UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Peter Dolenc

Največja večkratnost lastnih vrednosti grafa in njegove prisilne ničle

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Polona Oblak

Ljubljana, 2018

Kazalo

Največja večkratnost lastnih vrednosti grafa in njegove prisilne ničle

POVZETEK

V delu enostavnim grafom na končni množici vozlišč priredimo množico simetričnih realnih matrik, ki imajo neničeln element na mestu (i, j) natanko tedaj, ko $i \neq j$ in v grafu G obstaja povezava med vozliščema i in j. Največjo večkratnost lastnih vrednosti grafa definiramo kot največjo možno večkratnost lastnih vrednosti iz pripadajoče množice matrik. Ta parameter označimo z $M(G)$. V delu definiramo tudi parameter $Z(G)$ iz grafa G in pokažemo, da za vsak enostaven graf G velja $M(G) \leq Z(G)$. Podrobneje študiramo grafe s prereznimi vozlišči in si ogledamo obnašanje parametrov $M(G)$ in $Z(G)$ za takšne grafe.

Maximum multiplicity of eigenvalues of a graph and it's zero forcing sets

ABSTRACT

For any simple graph with finite set of verticies we assign a set of real symmetric matrices, whose (i, j)th entry is non-zero whenever $i \neq j$ and $\{i, j\}$ is an edge in G. We define maximum multiplicity of eigenvalues of a graph to be the largest possible multiplicity of eigenvalues of matrices in that set. We denote this parameter by $M(G)$. We also define parameter $Z(G)$ and show that for any simple graph G, $M(G) \leq Z(G)$. We take a closer look at graphs with cut-vertices and study parameters $M(G)$ and $Z(G)$ for these graphs.

Math. Subj. Class. (2010): 05C50, 15A18, 15B57

Ključne besede: simetrične matrike, večkratnost lastne vrednosti, prisilne ničle grafa, širitev ranga, ničelna širitev, induciran podgraf, prerezno vozlišče

Keywords: symmetric matrices, multiplicity of an eigenvalue, zero forcing set, rank spread, zero spread, induced subgraph, cut-vertex

1. Uvod

Motivacija za preučevanje največje večkratnosti lastnih vrednosti izhaja iz inverznega problema lastnih vrednosti. Ta zahteva, da iz podanega spektra konstruiramo matriko, ki bo ta spekter imela. Brez dodatnih pogojev je problem enostaven, saj zmeraj lahko konstruiramo diagonalno matriko z elementi spektra na diagonali. Problem postane težaven, kadar je za matriko predpisana tudi struktura matrike. V tem diplomskem delu bomo preučevali simetrične matrike z realnimi elementi, ki bodo neničelni takrat, kadar bo na enostavnem grafu $G = (V, E)$ obstajala povezava med pripadajočima vozliščema. Bolj natančno bomo obravnavali največjo možno večkratnost lastnih vrednosti matrik iz te množice. Ta parameter bomo označili z $M(G)$. Določanje tega je najbolj dosegljiv del reševanja inverznega problema lastnih vrednosti. Enakovreden problem iskanju največje večkratnosti lastne vrednosti v grafu G je iskanje najmanjšega možnega ranga matrik, ki pripadajo grafu G. Ta parameter označimo z $\mathrm{mr}(G)$. V delu pokažemo, da je za vsak graf G, $\mathrm{mr}(G) + M(G) = |G|$ in zato nekatere probleme pri iskanju parametra $M(G)$ rešujemo tako, da jih prevedemo na iskanje parametra $\mathrm{mr}(G)$. Parameter je sicer zanimiv za preučevanje tudi neodvisno od inverznega problema lastnih vrednosti. Pregled področja in ugotovitve različnih avtorjev sta S. M. Fallat in L. Hogben zbrala v [4].

V nadaljevanju bomo vpeljali nov parameter $Z(G)$, ki je definiran s kombinatorično igro v grafu. Ta parameter je bil prvič vpeljan na delavnici skupine AIM in objavljen v delu [6]. Rdeča nit, ki povezuje parametra $M(G)$ in $Z(G)$ je lastnost, da za vsak graf G velja $M(G) \leq Z(G)$. To lastnost bomo dokazali in uporabili na številnih zgledih, v katerih bomo za različne družine grafov izračunali oba parametra. Ker pa se iskanje obeh parametrov za grafe z velikim številom vozlišč izkaže za zelo zahtevno, si bomo ogledali obnašanje parametrov v grafih s tako imenovamini prereznimi vozlišči, ki omogočajo, da težak problem prevedemo na več lažjih. Na tem področju so obsežno delo opravili F. Barioli in drugi v delu [2] za parameter $\mathrm{mr}(G)$ in D.D. Row v [12] za parameter $Z(G)$, s pomočjo definicij in trditev avtorjev C. J. Edholm in drugih v [3].

V poglavju z dodatnimi zgledi bomo izpeljali parametra $M(G)$ in $Z(G)$ za t.i. grafe na vzporednih poteh. Prvi je parameter $M(G)$ za take grafe izpeljal C. R. Johnson v delu [8], za $Z(G)$ pa je ugotovitve dopolnil D.D Row v [12]. Prav tako si bomo ogledali graf $C_5 \circ K_1$ in opisali, zakaj je ta graf v naši nalogi nekaj posebnega.

V zadnjem poglavju si bomo ogledali še alternativno uporabo parametra $Z(G)$. Ta se neodvisno od inverznega problema lastnih vrednosti uporablja tudi na drugih področjih, med drugim v kemiji, fiziki in ekonomiji. Kot primer za slednje si bomo ogledali model širjenja idej v socialnih omrežjih, ki ga v delu [10] raziskuje In-Jae Kim.

Področje, ki ga zajema ta diplomska naloga je relativno novo in ob času mojega pisanja zelo živahno. Velika večina ugotovitev, ki so zbrana v tem delu je bila odkrita v zadnjih 15 letih. Vsako leto pa na to temo v matematičnih revijah izidejo številni novi članki. Namen moje diplomske naloge ni zapisati vseh ugotovitev, temveč zbrati in dokazati tiste najbolj osnovne, ki novincu na tem področju omogočijo lažji prehod v samostojno raziskovanje.

2. Osnovni pojmi

Začnimo z definicijo osnovnih pojmov. Naj bo V neprazna množica in E poljubna družina dvoelementnih podmnožic množice V. Paru $G = (V, E)$ pravimo *graf* na *množici vozlišč* $V = V(G)$ in z *množico povezav* $E = E(G)$. *Enostaven graf* je graf brez zank (povezav, ki imajo obe krajišči enaki) in vzporednih povezav (več povezav nad istim parom točk). V tem delu bomo obravnavali enostavne grafe na končni množici vozlišč.

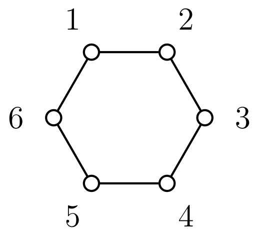
Vnaprej podanemu grafu želimo prirediti družino matrik, katere struktura bo opisana z vozlišči in povezavami iz grafa. V tretjem poglavju bomo potem raziskovali nekatere lastnosti takšnih matrik. Bolj natančno bomo preučevali največjo možno večkratnost lastnih vrednosti iz take družine matrik.

Množico vseh simetričnih matrik nad obsegom $\mathbb{R}$ označimo $S_n(\mathbb{R})$. Za simetrične matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *graf matrike* A (označimo $\mathcal{G}(A)$), graf z vozlišči $\{1,...,n\}$ in povezavami $\{\{i,j\} : a_{ij} \neq 0, 1 \leq i < j \leq n\}$. Množica vseh simetričnih matrik grafa G je potem:

$$\mathcal{S}(G) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) : \mathcal{G}(A) = G\}.$$

Matrike iz množice $\mathcal{S}(G)$ imajo torej neničelna realna števila na mestih, kjer na grafu poteka povezava med vozliščema in ničelna na tistih, kjer povezave ni. Na diagonali so elementi matrike poljubni.

Primer 2.1. Oglejmo si cikel na 6 vozliščih:



Slika 1. C_6

Sedaj mu priredimo družino matrik $S(C_6)$ v skladu z zgornjo definicijo:

$$\mathcal{S}(C_6) = \begin{bmatrix} \star & x_1 & 0 & 0 & 0 & x_6 \\ x_1 & \star & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & \star & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \star & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & \star & x_5 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & x_5 & \star \end{bmatrix}.$$

Tu so $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ poljubna neničelna realna števila, zvezdice na diagonali pa označujejo poljubna realna števila (ta so si lahko med seboj tudi različna). $\diamondsuit$

Pripomnimo še, da je oblika matrik odvisna od označitve vozlišč. V primeru, da imamo dva izomorfna grafa G in H, potem za vsako matriko $A \in \mathcal{S}(G)$ velja, da obstaja permutacijska matrika P, za katero je $PAP^{-1} \in \mathcal{S}(H)$.

V nadaljevanju diplomske naloge bomo potrebovali še naslednje definicije iz teorije grafov: Graf G' je *podgraf* grafa G, če velja $V(G') \subseteq V(G)$ in $E(G') \subseteq E(G)$. Podgraf G' je *induciran* z množico točk $U \subseteq V(G)$, če velja $V(G') = U$ in $E(G') =$

$\{\{u,v\} \in E(G) : u,v \in V(G')\}$. V tem primeru pišemo tudi $G' = G[U]$. Poln graf je graf $K_n = (\{v_1,\dots,v_n\}, E)$, kjer je $E = \{\{v_i,v_j\} : i \neq j, i,j = 1,\dots,n\}$. Kartezični produkt grafov G in H je graf $G \square H$ z množico vozlišč $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, množica povezav $E(G \square H)$ pa je množica vseh parov vozlišč $\{(u,v),(x,y)\}$, za katere velja bodisi $u = x$ in $(v,y) \in E(H)$ bodisi $(u,x) \in E(G)$ in $v = y$.

Množico vseh lastnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ imenujemo *spekter matrike* A. Označimo ga s $\sigma(A)$.

3. Največja večkratnost lastnih vrednosti grafa

Motivacija za preučevanje naslednjega parametra izhaja iz *inverznega problema lastnih vrednosti* (v nadaljevanju IPLV). Ta zahteva, da iz podanega spektra konstruiramo matriko, ki bo ta spekter imela. Brez dodatnih pogojev je problem enostaven, saj lahko konstruiramo diagonalno matriko z elementi spektra na diagonali. Problem postane težaven, kadar za družino dopustnih matrik zahtevamo dodatne pogoje. Za nas bodo to matrike, ki izhajajo iz grafov.

IPLV lahko v grobem razdelimo na dva večja problema. Prvi preučuje teoretično rešljivost problema, drugi pa praktično iskanje ustrezne rešitve. Rezultati te diplomske naloge se bodo nanašali na prvi del. Ker pa se IPLV za matrike, ki izhajajo iz grafov izkaže za (zaenkrat) prezahtevnega, bomo podrobneje preučevali le največjo možno večkratnost lastnih vrednosti takšnih matrik. S tem bomo dobili nekaj robnih pogojev za obstoj rešitve IPLV.

