UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Andraž Pirnovar

Upravljanje razpršenosti portfeljev

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2018

Kazalo

1. Uvod	4
2. Potrebno teoretično ozadje	5
2.1. Donos	5
2.2. Dolga in kratka prodaja	5
2.3. Razpršenost portfelja	5
2.4. Model povprečje–varianca	5
2.5. Sharpovo razmerje	5
2.6. Kriptovalute	6
3. Matematično ozadje	6
3.1. Slučajna spremenljivka	6
3.2. Pričakovana vrednost	6
3.3. Momenti	7
3.4. Kovariančna matrika	8
3.5. Entropija	8
4. Tveganje	8
5. Metoda glavnih komponent	9
5.1. Opis metode	9
5.2. Ideja konstrukcije	9
6. Analiza razpršenosti	9
6.1. Analiza tveganja	10
7. Pogojna analiza tveganja	12
8. Upravljanje z razpršenostjo	14
8.1. Opis algoritma	15
8.2. Rekurzivna izbirna hevristika	17
9. Uporaba metode na primeru kriptovalut	17
9.1. Uvod v kriptovalute	17
9.2. Izbira kriptovalut za analizo	18
9.3. Analiza izbranih kriptovalut	18
9.4. Upravljanje tveganja s Sharpovim razmerjem	24
10. Zaključek	26
Slovar strokovnih izrazov	28
Literatura	28

Upravljanje razpršenosti portfeljev

Povzetek

Razpršenost portfelja je pomemben dejavnik pri upravljanju z njim. Lahko jo predstavimo na veliko različnih načinov, v tem diplomskem delu pa se bomo osredotočili na razpršenost v odvisnosti od nekoreliranih virov tveganja, predstavljenimi z glavnimi portfelji. Ko imamo med sabo nekorelirane glavne portfelje, lahko na njihovi podlagi predstavimo razpršenost portfelja. To naredimo z eksponentom entropije razpršenostne porazdelitve, ki predstavlja približno število nekoreliranih virov tveganja. Na podlagi te vrednosti lahko izvedemo maksimizacijo z omejitvami, kjer omejitve predstavljajo portfeljske omejitve. Ko večkrat glede na investitorjeve preference tveganja zgradimo optimalni portfelj, te portfelje združimo v razpršenostno mejo.

To metodo uporabimo na primeru kriptovalut, ki so med seboj zelo korelirane. Z njeno pomočjo najdemo glavne portfelje in razpršenostno mejo za uporabljene kriptovalute, hkrati pa primerjamo razpršenost glede na to metodo z razpršenostjo, ki temelji na optimalnem Sharpovem razmerju.

Managing Portfolio Diversification

Abstract

Portfolio diversification plays a crucial role in portfolio management. It can be presented in various ways, but in this thesis, the focus will be on diversification based on uncorrelated sources of risk, presented with principal portfolios. Once we have found uncorrelated principal portfolios, we can use them to present the portfolio's diversification. This can be achieved by using the exponential of the diversification distribution's entropy, which represents an approximate number of uncorrelated sources of risk. On the basis of this value, a maximization can be carried out, with restrictions representing portfolio constraints. Depending on the investor's risk preference, we build multiple optimal portfolios, which we then join into a diversification frontier.

This method is then used in the example of cryptocurrencies, which are highly correlated. With its help, we find the diversification frontier for the cryptocurrencies used. At the same time, we are comparing the diversification according to this method with the one based on optimal Sharpe ratio.

Math. Subj. Class. (2010): 91G10

Ključne besede: razpršenost portfelja, razpršenostna porazdelitev, glavni portfelj, meja povprečje-razpršenost, kriptovaluta.

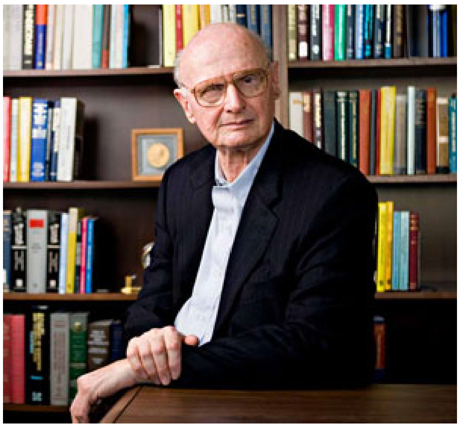
Keywords: portfolio diversification, diversification distribution, principal portfolio, mean-diversification efficient frontier, cryptocurrency.

1. Uvod

Upravljanje s tveganjem je pomembna naloga upravljalcev portfeljev. Eden najpomembnejših dejavnikov takega upravljanja je razpršenost portfeljev (ang. *portfolio diversification*). S tem se ukvarja *portfeljska teorija*, ki je podzvrst matematične ekonomije.

Moderna portfeljska teorija (ang. *Modern Portfolio Theory*) je teorija o tem, kako lahko tveganju nenaklonjeni investitorji zgradijo portfelje, da optimizirajo oz. maksimizirajo pričakovan donos portfelja glede na dano raven tveganja. Privzeto je, da je višje tveganje del večje nagrade.

Začetnik moderne portfeljske teorije je Harry Markowitz, ki je v svojem članku z naslovom *Portfolio Selection* leta 1952 predstavil model *povprečje–varianca* [1]. V njem je predstavljena ideja, da se lastnosti tveganja in donosa posameznega instrumenta ne sme gledati posamezno, ampak je potrebno vzeti v obzir tudi to, kako vplivajo na tveganje in donos celotnega portfelja. Za to delo je med drugim prejel tudi Nobelovo nagrado.



Slika 1. Harry M. Markowitz je za svoje delo na področju portfeljske teorije leta 1989 prejel John Von Neumannovo nagrado za teoretični prispevek, leta 1990 pa še Nobelovo nagrado.

Problem, ki nastopi na večini trgov je, da so finančni instrumenti večinoma korelirani, kar otežuje izračun skupnega tveganja. Ideja, ki je predstavljena v članku *Managing Diversification* [2] je, da s pomočjo analize glavnih komponent elemente portfelja transformira v neodvisne, kar omogoča lažji izračun variance, iz česar pa sledi lažje upravljanje s tveganjem.

Eden izmed trenutno najdostopnejših in najpopularnejših trgov je trg kriptovalut. Na žalost pa so vrednosti kriptokovancev med seboj zelo korelirane. To onemogoča enostavno analizo in sestavljanje razpršenega portfelja. Vendar pa je z zgoraj omenjeno metodo možno najti nekorelirane vire tveganja. Primer tega bo predstavljen tudi v tej diplomski nalogi.

2. Potrebno teoretično ozadje

Spodaj bom na kratko razložil pomembne pojme in teorijo, ki so potrebni za razumevanje metode.

2.1. Donos

Naj bo I_S vrednost finančnega instrumenta ob začetnem času S, I_T pa ob končnem času T. Stopnja donosa (oz. krajše donos) je definirana kot

$$r := \frac{I_T - I_S}{I_S}.$$

Če imamo več instrumentov, označimo vektor donosov z R, kjer je posamezna komponenta posamezen donos.

2.2. Dolga in kratka prodaja

Kratka prodaja je dejanje, ko si najprej izposodimo instrument, ga prodamo po tržni ceni, nato pa ga v prihodnosti kupimo in ob določenem času vrnemo začetnemu lastniku. Dobiček ali izguba sta enaka prvotni (prodajni) ceni, zmanjšani za kasnejšo (nakupno) ceno. Tveganje takega posla je teoretično prisotna neskončna izguba investitorja.
Dolga prodaja predstavlja nakup instrumenta v sedanjosti in prodajo v prihodnosti. Možna dobiček ali izguba sta enaka prodajni ceni, zmanjšani za nakupno. Največja možna izguba je enaka nakupni ceni instrumenta.

2.3. Razpršenost portfelja

Portfelj je dobro razpršen takrat, ko ni močno izpostavljen posemeznim šokom. A kljub jasni definiciji ne obstaja splošno sprejeta in zadovoljiva metodologija, ki bi kvantificirala razpšenost in upravljala z njo. Velikokrat je uporabljen model, ki pove, koliko tveganja je pojasnjenega s sistemskimi faktorji. Ta je uporabljen v faktorskih modelih, ki merijo tveganje v odvisnosti od nekega skupnega faktorja, kar precej olajša računsko težavnost.

2.4. Model povprečje–varianca

Model povprečje–varianca je leta 1952 predstavil Harry Markowitz [1]. V njem pričakovani donos portfelja izrazimo s povprečjem pričakovanih donosov instrumentov iz portfelja, tveganje pa z varianco oz. standardnim odklonom. Pri izbiri portfelja si pomagamo z grafično predstavitvijo povprečje–standardni odklon. *Učinkoviti portfelji* so tisti portfelji, ki imajo za izbran standardni odklon največji pričakovan donos. Učinkoviti portfelji sestavljajo učinkovito mejo.

Model je enoobdobni, kar pomeni, da se na začetku obdobja investira, na koncu obdobja pa instrument proda, kar nam določi donos. Ta predpostavka je dobra za brezkuponske obveznice in investicije, ki nimajo vmesnih izplačil. Mednje spadajo tudi kriptokovanci, saj trgovanje z njimi predpostavlja nakup na začetku obdobja in prodajo na koncu. Ker so lahko obdobja poljubno kratka, je model posplošljiv tudi za trgovanje s finančnimi instrumenti.

2.5. Sharpovo razmerje

Je najbolj uporabljen tehnični kazalec za računanje tveganju prilagojenega donosa. Tem višje vrednosti doseže, tem boljše je. Uvedel ga je William F. Sharpe

leta 1966 v svojem delu *Mutual Fund Performance*[4], leta 1994 pa je Sharpovo razmerje še posplošil v [5].
Ena izmed definicij je

$$S = \frac{E[R - R_b]}{\sqrt{(Var(R - R_b))}},$$

kjer je R donos portfelja, R_b pa donos primerjalnega indeksa. Portfelj z največjo vrednostjo S očitno leži na učinkoviti meji iz modela povprečje–varianca.

Moderna portfeljska teorija pravi, da lahko dodajanje novih instrumentov, katerih korelacija z ostalimi ni 1, zviša Sharpovo razmerje, zmanjša tveganje in ohrani donos.

2.6. Kriptovalute

Kriptovaluta (ang. *cryptocurrency*) je digitalna oz. virtualna valuta, ki je narejena, da služi kot sredstvo izmenjave. Zaščita in preverjanje transakcij potekata s pomočjo kriptogafije, ki tudi nadzira izdajo novih enot te valute. Poskusi ponudbe take valute so se začeli že v devetdesetih letih prejšnjega stoletja, a so prej ko slej vsi poskusi propadli.

