

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

Analiza 2D konstrukcij z metodo končnih elementov

Zaključna naloga Razvojno raziskovalnega programa I. stopnje
Strojništvo

Igor Banfi

Ljubljana, avgust 2018

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

Analiza 2D konstrukcij z metodo končnih elementov

Zaključna naloga Razvojno raziskovalnega programa I. stopnje
Strojništvo

Igor Banfi

Mentor: doc. dr. Gregor Čepon, univ. dipl. inž. stroj.
Somentor: prof. dr. Miha Boltežar, univ. dipl. inž. stroj.

Ljubljana, avgust 2018

VLOGA ZA PREVZEM TEME ZAKLJUČNE NALOGE

Univerzitetni študijski program I. stopnje strojništvo

Št. zaključne naloge (izpolni Študentski referat): UNI/1078

Datum prejema vloge v ŠR: 27.8.2018

Podatki o študentu:

Ime in priimek: IGOR BANFI Vpisna št. 23150137

Datum, kraj rojstva: 30.12.1996, KRANJ

Podatki o zaključni nalogi:

Naslov zaključne naloge (slovenski):

Analiza 2D konstrukcij z metodo končnih elementov

Naslov zaključne naloge (angleški):

Analysis of 2D structures using Finite element method

Mentor na FS: doc. dr. Gregor Čepon

Somentor na FS: prof. dr. Miha Boltežar

Veljavnost naslova teme je 6 mesecev od oddaje Vloge za prevzem.

Podpis študenta:

Banfi Igor

Podpis mentorja:

Čepon

Zahvala

Rad bi se zahvalil mentorju doc. dr. Gregorju Čeponu, za vso potrpežljivost in izredno priložnost, da lahko delam na temi, ki me zanima. Zahvaljujem se prof. dr. Mihi Boltežarju, saj je kot vodja laboratorija omogočil raziskavo teme. Na koncu bi se rad zahvalil tudi družini za vso izkazano podporo.

Spodaj podpisani/-a Igor Banfi študent/-ka Fakultete za strojništvo Univerze v Ljubljani, z vpisno številko 23150137, avtor/-ica pisnega zaključnega dela študija z naslovom: Analiza 2D konstrukcij z metodo končnih elementov,

IZJAVLJAM,

1. * a) da je pisno zaključno delo študija rezultat mojega samostojnega dela;
b) da je pisno zaključno delo študija rezultat lastnega dela več kandidatov in izpolnjuje pogoje, ki jih Statut UL določa za skupna zaključna dela študija ter je v zahtevanem deležu rezultat mojega samostojnega dela;
2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;
3. da sem pridobil/-a vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označil/-a;
4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnal/-a v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil/-a soglasje etične komisije;
5. da soglašam z uporabo elektronske oblike pisnega zaključnega dela študija za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;
6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;
7. da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija;
8. da dovoljujem uporabo mojega rojstnega datuma v zapisu COBISS.

V Ljubljani, 27. 8. 2018

Podpis avtorja/-ice:



* Obkrožite varianto a) ali b).

Analiza 2D konstrukcij z metodo končnih elementov

Igor Banfi

Ključne besede: palične konstrukcije
 metoda končnih elementov
 palice
 nosilci
 togostne matrike
 masne matrike
 lastne frekvence

V tej nalogi je predstavljen postopek statične in dinamske analize ravninske konstrukcije. Konstrukcijo sestavljajo eno-dimenzijski konstrukcijski elementi palic in nosilcev. Analiza je izvedena po metodi končnih elementov z uporabo dvo-vozliščnih končnih elementov. Prikazan je postopek določitve togostne in masne matrike konstrukcije ob upoštevanju različnih pogojev konsistentnega prehoda in robnih pogojev. Izračunane so deformacije konstrukcije pod obremenitvijo in lastne frekvence konstrukcije. Verifikacija razvitega algoritma za preračun ravninskih konstrukcij je izvedena preko primerjave rezultatov pridobljenih z Ansys APDL in analitičnimi izračuni.

Abstract

UDC 519.61(043.2)

No.: UN I/1078

Analysis of 2D structures using finite element method

Igor Banfi

Ključne besede: truss structures
finite element method
trusses
beams
stiffness matrices
mass matrices
natural frequencies

In this thesis static and dynamic analysis of plane structure is presented. Structure is composed out of one dimensional construction elements that are presented by trusses and beams. Analysis is carried out via finite element method by using two node finite elements. The work presents the construction of mass and stiffness matrix by considering conditions of consistent transition and various boundary conditions. Deformations of structure under load and natural frequencies are calculated. Accuracy of the developed calculation scheme is verified based on the comparison of results obtained via Ansys APDL and analytical calculations.

Kazalo

Kazalo slik	viii
Kazalo preglednic	ix
Seznam uporabljenih simbolov	x
Seznam uporabljenih okrajšav	xi
1 Uvod	1
1.1 Ozadje problema	1
1.2 Cilji naloge	1
2 Teoretične osnove in pregled literature	2
2.1 Izpeljava končnih elementov	2
2.1.1 Izpeljava končnega elementa palice	2
2.1.2 Izpeljava končnega elementa nosilca	4
2.1.3 Omejitve formulacije	7
2.2 Dinamske lastnosti konstrukcije	7
2.2.1 Določitev osnovne gibalne enačbe	7
2.2.2 Določitev lastnih frekvenc konstrukcije	8
3 Metodologija raziskave	9
3.1 Definicija sistema	10
3.2 Enačbe končnega elementa	10
3.3 Usklajevanje enačb končnih elementov nosilcev	11
3.3.1 Definicija koordinatnega sistema	13
3.4 Združevanje končnih elementov nosilcev	14
3.5 Povezave med nosilci	15
3.5.1 Toga povezava	15
3.5.2 Členkasta povezava	15
3.5.3 Drсна členkasta povezava	16
3.6 Podpore in upoštevanje robnih pogojev	16
3.6.0.1 Členkasto vpetje	17

