univerzalne funkcije iz prejšnjega razdelka.

Določanje, kako hitro lahko neka funkcija z danimi lastnostmi narašča v posamezni točki svoje domene, se v mnogih primerih izkaže za zahtevno vprašanje. Omenimo zanimiv odprt problem.

Težava se pojavi, ko želimo harmonični preslikavi dodati še lastnost, da ohranja kote. Imamo torej konformno harmonično preslikavo na enotskem disku, na primer v neko večdimenzionalno kroglo, lahko kar v enotsko kroglo v $\mathbb{R}^3$. Kako velik je lahko njen odvod v poljubni točki diska? Torej, ali se da konstanto $\frac{4}{\pi}$ še izboljšati?

V splošnem se pri takih vprašanjih da obvladati primer, ko preslikava ohranja izhodišče in tam podati oceno. Ideja, da bi oceno prenesli v poljubno drugo točko preko avtomorfizmov, pa ne deluje vedno. Tako ugodnih avtomorfizmov kot v holomorfnem primeru, tj. takih, ki kar izmenjajo dve izbrani točki, v splošnem enostavno ni.

7. Mali Picardov izrek

Na zadnje se bomo posvetili konkretni uporabi Ahlforsove leme iz razdelka 5 za dokaz mogočne posplošitve dejstva, da je omejena cela funkcija konstantna, in sicer Malega Picardovega izreka.

Za začetek potrebujemo nekoliko splošnejšo obliko Ahlforsove leme, kjer obravnavamo funkcije ne le na enotskem disku, temveč na disku poljubnega radija. Dogovorimo se, da bo od sedaj D_R oznaka za krog polmera R s središčem v izhodišču.

Lema 7.1 (Ahlforsova lema [6, lema 4.2])**.** *Naj bo Ω domena v kompleksni ravnini. Predpostavimo, da na njej lahko definiramo metriko prek neke pozitivne funkcije $\lambda \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, za katero velja*

$$\frac{1}{4}\Delta \log \lambda \ \geq \ \lambda.$$

Tedaj za vsako holomorfno funkcijo f iz D_R v Ω velja

$$|f'(z)|^2\,\lambda(f(z)) \ \leq \ \frac{2R^2}{(R^2-|z|^2)^2}$$

v vsaki točki z, ki zadošča $|z|<R$.

Ta verzija leme je v resnici kar ekvivalntna lemi 5.4 (pri čemer opazimo, da je tukaj konstanta C v pogoju na funkcijo λ kar enaka 1) in njen dokaz poteka ideníčno kot tisti, že zapisan v razdelku 5, zato ga izpustimo.

Na tej točki bomo morali rahlo goljufati, potrebujemo namreč konstrukcijo take funkcije $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\backslash\{0,1\})$, saj Mali Picardov izrek obravnava funkcije, ki izpustijo več kot eno kompleksno vrednost. Taka konstrukcija je dolga in tehnično zapletena, pojasnjena je na primer v [6, 4. poglavje, lema 3]. V nadaljevanju bomo privzeli njen obstoj.

Spodnji izrek bo ključen, saj bo Picardov izrek tedaj direktna posledica. Izrek pove, da imamo vsaj nekakšno kontrolo nad sliko holomorfne funkcije. Landau v nekem svojem nekoliko bolj znanem izreku (več o tem na primer v [8, izrek 14.14]) v resnici zagotavlja obstoj diskov določenih velikosti, odvisnih od odvoda, v sliki dane funkcije. Čim večji je namreč odvod v neki točki, hitreje tam funkcija lokalno narašča in se širi, tem večja je tudi slika okolice te točke.

Izrek 7.2 (Landau [6, izrek 4.1])**.** *Obstaja funkcija $\alpha \mapsto R(\alpha)$, definirana na celotnem $\mathbb{C}$ in z zalogo vrednosti v intervalu $(0,\infty)$, s sledečo lastnostjo.*

Naj bo $R > R(\alpha)$ in f holomorfna funkcija na D_R, za katero velja $f(0)=\alpha$ in $f'(0)=1$. Potem f zavzame vsaj eno izmed vrednosti 0 in 1 na D_R.