Začetek modernih kriptovalut se je zgodil leta 2009, ko je posameznik (ali skupina) pod aliasom *Satoshi Nakamoto* predstavil bitcoin. Posebnost te nove valute je, da namesto centralne avtoritete, ki overjuje transakcije, te overjajo vsi sodelujoči. To poteka preko *Blockchain* tehnologije. Rudarji rešujejo kriptografske naloge, s katerimi overjajo transakcije. Ko je transakcija potrjena, se zabeleži in postane nespremenljiva, rudar pa dobi nagrado. Zaradi popularnosti se je razvilo še veliko novih valut, ki se lahko uporabljajo za investiranje, kupovanje dobrin, trgovanje itd. Z njimi se trguje, podobno kot z vrednostnimi papirji, preko internetnih borz. Njihova prednost je, da so večinoma dostopne posameznikom in da za začetek trgovanja ni potreben velik vložek. Omogočajo tudi trgovanje preko API (vmesnik uporabniškega programa *Application Programming Interface*).

3. Matematično ozadje

3.1. Slučajna spremenljivka

Slučajna spremenljivka (ang. *random variable*) meri numerični rezultat slučajnega eksperimenta.

Definicija 3.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnosti prostor, kjer je Ω množica izidov, $\mathcal{F}$ je σ-algebra na množici Ω, P je verjetnostna mera, ki slika iz σ-algebre $\mathcal{F}$ v interval $[0, 1]$. Slučajna spremenljivka na tem verjetnostnem prostoru je preslikava $X : \Omega \to \mathbb{R}$, za katero je $\{X \in (a, b]\}$ dogodek za vse izbire a in b $(\infty \leq a < b < \infty)$, torej $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in (a, b]\} \in \mathcal{F}$.

3.2. Pričakovana vrednost

Pričakovana vrednost (ang. *expected value*) predstavlja vrednost, ki jo bo slučajna spremenljivka zavzela v povprečju.

Definicija 3.2. Naj bo X slučajna spremenljivka, definirana na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Potem je pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X definirana:

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega)P(w),$$

pri čemer $\omega \in \Omega$. Za diskretno slučajno spremenljivko X je pričakovana vrednost definirana kot:

$$E[X] = \sum_{i}^{k} x_i p_i,$$

kjer p_i predstavlja verjetnost, da slučajna vrednost X zavzame vrednost x_i. Za zvezno slučajno spremenljivko pa je pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X definirana:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

kjer je f_X gostota slučajne spremenljivke X.

Empirično lahko pričakovano vrednost ocenimo z naslednjo cenilko:

$$\mu = \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

.

3.3. Momenti

Varianca (ang. *variance*) meri razpršenost določene slučajne spremenljivke. Izračuna se na naslednji način:

$$\mathrm{Var}\,(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Empirično lahko varianco ocenimo z naslednjo cenilko:

$$\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Standardni odklon je definiran kot kvadratni koren variance in je v enotah slučajne spremenljivke:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}.$$

Kovarianca meri povezanost med dvema slučajnima spremenljivkama X in Y:

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Cenilka za kovarianco je naslednja:

$$\hat{\sigma}_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \tag{3.1}$$

3.4. Kovariančna matrika

Kovariančna matrika (ang. *covariance matrix*) je matrika kovarianc elementov, pri čemer so po diagonali variance posameznih elementov.

Definicija 3.3. Naj bo $X = [X_1 \dots X_n]^T$ vektor slučajnih spremenljivk, za katere velja $\operatorname{Var}(X_i) < \infty$ za vsak $i = 1, \dots, n$. Kovariančna matrika vektorja X je definirana kot:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{Var}(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \vdots\ddots & \ddots & \operatorname{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \dots & \dots & \operatorname{Var}(X_n) \end{bmatrix}$$

Empirično lahko izračunamo kovariančno matriko tako, da z zgoraj omenjenimi cenilkami ocenimo variance in kovariance znotraj nje.

3.5. Entropija

Entropija je mera naključnosti pri verjetnostni porazdelitvi. Naj bo X slučajna spremenljivka in p verjetnostna funkcija, tako da:

$$p(x_i) \coloneqq P(X = x_i).$$

Entropijo slučajne spremenljivke X definiramo kot:

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) \log(p(x_i)). \tag{3.2}$$

Entropija je največja, ko je vsak dogodek x_i enako verjeten.

4. Tveganje

Večina investitorjev je nenaklonjena tveganju, zato hoče sestaviti portfelj, ki minimizira tveganje. Večinoma so portfelji sestavljeni iz tveganih instrumentov, ki imajo negotov donos. Vprašanje, ki se postavi je, kako meriti tveganje in kako primerjati različno tvegane instrumente med seboj. Primerjati možne donose ni dovolj, saj se lahko različna stanja pojavijo z različnimi verjetnostmi.

Primer 4.1. Predpostavimo dva finančna instrumenta, recimo jima A in B. Prvi instrument naj bo netvegan s 5 % donosom do dospetja, drugi instrument pa ima lahko donos med 2 % in 10 %. Če ne poznamo verjetnosti vsakega stanja, se težko odločimo, kateri instument je boljši. ♢

Primer 4.2. Sedaj pa predpostavimo, da je verjetnost slabega stanja 0.6, verjetnost dobrega pa 0.4. Instrument A ima v obeh stanjih ekonomije enak donos, torej 5%. Če sedaj izračunamo pričakovano vrednost donosa, ima instrument B kljub tveganju višji donos - 5.2 %. Če se verjetnosti spremenijo, se spremeni tudi pričakovan donos, posledično pa tudi izbira boljšega instrumenta. ♢

Kot je vidno iz primera, so verjetnosti stanj pomembne. Hkrati pa je v primeru prikazan tudi princip odločanja. Namreč, za bolj tvegane instrumente zahtevamo višji donos, primerjamo pa jih glede na pričakovano vrednost ob koncu investicijskega obdobja.

5. Metoda glavnih komponent

Metoda glavnih komponent (ang. *Principal Component Analysis*) oz. krajše *PCA* je metoda, uporabljena za zmanjševanje dimenzij podatkov. Ob soočenju s podatkovno množico z veliko pojasnjevalnimi spremenljivkami nam ta metodo omogoča opis te množice z manj spremenljivkami, ki skupaj opišejo večino variabilnosti iz originalne množice. Metodo je leta 1901 predstavil Karl Pearson v članku z naslovom *On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space* [3].

5.1. Opis metode

Metoda najde manjdimenzionalno predstavitev množice spremenljivk, kjer so vse dimenzije čim bolj informativne in med seboj ortogonalne. Informativnost merimo s količino pojasnjene variance. Vsaka glavna komponenta, najdena s to metodo, je linearna kombinacija obstoječih spremenljivk. Vsaka nova glavna komponenta pojasnjuje manjši del variance glede na prejšnje že najdene glavne komponente.

5.2. Ideja konstrukcije

Predpostavimo slučajni vektor

$$\mathbf{X} = [X_1, ..., X_p]^T.$$

S Σ naj bo označena kovariančna matrika tega slučajnega vektorja. Če so namesto slučajnega vektorja podatki, kjer je vsako opazovanje sestavljeno iz p napovednih spremenljivk, se Σ izračuna empirično. Naj bodo (λ_1, e_1), (λ_2, e_2), ..., (λ_p, e_p) lastni pari matrike Σ, za katere velja

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p \geq 0, \quad \|e_i\| = 1$$

Potem se lahko, za $i = 1,\ 2,\ ...,\ p$, i-ta glavna komponenta zapiše kot

$$Y_i = e_i^T \mathbf{X} = e_{i1}X_1 + e_{i2}X_2 + ... + e_{ip}X_p.$$

Ko $i \neq k$, velja:

$$\mathrm{Var}\,(Y_i) = e_i^T \Sigma e_i = \lambda_i$$

$$\mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_k) = e_i^T \Sigma e_k = 0.$$

Dokaz in več lastnosti je na voljo v [7].

6. Analiza razpršenosti

Predpostavimo trg z N–vrednostnimi papirji. Z $R \in \mathbb{R}^N$ označimo N dimenzionalni vektor donosov teh vrednostnih papirjev glede na neko obdobje, $w \in \mathbb{R}^N$ pa predstavlja vektor uteži v portfelju.

$$R_w \coloneqq wR$$

.

Ustaljena praksa je, da se tveganje meri z varianco. Če so zgornji vrednostni papirji med sabo nekorelirani, je varianca portfelja:

$$\mathrm{Var}\left(R_w\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Var}\left(w_n R_n\right) = \sum_{n=1}^{N} w_n^2 \,\mathrm{Var}\left(R_n\right).$$

Viri tveganja so tu zaradi nekoreliranosti aditivni. Tukaj se največja razpršenost doseže z varianci prilagojenimi utežmi, tako da v portfelju vsak instrument prispeva enako količino variance.

Vendar v praksi težko najdemo nekorelirane finančne instrumente. Če predpostavimo vektor koreliranih finančnih instrumentov, katerih vektor donosov je R, je varianca portfelja naslednja:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(R_w\right) &= \mathrm{Var}\left(wR\right) = \\
&= \mathrm{Var}\left(\sum_{n=1}^{N} w_n R_n\right) = \\
&= \mathrm{Cov}\left(\sum_{n=1}^{N} w_n R_n, \sum_{n=1}^{N} w_n R_n\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Cov}\left(w_i R_i, w_j R_j\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij},
\end{aligned}$$

kjer je s σ_{ij} označena kovarianca med R_i in R_j.

Tukaj viri tveganja niso aditivni, kar oteži iskanje uteži, ki bi povečale razpršenost. A kljub korelaciji vrednostnih papirjev je možno najti nekorelirane vire tveganja, ki pa so aditivni.

Naravna odločitev za iskanje neodvisnih virov tveganja je razcep kovariančne matrike Σ na glavne komponente.

$$E^T \Sigma E \coloneqq \Lambda. \tag{6.1}$$

Diagonalna matrika $\Lambda \coloneqq diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)$ je matrika, ki ima po diagonali lastne vrednosti kovariančne matrike Σ, urejene po velikosti v padajočem vrstnem redu, stolpci v matriki $E \coloneqq (e_1, ..., e_N)$ pa so pripadajoči lastni vektorji. Te predstavljajo N nekoreliranih portfeljev, ki se imenujejo glavni portfelji (ang. *principal portfolios*). Njihove donose definiramo kot:

$$\tilde{R} \coloneqq E^{-1} R.$$

Matrika Λ ustreza kovariančni matriki teh portfeljev, kar pomeni, da so zaradi nekoreliranosti po diagonali njihove variance.
Ta razcep se lahko uporabi na vseh trgih, na katerih obstaja dobro definirana kovarianca, ne glede na njihovo porazdelitev.