3.6.0.2	Konzolno vpetje	17
3.6.0.3	Dršno členkasto vpetje	18
3.7	Reševanje sistema lineranih enačb	18
3.8	Procesiranje rezultatov	18
3.9	Izračun lastnih frekvenc nosilca	18
4	Rezultati	19
4.1	Konzolni nosilec	19
4.1.1	Lastne frekvence	19
4.1.2	Diskusija	20
4.2	Parkerjev most	20
4.2.1	Notranje sile	23
4.2.2	Lastne frekvence	23
4.2.3	Diskusija	24
5	Zaključki	25
5.0.1	Predlogi za nadaljnje delo	25
	Literatura	26

Kazalo slik

Slika 2.1:	Shema končnega elementa palice.	2
Slika 2.2:	Shema končnega elementa nosilca.	5
Slika 3.1:	Shematski prikaz razvitega algoritma.	9
Slika 3.2:	Prikaz končnega elementa.	11
Slika 3.3:	2 Končna elementa nosilca: a) Označene prostostne stopnje vsakega vozlišča. b) Označene prostostne stopnje ko združimo vozlišča. . . .	12
Slika 3.4:	Shema poteka združevanja leve strani enačb.	12
Slika 3.5:	Shema poteka združevanja desne strani enačb.	13
Slika 3.6:	Prikaz definicije koordinatnega sistema.	14
Slika 3.7:	Toga povezava med nosilcema.	15
Slika 3.8:	Členkasta povezava med nosilcema.	16
Slika 3.9:	Drsna členkasta povezava med nosilcema.	16
Slika 3.10:	Členkasto vpetje z reakcijami.	17
Slika 3.11:	Konzolno vpetje z reakcijami.	17
Slika 3.12:	Drsno členkasto vpetje z reakcijami.	18
Slika 4.1:	Shema konzolno vpetega nosilca.	19
Slika 4.2:	Shema sistema generirana s razvito programsko kodo Structural-Python za parkerjev most.	21

Kazalo preglednic

Preglednica 2.1:	Prostostne stopnje in spremenljivke vozlišč palice.	2
Preglednica 2.2:	Prostostne stopnje in spremenljivke vozlišč nosilca.	5
Preglednica 4.1:	Parametri nosilca	19
Preglednica 4.2:	Lastne frekvence konstrukcije	20
Preglednica 4.3:	Parametri palic parkerjevega mostu.	20
Preglednica 4.4:	Vozlišča parkerjevega mostu.	21
Preglednica 4.5:	Palice parkerjevega mostu.	22
Preglednica 4.6:	Izračunane sile.	23
Preglednica 4.7:	Lastne frekvence parkerjevega mostu.	24

Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Enota	Pomen
A	m^2	površina
E	Pa	Elastični modul
E_k	J	Kinetična energija
E_p	J	Potencialna energija
\mathbf{f}	/	Vektor obremenitev
F	N	Sila
I	m^4	Drugi moment prereza
\mathbf{K}	/	Togostna matrika
L	m	Dolžina
\mathbf{M}	/	Masna matrika
M	Nm	Upogibni moment
N	N	Aksialna notranja sila
n	N/m	Natezna porazdeljena obremenitev
T	N	Strižna notranja sila
t	s	Čas
\mathbf{u}	/	Vektor deformacij
u	m	Deformacija v smeri X
q	N/m	Strižna porazdeljena obremenitev
w	m	Deformacija v smeri Z
φ	rad	Deformacija v smeri Φ
ρ	kg/m^3	Gostota

Indeksi

e	končni element
n	nosilec
g	globalni

Seznam uporabljenih okrajšav

Okrajšava	Pomen
NFS	Vozliščni podpis (ang. Node Freedom Signature)
PKP	Pogoji Konsistentnega Prehoda
RP	Robni Pogoji

1 Uvod

1.1 Ozadje problema

Pri konstruiranju jeklenih konstrukcij iz konstrukcijskih elementov je za pravilno in najbolj ekonomično izbiro konstrukcijskega elementa potrebno predvideti notranje sile in momente, ki jih bo ta nosilec/palica prenašal. Če je konstrukcija statično določena, je mogoče le te določiti na podlagi zapisa ravnovesja sil in momentov vseh konstrukcijskih elementov. V kolikor je konstrukcija statično predoločena oziroma je v sistemu preveliko število neznanih sil v reakcijah, da bi lahko enolično določili ravnovesje sil, je tak pristop nemogoč. V ta namen so se razvile različne numerične metode, s katerimi je mogoče določiti notranje sile in momente. Eden izmed načinov je reševanje osnovnih diferencialnih enačb problema preko določitve odvodov po metodi končnih razlik. Drugi mogoč način je delitev nosilcev oz. palic na končne elemente, ki smo ga uporabili tudi v našem premeru.

Drugi del naloge se osredotoča na določitev lastnih frekvenc konstrukcije. Če inženir pri konstruiranju ne analizira in ustrezno prilagodi konstrukcije, da ustreza dinamskim zahtevam, lahko pride do porušitve zaradi pojava resonance. To se namreč lahko zgodi navkljub dejstvu, da so statične obremenitve znotraj predpisanih mej. S tega vidika je ključna tudi določitev lastnih frekvenc konstrukcije.