Dokaz. Naj bo torej f holomorfna na D_R z lastnostma $f(0)=\alpha$ in $f'(0)=1$. Njen razvoj v vrsto je zato oblike $f(z)=\alpha+z+\cdots$. Predpostavimo, da f na D_R ne zavzame nobene od vrednosti 0 ali 1, drugače povedano, da velja $f(D_R)\subset\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Če je tedaj λ funkcija, katere obstoj smo privzeli v zadnji opombi, potem iz splošnejše oblike Ahlforsove leme sledi neenakost

$$|f'(z)|^2\,\lambda(f(z)) \ \leq \ \frac{2R^2}{(R^2-|z|^2)^2}$$

v vsaki točki z, za katero velja $|z|<R$. V zgornjo zvezo vstavimo $z=0$, upoštevamo lastnosti f in dobimo $\lambda(\alpha)\leq 2R^2\cdot R^{-4}$. Če iz tega izrazimo R, dobimo sledečo oceno.

$$R \ \leq \ \left(\frac{2}{\lambda(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dobili smo omejitev na R, tj. $R \leq R(\alpha)$. Torej mora za vsak $R > R(\alpha)$ funkcija f zavzeti vsaj eno izmed vrednosti 0 in 1 na disku D_R. $\square$

Zdaj nas pa le še korak loči od pomembnega rezultata, do katerega želimo priti.

Izrek 7.3 (Mali Picardov izrek)**.** *Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija, definirana na celotni kompleksni ravnini. Tedaj f zavzame vse kompleksne vrednosti, z ne več kot eno izjemo.*

Dokaz. Naj bo torej f nekonstantna in cela, tj. definirana na celotni kompleksni ravnini. Privzemimo, da ne zavzame dveh zazličnih kompleksnih vrednosti a in b. Po spremembi kooordinat z linearno preslikavo lahko privzamemo, da velja $a = 0$ in $b = 1$.

Izberimo sedaj tako točko $w \in \mathbb{C}$, v kateri je odvod f neničeln, in definirajmo preslikavo

$$F(z) \; := \; f\left(w + \frac{z}{f'(w)}\right).$$

Vemo, da je F dobro definirana, cela in ne zavzame vrednosti 0 ali 1. Koristna je pa zato, ker zanjo velja $F'(0) = 1$, zato ustreza pogojem iz leme 7.1. Hkrati pa je z njimi v očitnem nasprotju, saj na nobenem še tako velikem krogu ne zavzame vrednosti 0 ali 1. $\square$

Slovar strokovnih izrazov

biholomorphic function biholomorfna funkcija – holomorfna in bijektivna s holomorfnim inverzom
Cauchy integral formula Cauchyjeva integralska furmula – način reprezentacije holomorfne funkcije
Gauss curvature Gaussova ukrivljenost
harmonic function harmonična funkcija
holomorphic function holomorfna funkcija
hyperbolic disc enotski disk, opremljen s Poincaréjevo metriko
maximum principle princip maksimuma
mean value property lastnost povprečne vrednosti
Poincaré metric Poincaréjeva metrika (na enotskem disku)
Poisson integral formula Poissonova integralska formula – način reprezentacije harmonične funkcije
pullback povlek (metrike)
real-analytic realno-analitična – tako funkcijo lahko lokalno razvijemo v konvergentno Taylorjevo vrsto
Riemann metric Riemannova metrika – skalarni produkt na tangentnem prostoru v vsaki točki ploskve, podan je z matriko prve fundamentalne forme

Literatura

[1] S. Axler, P. Bourdon in W. Ramey, *Harmonic function theory*, 2. izdaja, Graduate texts in mathematics **137**, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] M. Jarnicki in P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis*, 2. izdaja, De Gruyter Expositions in Mathematics **9**, Walter de Gruyter, Berlin, 2013.

[3] D. Kalaj in M. Vuorinen, *On harmonic functions and the Schwarz lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012) 161–165.

[4] S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. An introduction*, 2. izdaja, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, 2005.

[5] S. G. Krantz, *Complex analysis: the geometric viewpoint*, 2. izdaja, The Carus mathematical monographs **23**, Washington, 2004.
[6] R. Narasimhan in Y. Nievergelt, *Complex analysis in one variable*, 2. izdaja, Birkhäuser, Boston, 2001.
[7] A. Pressley, *Elementary differential geometry*, 2. izdaja, Springer undergraduate mathematics series, Springer-Verlag, London, 2010.
[8] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3. izdaja, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1987.