Generičen portfelj na trgu se lahko predstavi kot kombinacija originalnih vrednostnih papirjev z utežmi w ali pa kot kombinacija nekoreliranih glavnih portfeljev z utežmi

$$\tilde{w} := E^{-1}w. \tag{6.2}$$

Z njimi lahko izrazimo krivuljo koncentracije variance (ang. *variance concentration curve*). Kljub zavajajočemu imenu to ni krivulja, vendar le množica naslednjih točk:

$$v_n := \tilde{w}_n^2 \lambda_n, \qquad n = 1, 2, ..., N. \tag{6.3}$$

Splošni člen v_n leži na krivulji koncentracije variance in predstavlja varianco portfelja glede na n-ti glavni portfelj. Ker so med seboj nekorelirani, je skupna varianca portfelja vsota posameznih varianc, torej:

$$\mathrm{Var}\,(R_w) = \sum_{n=1}^{N} v_n.$$

Podobno predstavimo krivuljo koncentracije volatilnosti (ang. *volatility concentration curve*), ki je določena z naslednjimi členi:

$$s_n := \frac{\tilde{w}_n^2 \lambda_n}{\sigma(R_w)} \qquad n = 1, ..., N. \tag{6.4}$$

Ne le, da predstavlja normalizirano dekompozicijo koncentracije variance, predstavlja tudi dekompozicijo volatilnosti na prispevke posameznega glavnega portfelja.

Dokaz. Pokazali bomo, da je odvod standardnega odklona donosa portfelja R_w po n-ti komponenti glavnega portfelja $\tilde{w}$ enak s_n:

$$R_w = \sum_{n=1}^{N} \tilde{w}\tilde{R}_n$$

$$\frac{\partial \sigma(R_w)}{\partial \tilde{w}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{w}} (\tilde{w}^T \,\mathrm{Cov}\left(\tilde{R}\right) \tilde{w})^{1/2} = \frac{\mathrm{Cov}\left(\tilde{R}\right) \tilde{w}}{\sigma(R_w)}$$

Ker so donosi posameznih glavnih portfeljev, $\tilde{R}_1$, ..., $\tilde{R}_N$ nekorelirani:

$$\frac{\partial \sigma(R_w)}{\partial \tilde{w}_n} = \frac{\lambda_n \tilde{w}_n}{\sigma(R_w)}.$$

□

Končno lahko normaliziramo krivuljo koncentracije variance in volatilnosti v razpršenostno porazdelitev (ang. *diversification distribution*):

$$p_n := \frac{\tilde{w}_n^2 \lambda_n}{Var(R_w)}, \qquad n = 1, 2, ..., N. \tag{6.5}$$

Ta pristop se lahko posploši na primere, ko upravljamo proti primerjalnemu indeksu (ang. *benchmark*) z vektorjem uteži b. To pomeni, da upravljalec portfelja primerja donos upravljanega portfelja z donosom indeksnega porfelja, katerega hoče preseči. Za analizo takega upravljanja je dovolj spremeniti uteži portfelja z vektorjem relativnih uteži:

$$w \to w - b.$$

7. Pogojna analiza tveganja

Včasih so pri upravljanju portfeljev postavljene zunanje omejitve, na katere upravitelj portfelja nima direktnega vpliva. Naj bodo to proračunske omejitve, omejitve s strani tipa portfelja, omejenost na določen trg itd. V takih situacijah je za ocenjevanje uspešnosti razpršenosti potrebno gledati le tveganje, na katerega ima upravitelj vpliv.

Primer 7.1. Naj obstaja portfelj, v katerem so vsi finančni instrumenti elementi istega trga, npr.: naravni viri. Največji vir tveganja v portfelju večinoma predstavlja smer tržnega portfelja. To je tveganje povezano z gibanjem cen celotnega trga, ki je pri trgovanju na njem neizogibno. Zato tudi v krivulji koncentracije volatilnosti (6.4) prvi člen predstavlja izpostavljenost pri glavni komponenti, ki predstavlja tržni portfelj.
Upravitelj z razpršitvijo instrumentov ne more vplivati na tveganje, povezano s smerjo tržnega portfelja, lahko pa vpliva na ostale dejavnike. Za ocenjevanje takega portfelja zato upoštevamo le ostale vire tveganja. Zato prilagodimo razpršenostno porazdelitev:

$$p_n \to \tilde{p}_n := \frac{p_n}{\sum_{m=2}^{N} p_m}, \qquad n = 2, ..., N \tag{7.1}$$

To omogoča ocenjevanje razpršenosti portfelja pod zunanjimi pogoji. $\diamondsuit$
V primeru, da so omejitve kompleksnejše, transformacija kot v (7.1) ni dovolj. Za podrobnejšo analizo razpršenosti, ki ni direktno odvisna od zunanjih omejitev, uvedemo smeri prilagoditev portfelja. Če predpostavimo K-omejitev, te predstavimo z vektorjem Δw, ki ustreza implicitni enačbi

$$A\Delta w = 0, \tag{7.2}$$

kjer je A $K \times N$ matrika, v kateri vsaka vrstica ustreza omejitvi. Ta formulacija pokrije več primerov omejitev. Na primer, če z $\mathbf{1}$ označimo vektor enic, je proračunska omejitev predstavljena kot $\mathbf{1}^T w := 1$, torej je ustrezna vrstica v matriki A vrstica enic. V matriko A lahko dodamo tudi omejitve, na katere bomo omejili analizo, neodvisno od dejanskih omejitev. Na primer, če imamo kovariančno matriko tehnoloških podjetij, mi pa bi se radi osredotočili na proizvajalce mobilnih telefonov, ne želimo upoštevati ostalih podjetij kot možnih investicij. Takrat v matriko A za ta ostala tehnološka podjetja vstavimo pripadajoče vrstice iz identitete. Torej za vsak instrument, ki ga ne želimo upoštevati, dodamo vrstico, ki ima enico na mestu le-tega v kovariančni matriki. Lahko tudi omejimo izbiro glavnih portfeljev na tiste, ki imajo dovoljšno varianco.
Omejitev, predstavljena v (7.2), ni nujno linearna. Če ni, jo lahko lokalno predstavimo s prostorom, tangentnim na množico omejitev.

Za analizo razpršenosti se v primeru omejitev viri tveganja ne razstavijo na standardne glavne portfelje kot v (6.1), ampak na *N-pogojnih glavnih portfeljev.* Podobno kot pri glavnih portfeljih so tudi ti med seboj nekorelirani in urejeni padajoče glede na višino variance. Vendar pa so pogojni glavni portfelji prilagojeni omejitvam smeri prilagoditev portfelja.
Portfelji, ki so dosegljivi glede na omejitve smeri prilagoditev, so rekurzivno, za

$n = K+1, ..., N$, definirani kot:

$$e_n := \underset{e^T e=1}{\arg\max}(e^T \Sigma e), \tag{7.3}$$

$$\text{tako da: } \begin{cases} Ae = 0 \\ e^T \Sigma e_j = 0, \quad \text{za vse obstoječe } e_j. \end{cases}$$

V primeru ničelne matrike A ta definicija generira klasične glavne portfelje. Za netrivialne matrike A pa rešitve $e_{K+1}, ..., e_N$ še vedno predstavljajo kombinacije vrednostnih papirjev, ki so med seboj nekorelirane in padajoče odgovorne za slučajnost, torej varianco, trga. Vendar pa so ti pogojni glavni portfelji prilagojeni smerem, definiranim v (7.2), tako da jih je možno brez problema dodati v portfelj. Prav tako tudi realokacija $\Delta w := \alpha_{K+1} e_{K+1} + ... + \alpha_N e_N$ ustreza pogoju (7.2) za vse koeficiente α.

Zgornjo množico možnih smeri prilagoditev portfelja dopolnimo do polnega trga. Za $n = 1, ..., K$ rekurzivno definiramo naslednje nekorelirane portfelje, ki so padajoče odgovorni za slučajnost na nedosegljivih smereh:

$$e_n := \underset{e^T e=1}{\arg\max}(e^T \Sigma e), \tag{7.4}$$

$$\text{tako da: } e^T \Sigma e_j = 0, \quad \text{za vse obstoječe } e_j.$$

Definiramo matriko $E := (e_1, ..., e_N)$, ki vsebuje pogojne glavne portfelje. Kovariančna matrika donosov se že spet lahko predstavi v enakem formatu kot (6.1):

$$E^T \Sigma E = \Lambda. \tag{7.5}$$

Diagonalna matrika Λ ima po diagonali variance pogojnih glavnih portfeljev:

$$\lambda_n = \mathrm{Var}\left(e_n^T R\right), \quad = 1, ..., N. \tag{7.6}$$

Na Sliki 2 je predstavljena tipična oblika pogojnih glavnih komponent in njihovih varianc.
Kot v primeru brez omejitev tudi tukaj predstavimo generične portfelje s kombinacijo pogojnih glavnih portfeljev z utežmi:

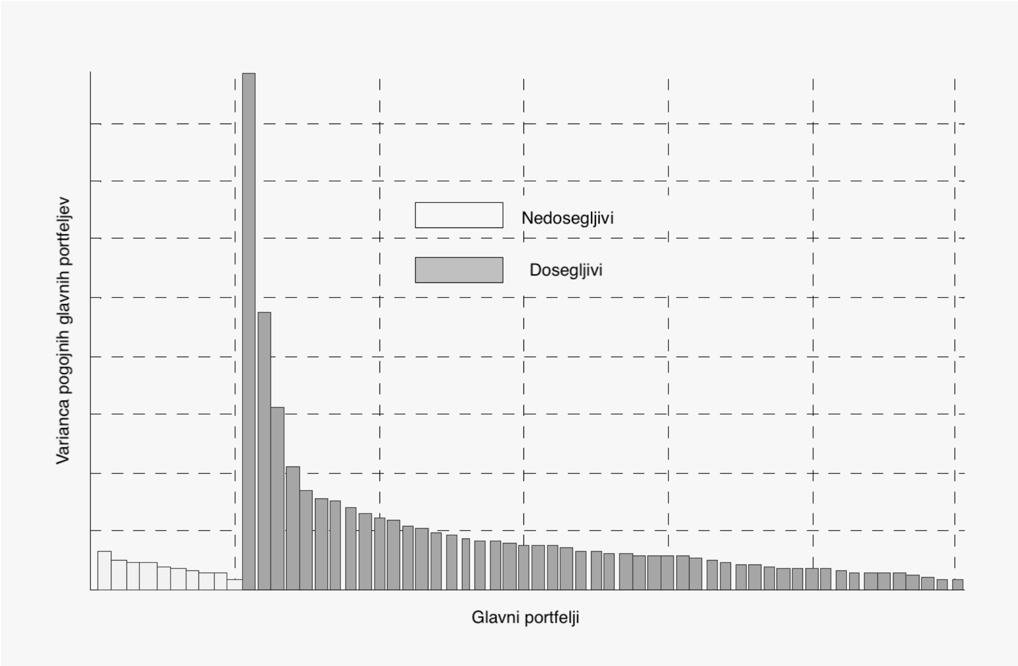
$$\tilde{w} := E^{-1} w. \tag{7.7}$$

Varianca celotnega portfelja je enaka vsoti varianc posameznih glavnih portfeljev, saj so le ti nekorelirani

$$\mathrm{Var}\left(R_w\right) = \sum_{n=1}^{N} \tilde{w}_n^2 \lambda_n. \tag{7.8}$$

Ker zaradi omejitev, definiranih v (7.2), prvih K-členov $\tilde{w}$ ni možno spreminjati, se namesto na razpršenostno porazdelitev osredotočimo na *pogojno razpršenostno porazdelitev*:

$$p_n | A := \frac{\tilde{w}_n^2 \lambda_n}{\sum_{m=K+1}^{N} \tilde{w}_m^2 \lambda_m}, \quad n = K+1, ..., N. \tag{7.9}$$



SLIKA 2. Posplošen razcep na glavne portfelje.