Za poljuben graf G torej definirajmo naslednji parameter:

$$M(G) = \max\{\text{večkratnost } \lambda : \lambda \in \sigma(A), A \in S(G)\}.$$

Pri definiciji množice $\mathcal{S}(G)$ nismo podali nobene omejitve za diagonalo matrike. To pomeni, da če je $A \in \mathcal{S}(G)$, je tudi $A + \alpha I \in \mathcal{S}(G)$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ (I tu predstavlja identično matriko). Če matriki A prištejemo αI, potem se vse lastne vrednosti matrike povečajo za α. Od tod sklepamo, da je dovolj poiskati največjo možno večkratnost lastne vrednosti 0. To pa lahko poiščemo tudi kot največjo možno dimenzijo jedra. Enakovredna definicija parametra $M(G)$ se torej glasi:

$$M(G) = \max\{\dim(\ker(A)) : A \in \mathcal{S}(G)\}.$$

V delu se bo izkazalo, da je nekatere rezultate lažje dobiti, če preučujemo najmanjši možen rang iz družine matrik. Definiramo

$$\operatorname{mr}(G) = \min\{\operatorname{rang} A : A \in \mathcal{S}(G)\}.$$

Matrike iz množice $\mathcal{S}(G)$, ki imajo največjo dimenzijo jedra, imajo hkrati tudi najmanjši rang v tej množici. Ker pa za vsako matriko $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\dim(\ker B) + \operatorname{rang}(B) = n$, sledi $M(G) + \operatorname{mr}(G) = |G|$, kjer $|G|$ označuje število vozlišč v grafu G.

Parametra $M(G)$ in $\operatorname{mr}(G)$ nista odvisna od označitve vozlišč. Množenje s permutacijsko matriko namreč ohranja rang in zato za izomorfna grafa G in H velja $\operatorname{mr}(G) = \operatorname{mr}(H)$ in posledično tudi $M(G) = M(H)$.

3.1. Lastnosti parametra $M(G)$.

V tem razdelku bomo predstavili nekaj osnovnih lastnosti parametrov $M(G)$ in $\operatorname{mr}(G)$.

Trditev 3.1. *Za vsak graf G veljajo naslednje lastnosti:*

(1) $M(G) \geq 1$.

(2) *Za $n \geq 2, M(K_n) = n-1$. Če je G povezan graf, potem iz $M(G) = n-1$ sledi, da je $G = K_{|G|}$.*
(3) *Za graf G', ki ga dobimo tako, da grafu G odstranimo eno vozlišče in vse povezave tega vozlišča, velja*

$$M(G') - 1 \leq M(G) \leq M(G') + 1.$$

(4) *Za graf G', ki ga dobimo tako, da grafu G odstranimo eno povezavo, velja*

$$M(G') - 1 \leq M(G) \leq M(G') + 1.$$

Dokaz. Točka (1) je očitna iz definicije parametra M.

(2) Da za $n \geq 2$ velja $M(K_n) = n-1$, vidimo tako, da za matriko grafa K_n vzamemo matriko samih enic. Po postopku Gaussove eliminacije se vse razen ene vrstice spremenijo v ničle. Dimenzija jedra take matrike je $n-1$ in zato $M(G) = n-1$. Obratno, če je G povezan graf, potem nobena vrstica matrike $A \in S(G)$ nima samih ničel. Vsaka matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ brez ničelnih vrstic in rangom 1, pa ima vse elemente neničelne. Sledi, da je $\mathcal{G}(A) = K_n$.

(3) Lastnost je posledica Cauchyjevega izreka o prepletanju za simetrične matrike. Izrek pravi, da če je A simetrična matrika in je A' podmatrika, ki jo dobimo tako, da iz A odstranimo i-to vrstico in i-ti stolpec, potem se lastne vrednosti matrike A' vrinejo med lastne vrednosti matrike A [7]. Odstranitev nekega vozlišča u iz grafa G pa povzroči ravno odstranitev pripadajoče vrstice in stolpca iz matrik, ki so elementi množice $\mathcal{S}(G)$.

(4) Neenakost je ekvivalentna neenakosti $\mathrm{mr}(G') + 1 \geq \mathrm{mr}(G) \geq \mathrm{mr}(G') - 1$. Naj bo G graf na n vozliščih. Izberemo povezavo $\{i, j\} \in E(G)$ in naj bo G' graf, ki ga dobimo, če grafu G odstranimo povezavo $\{i, j\}$. Naj bo $A \in \mathcal{S}(G)$ in $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{mr}(G)$. Naj bo $B = -a_{ij}(e_i + e_j)(e_i + e_j)^T$, kjer je e_i i-ti enotski vektor. Tedaj je $\mathcal{G}(A + B) = G'$ in $\mathrm{mr}(G') \leq \mathrm{rang}(A + B) \leq \mathrm{rang}\, A + \mathrm{rang}\, B = \mathrm{rang}\, A + 1 = \mathrm{mr}(G) + 1$. Od tod $\mathrm{mr}(G) \geq \mathrm{mr}(G') - 1$. Za dokaz druge neenakosti naj bo $A \in S(G')$ in $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{mr}(G')$. Naj bo $B = (e_i + e_j)(e_i + e_j)^T$. Tedaj je $\mathcal{G}(A + B) = G$ in $\mathrm{mr}(G) \leq \mathrm{rang}(A + B) \leq \mathrm{rang}\, A + \mathrm{rang}\, B = \mathrm{rang}\, A + 1 = \mathrm{mr}(G') + 1$. □

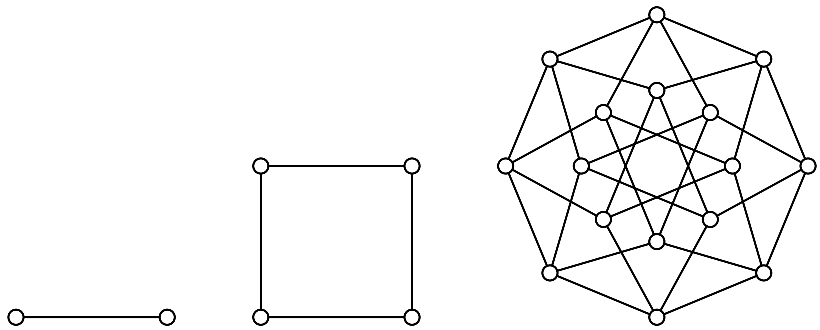
Trditev 3.2. *$M(G) = 1$ natanko tedaj, ko je $G = P_{|G|}$ pot.*

Zgornja trditev je posledica Fiedlerjevega izreka o tridiagonalnih matrikah, ki ga v tem delu ne bomo podrobneje obravnavali. Izrek in njegov dokaz se nahajata v [5]. Dejstvo, da je $M(G) \geq 2$ za vse grafe, ki niso poti, pa bomo s pridom izkoristili v poglavju 5.1, ko si bomo ogledali družino matrik z $M(G) = 2$.

Žal za izračun parametra $M(G)$ ne obstaja splošni algoritem. Za grafe na velikem številu vozlišč postane problem prezahteven, da bi ga lahko reševali samo z manipulacijo spremenljivk iz elementov matrike. Zato ponavadi uspešneje kot splošne grafe preučujemo grafe, ki pripadajo družinam s kakšnimi lepimi lastnostmi. V naslednjem zgledu si oglejmo oceno parametra $M(G)$ za hiperkocke. V poglavju 4 bomo nato vpeljali nov parameter $Z(G)$, ki $M(G)$ omejuje navzgor in tako pokazali, da smo dobili celo pravo vrednost $M(G)$ za hiperkocke.

Primer 3.3. Hiperkocka Q_n.
Hiperkocka je v geometriji posplošitev kvadrata in kocke v višje dimenzije. V teoriji grafov je to graf, ki ga dobimo, če v ravnino projeciramo oglišča in robove takega telesa.

Da določimo spodnjo mejo za $M(Q_n)$ definirajmo naslednje zaporedje matrik:



Slika 2. Hiperkocke Q_2, Q_3 in Q_4

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & I \\ I & L_{n-1} \end{bmatrix}, L_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_{n-1} & I \\ I & -L_{n-1} \end{bmatrix}.$$

S tako definiranimi matrikami $(H_n)_{n\geq 1}$, je $H_n \in \mathcal{S}(Q_n)$ za vsak n, torej je Q_n graf matrike H_n. Opazimo, da imajo matrike $(L_n)_{n\geq 1}$ poln rang, z indukcijo pa lahko pokažemo, da je $L_n^2 = I$ za vsak n. Razmislimo še, kakšnih velikosti so matrike $(H_n)_{n\geq 1}$. Začnemo z matrikami velikosti 2×2, nato pa je vsaka naslednja matrika natanko za enkrat večja. Velikost matrike H_n je torej $2^n \times 2^n$. Podobno za matrike $(L_n)_{n\geq 1}$. Sedaj si oglejmo produkt:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -L_{n-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{n-1} & I \\ I & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker smo matriko H_n pomnožili z matriko polnega ranga vemo, da bo rang produkta enak rangu matrike H_n. Rang produkta pa je enak 2^{n-1}. Torej je $\operatorname{rang}(H_n) = 2^{n-1}$, $\operatorname{mr}(Q_n) \leq 2^{n-1}$ in $M(Q_n) \geq 2^{n-1}$. ♢

3.2. **Prerezna vozlišča.** Iskanje največje možne večkratnosti lastnih vrednosti je za splošne grafe in za grafe na veliki množici vozlišč zelo zahteven problem. Preprosta ideja za reševanje takšnih grafov je, da odstranimo katero od vozlišč in problem prevedemo na enega ali več lažjih problemov. Kot vidimo iz trditve 3.1 (3), pa v splošnem ne vemo, kaj se bo zgodilo s parametrom $M(G)$, če eno vozlišče odstranimo. V nekaterih primerih pa grafi vsebujejo t.i. *prerezna vozlišča.* To so vozlišča, čigar odstranitev povrzoči, da graf razpade na več komponent. V tem podpoglavju bomo dokazali, da lahko za tak graf G parameter $M(G)$ določimo s preučevanjem njegovih komponent. V poglavju 5.4 pa bomo to dejstvo uporabili na konkretnem grafu.

Definicija 3.4. Naj bo v vozlišče v grafu G. *Širitev ranga* grafa G za vozlišče v je

$$\mathrm{r_v}(G) = \operatorname{mr}(G) - \operatorname{mr}(G - v).$$

Trditev 3.5. *Za vsak graf G in vozlišče $v \in V(G)$ velja*

$$0 \leq \mathrm{r_v}(G) \leq 2.$$

Dokaz. Neposredno iz trditve 3.1 (3) sledi:

$$M(G - v) - 1 \leq M(G) \leq M(G - v) + 1.$$

Tu ob upoštevanju lastnosti, da za vsak graf G velja $M(G)+\mathrm{mr}(G) = |G|$, parameter $M(G)$ prevedemo v $\mathrm{mr}(G)$:

$$|G-v| - \mathrm{mr}(G-v) - 1 \leq |G| - \mathrm{mr}(G) \leq |G-v| - \mathrm{mr}(G-v) + 1.$$

Izkoristimo dejstvo, da ima graf $|G-v|$ eno vozlišče manj kot graf G:

$$|G| - 1 - \mathrm{mr}(G-v) - 1 \leq |G| - \mathrm{mr}(G) \leq |G| - 1 - \mathrm{mr}(G-v) + 1.$$

Neenačbo poenostavimo:

$$-\mathrm{mr}(G-v) - 2 \leq -\mathrm{mr}(G) \leq -\mathrm{mr}(G-v).$$

Na vseh straneh množimo z -1:

$$\mathrm{mr}(G-v) + 2 \geq \mathrm{mr}(G) \geq \mathrm{mr}(G-v).$$

Na vseh straneh odštejemo $\mathrm{mr}(G-v)$ in dobimo željeni rezultat:

$$2 \geq \mathrm{mr}(G) - \mathrm{mr}(G-v) \geq 0.$$

□

Trditev 3.5 nam daje omejitev za parameter $\mathrm{r_v}(G)$. Lema 3.6 spodaj pa pove, da za matriko $A \in \mathcal{S}(G)$ z $\operatorname{rang} A = \mathrm{mr}(G)$ velja, da če ji odstranimo p-to vrstico in p-ti stolpec, bo novonastala podmatrika A' enakega ranga, ali pa bo ta padel za 2. Tretja možnost, da bi veljalo $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A' + 1$, ni mogoča. Lemo je v delu [11] dokazal Peter M. Nylen.