1.2 Cilji naloge

Cilj naloge je izdelava programskega paketa v jeziku Python, ki bo omogočal statično in dinamično analizo ravninskih konstrukcij. Program bo omogočal generacijo togostne in masne matrike konstrukcije po metodi končnih elementov, ter omogočal izračun deformacij, notranjih sil in lastnih frekvenc konstrukcije. Programski paket je v celoti razvit v obliki lastne programske kode, ki bo omogočal izdelavo spletnega okolja za preračun statičnih in dinamičnih lastnosti strukture.

2 Teoretične osnove in pregled literature

2.1 Izpeljava končnih elementov

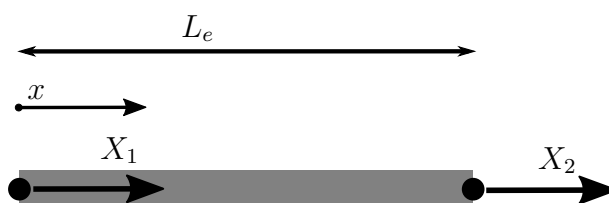
2.1.1 Izpeljava končnega elementa palice

Palica predstavlja konstrukcijski element, ki ni zmožen prenašati upogibnih in strižnih obremenitev. Predpostavljeno je, da je osna obremenitev enakomerno razporejena po prečnem prerezu.

V našem primeru palico razdelimo na posamezne končne elemente in vsakega obravnavamo ločeno. Vsak končni element ima 2 vozlišči in vsako izmed vozlišč ima eno prostostno stopnjo, kot je prikazano na sliki 2.1. Vsaka prostostna stopnja ima primarno in sekundarno spremenljivko navedeno v tabeli 2.1.

Preglednica 2.1: Prostostne stopnje in spremenljivke vozlišč palice.

PROSTOST	PRIMARNA S.	SEKUNDARNA S.
X_1	u_1	N_1
X_2	u_2	N_2



Slika 2.1: Shema končnega elementa palice.

Primarna spremenljivka se po elementu predpostavi v obliki linearnega funkcijskega predpisa:

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L_e},$$

$$\psi_4(x) = \frac{x}{L_e},$$

$$u(x) = u_1\psi_1(x) + u_2\psi_4(x). \quad (2.1)$$

Togostno in masno matriko je mogoče izpeljati po variacijskem postopku z integracijo po per-partes [1]. V tej nalogi bodo matrike izpeljane po energijskem principu [2]. Potencialna energija elementa palice je v našem primeru odvisna samo od deformacije v vozliščih:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EA \left(\frac{-1}{L_e} u_1 + \frac{1}{L_e} u_2 \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{EA}{L_e} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Enačbo (2.2) lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Vektor \mathbf{u} vsebuje vrednosti pomika v posameznem vozlišču končnega elementa:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Matrika \mathbf{K} je togostna matrika končnega elementa:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Za izračun notranjih sil znotraj končnega elementa velja:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Notranje sile v končnem elementu predstavimo kot sile v vozliščih. Če po končnem elementu deluje porazdeljena obremenitev, jo z množenjem z utežnima funkcijama in integracijo predstavimo kot točkovni obremenitvi v vozliščih. Po Galerkinovem pristopu za utežni funkciji uporabimo funkciji $\psi_1(x)$ in $\psi_4(x)$. Vektor sil izračunamo kot:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -N_1 \\ +N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^{L_e} n(x)\psi_1(x)dx \\ \int_0^{L_e} n(x)\psi_4(x)dx \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Masna matrika palice je lahko določena po energijskem principu. Kinetična energija končnega elementa palice je izračunana kot:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \frac{du(x)^2}{dt} dx. \quad (2.8)$$

V enačbi (2.8) za funkcijo $u(x)$ uporabimo interpolirano funkcijo enačba (2.1) in izvedemo izračun kinetične energije:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A \left(\left(1 - \frac{x}{L_e}\right) \frac{du_1}{dt} + \left(\frac{x}{L}\right) \frac{du_2}{dt} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho A L_e}{3} \left(\frac{du_1^2}{dt} + \frac{du_1}{dt} \frac{du_2}{dt} + \frac{du_2^2}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Enačbo (2.9) lahko izrazimo v matrični obliki:

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}}{dt}^T \mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (2.10)$$

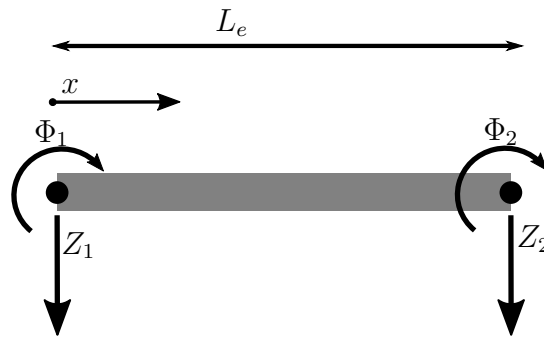
Tako dobimo masno matriko končnega elementa palice:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

2.1.2 Izpeljava končnega elementa nosilca

Nosilec je konstrukcijski element, ki prenaša strižne in upogibne napetosti.

Togostno in masno matriko je mogoče izpeljati po variacijskem postopku z integracijo po per-partes [1]. V tej nalogi bodo izpeljane po energijskem principu [2]. Nosilec bomo razdelili na končne elemente. Na sliki 2.2 je prikazan dvo vozliščni končni element.



Slika 2.2: Shema končnega elementa nosilca.

Preglednica 2.2: Prostostne stopnje in spremenljivke vozlišč nosilca.

