UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Nataša Taškov

SIMULTANI INTERVALI ZAUPANJA ZA VEČ KVANTILOV NEZNANE PORAZDELITVE

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2018

Kazalo

SIMULTANI INTERVALI ZAUPANJA ZA VEČ KVANTILOV NEZNANE PORAZDELITVE

Povzetek

Iskanje intervalov zaupanja je pomemben statistični problem, saj nam intervali zaupanja podajo neko intervalsko oceno iskane količine. Če imamo vzorec neodvisnih opazovanj neznane zvezne porazdelitve in nas zanima neki določen kvantil te porazdelitve, lahko za izbrani kvantil izračunamo interval zaupanja z določeno stopnjo zaupanja. Včasih pa si želimo izračunati intervale zaupanja za več kvantilov z neko določeno skupno stopnjo zaupanja. Temu pravimo simultani intervali zaupanja. Ker nimamo nobenih predpostavk o porazdelitvi, uporabimo neparametrične metode za izračun intervalov zaupanja. Iskanje intervalov zaupanja za en kvantil se da izračunati s pomočjo binomske metode. Metoda poišče intervale zaupanja s posamezno stopnjo zaupanja natanko $1 - \alpha$. Če želimo poiskati intervale zaupanja, katerih skupna stopnja zaupanja je $1-\alpha$, potrebujemo drugačne metode. Dve od teh metod bosta predstavljeni v tem diplomskem delu. Če iščemo simultane intervale zaupanja za vse kvantile porazdelitve ali če nas zanimajo intervali zaupanja za veliko kvantilov, ki so razpršeni povsod po intervalu $(0, 1)$, potem je najbolje pridobiti simultane intervale zaupanja iz pasov zaupanja. Eden od načinov iskanja pasov zaupanja je s pomočjo metode Kolmogorova. Simultani intervali zaupanja, ki jih dobimo iz pasov zaupanja so navadno zelo široki in zato pogosto neuporabni. Obstaja pa metoda, ki temelji na multinomski porazdelitvi, ki poišče simultane intervale zaupanja le za nekaj izbranih kvantilov. Ti intervali zaupanja so običajno ožji. Za izračun simultane stopnje zaupanja obstaja rekurziven algoritem, katerega računska zahtevnost raste s številom kvantilov, ki nas zanimajo. Za simultane intervale zaupanja želimo poiskati množice optimalnih mejnih vrednosti. Da bi jih lažje našli, si lahko pomagamo s petimi kriteriji: simterija, enostranskost in dvostranskost, razpon intervala zaupanja, stopnja zaupanja in gnezdenje. Simultani intervali zaupanja, ki jih dobimo z multinomsko metodo so običajno ožji kot tisti, ki jih dobimo iz pasov zaupanja, in širši od intervalov zaupanja za posamezne kvantile. Če iščemo simultane intervale zaupanja s pomočjo multinomske metode in simultane intervale zaupanja s pomočjo parametričnih metod, je bolje uporabiti neparametrične metode, saj tako intervali zaupanja niso odvisni od prepodstavk o porazdelitvi.

Simultaneous Confidence Intervals for Several Quantiles of an Unknown Distribution

Abstract

Finding confidence intervals is an important statistical problem because the confidence intervals provide an interval evaluation of the quantity of interest. Supose that we are interested in a certain quantile of an unknown continuous distribution, given a sample of independent observations from this distribution, we can calculate a confidence interval with a certain confidence level for the particular quantile. Sometimes we want to calculate a confidence interval for several quantiles with a certain total confidence level. We call this a simultaneous confidence interval. Since we do not have any distribution assumptions, we use non-parametric methods for calculating confidence intervals. Searching for confidence intervals for a single quantile can be calculated using the binomial method. The method searches for confidence intervals with an individual confidence level exactly $1 - \alpha$. If we want to search for confidence intervals whose total confidence level is $1-\alpha$, we need different methods. Two of these methods will be presented in this work. If we search for confidence intervals for all quantiles of an unknown distribution, or if we are interested in confidence intervals for many quantiles that are scattered over the entire interval $(0, 1)$, then it is best to obtain confidence intervals from confidence bands. One of the ways to search for confidence bands is using the Kolmogorov method. Simultaneous confidence intervals obtained from confidence bands are usually very wide and therefore often useless. Therefore, there is a method based on multinomial distribution that searches for simultaneous confidence intervals for only a few selected quantiles. These confidence intervals are usually narrower. To calculate the simultaneous confidence level, there is a recursive algorithm that has a computational complexity that increases linearly with the number of quantiles that interest us. For simultaneous confidence intervals we want to find a set of super-feasible boundary values values. In order to find them, we employ five criteria: symmetry, one-sidedness and two-sidedness, confidence interval spread, confidence level and inclusion. Simultaneous confidence intervals obtained by the multinomial method are usually narrower than those obtained from confidence bands and wider than the confidence intervals for individual quantile. If we are looking for simultaneous confidence intervals by means of the multinomial method, it is preferable to use nonparametric methods, since then the confidence intervals do not depend on distribution assumptions.

Math. Subj. Class. (2010): 62G15

Ključne besede: Simultani intervali zaupanja, intervali zaupanja, pasovi zaupanja, binomska porazdelitev, multinomska porazdelitev, neparametrične metode, rekurzivni izračuni.

Keywords: Simultaneous confidence intervals, Confidence intervals, Confidence bands, Binomial distribution, Multinomial distribution, Nonparametric methods, Recursive computations.

1. Uvod

V statistiki se že dolgo let ukvarjajo z iskanjem simultanih intervalov zaupanja. Obstajajo parametrične in neparametrične metode za izračun simultanih intervalov zaupanja. Parametrične metode temeljijo na tem, da za izbrani nabor podatkov predpostavimo neko porazdelitev in nato ocenjujemo parametre te porazdelitve, neparametrične metode pa ne uporabljajo nobenih prepodstavk o porazdelitvi in zgolj na osnovi podatkov ocenjenih porazdelitev. V tej diplomski nalogi bodo opisane neparametrične metode, na koncu pa sledi še primerjava s parametričnima metodama, kjer ena temelji na normalni porazdelitvi, druga pa na Weibullovi porazdelitvi.

Vsebina diplomske naloge bo razdeljena na šest poglavij, vključno z uvodom in zaključkom. V drugem poglavju bo predstavljen problem za en kvantil neznane porazdelitve. Na začetku bo podana definicija kvantila, sledil bo opis problema, na koncu pa bo opisana metoda, s katero se da učinkovito izračunati interval zaupanja za dani kvantil. Opisana metoda temelji na binomski porazdelitvi. V tretjem poglavju bo najprej na kratko predstavljena razlika med posameznimi intervali zaupanja in simultanimi intervali zaupanja. Sledila bo definicija pasov zaupanja ter kratka razlaga, kaj so pasovi zaupanja in kako iz njih dobimo simultane intervale zaupanja. Na koncu pa bo predstavljena metoda Kolmogorova za izračun pasov zaupanja. V četrtem poglavju bo najprej predstavljena splošna metodologija za izračun simultanih intervalov zaupanja za nekaj izbranih kvantilov. Sledila bo izpeljava rekurzivnega algoritma, s pomočjo katerega se da izračunati simultano stopnjo zaupanja za simultane intervale zaupanja, njegova računska zahtevnost in uporaba. Na koncu bo predstavljeno še, kako poiskati čim bolj "optimalnešimultane intervale zaupanja in nekaj kriterijev, ki nam lahko pomagajo pri iskanju optimalnih mejnih vrednosti. V petem poglavju bodo predstavljeni primeri uporabe algoritma iz poglavja (4.3) za vzorce velikosti $n = 20$, $n = 50$ in $n = 80$ in stopnjo zaupanja 0.95%. Narejene bodo tudi primerjave s parametričnimi pristopi, ki temeljijo na normalni in Weibullovi porazdelitvi.

2. Intervali zaupanja za en kvantil neznane porazdelitve

V tem poglavju bo predstavljen problem za en kvantil neznane porazdelitve. Na začetku bo podana definicija kvantila, sledil bo opis problema, na koncu pa bo opisana metoda, s katero se da učinkovito izračunat interval zaupanja za dani kvantil.