Notacija poudarja, da je pogojevanje glede na pogoje, določene z matriko A. Če je matrika A ničelna oz. prikazuje brezpogojne portfelje, potem je ta zapis enak (6.5). Ta zapis je enak tistemu, ki je bil predstavljen v zgornjem primeru, če predpostavimo en trg in proračunsko omejitev $A := \mathbf{1}^T$, kjer je $\mathbf{1}$ vektor enic. Upravljalec portfelja lahko s prilagajanjem členov pogojne razpršenostne porazdelitve učinkovito upravlja z razpršenostjo, ko so smeri sprememb portfelja omejene. Kot pri brezpogojnih portfeljih je tudi tukaj omogočeno upravljanje proti primerjalnemu indeksu b z enako transformacijo:

$$w \to w - b. \tag{7.10}$$

8. Upravljanje z razpršenostjo

Tako brezpogojna (6.5) kot pogojna (7.9) razpršenostna porazdelitev, relativno na primerjalni indeks ali ne, je vedno definirana Vedno se sešteje v ena in je vedno pozitivna. Zato se lahko razpršenostna porazdelitev interpretira kot množica gostot oz. verjetnosti, povezanih z glavnimi portfelji.

Oblika pripadajoče porazdelitvene funkcije pokaže jasno sliko o razpršenosti določene porazdelitve instrumentov v portfelju. Če je portfelj zgoščen na določeni glavni komponenti, potem v porazdelitvi nastopa velik skok. Če pa je portfelj razpršen, so verjetnosti p_n podobne in porazdelitev spominja na enakomerno. Zaradi tega se lahko razpršenost portfelja prikaže z razpršenostjo razpršenostne porazdelitve, povzeto v entropiji oz. njenem eksponentu:

$$\mathcal{N}_{\text{Ent}} := \exp(-\sum_{n=K+1}^{N} p_n \ln p_n). \tag{8.1}$$

Možna intuitivna razlaga je, da $\mathcal{N}_{\text{Ent}}$ predstavlja resnično število nekoreliranih stav v splošnem portfelju na splošnem trgu. Res, $\mathcal{N}_{\text{Ent}} = 1$, ko je tveganje skoncentrirano na en glavni portfelj. Maksimalno vrednost pa doseže, ko je tveganje enakomerno porazdeljeno med vseh $N - K$ razpoložljivih glavnih portfeljev. Takrat je $\mathcal{N}_{\text{Ent}} = N - K$.

Dokaz. Ko je tveganje enakomerno porazdeljeno med vseh $N - K$ razpoložljivih glavnih portfeljev, je $p_n = \frac{1}{N-K}$ za vsak $n = K+1, ..., N$, saj vsak glavni portfelj prispeva enak delež variance. Vstavimo v zvezo (8.1) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\text{Ent}} &= \exp(-\sum_{n=K+1}^{N} p_n \ln p_n) \\
&= \exp(-(N-K)p_n \ln p_n) \\
&= \exp(-(N-K)\frac{1}{N-K} \ln \frac{1}{N-K}) \\
&= \exp(ln(N-K)) \\
&= N - K
\end{aligned}$$

□

Za optimizacijo razpršenosti lahko upravitelj portfelja izračuna mejo povprečje-razpršenost (ang. *mean-diversification efficient frontier*). Njene uteži so izračunane po naslednjem principu:

$$w_\varphi := \underset{\substack{w \in \mathcal{C} \\ \mu^T w \geq \varphi}}{\arg\max} \mathcal{N}_{\text{Ent}}(w), \tag{8.2}$$

kjer μ predstavlja ocenjene pričakovane donose, $\mathcal{C}$ pa investicijske omejitve. Parameter φ je element intervala $[\underline{\varphi}, \overline{\varphi}]$:

$$\underline{\varphi} := \mu^T \underset{w \in \mathcal{C}}{\arg\max} \mathcal{N}_{\text{Ent}}(w), \tag{8.3}$$

$$\overline{\varphi} := \underset{w \in \mathcal{C}}{\arg\max}\, \mu^T w. \tag{8.4}$$

Če je φ v (8.2) bližje $\underline{\varphi}$, je pomembnejša razpršenost portfelja, če pa $\overline{\varphi}$, pa je pomembnejši pričakovan donos portfelja.
V praksi so pomembni tudi stroški transakcij, tako da prilagodimo pričakovan donos:

$$\mu^T w \to \mu^T w - \tau(w, w_0), \tag{8.5}$$

kjer je τ funkcija stroškov želenega portfelja w in trenutnega portfelja w_0. Velikokrat funkcija stroškov ni konveksna ali vsaj zvezna, kar otežuje natančno optimizacijo. Zato se je boljše osredotočiti na manjše število transakcij, ki čim bolj povečajo razmerje med pričakovanim donosom in razpršenostjo. Ker je natančno kombinatorično iskanje računsko intenzivno, ga nadomestimo z rekurzivnim algoritmom, ki na vsakem koraku doda finančni instrument, ki bo največ povečal iskano razmerje.

8.1. Opis algoritma

Imamo trg z N finančnimi instrumenti in K omejitvami za naš portfelj. Predpostavimo, da izmed N finančnih instrumentov, želimo trgovati le z M finančnimi instrumenti, pri čemer mora biti $M > K$.
Definiramo množico I_M^N vseh možnih trgovalnih kombinacij M izmed N instrumentov, z I_M pa označimo neko izbrano kombinacijo izmed vseh možnih. Očitno je, da

$I_M \in I_M^N$.
Hočemo, da trgovanje poteka le s temi instrumenti, zato omejimo:

$$\Delta w \coloneqq S_{I_M} x, \tag{8.6}$$

kjer je x nek M-dimenzionalni vektor odločitvenih spremenljivk, S_{I_M} pa $N \times M$ matrika izbire, ki ima na mestih, ki pripadajo I_M enice, drugje pa ničle.

Primer 8.1. Primer, ko je $N = 4$, $M = 2$ in $K = 1$. Množica vseh možnih kombinacij je

$$I_2^4 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}.$$

Kot primer možne kombinacije izberemo $I_2 = \{2,3\}$. Matrika S_{I_2} je torej predstavljena kot

$$S_{\{2,3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Iz zveze (8.2) dobimo vrednost, ki jo vstavimo namesto x, tako da dobimo dejansko trgovalno količino instrumentov iz I_M, ki izgleda tako:

$$\Delta w_{I_M} \coloneqq \arg\max_{S_{I_M} x \in \tilde{C}} \{\lambda(\mu' S_{I_M} x - \tilde{\tau}(S_{I_M} x) + (1-\lambda)\mathcal{N}_{\text{Ent}}(S_{I_M} x)\}, \tag{8.7}$$

kjer so:

$$\tilde{\tau}(v) \coloneqq \tau(w_0, w_0 + v) \tag{8.8}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}(v) \coloneqq \tilde{\mathcal{N}}_{\text{Ent}}(w_0 + v) \tag{8.9}$$

$$\tilde{C} \coloneqq C - w_0, \tag{8.10}$$

λ pa predstavlja upravljalčevo preferenco med pričakovanim donosom in tveganjem. To ustreza naslednjemu optimalnemu kompromisu med pričakovano vrednostjo in razpršenostjo, ki ocenjuje trgovanje vrednostnih papirjev iz I_M:

$$G(I_M) \coloneqq \lambda(\mu' \Delta w_{I_M} - \tilde{\tau}(S_{I_M} x)) + (1-\lambda)\mathcal{N}_{\text{Ent}}(\Delta w_{I_M}). \tag{8.11}$$

Portfelj iz zveze (8.7) optimizira to vrednost za določen I_M. Opazimo pa tudi, da ne glede na število vseh instrumentov na trgu, torej N, poteka optimizacija iz (8.7) le na nizko-dimenzionalnem vektorju x, kar omogoča hiter izračun, iz česar sledi, da računanje (8.11) ne predstavlja časovno zahtevnega problema.
Ker se razpršenost povečuje s številom instrumentov v portfelju, je (8.7) optimalna, ko se trguje z vsemi M instrumenti iz I_M. Da najdemo najboljšo kombinacijo M vrednostnih papirjev, moramo pregledati vse možne kombinacije:

$$\tilde{I}_M \coloneqq \arg\max_{I_M \in I_M^N} \{G(I_M)\}. \tag{8.12}$$

Ko najdemo optimalno kombinacijo, sledi izračun optimalnega trgovalnega portfelja iz (8.7). Ker optimalno število trgovanih vrednostnih papirjev M ni znano vnaprej, moramo izračunati optimalen kompromis med pričakovano vrednostjo in razpršenostjo kot funkcijo števila trgovanih instrumentov M, torej

$$G(\tilde{I}_m), \quad m = \underline{M}, ..., M, \tag{8.13}$$

kjer je $\underline{M}$ najmanjše možno število trgovanih instrumentov, glede na omejitve portfelja. Večanje m končamo, ko je razlika med $G(\tilde{I}_m)$ in $G(\tilde{I}_{m+1})$ zanemarljiva.

Vendar v praksi tako kombinatorično iskanje po vseh kombinacijah ni možno, saj število le-teh hitro postane previsoko. Množica I_M^N vsebuje $\binom{N}{M}$, torej $\frac{N!}{(N-M)!M!}$, kombinacij. To število postane zelo veliko, tudi za majhne M, če je N reda nekaj sto, kar pa se zaradi velike količine razpoložljivih finančnih instrumentov na trgu lahko hitro zgodi.
Zato se zatečemo k rekurzivnemu računanju s pomočjo izbirne hevristike, ki porabi le NM izračunov.
V kasneje predstavljenem primeru zaradi enostavnosti in manjšega števila instrumentov ne uporabljamo rekurzivnega dodajanja elementov, saj predpostavimo, da trgujemo z vsemi instrumenti na enkrat. V praksi je taka predpostavka lahko napačna, zato tam uporabimo spodaj opisani algoritem.