Lema 3.6. *Naj bo G graf in $A \in \mathcal{S}(G)$ matrika z lastnostjo* $\operatorname{rang} A = \mathrm{mr}(G) = k$. *Z A_p označimo matriko, ki jo dobimo, če matriki A odstranimo p-ti stolpec in p-to vrstico. Potem je* $\operatorname{rang} A_p = k$ *ali pa* $\operatorname{rang} A_p = k-2$. *Povedano drugače, za matriko A_p ne more veljati* $\operatorname{rang} A_p = k - 1$.

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je $\operatorname{rang} A_p = k - 1$. Brez škode za splošnost predpostavimo še, da je $p = 1$. Označimo

$$A = \begin{bmatrix} a & b^T \\ b & A_1 \end{bmatrix}.$$

Potem velja

$$k = \operatorname{rang} A \geq \operatorname{rang} \begin{bmatrix} b^T \\ A_1 \end{bmatrix} \geq \operatorname{rang} A_1 = k - 1. \tag{1}$$

Ker se števili na levi in desni razlikujeta za 1, sklepamo, da mora biti eden od dveh neenačajev strogi neenačaj, preostali pa enačaj. Enakost $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} b^T \\ A_1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} A_1$ bo veljala natanko tedaj, ko bo $A_1 x = b$ za nek vektor $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. To velja zaradi simetričnosti matrik iz $\mathcal{S}(G)$. Takrat namreč lahko v procesu Gaussove eliminacije uničimo zgornjo vrstico in pri tem ohranjamo rang. Pri prvi neenakosti v (1) pa velja neenačaj natanko tedaj, ko obstaja vektor $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, za katerega velja

$$\begin{bmatrix} b^T \\ A_1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

V tem primeru bo veljalo $A_1 y = b$ in tako bosta veljala oba enačaja, kar pa nas privede do protislovja. Zato mora biti drugi neenačaj enačaj, prvi pa strogi neenačaj. Definirajmo $a' = y^T b$ in sestavimo matriko $A' = \begin{bmatrix} a' & b^T \\ b & A_1 \end{bmatrix}$. Tedaj je tudi $A' \in \mathcal{S}(G)$ in $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A_1 = k - 1$.

V neenakost (1) vstavimo A' namesto A in dobimo:

$$k-1 = \operatorname{rang} A' > \operatorname{rang} A_1 = k-1,$$

kar nas zopet pripelje do protislovja. □

V naslednji lemi bomo prav tako preučevali matrike s sledečo obliko:

$$A = \begin{bmatrix} a & b^T \\ b & A' \end{bmatrix}; \quad \mathcal{G}(A) = G; \quad b \in \operatorname{im}(A') \tag{2}$$

Lema 3.7. *Naj bo G graf in v vozlišče v grafu G. Če je $v = 1$, potem velja:*

(i) $\mathrm{r_v}(G) = 0$ *natanko tedaj, ko* $\min\{\operatorname{rang} A' : A \text{ ima obliko } (2)\} = \mathrm{mr}(G-v)$,
(ii) $\mathrm{r_v}(G) = 1$ *natanko tedaj, ko* $\min\{\operatorname{rang} A' : A \text{ ima obliko } (2)\} = \mathrm{mr}(G-v)+1$,
(iii) $\mathrm{r_v}(G) = 2$ *sicer.*

Dokaz. (i) Naj A zadošča pogojem iz (2) in naj bo $\operatorname{rang} A' = \mathrm{mr}(G-v)$. Tako kot v dokazu leme 3.6 vzemimo $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, za katerega velja $A'y = b$ in definirajmo $a' = y^T b$. Tedaj ima tudi $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a' & b^T \\ b & A' \end{bmatrix}$ obliko (2) in kot v dokazu leme 3.6 sklepamo, da je $\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} A'$. Potem je $\mathrm{mr}(G) \leq \operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} A' = \mathrm{mr}(G-v)$. Ker pa velja $\mathrm{mr}(G) - \mathrm{mr}(G-v) \geq 0$, sklepamo, da je $\mathrm{mr}(G) - \mathrm{mr}(G-v) = \mathrm{r_v}(G) = 0$. Obratno, če je $\mathrm{r_v}(G) = 0$, potem je vsaka matrika $A \in S(G)$ z $\operatorname{rang} A = \mathrm{mr}(G)$ oblike (2) in velja $\operatorname{rang} A' = \mathrm{mr}(G-v)$.

(ii) Naj bo A oblike (2) in naj bo $\operatorname{rang} A' = \mathrm{mr}(G-v)+1$. Za matriko $\tilde{A}$ kot v (i) velja $\mathrm{mr}(G) \leq \operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} A' = \mathrm{mr}(G-v)+1$, zato $\mathrm{r_v}(G) \leq 1$. Ko upoštevamo točko (i), mora biti $\mathrm{r_v}(G) = 1$. Obratno, naj bo $\mathrm{r_v}(G) = 1$. Potem je vsaka matrika z grafom G in rangom $\mathrm{mr}(G)$ oblike (2), sicer bi prva vrstica v matriki A spremenila rang matrike A' za 1 in prišli bi v protislovje z lemo 3.6. Za A' mora po definiciji parametra $\mathrm{mr}(G-v)$ veljati $\operatorname{rang} A' \geq \mathrm{mr}(G-v) = \mathrm{mr}(G) - 1$. Ob upoštevanju leme 3.6 sklepamo, da enačaj tu ne more držati. Edina druga možnost je, da je $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A = \mathrm{mr}(G-v)+1$.

(iii) Sledi iz (i) in (ii) ter dejstva, da je $0 \leq \mathrm{r_v}(G) \leq 2$.

□

Tako smo dobili predpis za $\mathrm{r_v}(G)$ za splošen graf. Sedaj pa iščemo skupino grafov, na kateri bi ga lahko učinkovito uporabili. Izkaže se, da so to grafi s t.i. prereznimi vozlišči.

Definicija 3.8. Vozlišče v je *prerezno* vozlišče povezanega grafa G, če je $G-v$ nepovezan graf.

Trditev 3.9. *Naj bo v prerezno vozlišče grafa G. Naj bodo $W_i \subseteq V(G)$ za $i = 1, ..., h$ vozlišča i-te komponente grafa $G-v$ in naj bo G_i podgraf, induciran z $v \cup W_i$. Potem je*

$$\mathrm{r_v}(G) = \min\left\{\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i), 2\right\} \tag{3}$$

in

$$\mathrm{mr}(G) = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v) + \min\{\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i), 2\}.$$

Dokaz. Predpostavimo lahko, da je $v = 1$. Matriko z grafom G lahko zapišemo kot

$$A = \begin{bmatrix} a & b^T \\ b & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b_1^T & \dots & b_h^T \\ b_1 & A_1' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_h & 0 & \dots & A_h' \end{bmatrix}, \tag{4}$$

kjer je $G(A_i') = G_i - v, i = 1, ..., h$. Dokazali bomo, da je $\mathrm{r_v}(G) = 0$ natanko tedaj, ko je $\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i) = 0$ in da je $\mathrm{r_v}(G) = 1$ natanko tedaj ko je $\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i) = 1$. V vseh ostalih primerih bo enakost (3) držala, saj je $\mathrm{r_v}(G) \leq 2$.

Sedaj predpostavimo, da je $\mathrm{r_v}(G) = 0$. Iz leme 3.7 (i) sledi, da obstaja matrika A, oblike (4), da je $b \in \operatorname{im} A'$ in $\operatorname{rang} A' = \mathrm{mr}(G - v) = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v)$. Velja, da je $b_i \in \operatorname{im}(A_i')$ in $\operatorname{rang} A_i' = \mathrm{mr}(G_i - v)$ za vsak i. Tu uporabimo lemo 3.7 (i) in dobimo, da je $\mathrm{r_v}(G_i) = 0$ za vsak i. Obratno, naj bo $\mathrm{r_v}(G_i) = 0$ za vsak i. Potem obstajajo matrike $A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i^T \\ b_i & A_i' \end{bmatrix}$, ki zadoščajo pogojem iz (2) in imajo $\operatorname{rang} A_i' = \mathrm{mr}(G_i - v)$. Tako lahko skonstruiramo matriko A kot v (4), kjer je a poljubno realno število. Očitno je $b \in \operatorname{im}(A')$ in $\operatorname{rang} A' = \mathrm{mr}(G - v)$. Iz leme 3.7 ($i$) dobimo, da je $\mathrm{r_v}(G) = 0$.

Denimo sedaj, da je $\mathrm{r_v}(G) = 1$. Po primeru iz prejšnjega odstavka sledi, da je $\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i) \geq 1$. Pokažimo še, da velja $\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i) \leq 1$. Po lemi 3.7 ($ii$) obstaja matrika A oblike (4) z $b \in \operatorname{im}(A')$ in $\operatorname{rang} A' = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v) + 1$. Tedaj obstaja tak $j \in \{1, \dots, h\}$, da je $\operatorname{rang} A_j' = \mathrm{mr}(G_j - v) + 1$ in $\operatorname{rang} A_i' = \mathrm{mr}(G_i - v)$ za $i \neq j$. Torej je $\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i) \leq 1$. Dokaz v obratni smeri je podoben dokazu iz prejšnjega odstavka. □

Posledica 3.10. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$ prerezno vozlišče grafa G. Naj bodo $W_i \subseteq V(G)$ za $i = 1 \dots, h$ vozlišča i-te komponente grafa $G - v$ in naj bo G_i podgraf, induciran z $\{v\} \cup W_i$. Če je $\mathrm{r_v}(G_i) = 0$ za vse razen morda en podgraf G_i, potem je*

$$\mathrm{mr}(G) = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i).$$

Dokaz. Najprej dokažimo posledico za primer, ko za vsak podgraf G_i, $1 \leq i \leq h$, velja $\mathrm{r_v}(G_i) = 0$. Potem je $\min\{\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i), 2\} = 0$, saj je vsak element vsote enak 0. Prav tako je po definicji parametra $\mathrm{r_v}(G)$, $\mathrm{mr}(G_i) = \mathrm{mr}(G_i - v)$ za vsak i. Torej je po trditvi 3.9

$$\mathrm{mr}(G) = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v) + \min\{\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i), 2\} = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v) = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i).$$

Naj sedaj obstaja natanko en podgraf G_l, $1 \leq l \leq h$, za katerega $\mathrm{r_v}(G_l) \neq 0$. Potem je $\min\{\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i), 2\} = \mathrm{r_v}(G_l)$ in po trditvi 3.9

$$\begin{aligned}\mathrm{mr}(G) &= \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v) + \min\{\sum_{i=1}^{h} \mathrm{r_v}(G_i), 2\} = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v) + \mathrm{r_v}(G_l) = \\ &= \sum_{i=1, i\neq l}^{h} \mathrm{mr}(G_i - v) + \mathrm{mr}(G_l - v) + \mathrm{r_v}(G_l) = \sum_{i=1, i\neq l}^{h} \mathrm{mr}(G_i) + \mathrm{mr}(G_l) = \\ &= \sum_{i=1}^{h} \mathrm{mr}(G_i)\end{aligned}$$

□

S tem zaključujemo pregled splošnih lastnosti parametra $M(G)$. V poglavju 5 si bomo ogledali, kako te lastnosti uporabimo pri iskanju parametra $M(G)$. V dokazu trditve 5.4 bomo uporabili posledico 3.10 za iskanje paramatera $M(G)$ za konkreten graf $G = C_5 \circ K_1$, ki je prikazan na sliki 9.