PROSTOST	PRIMARNA S.	SEKUNDARNA S.
Z_1	w_1	T_1
Φ_1	φ_1	M_1
Z_2	w_2	T_2
Φ_2	φ_2	M_2

Vsako vozlišče ima 2 prostostni stopnji. Vsaka prostostna stopnja ima primarno in sekundarno spremenljivko navedeno v tabeli 2.2.

Vrednosti spremenljivk znotraj končnega elementa določimo z Lagrangovo interpolacijo:

$$\psi_2(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L_e^2} + 2\frac{x^3}{L_e^3},$$

$$\psi_3(x) = x - 2\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2},$$

$$\psi_5(x) = 3\frac{x^2}{L_e^2} - 2\frac{x^3}{L_e^3},$$

$$\psi_6(x) = -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2},$$

$$w(x) = w_1\psi_2(x) + \phi_1\psi_3(x) + w_2\psi_5(x) + \phi_2\psi_6(x). \quad (2.12)$$

Togostno matriko tako kot pri palici dobimo z reševanjem enačbe za potencialno energijo nosilca:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \frac{M(x)^2}{EI} dx. \quad (2.13)$$

Pri tem upoštevamo Euler-Bernoullijevo relacijo za določitev momenta v nosilcu (2.15) in dobimo:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w}. \quad (2.14)$$

$$M(x) = EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2.15)$$

V enačbo (2.14) vstavimo polinom (2.12) in odvajamo. Po urejanju enačb dobimo togostno matriko v obliki:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L_e} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Za izračun notranjih sil znotraj velja:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (2.17)$$

Notranje sile in upogibne momente v končnem elementu predstavimo kot sile v vozliščih. Če po končnem elementu deluje porazdeljena obremenitev, jo z množenjem z utežnima funkcijama in integracijo predstavimo kot točkovni obremenitvi v vozliščih. Po Galerkinovem pristopu za utežni funkciji uporabimo funkcije $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_5(x)$ in $\psi_6(x)$. Vektor sil in momentov izračunamo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -T_1 \\ +M_1 \\ +T_2 \\ -M_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^{L_e} q(x)\psi_2(x)dx \\ \int_0^{L_e} q(x)\psi_3(x)dx \\ \int_0^{L_e} q(x)\psi_5(x)dx \\ \int_0^{L_e} q(x)\psi_6(x)dx \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Pri izpeljavi masne matrike palice smo se tega lotili po energijskem principu. Izbrani končni element nosilca ima v gibanju kinetično energijo, ki jo izračunamo kot:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A \left(\frac{dw(x)}{dt} \right)^2 dx. \quad (2.19)$$

Za vrednost primarne spremenljivke vstavimo interpolirano funkcijo podano z enačbo (2.12) in dobimo:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\left(1 - 3 \frac{x^2}{L_e^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right) \frac{dw_1}{dt} + \left(x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \frac{d\Phi_1}{dt} \right)^2 dx + \left(3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \right) \frac{dw_2}{dt} + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \frac{d\Phi_2}{dt}. \quad (2.20)$$

Z urejanjem enačbe (2.20) jo lahko zapišemo v matrični obliki:

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{w}^T}{dt} \mathbf{M} \frac{d\mathbf{w}}{dt}. \quad (2.21)$$

Celotna masna matrika \mathbf{M} končnega elementa ima obliko:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A L_e}{6} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

2.1.3 Omejitve formulacije

S predstavljenimi formulacijami dobimo sprejemljive rešitve le v primeru, da so velikosti deformacij majhne. V realnosti se z deformacijo spremeni usmeritev notranjih sil nosilca oziroma palice. V našem primeru se smer notranjih sil določi pred računanjem deformacij in se predpostavi, da le ta ostane konstantna tekom obremenjevanja.

2.2 Dinamske lastnosti konstrukcije

2.2.1 Določitev osnovne gibalne enačbe

Ko imamo znano masno in togostno matriko naše konstrukcije, lahko zapišemo osnovne gibalne enačbe obravnavanega sistema. Pri tem predpostavimo, da so vrednosti v vektorju deformacije 0 takrat, ko je sistem v ravnovesju. Za določitev gibalne enačbe uporabimo 2. Newtonov zakon in dobimo sledeč sistem enačb, ki ga zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.23)$$

2.2.2 Določitev lastnih frekvenc konstrukcije

V obravnavanem sistemu so prisotne vztrajnostne in vračajoče sile, ki nasprotujejo odmikom od ravnovesne lege. V primeru, če je v sistem vložena energija v obliki kinetične energije in/ali potencialne energije, se bo sistem začel gibati po zakonih gibalne enačbe. Če želimo popisati to gibanje, moramo predpostaviti rešitev gibalne enačbe. To dosežemo tako, da zapišemo nastavek v obliki:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}T(t). \quad (2.24)$$

Vektor \mathbf{U} je konstanten in je funkcija krajevne spremenljivke, medtem ko sta spremenljivki $\mathbf{u}(t)$ in $T(t)$ odvisni od časa. Fizično to pomeni, da je amplituda posameznih vrednosti vektorja \mathbf{u} odvisna od časa, medtem ko je razmerje med njima konstantno. Gibanje posameznih premikov v vektorju \mathbf{u} je sinhrono.