Obstaja več metod za izračun intervalov zaupanja za en kvantil. Nekatere temeljijo na predpostavkah o porazdelitvi, na primer predpostavijo normalno porazdelitev, tem modelom pravimo parametrični modeli. V tem diplomskem delu ne bo uporabljenih nobenih predpostavk v zvezi s porazdelitvijo, zato bo uporabljen neparametričen model, ki temelji na binomski porazdelitvi.

Definicija 2.1. Naj bo $X_1, \cdots, X_n$ vzorec neodvisnih opazovanj neznane zvezne porazdelitve. Za $0 < p < 1$ je p-ti kvantil x_p vrednost x, za katero velja $P(X \leq x) = p$.

P-ti vzorčni kvantil je torej vrednost, pri kateri je $100p\%$ vzorca manjšega od x in $100(1-p)\%$ vzorca večjega od x.

Osnovni problem je, da imamo vzorec neodvisnih opazovanj nekega slučajnega eksperimenta in nas zanima nek določen kvantil x_p. Na podlagi tega vzorca sicer lahko izračunamo vzorčni kvantil, vendar ne vemo, kakšen je ta kvantil glede na celotno populacijo. Zato nas zanima interval zaupanja za izbrani kvantil x_p, če imamo na razpolago naš vzorec.

Za izračun intervala zaupanja uporabimo standardno metodo, ki temelji na binomski porazdelitvi za neparametrične modele.

2.1. Izpeljava in dokaz binomske metode.

Trditev 2.2. *Naj bo $X_1, \cdots, X_n$ vzorec neodvisnih opazovanj neznane zvezne porazdelitve in x_p neznani p-ti kvantil za $0 < p < 1$. Če za celi števili l in u, $0 \leq l, u \leq n$ velja*

$$P(l \leq Bin(n,p) \leq u) = 1 - \alpha \tag{1}$$

potem je interval zaupanja za x_p

$$x_p \in [X_{(l)}, X_{(u+1)}] \tag{2}$$

in ima stopnjo zaupanja natanko $1-\alpha$, kjer so $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ po velikosti urejene vrednosti podatkov. Če je $l = 0$, ima interval zaupanja spodnjo mejo $-\infty$, če pa je $u = n$, ima zgornjo mejo ∞.

Dokaz. Trditev dokažemo tako, pa pokažemo, da je interval zaupanja iz enačbe (2) dobljen z inverzijo družine testov domneve $x_p = x$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Naj bo $S(x)$ število tistih X_i, ki so manjši ali enaki x. Domnevo $x_p = x$ zavrnemo, če je $S(x) < l$ ali $S(x) > u$. Iz enačbe (2) sledi, da ima ta velikost natanko α.

2.2. Uporaba binomske metode v praksi.

Imamo neki vzorec $X_1, \cdots, X_n$ in neki izbrani kvantil x_p. Izberemo si neko stopnjo zaupanja, po navadi 99% ali 95%. Nato iščemo taki števili l in u, da je verjetnost v enačbi (1) čim bližje izbrani stopnji zaupanja. Ko najdemo ti dve števili, je interval zaupanja za iskani kvantil x_p tak, kot prikazuje enačba (2).

Za dvostranski interval zaupanja po navadi izberemo l in u tako, da sta verjetnosti $P(Bin(n,p) < l)$ in $P(u < Bin(n,p))$ približno enaki $\frac{\alpha}{2}$, čeprav veljavnost intervala zaupanja ne temelji na tem pogoju.

2.3. **Sklep.** Interval zaupanja za en kvantil lahko konstruiramo s pomočjo binomske metode. Metoda poišče intervale zaupanja s posamezno stopnjo zaupanja vsaj $1-\alpha$. Če želimo poiskati intervale zaupanja za več kvantilov, katerih skupna stopnja zaupanja je vsaj $1-\alpha$, potrebujemo drugačne metode. Dve metodi za izračun takih intervalov zaupanja sledita v naslednjih dveh poglavjih.

3. Pasovi zaupanja

V tem poglavju bo najprej na kratko predstavljena razlika med posameznimi intervali zaupanja in simultanimi intervali zaupanja. Sledila bo definicija pasov zaupanja ter kratka razlaga, kaj so pasovi zaupanja in kako iz njih dobimo simultane intervale zaupanja. Na koncu pa bo predstavljena metoda Kolmogorova za izračun pasov zaupanja.

V prejšnjem poglavju smo govorili o intervalih zaupanja za neki kvantil z določeno stopnjo zaupanja, zdaj pa želimo intervale zaupanja za več kvantilov, katerih skupna stopnja zaupanja je enaka tej določeni zaupanja. Torej je stopnja zaupanja za posamezen interval zaupanja večja, kot če bi računali za vsak kvantil posebej. V tem poglavju nas zanimajo intervali zaupanja za vse kvantile neznane porazdelitve. Zato potrebujemo pasove zaupanja.

3.1. Definicija pasov zaupanja.

Definicija 3.1. Naj bo $X_1, \cdots, X_n$ vzorec neodvisnih opazovanj neznane zvezne porazdelitve. Pas zaupanja stopnje zaupanja $1-\alpha$ za kumulativno porazdelitveno funkcijo F je podan z dvema funkcijama $L(x)$ in $H(x)$, za kateri velja

$$P(L(x) \leq F(x) \leq H(x), -\infty < x < \infty) = 1-\alpha.$$

Iz zgornje definicije je razvidno, da je pas zaupanja ocena celotne kumulativne porazdelitvene funkcije z dvema funkcijama. Če iz vzorca ocenimo porazdelitveno funkcijo, lahko s pomočjo pasov zaupanja poskušamo ugotoviti odstopanja ocenjene kumulativne porazdelitvene funkcije od prave kumulativne porazdelitvene funkcije. Do odstopanj pride zaradi premajhnega vzorca ali zaradi netočnosti podatkov. Iz pasov zaupanja se da takoj dobiti intervale zaupanja za katerikoli kvantil, saj pas zaupanja oceni celotno kumulativno porazdelitveno funkcijo, interval zaupanja za en kvantil pa zgolj neko točko te porazdelitvene funkcije. Če nas torej zanimajo vsi kvantili neznane porazdelitve, izračunamo pas zaupanja za našo porazdelitev. Recimo, da želimo stopnjo zaupanja $1-\alpha$. Pri računanju intervalov zaupanja za en kvantil je iz enačbe (1) razvidno, da je stopnja zaupanja za interval zaupanja iz enačbe (2) enak $1-\alpha$. Pri pasovih zaupanja pa želimo stopnjo zaupanja $1-\alpha$ za vse kvantile x_p.

3.2. Neparametricne metode za izračun pasov zaupanja.

Obstaja več neparametričnih metod za izračun pasov zaupanja. Najbolj znana je metoda Kolmogorova.

3.2.1. *Metoda Kolmogrova.* Metoda Kolmogorova je ena izmed metod za izračun neparametričnih simultanih intervalov zaupanja za neznano porazdelitev. Metoda temelji na prištevanju in odštevanju kritične točke $d_{\alpha,n}$ empirični kumulativni porazdelitveni funkciji.

Definicija 3.2. Empirična kumulativna porazdelitvena funkcija je ocena kumulativne porazdelitvene funkcije danega vzorca. Definirana je s predpisom

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}.$$

Empirična kumulativna porazdelitvena funkcija je porazdelitvena funkcija, ki je povezana z empirično meritvijo vzorca. Njena vrednost pri številu $x \in \mathbb{R}$ je delež tistih komponent vzorca x_i, ki so majše ali enake številu x. Empirična porazdelitvena funkcija je ocena kumulativne funkcije porazdelitve danega vzorca in konvergira proti pravi porazdelitveni funkciji z verjetnostjo 1 (Glivenko-Cantellijev izrek).

Če za testno statistiko $S(x)$ vzamemo število vseh x_i, ki so manjši od x, dobimo $\hat{F}(x) = \frac{S(x)}{n}$.