8.2. Rekurzivna izbirna hevristika

Intuitivna razlaga je, da na vsakem koraku algoritma dodamo en instrument izmed vseh razpoložljivih na trgu, ki najbolj poveča vrednost v (8.11).
Podrobnejši algoritem:
Pred začetkom nastavimo M na najmanjšo možno število trgovanih instrumentov, torej $M = \underline{M}$. Sedaj izberemo začetni optimalni portfelj M instrumentov:

$$\tilde{I}_M = \{n_1, ..., n_M\}, \tag{8.14}$$

ki da najvišjo vrednost:

$$v := |\varphi\mu + (1-\varphi)\frac{\partial \mathcal{N}_{\text{Ent}}}{\partial w}|, \tag{8.15}$$

ki predstavlja smer premika iz (8.11). Analitična izpeljava odvoda je opisana v [2].

(1) Pogledamo vse izbire $I_{M,j} = \{n_1, ..., n_M, q_j\}$, ki jih dobimo tako, da trenutni izbiri dodamo enega izmed $N-M$ elementov iz komplementa trenutne izbire.
(2) Izračunamo, za vse $j = 1, \ ..., \ N-M$, kompromis (8.11):

$$g_M^j := G(I_{M,j}) := G(\{n_1, \dots, n_M, q_j\}). \tag{8.16}$$

(3) Določimo instrument, ki najbolj poveča g_M^j:

$$j^* := \underset{j\in\{1,\dots,N-M\}}{\arg\max} \{g_M^j\}. \tag{8.17}$$

(4) Dodamo j^* trenutni izbiri trgovalnih instrumentov:

$$\tilde{I}_{M+1} := \{\tilde{I}_M, q_{j^*}\}. \tag{8.18}$$

(5) Spremenimo $M = M+1$, sedaj je zgornja izbira $\tilde{I}_M$. Če je $G(\tilde{I}_M)$ zadovoljiva oz. če je dodana vrednost novega instrumenta manjša od določene meje, končamo, drugače se vrnemo na prvi korak.

9. Uporaba metode na primeru kriptovalut

9.1. Uvod v kriptovalute

Bločna tehnologija v ozadju kriptovalut je revolucionarna tehnologija, ki omogoča javno shranjevanje in preverjanje transakcij. A še bolj pa so postale popularne kriptovalute, ki temeljijo na tej tehnologiji. Najbolj znana kriptovaluta je bitcoin, ki je tudi prva, za katero je bila ta tehnologija uporabljena v te namene. Od njegovega nastanka je vzklilo še na stotine novih valut. Nekatere izmed njih temeljijo na svoji bločni verigi, tako kot bitcoin, npr. ethereum; še več pa je takih, ki so nastale zaradi zbiranja sredstev s tako imenovanimi začetnimi ponudbami kovancev (ang. *Initial* *coin offering, ICO*). Tem bomo v nadaljevanju rekli žetoni (ang. *tokens*).

Kar pa kriptovalute naredi zanimive za nas, je dejstvo, da so lahko dostopne za trgovanje. Odprtje računa na kriptoborzi je preprosto, prav tako tudi nakup baznih valut, s katerimi se trgujejo. Ker se lahko trguje tudi z manjšimi zneski, in ker je zanimanja veliko, so tudi zelo likvidne. To nas približa predpostavki popolnega trga, ki je za analizo zaželjena, saj v njej predpostavljamo, da se instrument lahko takoj proda.

9.2. Izbira kriptovalut za analizo

Trg kriptovalut se je leta 2017 izjemno razvil, saj je po podatkih *CoinMarketCap-a* [9] tržna kapitalizacija trga kriptovalut zrasla iz 17.735.500.000 USD na 565.107.000.000 USD, kar predstavlja več kot 31-kratni dvig trga. Ker morata biti izbira portfelja in upravljanje njegove razpršenosti neodvisna od informacij iz prihodnosti, v zgledu temelji naša izbira kriptovalut na podatkih o volumnu dnevnega trgovanja (likvidnosti) v dnevu 1.1.2017 iz preteklosti. Izbranih je bilo 100 kriptovalut glede na njihovo likvidnost. Med njimi so seveda bitcoin, ethereum, litecoin, ripple itd. Množico teh kriptovalut označimo z $\mathcal{A}$.

Glede na prejšnjo izbiro likvidnih kriptovalut $\mathcal{A}$ so bile pridobljene dnevne cene teh kriptovalut iz CoinMarketCap, na časovnem intervalu od 1.1.2017 do 30.4.2018. To obdobje razdelimo glede na mesece, torej en mesec je eno obdobje. Razdelitev označimo s T_1, T_2, ..., T_{16}, kjer T_i predstavlja i-ti mesec na intervalu mesecev od 1.1.2017 do 30.4.2018. Na primer, T_5 predstavlja obdobje od 1.5.2017 do 31.5.2017. Te cene so shranjene v matriki cen $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$, kjer so stolpci kriptovalute, vrstice datumi, elementi pa cene.
Z $\mathcal{R}^{\mathcal{A}}$ označimo matriko aritmetičnih donosov glede na prejšnji dan, kjer stolpci predstavljajo kriptovalute, vrstice datume, elementi pa so donosi posamezne kriptovalute glede na prejšnji dan. To matriko razdelimo glede na prej definirana obdobja. Z $\mathcal{R}^{\mathcal{A}}_{T_i}$ označimo matriko donosov v i-tem obdobju, kjer so v vsaki matriki vse kriptovalute in datumi, ki pripadajo temu obdobju.
Za vsako obdobje T_i nato izračunamo kovariančno matriko C_{T_i}. V vektor μ shranimo zahtevane oz. pričakovane donose za naslednje obdobje. Te za vsako kriptovaluto določimo kot standardni odklon te kriptovalute v prejšnjem obdobju.

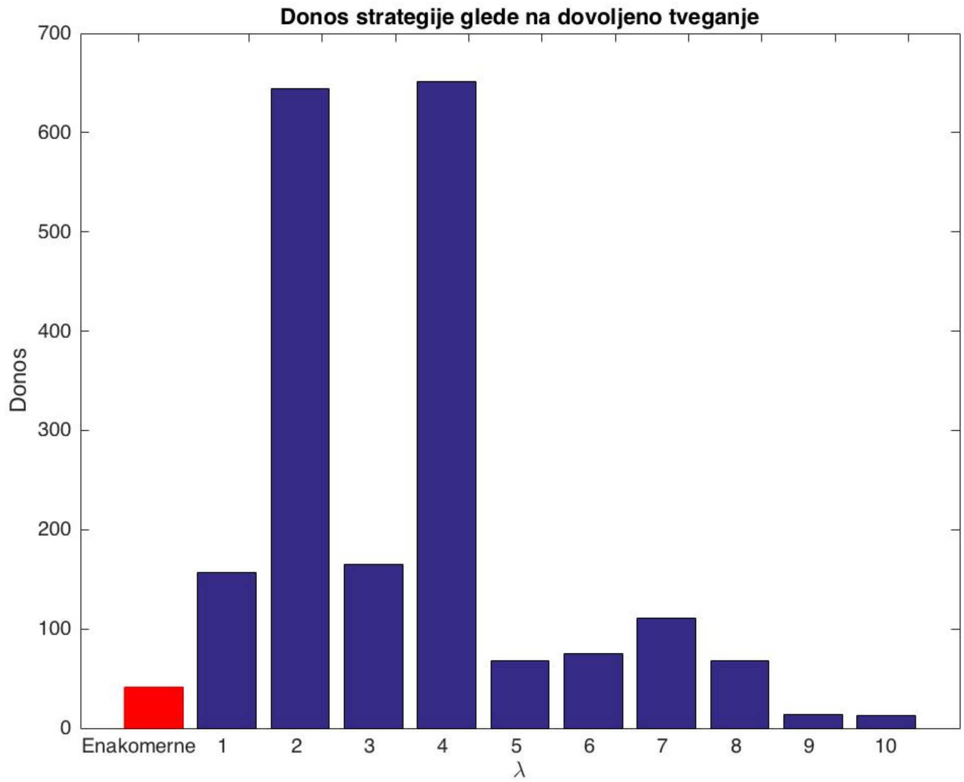
9.3. Analiza izbranih kriptovalut

Za analizo in optimizacijo uporabimo programski paket *Matlab*. V nadaljevanju bomo uporabili algoritem, ki je bil deloma spisan s strani avtorja [2]. Zaradi manjšega števila podatkov bo algoritem uporabljal že vgrajene optimizacijske funkcije in ne bo uporabljal postopnega dodajanja elementov, kot je opisano v podpoglavju (8.2).

Pred začetkom analize uvedemo omejitve, katerim morajo ustrezati vsi najdeni portfelji. Ker večina kriptoborz ne ponuja kratke prodaje, je smiselna predpostavka, da morajo vse pozicije v portfelju biti dolge. Hkrati zahtevamo, da je seštevek vseh uteži v portfelju enak ena. To je proračunska omejitev, ki omeji količino posamezne kupljene kriptovalute.

Ob začetku analize se moramo zavedati, da upravljanje razpršenosti ni enako maksimiziranju donosov. Je le zmanjševanje vpliva posameznih šokov na celoten portfelj. To ponazorimo s Sliko 3. Ta predstavlja donose kriptovalut iz izbora $\mathcal{A}$ v obdobju od T_1 do T_{16} glede na λ iz zveze (8.11), torej predstavlja upravljalčevo preferenco med pričakovanim donosom in razpršenostjo. Ta je zasedla 10 ekvidistančnih vrednosti, in sicer $0, 0.1, ..., 0.9$.
Za vsako λ je bil prvi portfelj enak, in sicer,enakomerno utežen. Na koncu obdobja T_i, $i = 1, ..., 15$, se je za vsak λ po zgornjem algoritmu določil portfelj w_i, ki je maksimiziral (8.11), nato pa se je ta portfelj uporabil za trgovanje v naslednjem obdobju. Na koncu zadnjega obdobja T_{16} je bil za vsak λ izračunan donos glede na začetek trgovanja. Hkrati je za primerjavo na grafu še enakomerno utežen portfelj, saj je ta velikokrat uporabljen kot zgled razpršenega portfelja.