Gibalno enačbo lahko opišemo v obliki:

$$\mathbf{M}\mathbf{U}\frac{d^2T}{dt^2} + \mathbf{K}\mathbf{U}T = 0. \quad (2.25)$$

Enačbo (2.25) preuredimo v obliko:

$$-\frac{d^2T(t)/dt^2}{T(t)} = \frac{\mathbf{K}\mathbf{U}}{\mathbf{M}\mathbf{U}}. \quad (2.26)$$

Ker je leva stran enačbe odvisna samo od časa, lahko predpostavimo, da je rešitev leve in desne strani konstanta. Konstanto zapišemo v obliki ω^2 pri čemer dobimo:

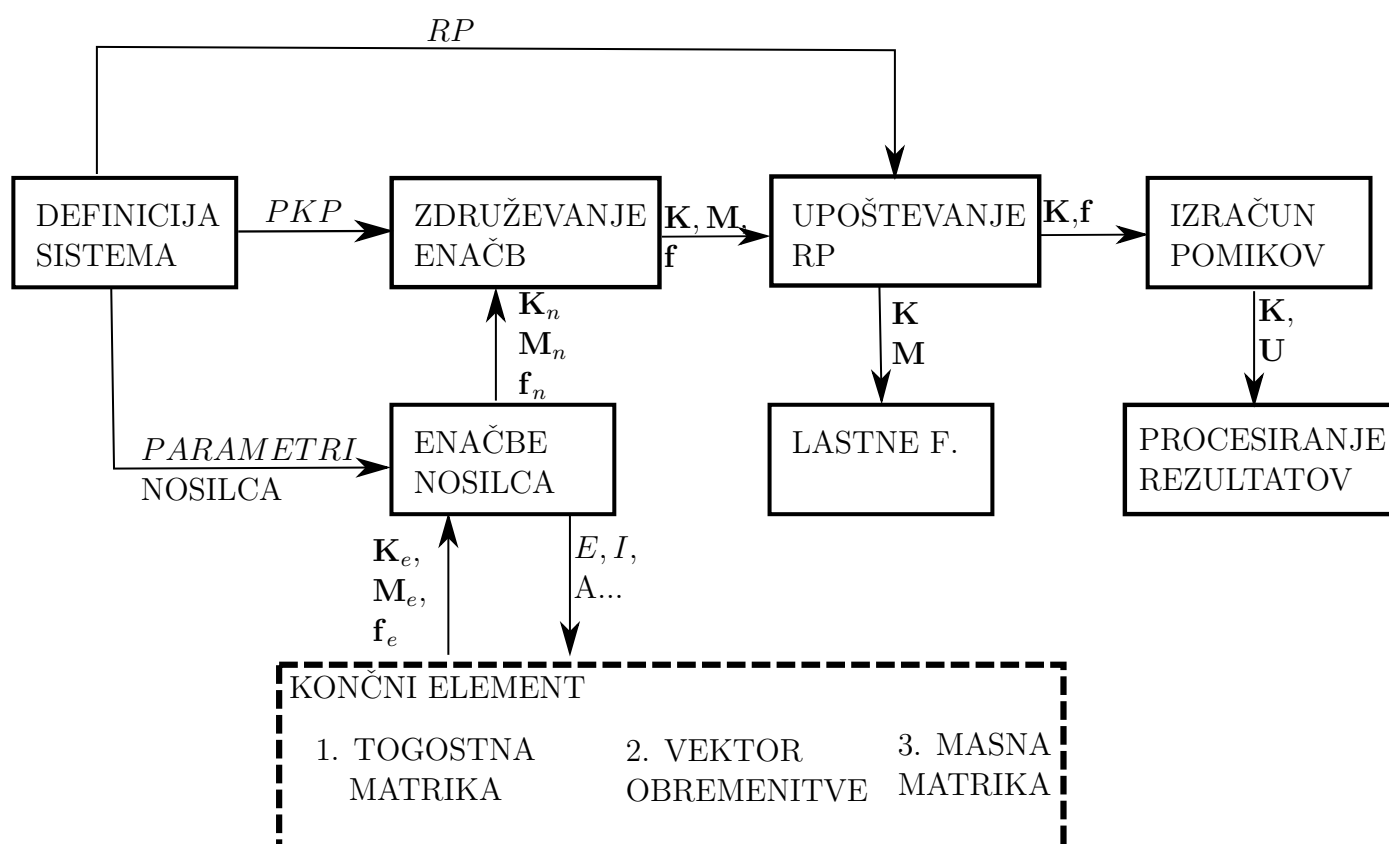
$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) = 0 \quad (2.27)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{U} = 0 \quad (2.28)$$

Enačba (2.28) predstavlja problem lastnih vrednosti, kjer so rešitve lastne krožne frekvence ω naše konstrukcije. Vsaki vrednosti ω pripada lastni vektor \mathbf{U} .

3 Metodologija raziskave

Namen naloge je razvoj programa Structural Python [3] v okolju Python, ki bo omogočal samostojno statično in dinamsko analizo konstrukcije na podlagi definicije sistema. Glavna naloga je zapis togostne in masne matrike celotne konstrukcije z upoštevanjem pogojev konsistentnega prehoda PKP, robnih pogojev RP in pri različnih orientacijah posameznih konstrukcijskih elementov. Formulacija omogoča določitev deformacij, notranjih sil in lastnih frekvence konstrukcije. Shematski prikaz razvitega algoritma je prikazan na sliki 3.1. Sama metodologija raziskave pa sledi postopku predstavljenem v [4].



Slika 3.1: Shematski prikaz razvitega algoritma.

3.1 Definicija sistema

Definicija sistema predstavlja začetni vnos uporabnika. Zato da je sistem enolično definiran, morajo biti znani elementi konstrukcije, njihova skrajna vozlišča, podpore, povezava med elementi in obremenitve. V samem programu je sistem definiran z objekti vozlišč in objekti nosilcev z medsebojnim relacijam med vozlišči.