Metoda Kolmogorova za neznano kumulativno porazdelitveno funkcijo generira pas zaupanja s stopnjo zaupanja natanko $1-\alpha$, ki zagotovi natanko $1-\alpha$ simultane intervale zaupanja za vse kvantile x_p.

Trditev 3.3. *Interval zaupanja za kvantil p sestoji iz tistih števil x, za katera Kolmogorovovi pasovi zaupanja vsebujejo verjetnost p, torej tistih vrednosti x, za katere velja*

$$\frac{S(x)}{n} - d_{\alpha,n} \leq p \leq \frac{S(x)}{n} + d_{\alpha,n}.$$

Če je l' najmanjše celo število, ki ni strogo manjše od $n(p-d_{\alpha,n})$, in če je u' največje celo število, ki ni strogo večje od $n(p+d_{\alpha,n})$, potem je interval zaupanja

$$x_p \in [X_{(l')}, X_{(u'+1)}]. \tag{3}$$

in ima simultano stopnjo zaupanja vsaj $1-\alpha$ za vse $0 < p < 1$, kjer so $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ po velikosti urejene vrednosti podatkov. Če je $l' \leq 0$, ima interval zaupanja spodnjo mejo $-\infty$, oziroma zgornjo mejo ∞, če je $u' \geq n$.

Medtem ko imajo intervali zaupanja v enačbi (2) individualno stopnjo zaupanja $1-\alpha$, imajo intervali zaupanja v enačbi (3) simultano stopnjo zaupanja $1-\alpha$ za vse $0 < p < 1$ in so v splošnem širši kot intervali v enačbi (2).

3.3. **Sklep.** Če iščemo simultane intervale zaupanja za vse kvantile porazdelitve ali če nas zanimajo intervali zaupanja za veliko kvantilov, ki so razpršeni po vsem intervalu $(0,1)$, potem je najbolje dobiti simultane intervale zaupanja iz pasov zaupanja. Eden od načinov iskanja pasov zaupanja je s pomočjo metode Kolmogorova, ki temelji na prištevanju in odštevanju kritične točke. Simultani intervali zaupanja, ki jih dobimo iz pasov zaupanja, so navadno zelo široki in zato pogosto neuporabni. Zato je v naslednjem poglavju opisana metoda, ki poišče simultane intervale zaupanja le za nekaj izbranih kvantilov. Ti intervali zaupanja so običajno ožji.

4. Intervali zaupanja za več kvantilov neznane porazdelitve

V tem poglavju bo najprej predstavljena zgodovina iskanja simultanih intervalov zaupanja. Nato bo opisana splošna metodologija za izračun simultanih intervalov zaupanja za nekaj izbranih kvantilov. Sledila bo izpeljava rekurzivnega algoritma, s pomočjo katerega se da izračunati simultano stopnjo zaupanja za simultane intervale zaupanja, njegova računska zahtevnost in uporaba. Nato bo predstavljeno, kako poiskati optimalne simultane intervale zaupanja in nekaj kriterijev, ki nam lahko pomagajo pri iskanju. Na koncu pa bo sledila še primerjava med intervali zaupanja, pridobljenimi iz Kolmogorovovih pasov zaupanja in pasov zaupanja, izračunanih z multinomsko metodo.

4.1. **Zgodovina iskanja simultanih intervalov zaupanja.** Problem konstruiranja simultanih intervalov zaupanja za nekaj kvantilov neznane porazdelitve je bil večinoma preučevan pod parametričnimi predpostavkami za porazdelitev. Na primer v Liu et al. (2013) so pokazali, kako konstruirati simultane intervale zaupanja za več kvantilov neznane normalne porazdelitve. Kot motivacijo so obravnavali študijo, ki zadeva medsebojni vpliv večih zdravil na revmatoidni artritis, kjer so potrebovali dvostranske simultane intervale zaupanja za zgornji kvartil in zgornji 1% repni kvantil porazdelitve nivoja plazme. Dodatno so preučevali tudi, kako pogosto je potrebno narediti referenčne range za kvantile, kot so telesna teža ali krvni pritisk, kar se da doseči z izdelavo množice simultanih intervalov zaupanja za kvantile za $p = 0.025, 0.25, 0.75$ in 0.975.

Splošen pristop h generiranju simultanih intervalov zaupanja za vse kvantile porazdelitve na parametričen način preko konstrukcije območja zaupanja za parametre porazdelitve so preučevali Cheng in Iles leta 1983 in Satten leta 1995, medtem ko so se Arnold in Shavelle leta 1998 ter Choudhari, Kundu in Misra leta 2001 posebej osredotočili na normalne porazdelitve. Leta 2013 sta Hayter in Kiatsupaibul pokazala, kako se da izračunati natančno območje zaupanja za parametre Weibullove porazdelitve, ki jo lahko uporabimo za generiranje pasov zaupanja in simultanih intervalov zaupanja za vse kvantile porazdelitve.

Na koncu je potrebno še omeniti, da neparametrični sklepi o kvantilih, o katerih govori ta diplomska naloga, temeljijo na vrstilnih statistikah vzorca. Leta 2000 je Gilchrist v članku natančno argumentiral, zakaj so kvantili primerni za razumevanje in modeliranje porazdelitev, pri čemer je upošteval več kot sto let del statistikov, ki so obravnavala kvantile.

4.2. **Splošna metodologija.** Metoda je podobna kot pri računanju intervalov zaupanja za en kvantil, le da temelji na multinomski porazdelitvi, namesto na binomski. Imamo neki vzorec neodvisnih opazovanj $X_1, \cdots, X_n$, le da imamo tokrat namesto enega kvantila x_p k kvantilov $x_{p_1}, \cdots, x_{p_k}$, $0 < p_1 < \ldots < p_k < 1$. Iz naslednje trditve lahko izpeljemo neparametrično metodo, ki temelji na multinomski porazdelitvi, za izračun simultanih intervalov zaupanja za kvantile $x_{p_1}, \cdots, x_{p_k}$.

4.2.1. *Multinomska metoda.*

Trditev 4.1. *Naj bo $X_1, \cdots, X_n$ vzorec neodvisnih opazovanj neznane zvezne porazdelitve in $x_{p_i}, 1 \leq i \leq k$ za $0 < p_1 < \ldots < p_k < 1$ ocenjevani kvantili. Naj bo $(Y_1, \cdots, Y_{k+1})$ slučajni vektor, porazdeljen multinomsko s parametrom n in verjetnostmi $p_1, p_2 - p_1, \ldots, p_k - p_{k-1}, 1 - p_k$. Recimo, da obstajajo števila l_i in u_i, $1 \leq i \leq k$, med 0 in n, da velja*

$$P(l_i \leq \sum_{j=1}^{i} Y_j \leq u_i; 1 \leq i \leq k) = 1 - \alpha \tag{4}$$

Tedaj imajo intervali zaupanja

$$x_{p_i} \in [X_{(l_i)}, X_{(u_i+1)}], 1 \leq i \leq k \tag{5}$$

simultano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$ s spodnjimi mejami $-\infty$, če $l_i = 0$ in zgornjimi mejami ∞, če $u_i = n$.

Ideja dokaza. Ideja dokaza je enaka kot pri dokazu trditve 2.2. Trditev dokažemo tako, pa pokažemo, da je interval zaupanja iz enačbe (5) dobljen z inverzijo družine testov domneve $(x_{p_1}, \cdots, x_{p_k}) = (x_1, \cdots, x_k)$ za vse $(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Naj bo $(S(x_1), \cdots, S(x_k))$ vektor, katerega komponente $S(x_i)$ so definirane na enak način, kot pri dokazu trditve 2.2. Družino domnev $(x_{p_1}, \cdots, x_{p_k}) = (x_1, \cdots, x_k)$ zavrnemo, če je katerakoli od komponent $S(x_i) < l_i$ ali $S(x_i) > u_i, 1 \leq i \leq k$. Iz enačbe (4) sledi, da ima ta velikost natanko α.