Na Sliki 3 lahko opazimo, da preferiranje višjega pričakovanega donosa ne pomeni nujno višjega končnega pričakovanega donosa. To je posledica več dejavnikov. Pričakovane vrednosti donosov so opazno različne od donosov, ki so bili na trgu, lahko pa so bili prisotni tudi šoki na večjem delu trga, ki se jim pri nižji preferenci razpršenosti nismo mogli izogniti.



Slika 3. Graf donosov v obdobju od T_1 do T_{16} glede na spreminjanje preferenc investitorja. Opazimo, da preferiranje visokega pričakovanega donosa ne pomeni višjega realnega donosa.

Sedaj se osredotočimo na zadnje obdobje, torej T_{16}. Sprememba uteži portfelja se izvede na koncu obdobja T_{15}, rezultate oz. donose pa preverimo na koncu obdobja T_{16}. Izvedemo algoritem, katerega parametri so:

- kovariančna matrika S, empirično izračunana v obdobju od T_1 do T_{15},
- omejitve, s katerimi onemogočamo kratko prodajo, omejimo seštevek uteži v ena,
- pričakovan donos je standardni odklon posamezne kriptovalute v obdobju od T_1 do T_{15},
- ni analize proti indeksu, torej vektor w_b je vektor ničel,
- λ zavzema 10 vrednosti med 0 in 0.9.

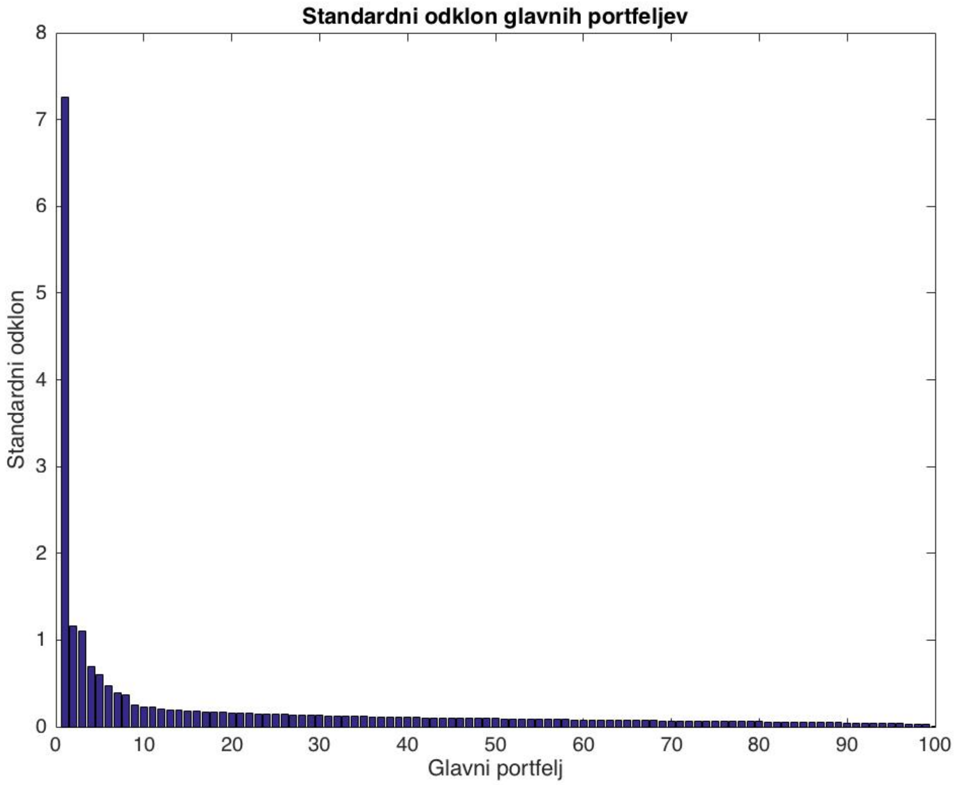
Vrednosti, ki jih algoritem vrne, so naslednje:

- matriko uteži portfelja, kjer stolpci predstavljajo uteži za posamezno vrednost λ,
- vektor vrednosti eksponentov uteži iz (8.1), pri vsaki vrednosti za parameter λ,
- matriko, kjer vsak stolpec ponazarja razpršenostno porazdelitev za specifičen λ,
- vektor pričakovanih donosov za posamezno vrednost λ,
- vektor standardnih odklonov portfelja za vsako λ,
- izračunana matrika pogojnih glavnih portfeljev E, izračunana iz matrike S,
- vektor pogojnih varianc glavnih portfeljev.

Glavni portfelji so urejeni po velikosti glede na varianco oz. standardni odklon. Ker so kriptovalute zelo korelirane, predvidevamo, da bo prvi glavni portfelj imel občutno večjo varianco kot ostali. To lahko vidimo na Sliki 4. Prva komponenta predstavlja trg, od katerega je odvisna večina gibanja cen. Ta odvisnost večine kriptovalut od gibanja trga naredi kriptovalute tvegane za trgovanje, saj v primeru padca trga težko zaščitimo našo pozicijo z drugimi kriptovalutami.

Meja povprečje-razpšenost prikazuje razmerje med pričakovanim donosom portfelja in neodvisnimi vplivi, ki vplivajo nanj. Prikazana je na Sliki 5. Točke na krivulji ustrezajo portfeljem, določenim s posameznimi λ, ki izhajajo iz kompromisa (8.11). Ker so kovariančna matrika in pričakovane vrednosti, določene empirično, ima graf manjša odstopanja od teoretičnega izgleda. Največji vpliv na izgled pa ima odsotnost kratke prodaje, ki je v splošni teoriji predpostavljena.
Kot pričakovano se z večanjem neodvisnih vplivov manjša pričakovan donos. Kot bo kasneje pokazano, pa se z večanjem λ manjša število neodvisnih vplivov na portfelj. Z rdečim krogom je predstavljen portfelj, ki ima enake uteži za vse kriptovalute. Kot se lahko opazi z grafa, ta portfelj ni na optimalni meji, saj za enak pričakovan donos obstajajo bolje razpršeni portfelji. S tem smo pokazali, da moramo za razpršenost gledati dejavnike, ki vplivajo na kriptovalute.

Za podrobnejšo analizo dobljenih portfeljev izberemo dve ekstremni vrednosti λ, in sicer 0 ter 0.9. To sta primera, pri katerih damo poudarek samo na razpršenost in ko damo večinski poudarek na pričakovano vrednost. Na Sliki 6 vidimo, da je v prvem primeru poudarek na šestih kriptovalutah, ostale pa imajo približno enakomerno razporejen preostali delež. Kriptovalute, na katerih je poudarek in so urejene po utežeh v portfelju, so naslednje: *global-currency-reserve*, *fastcoin*, *bitcoindark*, *president-trump*, *yocoin* in *fedoracoin*. Skupno njihova utežitev predstavlja skoraj 77 % delež vseh uteži. Preostale kriptovalute imajo vsaka okoli $0,22$ % delež.

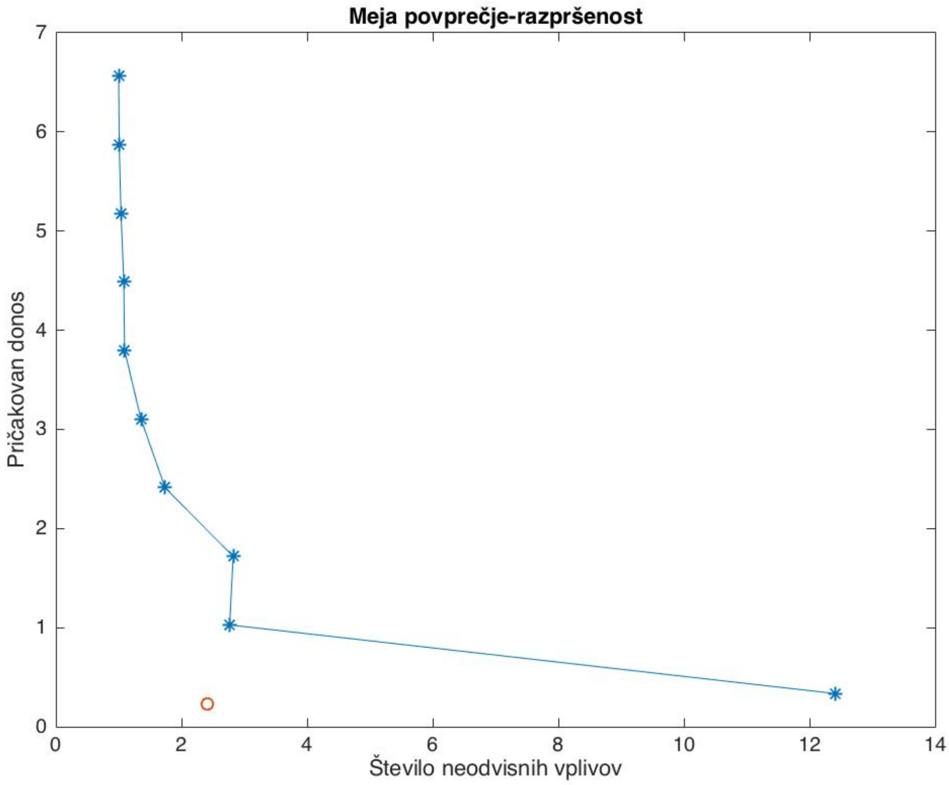


Slika 4. Standardni odklon glavnih portfeljev, kjer kratka prodaja ni dovoljena. Velik del tveganja, se pravi variance oz. standardnega odklona, je skoncentriran na prvo komponento, ki predstavlja tveganje celotnega trga.

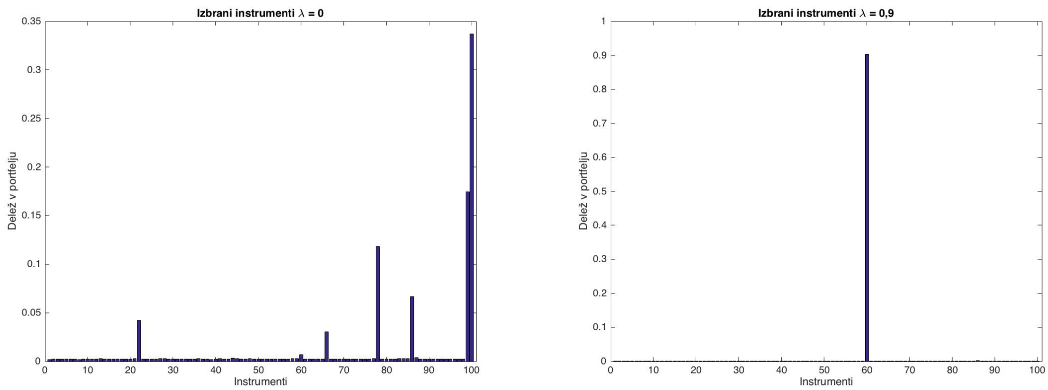
Pri drugem primeru je skoraj ves poudarek samo na eni kriptovaluti, *circuits-of-value*. Ta predstavlja malo več kot 90 % delež vseh uteži v portfelju. Ostale kriptovalute so enakomerno utežene z okoli $0,10$ %.