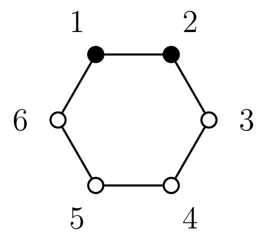
4. Število prisilnih ničel grafa

V tem razdelku bomo vpeljali nov parameter za enostavne grafe, ki nam bo služil kot omejitev parametra $M(G)$ navzgor. V definiciji parametra $Z(G)$ uporabimo naslednjo igro v grafu:

Definicija 4.1. Naj bodo nekatera vozlišča v grafu G obarvana črno, ostala pa belo. Če je u črno vozlišče in ima natanko eno belo sosednje vozlišče v, potem spremenimo barvo vozlišča v v črno. Kadar uporabimo to pravilo, pravimo, da u *prisili* v in pišemo $u \to v$. Pravilo apliciramo iterativno, dokler nobena sprememba barve ni več mogoča.

Množica prisilnih ničel grafa G je takšna podmnožica vozlišč Z, da če so vozlišča iz Z prvotno obarvana črno, se po pravilu barvanja vsa vozlišča obarvajo črno. Število prisilnih ničel $Z(G)$ je moč najmanjše množice prisilnih ničel grafa G. Vsako množico prisilnih ničel grafa G z lastnostjo $|Z| = Z(G)$ imenujemo *minimalna* množica prisilnih ničel grafa G.

Primer 4.2. Cikel na 6 vozliščih C_6:



Slika 3. C_6

Vozlišči $\{1, 2\}$ predstavljata množico prisilnih ničel grafa C_6. V prvem koraku bo vozlišče 2 prisililo vozlišče 3, da se to obarva črno. Nato bo vozlišče 3 prisililo vozlišče 4 in tako naprej, dokler se cel graf ne obarva črno. Vrstni red prisiljevanj ni enoličen, saj bi lahko v prvem koraku vozlišče 1 prisililo vozlišče 6. Prav tako najmanjša množica prisilnih ničel ni enolična. Za množico prisilnih ničel bi namreč lahko vzeli katerikoli dve sosedni vozlišči. Preden množico $\{1, 2\}$ proglasimo za minimalno množico prisilnih ničel grafa C_6, pa moramo preveriti še, da eno samo vozlišče ne more obarvati celega grafa. Res, če začnemo z enim samim črnim vozliščem, na primer z vozliščem 1, potem ima to vozlišče 2 bela soseda (2 in 6). Zato ne more prisiliti nobenega vozlišča in barvanje se takoj ustavi. Zaključimo, da je $Z(C_6) = 2$. Seveda lahko tak sklep posplošimo na poljuben cikel C_n, $Z(C_n) = 2$ za vsak $n \geq 3$. $\diamondsuit$

Kot napovedano, bomo sedaj dokazali, da za poljuben graf G velja: $M(G) \leq Z(G)$. Še prej pa zapišimo in dokažimo pomožno trditev, ki jo bomo uporabili v dokazu glavnega rezultata tega diplomskega dela.

Trditev 4.3. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poljubna matrika in* $\dim(\ker(A)) > k$. *Potem obstaja neničeln vektor $x \in \ker(A)$ z ničelnimi koordinatami na k poljubnih mestih. Povedano drugače, če je W množica k indeksov in $U(x)$ množica indeksov i, za katere je $x_i \neq 0$, potem obstaja tak neničeln vektor $x \in \ker(A)$, da velja $W \cap U(x) = \emptyset$.*

Dokaz. Naj bo $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ nabor indeksov in

$$V_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} = 0\}.$$

Potem je $\dim V_k = n - k$. Naj bo $N = \ker(A)$. Tedaj je

$$\dim(V_k \cap N) = \dim V_k + \dim N - \dim(V_k + N) > n - k + k - n = 0,$$

saj je $\dim N = n - \operatorname{rang}(A) > k$ in $\dim(V_k + N) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Sledi, da je $V_k \cap N \neq 0$. □

Izrek 4.4. *Naj bo G poljuben enostaven graf. Tedaj velja: $M(G) \leq Z(G)$.*

Dokaz. Dokazovali bomo s protislovjem. Predpostavimo torej, da velja $M(G) > Z(G)$. Naj bo Z minimalna množica prisilnih ničel grafa G in naj bo matrika $A \in \mathcal{S}(G)$ takšna, da velja $\dim(\ker(A)) = M(G)$. Ker je $M(G) > Z(G)$, po trditvi 4.3 obstaja tak neničeln vektor $x = [x_i] \in \ker(A)$, da je $x_z = 0$ za vsak $z \in Z$. Pokazali bomo, da koordinate, ki pripadajo črnim vozliščem grafa, prisilijo tudi bela vozlišča, da imajo pripadajoče koordinate enake 0. Ker je Z množica prisilnih ničel grafa, obstaja vozlišče v, ki je edini beli sosed nekega črnega vozlišča $u \in Z$.

Za matriko A in vozlišče u grafa G velja:

$$(Ax)_u = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}x_k = a_{uu}x_u + \sum_{w\sim u} a_{uw}x_w + \sum_{w\nsim u} a_{uw}x_w = a_{uu}x_u + \sum_{w\sim u} a_{uw}x_w \tag{5}$$

Tu pišemo $w \sim u$, če je vozlišče w sosednje vozlišče u in $w \nsim u$, če $w \neq u$ in w ni sosednje vozlišče u.

Opazimo, da se enakost (5) poenostavi v $a_{uv}x_v = 0$, saj so koordinate ostalih sosednjih vozlišč vozlišča u enaka 0. Ker $a_{uv} \neq 0$, sledi $x_v = 0$. Vozlišče v dodamo v množico Z. Postopek ponavljamo po kronološkem vrstnem redu prisiljevanj $u_k \to v_k$, $k = 1, ..., t$. Ker je Z množica prisilnih ničel grafa, so vse koordinate vektorja x enake 0. Piršli smo do protislovja z dejstvom, da je vektor x neničeln. □

Tako smo dobili omejitev za paramater $M(G)$ navzgor. Izkaže se, da sta za veliko večino družin grafov, za katere poznamo oba parametra, ta parametra kar enaka. Vsekakor pa to ne drži v splošnem. V naslednjem poglavju si bomo ogledali primer, kjer je $Z(G)$ strogo večji od $M(G)$. V delu [9] so Kalinowski in ostali študirali grafe, ki so jih generirali tako, da med vozlišči obstaja povezava z verjetnostjo p, neodvisno od drugih povezvav. Za take grafe se izkaže, da sta parametra $M(G)$ in $Z(G)$ v večini primerov celo daleč narazen.

Na primeru 4.2 smo se lahko prepričali, da v ciklu tako vrstni red prisiljevanj kot tudi najmanjša množica prisilnih ničel nista enolično določena. Ponuja se vprašanje, ali obstaja graf G z enolično najmanjšo množico prisilnih ničel. Ali morda obstaja vsaj vozlišče $v \in V(G)$, ki pripada vsaki najmanjši množici prisilnih ničel? V naslednjih trditvah bomo pokazali, da je za netrivialne grafe, odgovor na obe vprašanji ne.

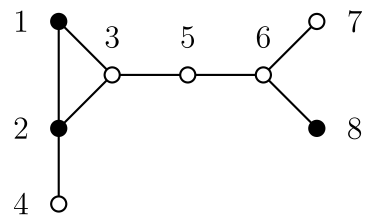
Še prej pa definirajmo nekaj novih pojmov, s katerimi opisujemo proces barvanja grafov. Tako so jih definirali F. Barioli in drugi v delu [1].

Definicija 4.5. Naj bo Z množica prisilnih ničel grafa G.

- Po pravilu barvanja obarvamo graf G. Kronološki seznam prisiljevanj je vrstni red prisiljevanj pri obarvanju grafa G.
- *Veriga prisiljevanj* za kronološki seznam prisiljevanj je podzaporedje vozlišč $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, kjer za vsak $i = 1, \ldots, k-1$ velja $v_i \to v_{i+1}$.
- *Optimalna veriga prisiljevanj* je veriga prisiljevanj, za katero velja, da ni podzaporedje kakšne druge verige prisiljevanj.

Oglejmo si graf, na katerem lahko ilustriramo zgornje pojme:

Primer 4.6. Poučen zgled: graf na 8 vozliščih:



Slika 4. Poučni graf

Določimo zgoraj definirane pojme za graf na sliki 4. Za množico prisilnih ničel grafa izberimo vozlišča $\{1, 2, 8\}$. Tedaj je eden od kronoloških seznamov prisiljevanj $\{1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 5, 5 \to 6, 6 \to 7\}$. Za ta kronološki seznam sedaj zapišimo množico optimalnih verig prisiljevanj: $\{(1, 3, 5, 6, 7), (2, 4), (8)\}$.

Opomba: Seveda bi lahko za kronološki seznam prisiljevanj vzeli tudi $\{1 \to 3, 3 \to 5, 8 \to 6, 6 \to 7, 2 \to 4\}$ in dobili množico optimalnih verig prisiljevanj $\{(1, 3, 5), (8, 6, 7), (2, 4)\}$. $\diamondsuit$

Definicija 4.7. Naj bo Z množica prisilnih ničel grafa G. *Obrat* množice Z je množica zadnjih vozlišč v optimalnih verigah prisiljevanj za nek kronološki seznam prisiljevanj.

Vsako vozlišče lahko prisili v spremembo barve največ eno drugo vozlišče, prav tako pa je lahko prisiljeno le od največ enega drugega vozlišča. Zato so optimalne verige prisiljevanj med seboj disjunktne. Opazimo še, da so elementi Z začetna vozlišča v optimalnih verigah prisiljevanj. Torej je moč množice Z enaka moči obrata množice Z.

Opomba: Obrat množice Z v primeru 4.6 in za naš konkreten kronološki seznam, je množica $\{7, 4, 8\}$. Opazimo, da je tudi ta množica množica prisilnih ničel grafa za graf na sliki 4. Pokazali bomo, da to ni naključje, temveč da so obrati množice prisilnih ničel tudi sami množica prisilnih ničel.

V dokazih naslednjih trditev nam bo v pomoč naslednji razmislek. Naj bo Z množica prisilnih ničel grafa G, $\mathcal{F}$ poljuben kronološki seznam prisiljevanj in U množica optimalnih verig prisiljevanj za $\mathcal{F}$. Potem vozlišče $v \in V(G)$ v $\mathcal{F}$ ne opravi nobenega prisiljevanja natanko tedaj, ko se znajde na koncu katere od optimalnih verig prisiljevanj iz U. Taka vozlišča sestavljajo obrat množice Z.

Trditev 4.8. *Naj bo Z množica prisilnih ničel grafa G. Potem je tudi katerikoli obrat množice Z množica prisilnih ničel grafa G.*

Dokaz. Zapišimo kronološki seznam prisiljevanj v obratnem vrstnem redu, pri tem pa obrnimo vlogi vozlišč v vsakem prisiljevanju. Novi seznam poimenujmo *obratni seznam*. Z W označimo obrat množice Z za kronološki seznam prisiljevanj. Pokazali bomo, da W po pravilu barvanja obarva celoten graf in da je obratni seznam veljavna možnost za obarvanje grafa. Oglejmo si prvo prisiljevanje iz obratnega seznama, $u \to v$. Ko je v prvotnem seznamu vozlišče v prisililo vozlišče u, so vsi sosedi vozlišča u imeli belega soseda (t.j. vozlišče u), torej niso pred tem prisilili nobenega drugega vozlišča. Torej so se znašli na koncu verig prisiljevanj in so zato elementi množice W. Sledi, da je $u \to v$ veljavno prisiljevanje za množico W. Z indukcijo na $|G|$ se lahko prepričamo, da to velja za vsa prisiljevanja obratnega seznama. □

Posledica 4.9. *Povezan graf na več kot dveh vozliščih nima enolične množice prisilnih ničel grafa.*

Pokažimo še, da ne obstaja nobeno vozlišče v v grafu G, ki bi bil element vsake množice prisilnih ničel grafa G (za povezane grafe na več kot enem vozlišču). V pomoč pri dokazu nam bo naslednja lema.