4.2.2. *Uporaba multinomske metode.* Imamo nek vzorec $X_1, \cdots, X_n$ in nek nabor kvantilov $x_{p_1}, \cdots, x_{p_k}$, ki nas zanimajo. Izberemo neko stopnjo zaupanja, po navadi 95% ali 99%. Nato poiščemo tiste vrednosti $l_1, \cdots, l_k$ in $u_1, \cdots, u_k$, da je verjetnost v enačbi (4) čim bližje iskani stopnji zaupanja. Ko najdemo ta števila, so simultani intervali zaupanja taki, kot prikazuje enačba (5). Ker je multinomsko verjetnost v enačbi (4) težko izračunati, bo v naslednjem podpoglavju predstavljen rekurzivni algoritem, s pomočjo katerega se izračun poenostavi.

4.3. **Rekurzivni algoritem.** V tem podpoglavju bo predstavljen rekurzivni algoritem za izračun verjetnosti v enačbi (4) in njegova izpeljava. Na koncu pa bo še povedano nekaj o računski zahtevnosti algoritma. Predpostavimo, da velja $0 \leq l_1 \leq \ldots \leq l_k \leq n$ in $0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_k \leq n$, kjer $l_i \leq u_i$, $1 \leq i \leq k$. Označimo $\pi_1 = p_1, \pi_i = p_i - p_{i-1}, 2 \leq i \leq k$ in $\pi_{k+1} = 1 - p_k$. Naj bo $Z_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j$. Potem velja $1 \leq i \leq k$, velja $Z_1 \leq \ldots \leq Z_k$ in sledi:

$$\begin{aligned} & P(l_i \leq \sum_{j=1}^{i} Y_j \leq u_i; 1 \leq i \leq k) \\ &= P(l_1 \leq Z_1 \leq u_1, max\{l_i, Z_{i-1}\} \leq Z_i \leq u_i; 2 \leq i \leq k) \\ &= \sum_{z_1=l_1}^{u_1} \sum_{z_2=max\{l_2,z_1\}}^{u_2} \cdots \sum_{z_k=max\{l_k,z_{k-1}\}}^{u_k} \frac{n!\pi_1^{z_1}\pi_2^{z_2-z_1} \cdots \pi_k^{z_k-z_{k-1}}\pi_{k+1}^{n-z_k}}{z_1!(z_2-z_1)!\cdots(z_k-z_{k-1})!(n-z_k)!} \\ &= n!\pi_{k+1}^{n} \sum_{z_1=l_1}^{u_1} \sum_{z_2=max\{l_2,z_1\}}^{u_2} \cdots \sum_{z_k=max\{l_k,z_{k-1}\}}^{u_k} \frac{(\pi_1/\pi_2)^{z_1}}{z_1!} \Big(\prod_{i=2}^{k} \frac{(\pi_i/\pi_{i+1})^{z_i}}{(z_i-z_{i-1})!}\Big) \frac{1}{(n-z_k)!} \end{aligned}$$

Nato če velja

$$g_i(x) = \sum_{w=max\{x,l_{i+1}\}}^{u_{i+1}} \frac{(\pi_{i+1}/\pi_{i+2})^w}{(w-x)!} g_{i+1}(x)$$

za $1 \leq i \leq k-1$ z $g_k(w) = 1/(n-w)!$, sledi

$$P(l_i \leq \sum_{j=1}^{i} Y_j \leq u_i, 1 \leq i \leq k) = n!\pi_{k+1}^{n} \sum_{w=l_1}^{u_1} \frac{(\pi_1/\pi_2)^w}{w!} g_1(w)$$

Tako lahko izračunamo $g_{k-1}(x)$ za $l_{k-1} \leq x \leq u_{k-1}$ in potem $g_{k-2}(x)$ za $l_{k-2} \leq x \leq u_{k-2}$ in tako naprej, dokler pridemo do $g_1(x)$. Vse vstavimo v zadnjo enačbo in dobimo iskano verjetnost.

4.3.1. *Računska zahtevnost algoritma.* Vidimo, da je za vzorec velikosti n za izračun verjetnosti v enačbi (4) potrebno število operacij, ki je linearno glede na število kvantilov k. To se vidi iz tega, da je za izračun funkcij g_i, pri privzetku, da so vrednosti g_{i+1} poznane, potrebno konstantno število operacij, za izračun verjetnosti v enačbi (4) pa je potrebno izračunati toliko funkcij g_i, kolikor je kvantilov, ki nas zanimajo. Zato je računska zahtevnost algoritma linearna funkcija števila kvantilov k.

4.4. **Uporaba rekurzivnega algoritma.** Rekurzivni algoritem, ki je opisan v poglavju (4.3) se da uporabiti za veliko stvari. Lahko se ga uporabi za izračun simultane stopnje zaupanja za več kvantilov, če uporabimo multinomsko metodo. Da pa se ga uporabiti tudi za izračun družine neparametričnih pasov zaupanja za neznano porazdelitveno funkcijo. Prav tako se ga da uporabiti za izračun Kolmogorovovih kritičnih točk.

4.5. **Doseganje določenih stopenj zaupanja.** Za dano množico l_i in u_i lahko stopnjo zaupanja simultanih intervalov zaupanja iz enačbe (5) z lahkoto pridobimo iz enačbe (4) z uporabo rekurzivnega algoritma, opisanega v poglavju (4.3). Vendar, če želimo zagotoviti standardno stopnjo zaupanja, kot je na primer 95% ali 99%, potem se pojavi problem, kako izbrati primerne vrednosti l_i in u_i.

Definicija 4.2. Dopustne mejne vrednosti so vse mejne vrednosti l_i in u_i, za katere je verjetnost v Enačbi(4) večja ali enaka $1 - \alpha$.

Za konstrukcijo simultanih intervalov zaupanja iz enačbe (5) z določeno stopnjo zaupanja vsaj $1-\alpha$ iščemo take vrednosti l_i in u_i, da so to dopostne mejne vrednosti. Kljub temu pa želimo, da so verjetnosti v enačbi (4) kolikor se le da blizu $1 - \alpha$.

Definicija 4.3. Optimalne mejne vrednosti so tiste mejne vrednosti, ki striktno ne vsebujejo katerekoli druge množice dopustnih mejnih vrednosti.

Z drugimi besedami, množica dopustnih mejnih vrednosti je optimalna, če povečanje katere koli spodnje meje l_i za ena ali zmanjšanje katere koli zgornje meje u_i za ena pripelje do tega, da množica ni več dopustna, torej da verjetnost v enačbi (4) postane strogo manjša od $1 - \alpha$. Iščemo torej množice optimalnih mejnih vrednosti za izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$ in izbrane kvantile $x_{p_1}, \cdots, x_{p_k}$.

Težava lahko nastane, ker za vsak problem lahko obstaja veliko množic optimalnih mejnih vrednosti, med katerimi lahko izbiramo. Preprosto je narediti algoritem, ki poišče eno množico optimalnih mejnih vrednosti. Najprej poišče neko množico dopustnih mejnih vrednosti, nato pa izloča širše meje, dokler množica ni optimalna.

Različne množice optimalnih mejnih vrednosti imajo morda različne prednosti in slabosti glede na različne okoliščine in vsaka lahko naredi veljavno množico simultanih intervalov zaupanja iz enačbe (5), vendar moramo izbrati množico mejnih vrednosti neodvisno od dejanskih vrednosti X_i.

Pri izbiri med množicami optimalnih mejnih vrednosti si lahko pomagamo z naslednjimi petimi kriteriji, čeprav nam ti morda ne bodo dali enolične izbire.

(1) *Simetrija*:
Če želimo interval zaupanja za mediano $x_{0.5}$, potem je naravno, da imamo simetričen interval zaupanja z $l_i + u_i = n$. To pomeni, da če metodo uporabimo za negativne vrednosti podatkov $-X_i$, potem bo interval zaupanja negativna vrednost prvotnega intervala zaupanja. Podobno, če želimo simultane intervale zaupanja $x_p \in [X_{(l_i)}, X_{(u_i+1)}]$ in $x_{1-p} \in [X_{(l_j)}, X_{(u_j+1)}]$, potem je naravno, da imamo simetrične vrednosti $l_j + u_i = l_i + u_j = n$. Kljub temu je potrebno opozoriti, da je možno, da nobene optimalne mejne vrednosti niso simetrične.