Vendar, kot je pokazano na Sliki 5, razmerje uteži pri instrumentih ni vedno dober pokazatelj razpršenosti. Če hočemo analizirati odvisnost od virov tveganja, si moramo ogledati glavne portfelje. V primeru, ko je $\lambda = 0$, portfelj sestavlja več glavnih portfeljev z večjo uteženostjo. Ker to niso portfelji, ki obstajajo na trgu, ampak so izpeljani iz obstoječih elementov, omejitev, ki onemogoča kratko prodajo, za njih ne velja. Če portfelj glavnih portfeljev s pomočjo (6.2) pretvorimo v portfelj s kriptovalutami, vidimo, da so vse pozicije dolge. Seveda je ta portfelj enak tistemu iz Slike 6. Na Sliki 7 lahko vidimo izbrane glavne portfelje in razmerje med njimi. Opazimo, da nismo skoncentrirani na en vir tveganja, ampak je tveganje razpršeno preko večih virov. To nam pokaže tudi razpršenostna porazdelitev, prikazana na isti sliki. Vidimo, da je delež pojasnjene variance portfelja porazdeljen med več virov tveganja oz. glavnih portfeljev.

V primeru, ko je $\lambda = 0.9$, opazimo skoncentriranost na en vir tveganja. To je razvidno s Slike 8, kjer je pri razpršenostni porazdelitvi delež pojasnjene variance prve komponente več kot 90 %. To je posledica večinske izbire le ene kriptovalute, kar je privedlo tudi do večinske izbire le enega glavnega portfelja.Tudi tukaj opazimo, da

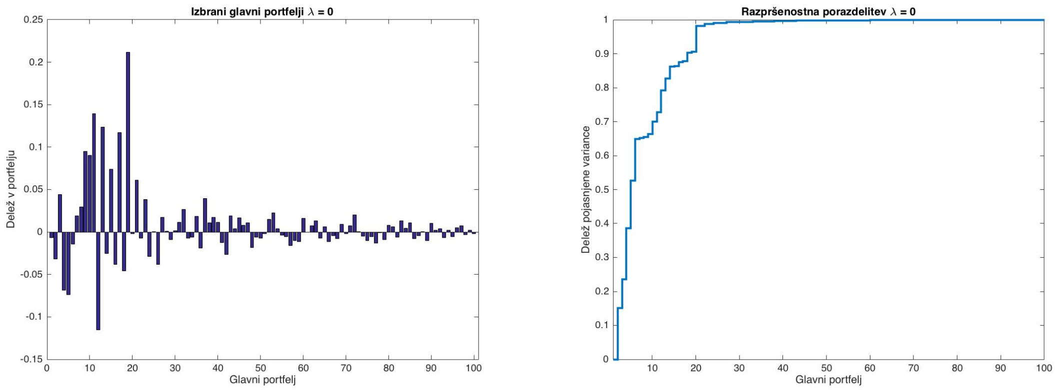


SLIKA 5. Razpršenostna meja portfelja kriptovalut, kjer kratke prodaje niso dovoljene. Krog predstavlja portfelj z enakimi utežmi za vsako kriptovaluto. Opazi se lahko njegova suboptimalnost, saj leži pod mejo.

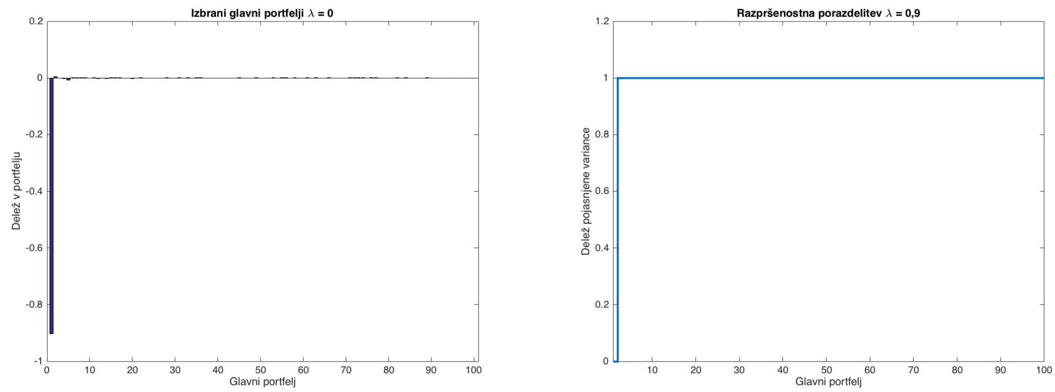


SLIKA 6. Razporeditev uteži v portfelju pri $\lambda = 0$ in $\lambda = 0.9$. Opazimo, da tudi v primeru ko je poudarek na razpršenosti, vsi portfelji niso izbrani enakomerno. Ko je poudarek na pričakovanem donosu, ima občutno najvišjo utež portfelj z največjim pričakovanim donosom.

so pri glavnih portfeljih upoštevane tudi kratke prodaje.



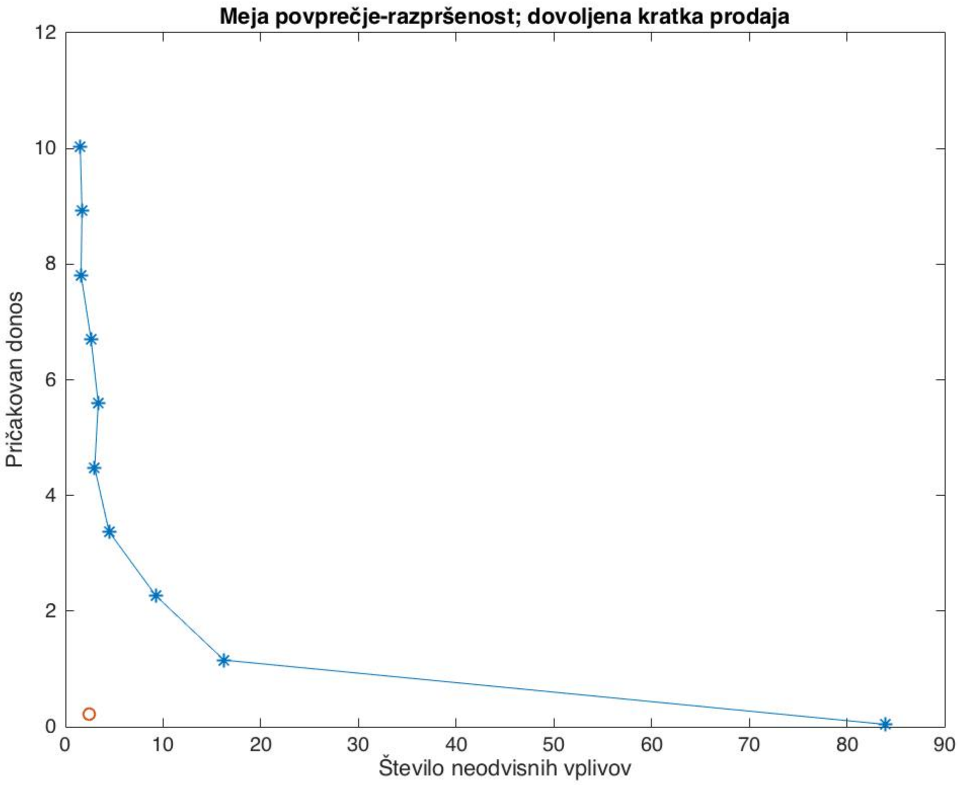
Slika 7. Na grafih sta predstavljena utežitev glavnih portfeljev in razpršenostna porazdelitev za $\lambda = 0$. Portfelj sestavlja več glavnih komponent, zaradi česar je tveganje razporejeno na več virov.



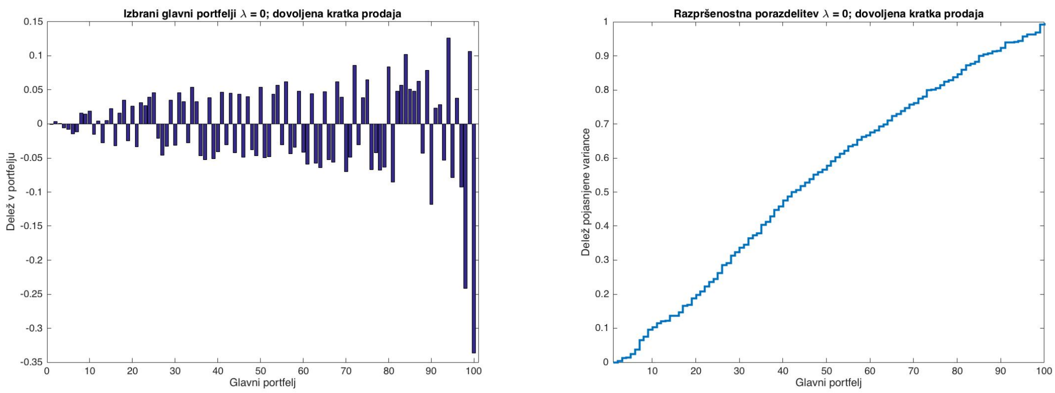
Slika 8. Na grafih sta predstavljena utežitev glavnih portfeljev in razpršenostna porazdelitev za $\lambda = 0.9$. Ker je poudarek na pričakovanem donosu, je tveganje skoncentrirano na en vir.

Eden izmed večjih problemov pri kriptovalutah je, da v času pisanja še ne obstaja veliko borz, ki bi nudile kratko prodajo glavnih kriptovalut, kaj šele vseh. V primeru, da bi bile kratke prodaje omogočene za vse kriptovalute, bi lahko ustvarili bolj razpršene portfelje.
Predpostavimo, da je sedaj kratka prodaja na trgu možna. Prilagodimo naše omejitve, kjer so uteži posameznega instrumenta sedaj omejene med -0.1 in 1. Kot pričakovano so portfelji sedaj bolje razpršeni, kar lahko opazimo na Sliki 9, če jo primerjamo z Sliko 5). Ne samo da se število neodvisnih vplivov, ko je ves poudarek na razpršenosti, poveča za okoli sedemkratnik, poveča se tudi možni pričakovani donos.

Največja sprememba razpršenosti je opazna pri portfelju, kjer je ves poudarek na njej. Kot vidimo na Sliki 10, je pojasnjena varianca približno enakomerno porazdeljena med vsemi glavnimi portfelji. Tak portfelj je dobro zaščiten pred posameznimi tveganji. V primerjavi s Sliko 7 vidimo, da je v tem primeru izpostavljenost posameznim glavnim portfeljem manjša, kar tudi ustreza povečanju neodvisnih vplivov.