Lema 4.10. *Naj bo G povezan graf na več kot enem vozlišču in naj bo Z minimalna množica prisilnih ničel grafa G. Potem ima vsak $z \in Z$ sosednje vozlišče $w \notin Z$.*

Dokaz. Predpostavimo, da obstaja takšno vozlišče $z \in Z$, da je vsak njegov sosed v tudi element množice Z. Ker z ne more prisiliti nobenega vozlišča, je z prav tako element obrata množice Z, pišimo $z \in W$. Ker je vsak sosed $v \in Z$, ne bo nobeno vozlišče v v obratnem seznamu, definiranem tako kot v dokazu trditve 4.8, prisililo nobenega drugega vozlišča. Ko se vsa vozlišča razen vozlišča z obarvajo črno, bi lahko neko sosednje vozlišče v prisililo, da se z obarva črno. Torej je $W \setminus \{z\}$ tudi množica prisilnih ničel grafa G. Prišli smo do protislovja s predpostavko, da je Z minimalna množica prisilnih ničel grafa G. Pokazali smo namreč, da obstaja manjša množica prisilnih ničel grafa. □

Trditev 4.11. *Naj bo G povezan graf na več kot enem vozlišču. Potem je*

$$\bigcap_{Z \in \Psi(G)} Z = \emptyset,$$

kjer je $\Psi(G)$ množica vseh minimalnih množic prisilnih ničel grafa G.

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo torej, da obstaja $v \in \cap_{Z \in \Psi(G)} Z$. V posebnem je v element vsake množice Z in njenega obrata W. To pomeni, da vsebuje neka optimalna veriga le vozlišče v, saj more biti to vozlišče tako na začetku kot na koncu neke optimalne verige prisiljevanj. Vozlišče v torej ne prisili nobenega drugega vozlišča.

Naj bo Z množica prisilnih ničel grafa G. Recimo da obstaja vozlišče $u \sim v$, ki prisili neko drugo vozlišče w. Naj bo $u \to w$ prvo prisiljevanje v katerem sosed vozlišča v prisili neko drugo vozlišče. Potem je tudi $Z \setminus \{v\} \cup \{w\}$ množica prisilnih ničel grafa G. Eden od možnih seznamov prisiljevanja je enak prvotnemu, le da $u \to w$ zamenjamo z $u \to v$.

Če takšno vozlišče u ne obstaja, potem zamenjamo množico Z z njenim obratom. Po lemi 4.10 ima vozlišče v belega soseda u, ki bo v obratu prisililo neko drugo vozlišče. Po istem premisleku je $Z \setminus \{v\} \cup \{w\}$ množica prisilnih ničel grafa. Prišli smo v protislovje s predpostavko, da je v element vsake množice prisilnih ničel grafa. □

4.1. **Zgleda družin z znanim parametrom $Z(G)$.** Za izračun parametra $Z(G)$ obstaja nekaj algoritmov, vendar pa so ti izjemno časovno zahtevni in odpovejo pri grafih na velikem številu vozlišč. Zato parameter zopet preučujemo po družinah grafov. Najprej si oglejmo $Z(P_n)$ za pot na n vozliščih.

Trditev 4.12. *Naj bo G graf. Potem je $Z(G) = 1$ natanko tedaj, ko je $G = P_n$ za nek $n \geq 1$. Z drugimi besedami: poti in samo poti imajo $Z(G) = 1$.*

Dokaz. Očitno za pot P_n velja $Z(P_n) = 1$, saj je katerokoli vozlišče s stopnjo 1 množica prisilnih ničel grafa.

Vzemimo sedaj graf H, ki ni pot. Potem je H cikel, ali pa v njem obstaja vozlišče u, stopnje vsaj 3. Pokazali bomo, da eno samo vozlišče ne more v celoti obarvati takšnega grafa.

Če je H cikel, potem je $Z(H) = 2$, kar smo videli v primeru 4.2. Za graf, ki ni cikel, se barvanje v grafu z enim samim črnim vozliščem lahko prične samo, če ima to vozlišče stopnjo 1. Zamislimo si sedaj množico vseh potencialnih kronoloških seznamov prisiljevanj, ki se začnejo v tem vozlišču. V vsakem od njih se barvanje konča, potem ko prvič obarvamo vozlišče s stopnjo vsaj 3. Tedaj ima namreč vozlišče vsaj še 2 neobarvana sosednja vozlišča. Sklepamo torej, da je $Z(H) \geq 2$. □

Oglejmo si še, kako se parameter $Z(G)$ obnaša v kartezičnem produktu grafov.

Trditev 4.13. *Za vsak par grafov G in H velja:*

$$Z(G \square H) \leq \min\{Z(G)|H|, Z(H)|G|\}.$$

Dokaz. Vzemimo množico prisilnih ničel grafa G. Če vzamemo isto množico prisilnih ničel grafa G v vsaki kopiji grafa G v kartezičnem produktu, bo novonastala množica predstavljala množico prisilnih ničel grafa za kartezični produkt $G \square H$. Vozlišča v kartezičnem produktu so namreč v kopijah grafa sosednja le svojim analognim vozliščem. Torej $Z(G \square H) \leq Z(G)|H|$. Simetrično za H: $Z(G \square H) \leq Z(H)|G|$. □

Posledica 4.14. $Z(Q_n) \leq 2^{n-1}$.

Dokaz. Hiperkocko Q_n lahko zapišemo kot kartezični produkt $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$ za $n \geq 3, Q_2 = K_2$. Upoštevamo še, da je $Z(K_2) = 1$ in z indukcijo dobimo rezultat: $Z(Q_n) \leq 2^{n-1}$. □

Sedaj se spomnimo primera 3.3, kjer smo pokazali, da je $M(Q_n) \geq 2^{n-1}$. Po upoštevanju izreka 4.4 sledi, da je

$$2^{n-1} \leq M(Q_n) \leq Z(Q_n) \leq 2^{n-1}.$$

Zaključimo torej: $M(Q_n) = Z(Q_n) = 2^{n-1}$.

4.2. **Prisilne ničle v grafih s prereznimi vozlišči.** Tako kot pri poglavju o največji večkratnosti lastnih vrednosti si bomo ogledali nekatere lastnosti grafov, ki vsebujejo prerezna vozlišča. Pokazali bomo, da lahko tudi parameter $Z(G)$ v takšnih grafih računamo po komponentah, kar nam pride še posebej prav, ko graf razpade na majhne dele (v primerjavi s prvotnim grafom G). Podobno kot širitev ranga grafa G definiramo *ničelno širitev grafa* G, ki pove, za koliko se spremeni moč najmanjše množice prisilnih ničel grafa, če grafu odstranimo neko vozlišče.

Definicija 4.15. Naj bo G graf in v vozlišče v njem. *Ničelna širitev* grafa G za vozlišče v je

$$z_v(G) = Z(G) - Z(G - v).$$

Enakost iz definicije 4.15 obrnimo in zapišimo kot $Z(G) = z_v(G) + Z(G - v)$. Naj bo v prerezno vozlišče grafa G. Potem je $G - v$ nepovezan graf in velja $Z(G - v) = \sum\limits_{i=1}^{h} Z(G_i)$, kjer je h število komponent, ki sestavlja graf $G - v$, G_i pa komponente razpadlega grafa. Če uspemo izpeljati formulo za ničelno širitev grafa G za prerezno vozlišče v, bomo lahko računali število prisilnih ničel grafa po komponentah. Preden pa jo lahko izpeljemo, potrebujemo še nekaj pomožnih lem, ki nam bodo v pomoč pri dokazu trditve 4.23 za $z_v(G)$.

Lema 4.16. *Za vsak graf G in vozlišče $v \in V(G)$ velja*

$$-1 \leq z_v(G) \leq 1.$$

Dokaz. Če je Z minimalna množica prisilnih ničel grafa $G - v$, potem je $Z \cup \{v\}$ množica prisilnih ničel grafa G. Torej je $Z(G) \leq Z(G - v) + 1$ in $z_v(G) \leq 1$.

Naj bo sedaj Z minimalna množica prisilnih ničel grafa G. Vzemimo nek kronološki seznam prisiljevanj $\mathcal{F}$. Če se v $\mathcal{F}$ pojavi prisiljevanje $v \to u$ za neko vozlišče u, potem je $Z \cup \{u\}$ množica prisilnih ničel grafa $G - v$ s seznamom prisiljevanj $\mathcal{F}$, le da temu odstranimo prisiljevanje $v \to u$. V nasprotnem primeru, če tako vozlišče u ne obstaja, potem je kar Z množica prisilnih ničel grafa $G - v$ s kronološkim seznamom prisiljevanj $\mathcal{F}$. Torej je $Z(G - v) \leq Z(G) + 1$ in $z_v(G) \geq -1$. □

Lema 4.17. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$ prerezno vozlišče grafa G. Naj bodo $W_i \subseteq V(G)$ za $i = 1 \ldots, h$ vozlišča i-te komponente grafa $G - v$ in naj bo G_i podgraf, induciran z $\{v\} \cup W_i$. Potem velja*

$$Z(G) \geq \sum_{i=1}^{h} Z(G_i) - h + 1.$$

Dokaz. Naj bo Z minimalna množica prisilnih ničel grafa G, za katero $v \notin Z$. Potem obstaja vozlišče u, ki prisili v. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $u \in G_1$. Za G_1 je potem $Z \cap V(G_1)$ množica prisilnih ničel in zato $Z(G_1) \leq |Z \cap V(G_1)|$. Za $i = 2, \ldots, h$ pa je $(Z \cap V(G_i)) \cup \{v\}$ množica prisilnih ničel grafa G_i in zato $Z(G_i) \leq |Z \cap V(G_i)| + 1$. Torej:

$$\sum_{i=1}^{h} Z(G_i) \leq |Z \cap V(G_1)| + \sum_{i=2}^{h} (|Z \cap V(G_i)| + 1) = \sum_{i=1}^{h} |Z \cap V(G_i)| + h - 1 =$$
$$= |Z| + h - 1 = Z(G) + h - 1.$$

□

Lema 4.18. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$ prerezno vozlišče grafa G. Naj bodo $W_i \subseteq V(G)$ za $i = 1, \ldots, h$ vozlišča i-te komponente grafa $G - v$ in naj bo G_i podgraf, induciran z $\{v\} \cup W_i$. Potem je*

(1) $z_v(G) \geq \sum\limits_{i=1}^{h} z_v(G_i) - h + 1$,

(2) $Z(G) \leq \min\limits_{1 \leq j \leq h} \{Z(G_j) + \sum\limits_{i=1, i \neq j}^{h} Z(G_i - v)\}$,

(3) $z_v(G) \leq \min\limits_{1 \leq j \leq h} \{z_v(G_j)\}$.

Dokaz. (1) Po lemi 4.17 je $Z(G) \geq \sum\limits_{i=1}^{h} Z(G_i) - h + 1$. Ker pa je v prerezno vozlišče grafa G, je $Z(G - v) = \sum\limits_{i=1}^{h} Z(G_i - v)$. Ko to enakost odštejemo prvi neenakosti dobimo $Z(G) - Z(G - v) \geq \sum\limits_{i=1}^{h} Z(G_i) - h + 1 - \sum\limits_{i=1}^{h} Z(G_i - v)$ in od tod $z_v(G) \geq \sum\limits_{i=1}^{h} z_v(G_i) - h + 1$.