(2) *Enostranskost in dvostranskost*:
Če so l_i enaki nič ali u_i enaki n, potem dobimo enostranske intervale zaupanja. Čeprav je to morda cilj, te mejne vrednosti skoraj nikoli niso optimalne. Namesto tega je bolje najti optimalne mejne vrednosti, ki imajo najvišji l_i ali najnižji u_i, in ki posledično naredijo najožje meje v željeni enostranski smeri.

(3) *Razpon intervala zaupanja*:
Razpon intervala zaupanja $x_p \in [X_{(l_i)}, X_{(u_i+1)}]$ je definiran kot $u_i - l_i + 2$, kar je število podatkovnih vrednosti, ki jih vsebuje. Smiselno je izbrati intervale zaupanja, ki imajo najmanjši razpon. Za dane vrednosti podatkov se to morda ne bo izkazalo kot izbira, ki nam da najkrajšo širino intervala.

(4) *Stopnja zaupanja*:
Dejanske stopnje zaupanja, ki jih dobimo v enačbi (4) s pomočjo množic optimalnih mejnih vrednosti, lahko uporabimo kot kriterij, kjer izbiramo med tistimi, ki dosežejo stopnjo zaupanja bližje določeni vrednosti $1 - \alpha$. Vendar lahko tak kriterij nasprotuje kateremu drugemu od danih kriterijev.

(5) *Gnezdenje*:
Če potrebujemo simultane intervale zaupanja z različnimi stopnjami zaupanja, potem je smiselno, da so intervali zaupanja, ki imajo nižjo stopnjo zaupanja, vsebovani v intervalih zaupanja, ki imajo višjo stopnjo zaupanja. Podobno, če imamo dano stopnjo zaupanja in množici simultanih intervalov zaupanja, ki nas zanimajo, dodajamo več kvantilov, potem je smiselno, da intervali iz kasnejšega primera vsebujejo intervale iz prejšnjega primera. Tako, če sta za dana n in α priporočljiva individualna intervala zaupanja $x_{p_1} \in [X_{(l_1)}, X_{(u_1+1)}]$ in $x_{p_2} \in [X_{(l_2)}, X_{(u_2+1)}]$, potem je smiselno, da vsak simultan interval zaupanja za x_{p_1} in x_{p_2} vsebuje te vrednosti.

Idealno bi bilo, da bi za dane vrednosti n, α in p_i vse optimalne mejne vrednosti lahko indeficirali, tako da bi uporabili vseh teh pet kriterijev, da bi izbrali primerne simultane intervale zaupanja.

Rekurzivni algoritem iz poglavja (4.3) za izračun verjetnosti iz enačbe (4) ima računsko zahtevnost, ki raste linearno s številom kvantilov k za dani vzorec velikosti n in zna učinkovito izračunat stopnjo zaupanja za določene l_i in u_i. Vendar iskanje vseh optimalnih mejnih vrednosti postane bolj računsko zahtevno, ko se velikost tako vzorca n veča kot tudi število kvantilov k.

Kljub temu se da v praksi te verjetnosti v veliko primerih izračunat. To metodo se uporablja predvsem takrat, ko nas zanima le nekaj kvantilov, če pa nas zanima veliko kvantilov, ki so razpršeni po celem intervalu $(0, 1)$, potem je lažje uporabiti standardne neparametrične pasove zaupanja, kot so pasovi zaupanja, ki jih dobimo z metodo Kolmogorova. Poleg tega se optimalne mejne vrednosti za izbrane n, α in p_i izračuna samo enkrat in jih ni potrebno ponovno računati za vse različne nabore podatkov, saj so optimalne mejne vrednosti neodvisne od konkretnih podatkov.

Prav tako si je pomembno, da uporaba standardnih stopenj zaupanja, kot so 0.95 in 0.99 določi optimalne mejne vrednosti. V bistvu je vsaka množica mejnih vrednosti optimalna za neko stopnjo zaupanja, ki pa ni nujno standardna, vendar se jih da še zmeraj uporabiti v praksi, če nas ne moti nestandardna stopnja zaupanja.

Z zgornjimi petimi kriteriji si lahko torej pomagamo pri iskanju množic optimalnih mejnih vrednosti. Na žalost rešitev, ki zadošča vsem petim kriterijem pogosto ne obstaja. Zato se glede na različne situacije in preference odločimo, katere od teh kriterijev bomo uporabili. V naslednjem poglavju bo navedenih nekaj primerov množic optimalnih mejnih vrednosti, kjer bo najbolj izpostavljen kriterij simetrije.

4.6. **Primerjava metode Kolgomorova z multinomsko metodo.** Metoda Kolmogorova nam da simultane intervale zaupanja za vse kvantile, vendar so ti ponavadi zelo široki in zato pogosto neuporabni. V praksi nas ponavadi zanimajo simultani intervali zaupanja le za nek določen nabor kvantilov, na primer za zgornji in spodnji kvartil ter mediano. Multinomska metoda nam da učinkovitejše simultane intervale zaupanja za nek končen nabor izbranih kvantilov. Ti intervali zaupanja so širši kot individualni intervali zaupanja v enačbi (2) in ožji kot simultani intervali zaupanja v enačbi (3).

Razlika med intervali zaupanja za posamezni kvantil, ki ga dobimo iz enačbe (2), simultanimi intervali zaupanja za nekaj izbranih kvantilov, ki jih dobimo s pomočjo multinomske metode, in simultanimi intervali zaupanja za vse kvantile, ki jih dobimo iz pasov zaupanja, je na nek način umetna. To je zato, ker spodnja meja zaupanja za določen kvantil p zagotovi tudi spodnjo mejo zaupanja za vse kvantile večje od p. Podobno tudi zgornja meja zaupanja za določen kvantil p zagotovi spodnjo mejo zaupanja za vse kvantile manjše od p. Zato intervali zaupanja za posamezni kvantil in simultani intervali zaupanja za več kvantilov v bistvu generirajo simultane intervale zaupanja za vse kvantile, zato se da pomisliti, da tudi zagotovijo pasove zaupanja za celo neznano porazdelitveno funkcijo.

Vendar, če nas zanima samo določena množica kvantilov, potem multinomska metoda na učinkovit način poišče ozke intervale zaupanja za vse tiste kvantile, ki nas zanimajo. Zato se problem lahko obravnava kot zagotavljanje pasov zaupanja za neznano porazdelitveno funkcijo, ki so ožji v določenih kvantilih, ki nas zanimajo.

Relativne prednosti in slabosti različnih pristopov reševanja tega problema so odvisne tako od števila kvantilov, ki nas zanimajo, kot tudi od tega, kako se razprostirajo. Če nas zanima veliko kvantilov, ki se razprostirajo po celem intervalu $(0,1)$, potem je najlažje vzeti Kolmogorovove simultane intervale zaupanja v enačbi (3) ali simultane intervale zaupanja, ki jih generiramo iz drugih neparametričnih pasov zaupanja, saj multinomska metoda verjetno ne bo veliko izboljšala dolžine intervalov relativno glede na te intervale.

4.7. **Sklep.** Če nas zanimajo simultani intervali zaupanja le za neko manjše število kvantilov, jih lahko izračunamo s pomočjo metode, ki temelji na multinomski porazdelitvi. Za izračun simultane stopnje zaupanja obstaja rekurziven algoritem, katerega računska zahtevnost raste s številom kvantilov, ki nas zanimajo. Za simultane intervale zaupanja želimo poiskati množice optimalnih mejnih vrednosti. Da bi jih lažje našli, si lahko pomagamo s petimi kriteriji: simterija, enostranskost in dvostranskost, razpon intervala zaupanja, stopnja zaupanja in gnezdenje. Simultani intervali zaupanja, ki jih dobimo z multinomsko metodo so običajno ožji kot tisti, ki jih dobimo iz pasov zaupanja, in širši od intervalov zaupanja za posamezne kvantile.