3.2 Enačbe končnega elementa

Enačbe obravnavane konstrukcije so pridobljene na osnovi togostne in masne matrike končnega elementa. Na tem mestu je potrebno definirati geometrijske lastnosti končnega elementa. Za izračun je potrebno določiti: gostoto ρ , površino prečnega prereza A , elastični modul E , drugi moment prereza I , dolžino končnega elementa L_e . Na tem mestu je potrebno tudi definirati ali obravnavani element konstrukcije predstavlja palico ali nosilec. Formulacijo masne in togostne matrike zapišemo v obliki:

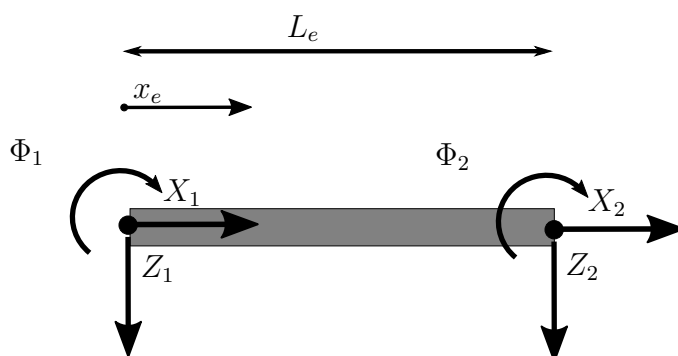
$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L_e & 0 & -12 & 6L_e \\ 0 & 6L_e & 4L_e^2 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L_e & 0 & 12 & -6L_e \\ 0 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{palica} + \mathbf{K}_{nosilec} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL_e}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho AL_e}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L_e & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 22L_e & 4L_e^2 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L_e & 0 & 156 & -22L_e \\ 0 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{palica} + \mathbf{M}_{nosilec} \quad (3.2)$$

Končni element je prikazan na sliki 3.2.



Slika 3.2: Prikaz končnega elementa.

Formulacijo sil \mathbf{f} in vrednosti pomika \mathbf{u} podajata enačbi:

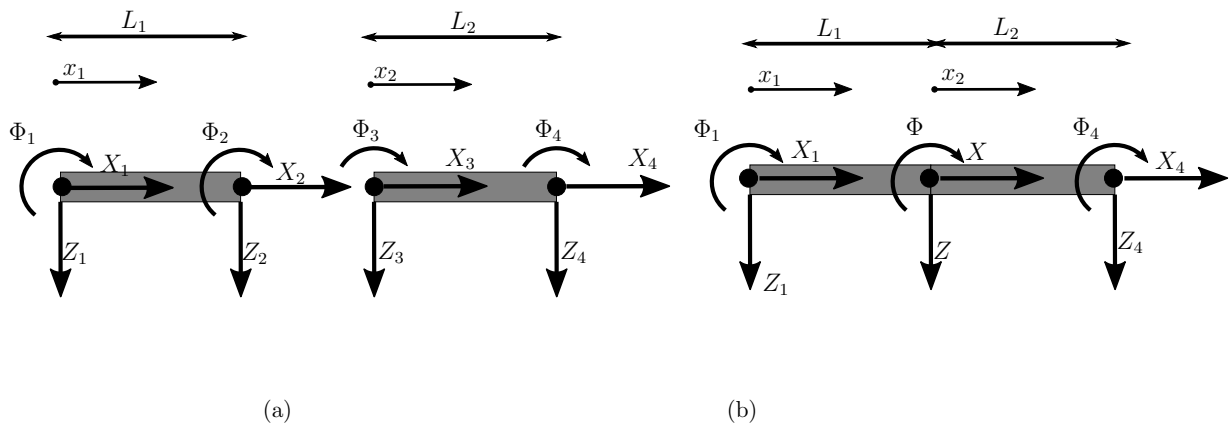
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -N_1 \\ -T_1 \\ +M_1 \\ +N_2 \\ +T_2 \\ -M_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^{L_e} \psi_1(x_e)n(x_e)dx_e \\ \int_0^{L_e} \psi_2(x_e)q(x_e)dx_e \\ \int_0^{L_e} \psi_3(x_e)q(x_e)dx_e \\ \int_0^{L_e} \psi_4(x_e)n(x_e)dx_e \\ \int_0^{L_e} \psi_5(x_e)q(x_e)dx_e \\ \int_0^{L_e} \psi_6(x_e)q(x_e)dx_e \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_e^1 \\ w_e^1 \\ \phi_e^1 \\ u_e^2 \\ w_e^2 \\ \phi_e^2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

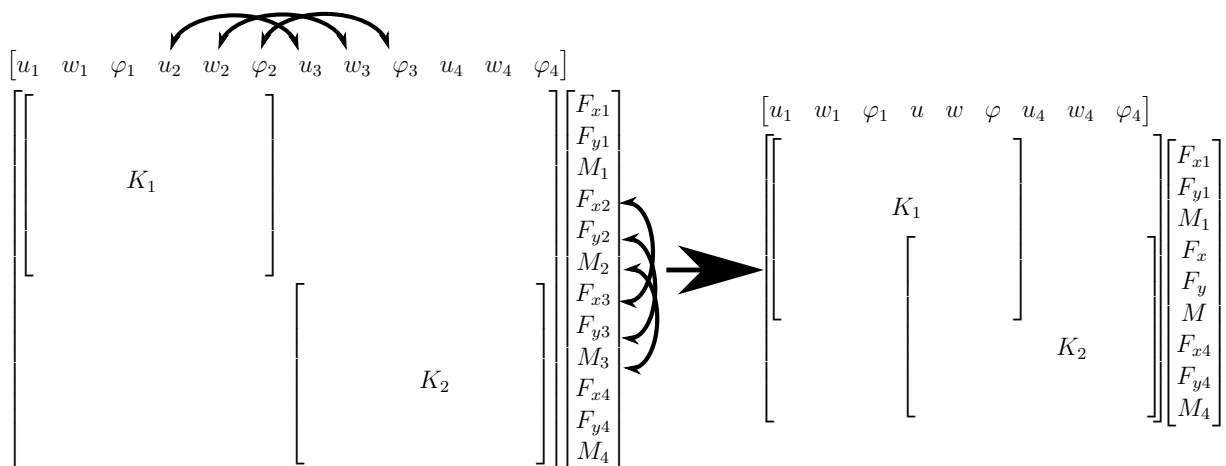
3.3 Usklajevanje enačb končnih elementov nosilcev