Slika 9. Razpršenostna meja portfelja kriptovalut, kjer so kratke prodaje dovoljene. Krog predstavlja portfelj z enakimi utežmi za vsako kriptovaluto. Opazno je, da portfelj z enakomernimi utežmi ni optimalen.



Slika 10. Na grafih sta predstavljena utežitev glavnih portfeljev in razpršenostna porazdelitev za $\lambda = 0$ pri možni kratki prodaji. Iz razpršenostne porazdelitve lahko razberemo, da je portfelj dobro zaščiten pred posameznimi dejavniki tveganj.

9.4. Upravljanje tveganja s Sharpovim razmerjem

Kot eden izmed najbolj uporabljenih tehničnih kazalcev je Sharpovo razmerje uporabno za merjenje razpršenosti portfelja. Portfelj, pri katerem je dosežen maksimum razmerja, ima najvišji donos glede na standardni odklon. Iskanje takega portfelja lahko poteka na več načinov in je odvisno od več dejavnikov. Nanj zelo vpliva določitev pričakovanega donosa. Tega lahko določimo na mnogo načinov, npr.:

- $\gamma\sigma_{T_{i-1}}$, kjer je γ nek poljuben skalar, σ pa standardni odklon v prejšnjem obdobju T_{i-1},
- uporabimo enak donos, kot je bil v prejšnjem obdobju,
- z metodami strojnega učenja določimo donos v prihodnosti.

V primeru možnosti kratke prodaje in pozitivnosti vseh donosov lahko optimalen portfelj, torej portfelj z največjim dosegljivim Sharpovim razmerjem, izračunamo analitično na naslednji način:

$$\max_{w} \frac{w^T\mu}{\sqrt{w^T\Sigma w}}, \quad \text{p.p. } w\mathbf{1} = 1. \tag{9.1}$$

Tukaj $\mathbf{1}$ predstavlja vektor enic. Maksimum poiščemo s pomočjo Lagrangeovih multiplikatorjev:

$$L := \frac{w^T\mu}{\sqrt{w^T\Sigma w}} + \lambda(w^T\mathbf{1} - 1). \tag{9.2}$$

Ko odvajamo, dobimo:

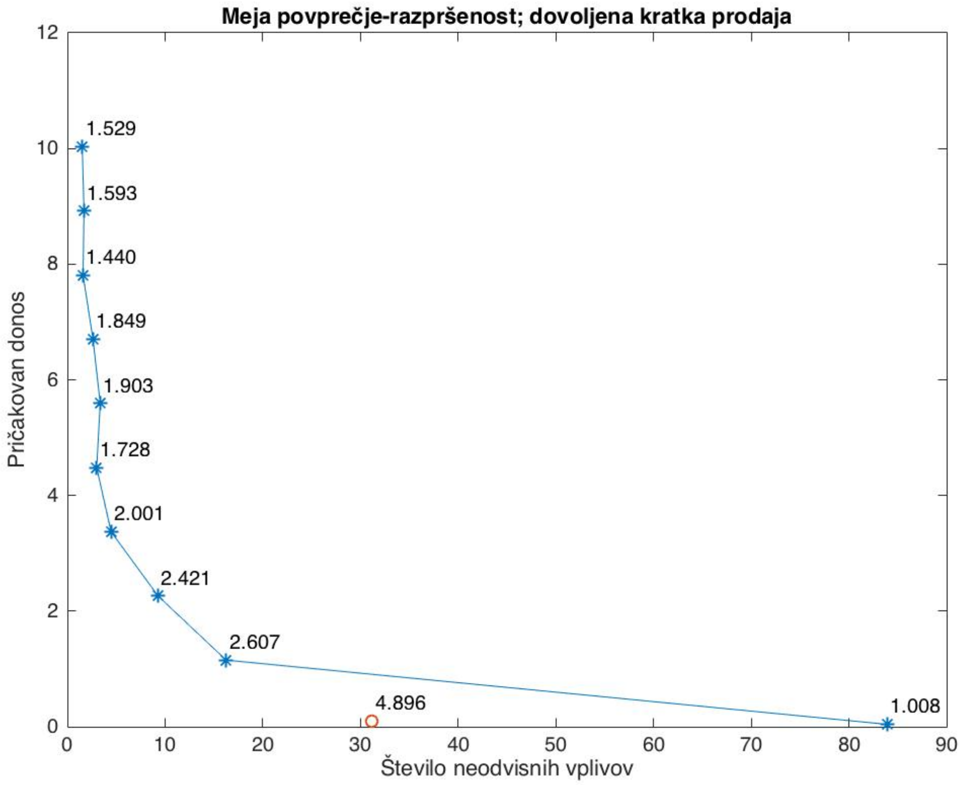
$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{\mu}{\sqrt{w^T\Sigma w}} - \frac{w^T\mu\Sigma w}{(w^T\Sigma w)^{-\frac{3}{2}}} + \lambda\mathbf{1} \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w^T\mathbf{1} - 1. \tag{9.4}$$

Dobljeni enačbi enačimo z 0 in rešimo sistem. Portfelj, dobljen kot rešitev tega problema, je naslednji :

$$w^* = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mu}. \tag{9.5}$$

Ker je pričakovani donos za obdobje T_{16} pozitiven za vse kriptovalute, lahko za določitev portfelja z maksimalnim Sharpovim razmerjem uporabimo zvezo (9.5). Če ta portfelj dodamo k razpršenostni meji, kjer dovolimo kratke prodaje, dobimo Sliko 11. Kot je razvidno, portfelj z največjo vrednostjo Sharpovega razmerja ne leži na razpršenostni meji. To je posledica drugačnega obravnavanja tveganja, saj pri Sharpovem razmerju gledamo samo skupni standardni odklon, medtem ko z metodo, opisano v tej diplomski nalogi, upoštevamo neodvisne dejavnike tveganja na trgu in glede na njih povečujemo razpršenost.



Slika 11. Razpršenostna meja portfelja kriptovalut, kjer so kratke prodaje dovoljene. Krog predstavlja portfelj z maksimalno Sharpovo vrednostjo. Poleg vsake točke je tudi Sharpovo razmerje tistega portfelja. Kot opazimo, višina Sharpovega razmerja ni nujno korelirana z razpršenostjo po naši metriki.

10. Zaključek

V diplomski nalogi je bil predstavljen model za analizo in optimizacijo razpršenosti portfeljev. Z metodo glavnih komponent so bili določeni nekorelirani viri tveganja na trgu. Na njihovi podlagi se je oblikovala razpršenostna porazdelitev, ki pove, kolikšen del pojasnjene variance v portfelju pripada posameznemu glavnemu portfelju. Iz nje dobimo mero tveganja, predstavljeno z eksponentom njene entropije. Ta pove približno število neodvisnih vplivov na portfelj. Na njeni podlagi, in na podlagi preferenc investitorja smo določili portfelje, ki ležijo na razpršenostni meji. Ta predstavlja razmerje med razpršenostjo in pričakovano vrednostjo.

Metodo smo uporabili na kriptovalutah, ki so same po sebi volatilne in med seboj korelirane. Pričakovano se je izkazalo, da večinski del tveganja izhaja iz enega vira, kar je posledica koreliranosti. Z nadaljno analizo smo pokazali, da enakomerno utežen portfelj ne leži na razpršenostni meji, saj ne upošteva skritih virov tveganja. Kot pričakovano so se rezultati razlikovali glede na investitorjeve preference o tveganju. V primeru poudarka na pričakovani vrednosti je portfelj postal bolj tvegan in skoncentriran na en vir tveganja, medtem ko je bilo pri poudarku na razpršenosti tveganje razporejeno med več glavnih portfeljev. Z uvedbo kratke prodaje se je

razpršenost portfelja občutno povečala. Pri poudarku na razpršenosti se je tveganje enakomerno porazporedilo med vse glavne portfelje. Tukaj pripomnimo, da trenutno kratka prodaja za večino kriptovalut ni možna, kar še dodatno prispeva k tveganju pri trgovanju, saj je zelo težko sestaviti dobro razpršen portfelj.
Primerjali smo tudi razpršenost po metodi, opisani v diplomski nalogi, z razpršenostjo portfelja, dobljenega z maksimiziranjem Sharpovega razmerja. Izkazalo se je, da imajo portfelji na robu razpršenostne meje manjše Sharpovo razmerje kot portfelj, ki maksimizira Sharpovo razmerje, hkrati pa je ta portfelj ležal pod njo. Iz tega sklepamo, da optimiziranje portfelja glede na Sharpovo razmerje ne prinese vedno najboljše razpršenosti, če jo definiramo, kot je bila definirana tu.

K zmanjšanju tveganja trgovanja s kriptovalutami bi pripomogla uvedba kratke prodaje na kriptoborzah. Kljub temu se moramo zavedati tveganosti trgovanja, saj se lahko zaradi volatilnosti kriptovalut cene hitro spremenijo, dobra razpršenost pa ne zagotavlja popolne zaščite pred gibanjem cen celotnega trga.

Slovar strokovnih izrazov

efficient frontier učinkovita meja
modern portfolio theory moderna portfeljska teorija
portfolio diversification razpršenost portfelja
principal component analysis metoda glavnih komponent
benchmark primerjalni indeks
principal portfolio glavni portfelj
generic portfolio generičen portfelj
variance concentration curve krivulja koncentracije variance
volatility concentration curve krivulja koncentracije volatilnosti
diversification distribution razpršenostna porazdelitev
mean-diversification efficient frontier meja povprečje-razpršenost
cryptocurrency kriptovaluta

Literatura

[1] H. Markowitz, *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1., **1952**, 77–91.
[2] A. Meucci, *Managing Diversification*, Risk, 22, **2009**, 74–79.
[3] K. Pearson, *On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6, **1901**, 2(11), 559–572.
[4] W. Sharpe, *Mutual Fund Performance*, The Journal of Business, Vol. 39, **1966**, 119–138.
[5] W. Sharpe, *The Sharpe Ratio*, The Journal of Portfolio Management **1994**, 49–58.
[6] E. Zivot, *Portfolio Theory with Matrix Algebra, Chapter 1*, Zapiski s predavanj, Washington **2013**, dostopno na `http://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfolioTheoryMatrix.pdf`.
[7] A. Turk, *Metoda glavnih komponent*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2015.
[8] *What is Cryptocurrency. Guide for Beginners*, [3.8.2018], dostopno na `https://cointelegraph.com/bitcoin-for-beginners/what-are-cryptocurrencies`.
[9] *CoinMarketCap*, [21.8.2018], dostopno na `https://coinmarketcap.com/`.