5. Primerjava neparametrične metode na osnovi multinomske porazdelitve s parametričnima metodama

V tem poglavju bodo predstavljeni primeri uporabe algoritma iz poglavja (4.3) za vzorce velikosti $n = 20$, $n = 50$ in $n = 80$ in stopnjo zaupanja 0.95%. Narejene bodo tudi primerjave s parametričnimi pristopi, ki temeljijo na normalni in Weibullovi porazdelitvi.

5.1. **Vzorec velikosti $n = 20$.** Za vzorec velikosti $n = 20$ in stopnjo zaupanja 0.95% bodo izračunani simultani intervali zaupanja za vse kvartile, zgornji in spodnji decil ter njihove kombinacije. Najprej bodo predstavljene optimalne rešitve za individualne intervale zaupanja, nato bodo predstavljene optimalne rešitve za simultane intervale zaupanja za dva kvantila, sledile bodo optimalne rešitve za simultane intervale zaupanja za tri kvantile, na koncu pa še rešitve za vseh pet kvantilov ter primerjava s simultanimi intervali zaupanja, ki smo jih dobili z metodo Kolmogorova.

Najprej izračunajmo intervale zaupanja z individualno stopnjo zaupanja 0.95% za kvantile $x_{0.1}$, $x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$ in $x_{0.9}$. Dobimo optimalne rešitve

$$\begin{aligned} x_{0.1} &\in (-\infty, X_{(5)}], \\ x_{0.25} \in [X_{(1)}, X_{(9)}], x_{0.25} &\in [X_{(2)}, X_{(10)}], \\ x_{0.5} &\in [X_{(6)}, X_{(15)}], \\ x_{0.75} \in [X_{(11)}, X_{(19)}], x_{0.75} &\in [X_{(12)}, X_{(20)}] \\ \text{in } x_{0.9} &\in [X_{(16)}, \infty). \end{aligned}$$

Sedaj poiščimo simultane intervale zaupanja za $x_{0.25}$ in $x_{0.75}$. Izkaže se, da obstaja 12 optimalnih rešitev, od katerih sta prva in zadnja simetrični, ostale pa so sestavljene iz petih parov. Rešitve so prikazane v tabeli 1.

$x_{0.25}$	$x_{0.75}$	Stopnja zaupanja
$[X_{(2)}, X_{(12)}]$	$[X_{(9)}, X_{(19)}]$	0.95001
$(-\infty, X_{(11)}]$	$[X_{(12)}, X_{(20)}]$	0.95208
$[X_{(1)}, X_{(9)}]$	$[X_{(10)}, \infty)$	0.95208
$[X_{(1)}, X_{(9)}]$	$[X_{(9)}, X_{(20)}]$	0.95244
$[X_{(1)}, X_{(12)}]$	$[X_{(12)}, X_{(20)}]$	0.95244
$(-\infty, X_{(9)}]$	$[X_{(10)}, X_{(20)}]$	0.95257
$[X_{(1)}, X_{(11)}]$	$[X_{(12)}, \infty)$	0.95257
$[X_{(1)}, X_{(11)}]$	$[X_{(11)}, X_{(19)}]$	0.95564
$[X_{(2)}, X_{(10)}]$	$[X_{(10)}, X_{(20)}]$	0.95564
$[X_{(1)}, X_{(10)}]$	$[X_{(10)}, X_{(19)}]$	0.95650
$[X_{(2)}, X_{(11)}]$	$[X_{(11)}, X_{(20)}]$	0.95650
$[X_{(1)}, X_{(10)}]$	$[X_{(11)}, X_{(20)}]$	0.96651

Tabela 1. Optimalni simultani intervali zaupanja za $x_{0.25}$ in $x_{0.75}$ za $n = 20$ in $1 - \alpha = 0.95$

Optimalne rešitve simultanih intervalov zaupanja za $x_{0.1}$ in $x_{0.9}$ so tri. Od teh je zadnja simetrična. Rešitve so prikazane v tabeli 2.

$x_{0.1}$	$x_{0.9}$	Stopnja zaupanja
$(-\infty, X_{(5)}]$	$[X_{(14)}, \infty)$	0.95446
$(-\infty, X_{(7)}]$	$[X_{(16)}, \infty)$	0.95446
$(-\infty, X_{(6)}]$	$[X_{(15)}, \infty)$	0.97752

Tabela 2. Optimalni simultani intervali zaupanja za $x_{0.1}$ in $x_{0.9}$ za $n = 20$ in $1 - \alpha = 0.95$

V tabeli 3 so prikazane optimalne rešitve simultanih intervalov zaupanja za $x_{0.5}$ in $x_{0.75}$. Obstaja deset optimalnih rešitev, od katerih imata dve simetričen interval za mediano, $x_{0.5} \in [X_{(5)}, X_{(16)}]$ in $x_{0.5} \in [X_{(6)}, X_{(15)}]$.

$x_{0.5}$	$x_{0.75}$	Stopnja zaupanja
$[X_{(3)}, X_{(16)}]$	$[X_{(12)}, X_{(20)}]$	0.95040
$[X_{(5)}, X_{(15)}]$	$[X_{(10)}, X_{(19)}]$	0.95078
$[X_{(6)}, X_{(16)}]$	$[X_{(9)}, X_{(19)}]$	0.95084
$[X_{(5)}, X_{(17)}]$	$[X_{(12)}, X_{(20)}]$	0.95142
$[X_{(6)}, X_{(17)}]$	$[X_{(10)}, X_{(19)}]$	0.95206
$[X_{(4)}, X_{(16)}]$	$[X_{(12)}, \infty)$	0.95254
$[X_{(5)}, X_{(16)}]$	$[X_{(11)}, X_{(19)}]$	0.95363
$[X_{(6)}, X_{(15)}]$	$[X_{(10)}, X_{(20)}]$	0.95403
$[X_{(5)}, X_{(15)}]$	$[X_{(11)}, X_{(20)}]$	0.95878
$[X_{(6)}, X_{(16)}]$	$[X_{(11)}, X_{(20)}]$	0.96055

TABELA 3. Optimalni simultani intervali zaupanja za $x_{0.5}$ in $x_{0.75}$ za $n = 20$ in $1 - \alpha = 0.95$

Če primerjamo simultane intervale zaupanja z individualnimi, lahko vidimo, da so simultani intervali zaupanja širši kot intervali zaupanja z individualno stopnjo zaupanja. Opazimo lahko, da ko pridemo od intervalov zaupanja z individualno stopnjo zaupanja do intervalov zaupanja s simultano stopnjo zaupanja, se širina vsaj enega intervala poveča.

Sedaj pa si oglejmo simultane intervale zaupanja za tri kvantile. Pričakujemo, da bodo širši kot simultani intervali zaupanja za dva kvantil. Če želimo simultane intervale zaupanja za $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ in $x_{0.75}$, obstaja 91 optimalnih rešitev, od katerih so tri simetrične

$$x_{0.25} \in [X_{(2)}, X_{(12)}], x_{0.5} \in [X_{(2)}, X_{(9)}] \text{ in } x_{0.75} \in [X_{(9)}, X_{(19)}]$$

s stopnjo zaupanja 0.95001,

$$x_{0.25} \in [X_{(2)}, X_{(13)}], x_{0.5} \in [X_{(4)}, X_{(17)}] \text{ in } x_{0.75} \in [X_{(8)}, X_{(19)}]$$

s stopnjo zaupanja 0.95007 in

$$x_{0.25} \in [X_{(1)}, X_{(10)}], x_{0.5} \in [X_{(5)}, X_{(16)}] \text{ in } x_{0.75} \in [X_{(11)}, X_{(20)}]$$

s stopnjo zaupanja 0.95834.

Opazimo lahko, da je prvi od teh izpeljan iz vstopa v tabelo 1 z intervalom za $x_{0.5}$, saj sledi direktno iz drugih dveh intervalov.