(2) Izberimo poljuben j, $1 \leq j \leq h$. Naj bo Z_j minimalna množica prisilnih ničel grafa G_j. Za $i \neq j$ naj bodo Z_i minimalne množice prisilnih ničel grafov $G_i - v$. Definiramo $Z = \cup_{i=1}^{h} Z_i$. Tedaj je $Z \cap V(G_j)$ množica prisilnih ničel grafa G_j in za $i \neq j$ je $(Z \cap V(G_i)) \cup \{v\}$ množica prisilnih ničel grafov G_i. Razmislimo še, da za množico prisilnih ničel $(Z \cap V(G_i)) \cup \{v\}$ obstaja kronološki seznam prisiljevanj, v katerem vozlišče v za obarvanje grafa G_i ne opravi nobenega prisiljevanja.

Recimo da je $v \in Z$. Potem lahko obarvamo vse podgrafe $G_i - v, i \neq j$ in nato še G_j. Če pa $v \notin Z$, potem začnemo z barvanjem v grafu G_j. Obarvamo vključno z vozliščem v. Nato lahko obarvamo vsa vozlišča v podgrafih $G_i - v$, $i \neq j$. Če graf G_j še ni v celoti obarvan črno, potem lahko nadaljujemo z barvanjem v grafu G_j in obarvamo celoten graf. Tako smo pokazali, da je Z množica prisilnih ničel grafa G.

Ker je j poljuben, sledi, da je $Z(G) \leq \min\limits_{1 \leq j \leq h} \{Z(G_j) + \sum\limits_{i=1, i \neq j}^{h} Z(G_i - v)\}$.

(3) Po prejšnji točki je $Z(G) \leq \min\limits_{1 \leq j \leq h} \{Z(G_j) + \sum\limits_{i=1, i \neq j}^{h} Z(G_i - v)\}$. Ker je v prerezno vozlišče, je $Z(G - v) = \sum\limits_{i=1}^{h} Z(G_i - v)$. Ko enakost odštejemo prvi neenakosti, dobimo

$$z_v(G) = Z(G) - Z(G - v) \leq \min_{1 \leq j \leq h} \{Z(G_j) + \sum_{i=1, i \neq j}^{h} Z(G_i - v)\} - \sum_{i=1}^{h} Z(G_i - v) =$$
$$= \min_{1 \leq j \leq h} \{Z(G_j) - Z(G_j - v)\} = \min_{1 \leq j \leq h} \{z_v(G_j)\}.$$

□

Lema 4.19. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$ prerezno vozlišče grafa G. Naj bodo $W_i \subseteq V(G)$ za $i = 1, \ldots, h$ vozlišča i-te komponente grafa $G - v$ in naj bo G_i podgraf,* *inducirani z $\{v\} \cup W_i$. Naj bo Z množica prisilnih ničel grafa G. Če je $z_v(G_j) = 1$, ali $z_v(G_j) = 0$ za kakšen j, $1 \leq j \leq h$ in vozlišče v ni v nobeni minimalni množici prisilnih ničel grafa G_j, potem je $|Z \cap V(G_j - v)| \geq Z(G_j - v)$.*

Dokaz. Naj bo Z množica prisilnih ničel grafa G. Potem je $(Z \cap V(G_j - v)) \cup \{v\}$ množica prisilnih ničel grafa G_j in zato $Z(G_j) \leq |Z \cap V(G_j - v)| + 1$. Naj bo $z_v(G_j) = 1$, Potem je $|Z \cap V(G_j - v)| \geq Z(G_j) - 1 = z_v(G_j) + Z(G_j - v) - 1 = Z(G_j - v)$.

Naj bo sedaj $z_v(G_j) = 0$ in naj vozlišče v ne bo element nobene minimalne množice prisilnih ničel grafa G_j. Tedaj je $Z(G_j) \leq |Z \cap V(G_j - v) \cup \{v\}|$. Tu bi veljala enakost le tedaj, ko bi bil v element kakšne minimalne množice prisilnih ničel. Po predpostavki pa temu ni tako in zato $Z(G_j) < |Z \cap V(G_j - v) \cup \{v\}|$, torej $|Z \cap V(G_j - v)| \geq Z(G_j) = Z(G_j - v)$ □

Lema 4.20. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$. Potem obstaja optimalna veriga prisiljevanj v grafu G, ki vsebuje samo vozlišče v, natanko tedaj, ko je $z_v(G) = 1$.*

Dokaz. Naj bo Z minimalna množica prisilnih ničel grafa G, v kateri obstaja optimalna veriga prisiljevanj, ki vsebuje samo vozlišče v. Očitno je potem $Z \setminus \{v\}$ množica prisilnih ničel grafa $G - v$, saj v ne opravi nobenega prisiljevanja. Zato je $Z(G - v) \leq Z(G) - 1$, torej $z_v(G) \geq 1$. Ker pa je po lemi 4.16 $z_v(G) \leq 1$, sledi $z_v(G) = 1$.

Naj bo sedaj G graf in $v \in V(G)$ takšno vozlišče, da je $z_v(G) = 1$. Naj bo Z minimalna množica prisilnih ničel grafa $G - v$. Definirajmo $Z' = Z \cup \{v\}$. Tedaj je Z' množica prisilnih ničel grafa G. Ker pa je $z_v(G) = 1$, zaključimo, da je Z' minimalna množica prisilnih ničel grafa G. Tu vozlišču v ni treba opraviti nobenega prisiljevanja in je zato edino vozlišče v neki optimalni verigi prisiljevanj. □

Definicija 4.21. Naj bo G graf in $v \in V(G)$. Graf $G - v$ je optimalno razširljiv na vozlišče v, če obstaja množica optimalnih verig prisiljevanj grafa G, ki se od optimalne množice verig prisiljevanj grafa $G - v$ razlikuje le tako, da je ena od optimalnih verig grafa G optimalna veriga grafa $G - v$ z vozliščem v na koncu.

Lema 4.22. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$. Graf $G - v$ je optimalno razširljiv na vozlišče v natanko tedaj, ko je $z_v(G) = 0$ in je v element neke minimalne množice prisilnih ničel grafa G.*

Dokaz. Naj bo $G-v$ optimalno razširljiv na vozlišče v. Potem sta množici optimalnih verig prisiljevanj G in $G - v$ enakih moči. Ker pa je moč množice optimalnih verig prisiljevanj za poljuben graf H ravno število prisilnih ničel grafa H, je $z_v(G) = Z(G) - Z(G - v) = 0$. Vemo, da mora obstajati optimalna veriga prisiljevanj grafa G, ki se od optimalne verige v grafu $G - v$ razlikuje le tako, da ima vozlišče v na koncu. Torej je vozlišče v element obrata minimalne množice prisilnih ničel grafa G in je zato element minimalne množice prisilnih ničel.

Naj bo sedaj $z_v(G) = 0$ in naj bo v element minimalne množice prisilnih ničel Z grafa G. Izberimo množico optimalnih verig prisiljevanj za graf G. Vemo, da mora vozlišče v prisiliti neko drugo vozlišče, sicer je po lemi 4.20 $z_v(G) = 1$, kar je v protislovju z našo predpostavko. Oglejmo si sedaj obrat množice Z. Očitno obstaja optimalna veriga prisiljevanja, kateri lahko na konec pripnemo še vozlišče v in zato je $G - v$ optimalno razširljiv na vozlišče v. □

Končno smo pripravljeni, da podamo trditev, v kateri se nahaja formula za izračun parametra $Z(G)$ za grafe s prereznimi vozlišči.

Trditev 4.23. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$ prerezno vozlišče grafa G. Naj bodo $W_i \subseteq V(G)$ za $i = 1, \dots, h$ vozlišča i-te komponente grafa $G - v$ in naj bo G_i podgraf, induciran z $\{v\} \cup W_i$. Z m označimo $\min_{1 \leq j \leq h} \{z_v(G_j)\}$, s t pa število povezanih komponent grafa $G - v$, ki so optimalno razširljive na vozlišče v. Potem je*

$$z_v(G) = \begin{cases} 1, & \text{če } m = 1, \\ 0, & \text{če } m = 0 \text{ in } t \leq 1 \ , \\ -1, & \text{če } m = 0 \text{ in } t \geq 2, \text{ ali } m = -1. \end{cases} \tag{6}$$

Dokaz. Obravnavali bomo vsak primer posebej.

Naj bo $m = 1$. Tedaj je $z_v(G_i) = 1$ za vsak $i \leq h$. Potem iz leme 4.18 (1) dobimo $z_v(G) \geq h - h + 1 = 1$, iz leme 4.16 pa $z_v(G) \leq 1$. Torej mora biti $z_v(G) = 1$.

Naj bo $m = -1$. Potem iz leme 4.18 (3) dobimo $z_v(G) \leq -1$, iz leme 4.16 pa $z_v(G) \geq -1$. Torej mora biti $z_v(G) = -1$.

Naj bo sedaj $m = 0$ in $t \geq 2$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da sta $G_1 - v$ in $G_2 - v$ optimalno razširljiva na vozlišče v. Po lemi 4.22 je v element neke minimalne množice prisilnih ničel grafa G_1 (označimo jo Z_1) in $z_v(G_1) = 0$. To hkrati pomeni, da mora vozlišče v prisiliti neko drugo vozlišče, saj bi v nasprotnem primeru po lemi 4.20 bil $z_v(G_1) = 1$ in prišli bi do protislovja. Sedaj vzemimo obrat množice Z_1 in ga označimo Z_1'. Po trditvi 4.8 je tudi obrat minimalne množice prisilnih ničel minimalna množica prisilnih ničel grafa. Ker je $v \in Z_1$ in v prisili neko drugo vozlišče, mora veljati $v \notin Z_1'$ in zato obstaja optimalna veriga prisiljevanj, v kateri v ne opravi prisiljevanja v grafu G_1.

Naj bo sedaj Z_2 minimalna množica prisilnih ničel grafa G_2 in $v \in Z_2$. Takšna množica obstaja po istem premisleku kot v prejšnjem odstavku. Za $i = 3, \dots, h$ pa naj bodo Z_i minimalne množice prisilnih ničel grafov $G_i - v$. Sedaj definiramo množico

$$Z = Z_1' \cup (Z_2 \setminus \{v\}) \cup_{i=3}^{h} Z_i.$$

Množica vozlišč $Z \cap V(G_1)$ lahko obarva celoten graf G_1, ne da bi vozlišče v prisililo kakšno drugo vozlišče (to je namreč ravno obrat Z_1'). Prav tako lahko za $i = 3, \dots, h$, $Z \cap V(G_i)$ obarva grafe $G_i - v$, ne da bi vozlišče v prisililo kakšno drugo vozlišče. Končno lahko $(Z \cap V(G_2)) \cup \{v\}$ obarva graf $G_2 - v$, saj do sedaj vozlišče v ni opravilo nobenega prisiljevanja. Torej je Z množica prisilnih ničel grafa G in velja $Z(G) \leq |Z| = \sum_{i=1}^{h} |Z_i| - 1 = \sum_{i=1}^{h} Z(G_i - v) - 1$. Upoštevamo še, da je v prerezno vozlišče in je zato $\sum_{i=1}^{h} Z(G_i - v) = Z(G - v)$. Potem je $Z(G) \leq Z(G - v) - 1$, oziroma $z_v(G) \leq -1$. Ob upoštevanju leme 4.16 sklepamo, da je $z_v(G) = -1$.