Celotna togostna matrika konstrukcije zavisi od elementov, ki sestavljajo obravnavano konstrukcijo. Na sliki 3.3a sta prikazana končna elementa konstrukcije z označenimi prostostnimi stopnjami. Ta končna elementa se v vozlišču stikata, kar pomeni, da imata skupne prostostne stopnje, kot je prikazano na sliki 3.3b. Ker imata s tega vidika identične primarne in sekundarne spremenljivke, je potrebno preurediti togostno, masno matriko in vektor obremenitve. S primarno spremenljivko množimo stolpce v matriki podani z enačbo (3.1), tako da dobimo sekundarno spremenljivko. Na ta način lahko seštejemo stolpce v matriki, ki se množijo s identično primarno spremenljivko. Vsaka vrstica v matriki predstavlja enačbo, ki predstavlja sekundarno spremenljivko, to omogoča da seštejemo vrstice v matriki in vektorju obremenitve, ki predstavlja

identično sekundarno spremenljivko. Ta postopek je prikazan na sliki 3.4 in sliki 3.5. Togostna matrika, ki jo dobimo s tovrstnim postopkom podaja enačba (3.5). Postopek generacije masne matrike je popolnoma enak postopku generacije togostne matrike.



Slika 3.3: 2 Končna elementa nosilca: a) Označene prostostne stopnje vsakega vozlišča. b) Označene prostostne stopnje ko združimo vozlišča.



Slika 3.4: Shema poteka združevanja leve strani enačb.

$$\begin{bmatrix} \int_0^{L_1} n_1(x_1)\psi_1(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} q_1(x)\psi_2(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} q_1(x_1)\psi_3(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} n_1(x_1)\psi_4(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} q_1(x_1)\psi_5(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} q_1(x_1)\psi_6(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_2} n_2(x_2)\psi_1(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_2(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_3(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} n_2(x_2)\psi_4(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_5(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_6(x_2)dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N_1 \\ -T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ -M_2 \\ -N_3 \\ -T_3 \\ M_3 \\ N_4 \\ T_4 \\ -M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \int_0^{L_1} n_1(x_1)\psi_1(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} q_1(x)\psi_2(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} q_1(x_1)\psi_3(x_1)dx_1 \\ \int_0^{L_1} n_1(x_1)\psi_4(x_1)dx_1 + \int_0^{L_2} n_2(x_2)\psi_1(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_1} q_1(x_1)\psi_5(x_1)dx_1 + \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_2(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_1} q_1(x_1)\psi_6(x_1)dx_1 + \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_3(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} n_2(x_2)\psi_4(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_5(x_2)dx_2 \\ \int_0^{L_2} q_2(x_2)\psi_6(x_2)dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N_1 \\ -T_1 \\ M_1 \\ N_2 - N_3 = 0 \\ T_2 - T_3 = 0 \\ M_3 - M_2 = 0 \\ N_4 \\ T_4 \\ -M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_x \\ F_y \\ M \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Slika 3.5: Shema poteka združevanja desne strani enačb.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EA}{L_1^3} & \frac{6EI}{L_1^2} & 0 & -\frac{12EA}{L_1^3} & \frac{6EI}{L_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{4EI}{L_1} & 0 & -\frac{6EI}{L_1^2} & \frac{2EI}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L_1} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_1} + \frac{EA}{L_2} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EA}{L_1^3} & -\frac{6EI}{L_1^2} & 0 & \frac{12EA}{L_1^3} + \frac{12EA}{L_2^3} & -\frac{6EI}{L_1^2} + \frac{6EI}{L_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{2EI}{L_1} & 0 & -\frac{6EI}{L_1^2} + \frac{6EI}{L_2^2} & \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_2} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EA}{L_2^3} & -\frac{6EI}{L_2^2} & 0 & \frac{12EA}{L_2^3} & -\frac{6EI}{L_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L_2^2} & \frac{2EI}{L_2} & 0 & -\frac{6EI}{L_2^2} & \frac{4EI}{L_2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.3.1 Definicija koordinatnega sistema

Ker imajo vsi končni elementi v nosilcu enako orientiran koordinatni sistem nam le tega v vozliščih znotraj nosilca ni potrebno spreminjati. Ker pa je lahko orientacija posameznih nosilcev v skupnih podporah drugačna je potrebno uskladiti usmeritev koordinatnih sistemov v podporah. Konvencionalno je to rešeno z uporabo globalnega koordinatnega sistema, definirane z vektorjema $\mathbf{e}_x = [1, 0]$ in $\mathbf{e}_y = [0, 1]$. V tej diplomski nalogi smo v vozliščih orientirali koordinatni sistem v skladu z nagibom podpor. V primeru drsnih podpor je koordinatni sistem orientiran v skladu z nagibom, kar je omogočalo lažjo implementacijo robnih pogojev, kot je razvidno na sliki 3.6.