Če nas zanimajo simultani intervali zaupanja za $x_{0.1}$, $x_{0.5}$ in $x_{0.9}$, potem imamo 9 optimalnih rešitev, od katerih je edina simetrična rešitev

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(7)}], x_{0.5} \in [X_{(6)}, X_{(15)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(14)}, \infty)$$

s stopnjo zaupanja 0.95472.
Kot smo pričakovali, se da opaziti, da je širina vsaj enega intervala zaupanja večja kot za dva kvantila.

Sedaj pa si oglejmo še simultane intervale zaupanja za vseh pet kvantilov. Če želimo simultane intervale zaupanja za $x_{0.1}$, $x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$ in $x_{0.9}$, potem je morda dobro izbrati simetrične intervale

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(9)}], x_{0.25} \in [X_{(2)}, X_{(14)}], x_{0.5} \in [X_{(4)}, X_{(17)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(7)}, X_{(19)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(12)}, \infty)$$

s stopnjo zaupanja 0.95018, čeprav to niso optimalni, ker imajo intervali

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(9)}], x_{0.25} \in [X_{(2)}, X_{(13)}], x_{0.5} \in [X_{(4)}, X_{(17)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(7)}, X_{(19)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(12)}, \infty)$$

in

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(9)}], x_{0.25} \in [X_{(2)}, X_{(14)}], x_{0.5} \in [X_{(4)}, X_{(17)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(8)}, X_{(19)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(12)}, \infty)$$

vsak stopnjo zaupanja 0.95008.

Poleg tega so v tem primeru simultani intervali zaupanja, pridobljeni iz Kolmogorovovih pasov zaupanja z uporabo enačbe (3) za $d_{0.05,20} = 0.294$ enaki

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(8)}], x_{0.25} \in (-\infty, X_{(11)}], x_{0.5} \in [X_{(5)}, X_{(16)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(10)}, \infty) \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(13)}, \infty)$$

ki so nekako podobni in imajo natančno stopnjo zaupanja enako 0.98123.

5.2. **Vzorec velikosti $n = 50$.** Tu bodo izračunani simultani intervali zaupanja za spodnji in zgornji kvartil, spodnji in zgornji decil, mediano in zgornji kvartil ter simultani intervali zaupanja za $x_{0.1}$,$x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$ in $x_{0.9}$ za stopnjo zaupanja 95% in vzorec velikosti $n = 50$.

Simultani intervali zaupanja za $x_{0.25}$ in $x_{0.75}$ imajo 36 optimalnih rešitev, od tega dve simetrični

$$x_{0.25} \in [X_{(7)}, X_{(21)}] \text{ in } x_{0.75} \in [X_{(30)}, X_{(44)}]$$

s stopnjo zaupanja 0.95025 in

$$x_{0.25} \in [X_{(6)}, X_{(20)}] \text{ in } x_{0.75} \in [X_{(31)}, X_{(45)}]$$

s stopnjo zaupanja 0.95030.

Za intervale zaupanja $x_{0.1}$ in $x_{0.9}$ je edina simetrična rešitev

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(10)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(41)}, \infty)$$

s stopnjo zaupanja 0.95116.

Za intervale zaupanja $x_{0.5}$ in $x_{0.75}$ je 29 optimalnih rešitev.

Če želimo simultane intervale zaupanja za $x_{0.1}$,$x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$ in $x_{0.9}$, potem imajo simetrični intervali zaupanja

$$x_{0.1} \in [X_{(1)}, X_{(12)}], x_{0.25} \in [X_{(6)}, X_{(21)}], x_{0.5} \in [X_{(16)}, X_{(35)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(30)}, X_{(45)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(39)}, X_{(50)}]$$

stopnjo zaupanja 0.95629, ampak niso optimalni, saj je stopnja zaupanja 0.95629 dosežena, če interval zaupanja za mediano nadomestimo z $x_{0.5} \in [X_{(17)}, X_{(35)}]$ ali $x_{0.5} \in [X_{(16)}, X_{(34)}]$.

Če primerjamo s simultanimi intervali zaupanja, ki jih dobimo iz Kolmogorovovih pasov zaupanja z uporabo enačbe (3) z $d_{0.05,50} = 0.192$

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(15)}], x_{0.25} \in [X_{(3)}, X_{(23)}], x_{0.5} \in [X_{(16)}, X_{(35)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(28)}, X_{(48)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(36)}, \infty)$$

vidimo, da ti intervali zaupanja niso več tako informativni ter imajo natančno stopnjo zaupanja 0.99152 in so zato mnogo širši.

5.3. **Vzorec velikosti $n = 80$.** Tudi tu bodo izračunani simultani intervali zaupanja za spodnji in zgornji kvartil, spodnji in zgornji decil, mediano in zgornji kvartil ter simultani intervali zaupanja za $x_{0.1}$,$x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$ in $x_{0.9}$ za stopnjo zaupanja 95%, vendar bo vzorec velikosti $n = 80$. Simultani intervali zaupanja za $x_{0.25}$ in $x_{0.75}$ imajo 60 optimalnih rešitev, od katerih nobena ni simetrična.
Za intervale zaupanja $x_{0.1}$ in $x_{0.9}$ je 25 optimalnih rešitev, kjer je edina simetrična rešitev

$$x_{0.1} \in [X_{(3)}, X_{(15)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(66)}, X_{(78)}]$$

s stopnjo zaupanja 0.95457.
Za intervale zaupanja $x_{0.5}$ in $x_{0.75}$ je 63 optimalnih rešitev.
Če želimo simultane intervale zaupanja za $x_{0.1}$,$x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$ in $x_{0.9}$, potem imajo simetrični intervali zaupanja

$$x_{0.1} \in [X_{(2)}, X_{(16)}], x_{0.25} \in [X_{(9)}, X_{(29)}], x_{0.5} \in [X_{(28)}, X_{(53)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(52)}, X_{(72)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(65)}, X_{(79)}]$$

stopnjo zaupanja 0.95158 in ne vsebujejo vseh simetričnih dopustnih rešitev. Ta rešitev ni optimalna, saj je stopnja zaupanja 0.95067 dosežena, če interval zaupanja za spodnji kvartil nadomestimo z $x_{0.25} \in [X_{(10)}$.

Če primerjamo s simultanimi intervali zaupanja, ki jih dobimo iz Kolmogorovovih pasov zaupanja z uporabo enačbe (3) z $d_{0.05,80} = 0.152$

$$x_{0.1} \in (-\infty, X_{(21)}], x_{0.25} \in [X_{(8)}, X_{(33)}], x_{0.5} \in [X_{(28)}, X_{(53)}],$$
$$x_{0.75} \in [X_{(48)}, X_{(73)}] \text{ in } x_{0.9} \in [X_{(60)}, \infty)$$

vidimo da, tako kot za vzorec velikosti $n = 50$, niso več tako informativni, ker so mnogo širši ter imajo natančno stopnjo zaupanja 0.99301.

5.4. **Primerjava s predpostavko o normalni porazdelitvi.** V Liu et al. (2013) so za nabor podatkov velikosti $n = 120$ in predpostavko o normalni porazdelitvi dobil intervale zaupanja

$$x_{0.025} \in [8.04, 9.12], x_{0.25} \in [10.13, 10.83], x_{0.75} \in [12.12, 12.83] \text{ in } x_{0.975} \in [13.83, 14.92]$$

s skupno stopnjo zaupanja 95%. Metoda konstruiranja simultanih intervalov zaupanja lahko poišče intervale zaupanja brez uporabe predpostavke o normalni porazdelitvi, ampak imajo intervali zaupanja

$$x_{0.025} \in [X_{(1)}, X_{(120)}] \text{ in } x_{0.975} \in [X_{(1)}, X_{(120)}]$$

verjetnost pokritja le 0.90627, zato ni mogoče narediti dvostranskih intervalov zaupanja za oba spodnja in zgornja kvantila.
Vendar imajo simetrični intervali zaupanja

$$x_{0.025} \in (-\infty, X_{(9)}], x_{0.25} \in [X_{(19)}, X_{(41)}], x_{0.75} \in [X_{(80)}, X_{(102)}] \text{ in } x_{0.975} \in [X_{(112)}, \infty)$$

stopnjo zaupanja 0.95299 in za ta nabor podatkov znašajo

$$x_{0.025} \in (-\infty, 8.95], x_{0.25} \in [9.99, 10.94], x_{0.75} \in [12.23, 12.89] \text{ in } x_{0.975} \in [13.23, \infty).$$

Opazimo, da so intervali zaupanja, ki smo jih dobili s pomočjo predpostavke o normalni porazdelitvi, omejeni simetrično okoli vzorčnega povprečja 11.48, medtem ko pri neparametričnih intervalih zaupanja to ne drži. Zato je bolj zaželjeno uporabljati neparametrične metode za izračun intervalov zaupanja, saj ti niso odvisni od predpostavk o porazdelitvi.