Sedaj obravnavajmo še zadnji primer, ko je $m = 0$ in $t \leq 1$. Iz leme 4.18 (3) neposredno sledi, da je $z_v(G) \leq 0$. Želimo pokazati, da velja tudi $z_v(G) \geq 0$. Naj bo Z minimalna množica prisilnih ničel grafa G, za katero $v \notin Z$. Potem je $Z(G) = |Z| = \sum_{i=1}^{h} |Z \cap V(G_j - v)|$. Radi bi videli, da velja

$$Z(G) - Z(G - v) = \sum_{i=1}^{h} |Z \cap V(G_j - v)| - \sum_{i=1}^{h} (G_i - v) \geq 0.$$

Torej je dovolj pokazati neenakost

$$\sum_{i=1}^{h} |Z \cap V(G_j - v)| \geq \sum_{i=1}^{h} Z(G_i - v). \tag{7}$$

Ker je $t \leq 1$ po lemi 4.22 sledi, da obstaja največ en $i, 1 \leq i \leq j$, za katerega je $z_v(G_i) = 0$ in je vozlišče v v kakšni minimalni množici prisilnih ničel grafa G_i. Brez škode za splošnost torej predpostavimo, da je za $i = 2, \ldots, h$, $z_v(G_i) = 1$, ali pa je $z_v(G_i) = 0$, a v ni v nobeni minimalni množici prisilnih ničel grafa G_i. Po lemi 4.19 je $|Z \cap V(G_j - v)| \geq Z(G_i - v)$ za $i = 2, \ldots, h$. Če je $|Z \cap V(G_1 - v)| \geq Z(G_1 - v)$, potem neenakost (7) očitno drži.

Predpostavimo torej, da je $|Z \cap V(G_1 - v)| \leq Z(G_1 - v) - 1$. Potem $Z \cap V(G_1 - v)$ po definiciji parametra Z ni množica prisilnih ničel grafa $G_1 - v$. Po drugi strani pa $(Z \cap V(G_1 - v)) \cup \{v\}$ mora biti množica prisilnih ničel grafa G_1. Oglejmo si sedaj neenakost

$$\begin{aligned} Z(G_1 - v) &= Z(G_1) - z_v(G_1) \leq Z(G_1) \leq |(Z \cap V(G_1 - v)) \cup \{v\}| = \\ &= |Z \cap V(G_1 - v)| + 1 \leq \\ &\leq Z(G_1 - v). \end{aligned}$$

Tu smo pri prvem neenačaju upoštevali, da je $z_v(G_1) \geq 0$, pri zadnjem pa predpostavko $|Z \cap V(G_1 - v)| \leq Z(G_1 - v) - 1$. Iz neenakosti potem sledi, da je $|Z \cap V(G_1 - v)| = Z(G_1 - v) - 1$. Prav tako morata obstajati $j \neq 1, u \in V(G_j - v)$ in $w \in V(G_1 - v)$, za katera obstaja zaporedje prisiljevanj $u \to v \to w$. To pomeni, da je u na koncu prisiljevalne verige v $G_j - v$. Ker pa $G_j - v$ ni optimalno razširljiv na vozlišče v, je $|Z \cap V(G_j - v)| \geq Z(G_j - v) + 1$. Posledično je $|Z \cap V(G_1 - v)| + |Z \cap V(G_j - v)| \geq Z(G_1 - v) - 1 + Z(G_j - v) + 1 = Z(G_1 - v) + Z(G_j - v)$. Za vse ostale podgrafe G_i, $i \neq 1, j$ uporabimo lemo 4.19 in tako pokažemo, da tudi v tem primeru neenakost (7) drži. $\square$

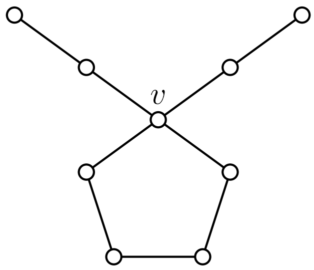
S tem smo dokazali vse, kar potrebujemo, da iskanje števila prisilnih ničel v grafu s prereznimi vozlišči prevedemo na iskanje le-tega po komponentah. Za lepšo preglednost in lažjo uporabo zapišimo glavno ugotovitev še enkrat kot posledico trditve 4.23.

Posledica 4.24. *Naj bo G graf in $v \in V(G)$ prerezno vozlišče v njem. Naj bodo $W_i \subseteq V(G)$ za $i = 1, \ldots, h$ vozlišča i-te komponente grafa $G - v$ in naj bo G_i podgraf, induciran z $\{v\} \cup W_i$. Z m označimo $\min_{1 \leq j \leq h} \{z_v(G_j)\}$, s t pa število povezanih komponent grafa $G - v$, ki so optimalno razširljive na vozlišče v. Potem je*

$$Z(G) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{h} Z(G_i - v) + 1, & \text{če } m = 1, \\ \sum_{i=1}^{h} Z(G_i - v), & \text{če } m = 0 \text{ in } t \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{h} Z(G_i - v) - 1, & \text{če } m = 0 \text{ in } t \geq 2, \text{ ali } m = -1. \end{cases},$$

Uporabimo to posledico še na konkretnem grafu.

Primer 4.25. Graf mašnica.



SLIKA 5. Graf mašnica

S pomočjo posledice 4.24 izračunajmo parameter $Z(G)$ za graf mašnico na sliki 5. Če odstranimo vozlišče v, potem graf razpade na 3 komponente in sicer na dve poti P_2 in eno pot P_4. Označimo z W_1 in W_2 vozlišča vsake od poti P_2 in z W_3 vozlišča poti P_4. Z G_i označimo podgrafe, inducirane z $W_i \cup \{v\}$, $i = 1, 2, 3$. V našem grafu sta G_1 in G_2 poti P_3, G_3 pa cikel C_5.

Poračunajmo najprej ničelno širitev grafov G_1 in G_2 za vozlišče v:

$$Z(G_1) = Z(G_1 - v) = Z(P_n) = 1$$

in zato $z_v(G_1) = 0$. Za graf G_2 je izračun popolnoma enak. Za G_3 pa dobimo:

$$Z(G_3) = Z(C_5) = 2$$

in

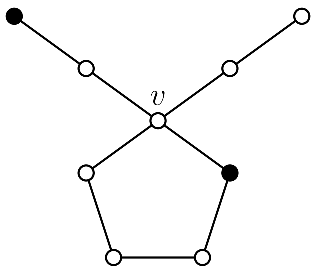
$$Z(G_3 - v) = Z(P_4) = 1.$$

Torej je $z_v(G_3) = 1$. Da bomo lahko uporabili posledico 4.24, poračunajmo še $m = \min\limits_{1 \leq j \leq 3} \{z_v(G_j)\} = \min\{0, 0, 1\} = 0$ in poiščimo število t povezanih komponent grafa $G - v$, ki so optimalno razširljivi na vozlišče v. Očitno je, da sta obe poti P_2 optimalno razširljivi na vozlišče v (dobimo pot P_3) in zato je $t \geq 2$.

Sedaj lahko uporabimo posledico 4.24 (znašli smo se v tretji možnosti: $m = 0$ in $t \geq 2$) ter izračunamo

$$Z(G) = \sum_{i=1}^{3} Z(G_i - v) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Res, z množico 2 črnih vozlišč, kot na sliki 6, lahko obarvamo celoten graf.



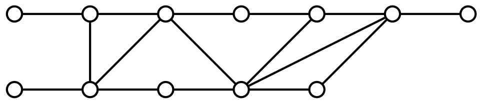
SLIKA 6. Minimalna množica prisilnih ničel grafa mašnice

$\diamondsuit$

5. Drugi zgledi

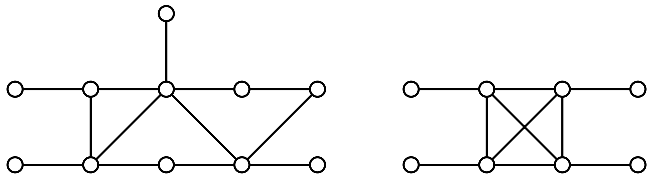
5.1. **Grafi na vzporednih poteh.** V tem razdelku si bomo ogledali grafe na vzporednih poteh. Dokazali bomo, da je za vsak graf G na dveh poteh $M(G) = Z(G) = 2$.

Definicija 5.1. Graf G je graf na vzporednih poteh, če obstajata dve disjunktni inducirani poti grafa G, ki pokrijeta vsa vozlišča grafa G in za kateri velja, da je vse povezave med potema mogoče narisati tako, da so te ravne in se ne prekrižajo.



Slika 7. Graf na vzporednih poteh

Graf na sliki 7 je v skladu z definicijo 5.1 graf na vzporednih poteh. Po drugi strani, grafa na sliki 8 nista grafa na vzporednih poteh:



Slika 8. Grafa, ki nista grafa na vzporednih poteh

Opomba: Enostavne poti ne štejemo med grafe na vzporednih poteh.

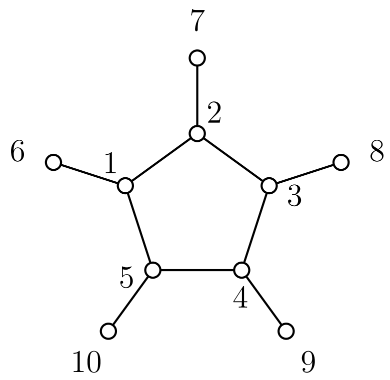
Trditev 5.2. *Naj bo G graf na vzporednih poteh. Potem je $M(G) = Z(G) = 2$*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da je $Z(G) = 2$. Ostalo sledi iz dejstva, da je $M(H) \leq Z(H)$ za vsak graf H in da G ni pot.

Zamislimo si sliko grafa G v ravnini tako, da sta obe poti, ki pokrijeta celoten graf, narisani vodoravno in z leve proti desni tako, da se nobeni dve povezavi med vozlišči ne prekrižata. Naj bo Z sestavljena iz obeh skrajnih levih vozlišč poti. Po zgornji poti lahko vozlišča prisiljujejo svojega soseda, dokler neko vozlišče u nima enega ali več belih sosednjih vozlišč na spodnji poti. Vozlišče u še lahko obarvamo črno, potem pa se barvanje po zgornji poti ustavi. Ker se povezave med vozlišči ne križajo, lahko nadaljujemo z barvanjem po spodnji poti z začetkom v skrajno levem vozlišču, dokler se barvanje po spodnji poti ne ustavi. V tem procesu bomo obarvali tudi vse sosede vozlišča u. Tako kot na začetku lahko sedaj zopet barvamo po zgornji poti, dokler neko novo vozlišče iz zgornje poti ne bo imelo belega soseda na spodnji poti. Na ta način lahko obarvamo celoten graf in Z je množica prisilnih ničel grafa. Torej je $Z(G) \leq 2$, ker pa G ni pot, iz 4.12 sledi, da je $Z(G) = 2$. □

5.2. **Primer grafa, kjer je $Z(G) > M(G)$.** Za večino družin grafov, za katere poznamo parameter $M(G)$, je $Z(G) = M(G)$. To med drugim velja za vse grafe G na manj kot sedmih vozliščih [6]. Spodnji primer korone $C_5 \circ K_1$, je primer grafa, kjer je parameter $Z(G)$ strogo večji od parametera $M(G)$.

Primer 5.3. Korona $C_5 \circ K_1$:



SLIKA 9. $C_5 \circ K_1$

Trditev 5.4. *Za graf $G = C_5 \circ K_1$ velja:*

(i) $M(G) = 2$
(ii) $Z(G) = 3$

Dokaz. Za dokaz točke (i) si bomo pomagali s posledico 3.10 o prereznih vozliščih. Opazimo, da so na zgornjem grafu vozlišča $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ prerezna vozlišča. Ko z grafa G odstranimo vozlišče 1, graf razpade na množici vozlišč $W_1 = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ in $W_2 = \{6\}$. Naj bo G_1 graf, induciran z $\{1\} \cup W_1$ in G_2 graf, induciran z $\{1\} \cup W_2$. Ker je $\mathrm{mr}(G_2) = \mathrm{mr}(K_2) = \mathrm{mr}(K_1) = \mathrm{mr}(G_1 - v) = 1$, je $r_1(G_2) = 0$. Po posledici 3.10, je $\mathrm{mr}(G) = \mathrm{mr}(G_1) + \mathrm{mr}(G_2) = \mathrm{mr}(G_1) + 1$.