5.5. **Primerjava s predpostavko o Weibullovi porazdelitvi.**

Definicija 5.1. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena Weibullovo, če ima gostoto enako

$$f(x;\lambda,k)=\begin{cases}\frac{k}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{k-1}e^{-(\frac{x}{\lambda})^k} & \text{za } x\geq 0,\\ 0 & \text{za } x<0,\end{cases}$$

kjer je $k>0$ parameter oblike in $\lambda>0$ parameter merila.

Pomembno področje uporabe Weibullove porazdelitve je analiza preživetja oziroma analiza zanesljivosti tehničnih naprav.

V tem primeru uporabimo predpostavko o standardni dvoparametrični Weibullovi porazdelitvi, za katero konstruiramo intervale zaupanja za 95% stopnjo zaupanja. Imamo vzorec velikosti $n=11$ z vrednostmi 2.30, 3.70, 4.25, 4.60, 4.87, 5.14, 5.36, 5.75, 6.00 in 6.40. Intervali zaupanja z natanko 95% stopnjo zaupanja so

$$x_{0.05}\in[0.07,4.85], x_{0.25}\in[1.03,5.21], x_{0.5}\in[3.81,5.94],$$
$$x_{0.75}\in[4.85,11.69] \text{ in } x_{0.95}\in[5.21,38.4].$$

Kot v prejšnjem primeru ni mogoče dobiti neparametričnih dvostranskih intervalov zaupanja za vse te kvantile s 95% stopnjo zaupanja. Vendar imajo simetrični intervali zaupanja

$$x_{0.05}\in[0,X_{(4)}], x_{0.25}\in[0,X_{(7)}], x_{0.5}\in[X_{(2)},X_{(10)}],$$
$$x_{0.75}\in[X_{(5)},\infty) \text{ in } x_{0.95}\in[X_{(8)},\infty)$$

stopnjo zaupanja 0.97280 in za te podatke dajo

$$x_{0.05}\in[0,4.60], x_{0.25}\in[0,5.20], x_{0.5}\in[3.70,6.00],$$
$$x_{0.75}\in[4.87,\infty) \text{ in } x_{0.95}\in[5.36,\infty).$$

Tudi v tem primeru se zdi bolje vzeti intervale zaupanja, ki smo jih pridobili s pomočjo multinomske metode, saj ti ne zahtevajo predpostavke o porazdelitvi.

5.6. **Sklep.** V zgornjih primerih smo videli, da drži teorija, da so posamezni intervali zaupanja ožji od simultanih, in da se z dodajanjem kvantilov tudi intervali zaupanja širijo. Najširši pa so intervali zaupanja, pridobljeni iz Kolmogorovovih pasov zaupanja. Če nas zanima le neko manjše število izbranih kvantilov, je zato bolje uporabiti multinomsko metodo, saj nam ta da ožje intervale zaupanja. Videli smo tudi, da je bolje uporabiti neparametrične metode, saj tako nismo omejeni na predpostavke o porazdelitvi.

6. Zaključek

Razlika med intervali zaupanja in simultanimi intervali zaupanja je v tem, da imajo posamezni intervali zaupanja vsak posebej stopnjo zaupanja $1-\alpha$, simultani intervali zaupanja pa imajo skupno stopnjo zaupanja $1-\alpha$, torej ima vsak posebej višjo stopnjo zaupanja. Za izračun posameznih intervalov zaupanja obstaja uporabna in učinkovita metoda, ki temelji na binomski porazdelitvi. Metoda nam da intervale zaupanja s stopnjo zaupanja natanko $1-\alpha$. Če iščemo simultane intervale zaupanja za vse kvantile porazdelitve ali če nas zanimajo intervali zaupanja za veliko kvantilov, ki so razpršeni po celem intervaku $(0,1)$, potem je najbolje dobiti simultane intervale zaupanja iz pasov zaupanja. Pasove zaupanja se da izračunat s pomočjo metode Kolmogorova, ki temelji na prištevanju in odštevanju kritične točke. Simultani intervali zaupanja, ki jih dobimo iz pasov zaupanja so navadno zelo široki in zato pogosto neuporabni. Zato je bolje, da če nas zanima le manjše število kvantilov, uporabimo raje metodo, ki temelji na multinomski porazdelitvi. Za izračun simultane stopnje zaupanja obstaja rekurziven algoritem, katerega računska zahtevnost raste s številom kvantilov, ki nas zanimajo. Za simultane intervale zaupanja želimo poiskati množice optimalnih mejnih vrednosti. Da bi jih lažje našli, si lahko pomagamo s petimi kriteriji. Simultani intervali zaupanja, ki jih dobimo s to metodo so običajno ožji kot tisti, ki jih dobimo iz pasov zaupanja, in širši od intervalov zaupanja za posamezne kvantile. Na koncu so sledili še primeri, ki so potrdili zgornjo teorijo. Tam smo videli tudi, da je bolje uporabiti neparametrične metode, saj tako nismo omejeni na predpostavke o porazdelitvi.

Slovar strokovnih izrazov

simultaneous confidence intervals simultani intervali zaupanja
confidence band pas zaupanja
computational intensity računska zahtevnost
boundary values mejne vrednosti
feasible boundary values dopustne mejne vrednosti
super-feasible boundary values optimalne mejne vrednosti
quantile kvantil
empirical cumulative distribution function empirična kumulativna porazdelitvena funkcija

Literatura

[1] S. Burke, *Confidence Intervals for the Median and Other Percentiles*, v: STAT COE-Report-08-2016, [ogled 28. 4. 2018], dostopno na `https://www.afit.edu/stat/statcoe_files/CI_for_Population_Median.pdf`.

[2] A. J. Hayter, *Simultaneous Confidence Intervals for Several Quantiles of an Unknown Distribution*, The American Statistician (2014) 68:1, 56-62, DOI:10.1080/00031305.2013.869259.

[3] A. J. Hayter, *Simultaneous Confidence Intervals for Several Quantiles of an Unknown Distribution*, The American Statistician, [ogled 4. 10. 2017] dostopno na `http://dx.doi.org/10.1080/00031305.2013.869259`.

[4] *Computational Intensity Of Mat Mul*, [ogled 7. 8. 2018], dostopno na `http://www.cs.ucsb.edu/ gilbert/cs140/note/ComputationalIntensityOfMatMul.pdf`.

[5] *Confidence and prediction bands*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 5. 5. 2018], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_and_prediction_bands`.

[6] *Confidence Intervals for Percentiles and Medians*, v: Milefoot, [ogled 28. 4. 2018], dostopno na `http://www.milefoot.com/math/stat/ci-medians.htm`.

[7] *Empirical distribution function*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 6. 5. 2018], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Empirical_distribution_function#Definition`.

[8] *Understanding individual and simultaneous confidence levels in multiple comparisons*, v: Minitab Express, [ogled 28. 11. 2018], dostopno na `http://support.minitab.com/en-us/minitab-express/1/help-and-how-to/modeling-statistics/anova/supporting-topics/multiple-comparisons/understanding-individual-and-simultaneous-confidence-levels/`.

[9] *Weibull distribution*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 21. 4. 2018], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution`.

[10] *Why are simultaneous confidence intervals wider than the normal ones?*, v: Stack Exchange, [ogled 28. 11. 2017], dostopno na `https://stats.stackexchange.com/questions/188372/why-are-simultaneous-confidence-intervals-wider-than-the-normal-ones`.