Sedaj iščemo $\mathrm{mr}(G_1)$. To je graf G, brez vozlišča 6. Zopet mu lahko odstranimo eno od prereznih točk grafa in po enakem razmisleku kot prej vidimo, da na vsakem koraku odpade en list, preostali graf pa ima parameter mr manjši za 1. Tako dobimo enakost $\mathrm{mr}(G) = \mathrm{mr}(C_5) + 5$. Ker pa iz primera 4.2 vemo, da za cikle $C_n, n \geq 3$ velja $Z(C_n) = 2$, je tudi $M(C_5) = 2$. Iz enakosti $\mathrm{mr}(H) + M(H) = n$, ki velja za vsak graf H, sledi, da je $\mathrm{mr}(C_5) = 3$. Pokazali smo, da je $\mathrm{mr}(G) = 8$, torej $M(G) = 2$.

(ii): Vozlišča $\{4, 6, 7\}$ sestavljajo množico prisilnih ničel grafa. Ali obstaja kakšna množica dveh vozlišč, ki skupaj obarvata celoten graf? Odgovor je ne. Opazimo namreč, da če želimo, da se obarva celotni notranji cikel (vozlišča od 1 do 5) z manj kot tremi vozlišči, moramo najprej obarvati dve zaporedni vozlišči. Če ju vzamemo za prvotno črno množico, se barvanje takoj ustavi. Boljši poizkus je ta, da vzamemo dva zaporedna lista, na primer vozlišči 9 in 10. V tem primeru bomo ob koncu barvanja imeli črno množico vozlišč $\{9, 10, 4, 5, 1, 3\}$, potem pa se barvanje ustavi. Če poskusimo z enim vozliščem iz cikla in enim listom, potem bo vozlišče iz lista obarvalo svoje sosednje vozlišče. Nato ločimo dva primera. Če ima pravkar obarvano vozlišče še 2 bela soseda, se barvanje ustavi. V nasprotnem primeru pa lahko obarvamo še eno sosednje vozlišče, potem pa se barvanje ustavi, saj imata obe vozlišči, ki še nista prisilili nobenega drugega vozlišča, 1 belo sosednje vozlišče v ciklu in 1 belo sosednje vozlišče v listu.

Zaključimo, da se z dvema črnima vozliščema ne da obarvati celega grafa. □

◊

6. Uporaba $Z(G)$ v socialnih omrežjih

V ekonomiji se pojavlja potreba po preučevanju, kako se ideje širijo in prenašajo z ljudi na ljudi. Zanima nas, kako se ljudje odločajo za uporabo novega produkta ali sodelovanja v novem socialnem omrežju. Proces lahko še lažje in na večji skali opazujemo v zadnjih letih s popularizacijo ogromnih spletnih platform, kot so Facebook, Twitter in podobno. Študije nakazujejo, da število uporabnikov takšnih produktov ni odvisno le od kvalitete, uporabnosti in lahkotnosti uporabe produkta. Močan vpliv na uporabnike imajo namreč socialni procesi in pritisk okolice. Poleg tega je znano, da nekateri produkti pridobijo na vrednosti, če jih uporablja več uporabnikov. Tipičen primer tega pojava je telefon, za katerega je očitno, da postane tem bolj vreden, čim ga uporablja več ljudi [10]. Ogledali si bomo 2 načina, kako modelirati proces širjenja idej in osvojitve novih produktov. Zanimalo nas bo, najmanj koliko ljudi moramo v nekem socialnem krogu prepričati z novo idejo, da bodo sčasoma vsi pripadniki socialnega kroga prevzeli to idejo.

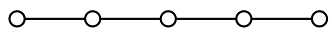
Za modeliranje socialnega omrežja si bomo pomagali z grafi. Vozlišča grafa predstavljajo ljudi, povezave pa označujejo prijateljstva med njimi. Če oseba prevzame neko idejo, bomo rekli, da je oseba (vozlišče) *okužena* s to idejo. V nasprotnem primeru pravimo, da oseba (vozlišče) *ni okužena* z idejo. Osebe, ki so okužene z idejo, predstavimo na grafu s črnimi vozlišči, neokužene pa z belimi. Proces prenosa idej bomo modelirali na dva načina. Prvi je tako imenovani *aktivni* način prenosa idej in je definiran z naslednjo igro v grafih: naj bo u neokuženo vozlišče v grafu G. Vozlišče $u \in V(G)$ postane okuženo natanko tedaj, ko je edino neokuženo sosednje vozlišče nekega okuženega vozlišča $v \in V(G)$.

Vidimo, da je v aktivnem modelu proces širjenja idej povsem analogen prisiljevanju iz definicije 4.1. Za ta način širjenja idej torej lahko uporabimo vse definicije in ugotovitve iz prejšnjih poglavij, v tem kontekstu pa je $Z(G)$ najmanjše število okuženih ljudi, preko katerih se sčasoma okužijo vsi člani socialnega omrežja.

Drug način modeliranja širjenja idej je t.i. *pasivni* način in je definiran z naslednjim pravilom: naj bo v neokuženo vozlišče v grafu G. Vozlišče $v \in V(G)$ postane okuženo natanko tedaj, ko so vsa njegova sosednja vozlišča okužena.

Množici vozlišč, ki povzroči, da se po pasivnem načinu širjenja idej okuži celoten graf, pravimo *množica prisilnih sosedov.* Moč najmanjše take množice označimo z $\tau(G)$ in imenujemo *parameter pasivnega širjenja.*

Primer 6.1. Pot na 5 vozliščih P_5:

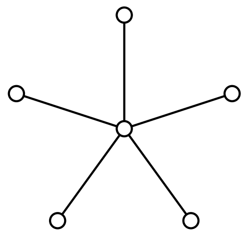


Slika 10. P_5

Za pot P_5 je katerokoli robno vozlišče že množica prisilnih ničel grafa, torej $Z(P_5) = 1$. *Množica prisilnih sosedov* za pot P_5 pa sta obe sosednji vozlišči robnih vozlišč. $\tau(P_5) = 2$. ♢

Primer 6.2. Zvezda na 6 vozliščih S_6

V zvezdi S_6 sestavljajo poljubna 4 vozlišča stopnje 1 množico prisilnih ničel grafa, $Z(S_6) \leq 4$ Po drugi strani pa je jasno, da bo moralo vozlišče v sredini opraviti prisiljevanje (za množico prisilnih ničel je sicer možno vzeti vseh 5 vozlišč stopnje 1,



SLIKA 11. Zvezda S_6

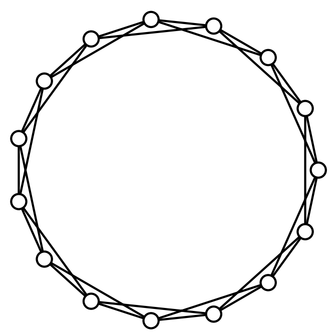
a ta množica ni minimalna). Da bo lahko srednje vozlišče prisililo kakšnega soseda, pa mora najprej imeti 4 sosede obarvane črno. Zato je $Z(S_6) \geq 4$. Zaključimo, da je $Z(S_6) = 4$.

Množico prisilnih sosedov za zvezdo S_6 pa sestavlja kar eno samo vozlišče v sredini, torej $\tau(S_6) = 1$. $\diamondsuit$

Iz zgornjih primerov je jasno, da v splošnem ne moremo trditi nič o relaciji med parametroma $Z(G)$ in $\tau(G)$.

Naslednji primer je zanimiv, saj nam je v pomoč pri modeliranju socialnih omrežij. Modelira namreč t.i. veliki svet. To je svet, v katerem je lokalno med vozlišči veliko povezav, med najbolj oddaljenima vozliščema pa je razdalja velika. Nasprotje tega so t.i. mali svetovi, kjer lahko posamezniki preko malega števila prijateljstev dostopajo do kateregakoli drugega posameznika.

Primer 6.3. Krožni graf.
Krožni graf $C[n; 1, ..., k]$ je graf na n vozliščih, v katerem so vozlišča razporejena po krožnici in je vsako vozlišče v sosednje najbližjim $2k$ vozliščem po krožnici.



SLIKA 12. $C(15; 1, 2)$

Naj bo $G = C(n; 1, ..., k)$ krožni graf. Potem se da pokazati, da velja:
(i) $Z(G) = 2k$
(ii) $\tau(G) = \lceil \frac{nk}{k+1} \rceil$

Pokažimo samo točko (i). Vsako vozlišče v grafu $G = C(n; 1, ..., k)$ ima stopnjo $2k$, torej mora biti $Z(G) \geq 2k$. Ker pa je množica vsakih $2k$ zaporednih vozlišč množica prisilnih ničel grafa, je $Z(G) = 2k$.

Opazimo, da ko povečujemo število vozlišč v krožnem grafu, parameter $\tau(G)$ raste linearno $\mathcal{O}(n)$, medtem ko $Z(G)$ raste s hitrostjo $\mathcal{O}(k)$. Za poljubno veliko razliko $r = Z(G) - \tau(G)$ si torej ni težko zamisliti grafa, v katerem se bosta parametra razlikovala za več kot r. $\diamondsuit$

Slovar strokovnih izrazov

zero forcing set množica prisilnih ničel
cut-vertex prerezno vozlišče
rank spred širitev ranga
forcing chain veriga prisiljevanj
zero spread ničelna širitev
circulant graph krožni graf
neighbor forcing set množica prisilnih sosedov

Literatura

[1] Francesco Barioli, Wayne Barrett, Shaun M Fallat, H Tracy Hall, Leslie Hogben, Bryan Shader, P Van Den Driessche, and Hein Van Der Holst. Zero forcing parameters and minimum rank problems. *Linear Algebra and its Applications*, 433(2):401–411, 2010.

[2] Francesco Barioli, Shaun Fallat, and Leslie Hogben. Computation of minimal rank and path cover number for certain graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 392:289–303, 2004.

[3] Christina J Edholm, Leslie Hogben, My Huynh, Joshua LaGrange, and Darren D Row. Vertex and edge spread of zero forcing number, maximum nullity, and minimum rank of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 436(12):4352–4372, 2012.

[4] Shaun M Fallat and Leslie Hogben. The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: a survey. *Linear Algebra and its Applications*, 426, 2007.

[5] Miroslav Fiedler. A characterization of tridiagonal matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2(2):191–197, 1969.

[6] AIM Minimum Rank-Special Graphs Work Group. Zero forcing sets and the minimum rank of graphs. *Linear Algebra Appl.*, 428(7):1628–1648, 2008.

[7] Suk-Geun Hwang. Cauchy's interlace theorem for eigenvalues of hermitian matrices. *The American Mathematical Monthly*, 111(2):157–159, 2004.

[8] Charles R Johnson, Raphael Loewy, and Paul Anthony Smith. The graphs for which the maximum multiplicity of an eigenvalue is two. *Linear and Multilinear Algebra*, 57(7):713–736, 2009.

[9] T. Kalinowski, N. Kamčev, and B. Sudakov. Zero forcing number of graphs. *ArXiv e-prints*, May 2017.

[10] In-Jae Kim, Brian P Barthel, Yuyoung Park, Jordan R Tait, Joseph L Dobmeier, Sung Kim, and Dooyoung Shin. Network analysis for active and passive propagation models. *Networks*, 63(2):160–169, 2014.

[11] Peter M Nylen. Minimum-rank matrices with prescribed graph. *Linear Algebra and its Applications*, 248:303–316, 1996.

[12] Darren D Row. A technique for computing the zero forcing number of a graph with a cut-vertex. *Linear Algebra and its Applications*, 436(12):4423–4432, 2012.