Za pretvorbo med globalnimi in lokalnimi se uporablja enačba:

$$\mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_{g,n}. \quad (3.6)$$

Transformacija togostne matrike ima tako obliko:

$$\mathbf{K}_g = \lambda_n^T \mathbf{K}_n \lambda_n. \quad (3.7)$$

prostostno stopnjo, to pomeni, da imata skupno primarno in sekundarno spremenljivko dane prostostne stopnje. Enačbe primarne in sekundarne spremenljivke združimo po principu opisanem pri združevanju enačb končnih elementov enega nosilca (Poglavje 3.3). Za združitev enačb primarne spremenljivke moramo sešteti stolpce matrik, ki se množijo s primarno spremenljivko. Za upoštevanje enakosti sekundarne spremenljivke, moramo sešteti vrstice, po katerih se izračuna vrednost sekundarne spremenljivke.

3.5 Povezave med nosilci

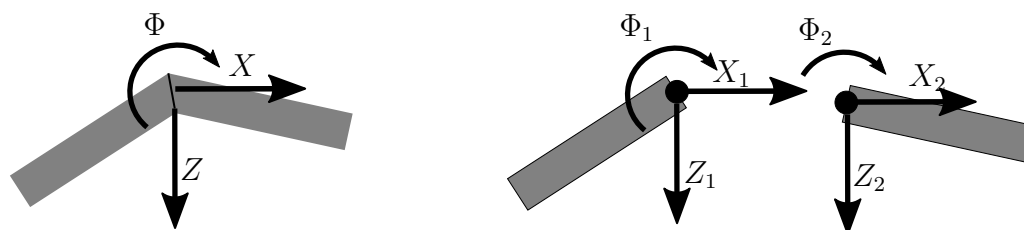
Povezave med nosilci definirajo pogoje konsistentnega prehoda med nosilci. Vsak nosilec ima v vozlišču 3 prostostne stopnje X , Z , Φ . Če je v nekem vozlišču prisotnih več nosilcev, se s pogoji konsistentnih prehodov ugotovi, katere izmed prostostnih stopenj si obravnavani nosilci delijo. V tej diplomski nalogi so pogoji konsistentnega prehoda definirani s 3 biti. Če je posamezni bit 1 potem, je nosilec v dotični prostostni stopnji povezan z ostalimi nosilci v vozlišču, ki imajo enak PKP:

$$PKP = [X_G, Z_G, \Phi_G] \quad (3.10)$$

3.5.1 Toga povezava

Nosilca sta toga povezana, če imata nosilca v vozlišču identične prostostne stopnje. PKP take povezave ima obliko:

$$PKP = [1, 1, 1]. \quad (3.11)$$

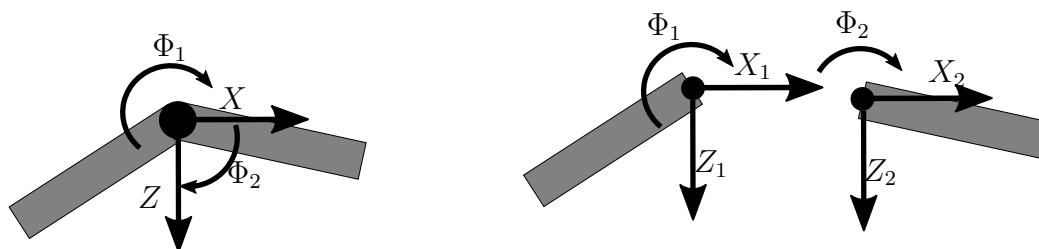


Slika 3.7: Toga povezava med nosilcema.

3.5.2 Členkasta povezava

Nosilca sta členkasto povezana, če imata nosilca v vozlišču skupna translatorsna premika, ne pa rotacije. PKP take povezave ima obliko:

$$PKP = [1, 1, 0]. \quad (3.12)$$

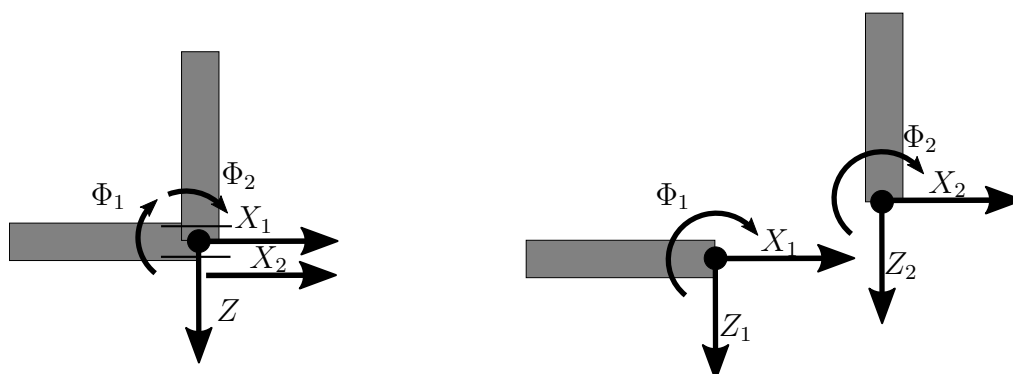


Slika 3.8: Členkasta povezava med nosilcema.

3.5.3 Drсна členkasta povezava

Drсна členkasta povezava je takrat, ko se prenaša med nosilcema samo ena translatorsna spremenljivka med nosilcema. PKP take povezave ima obliko:

$$PKP = [0, 1, 0] \quad (3.13)$$



Slika 3.9: Drсна členkasta povezava med nosilcema.

3.6 Podpore in upoštevanje robnih pogojev

Če je v vozlišču prisotna podpora, je omejena deformacija v izbrani/h smeri/h. Za lažje definiranje podpor vpeljemo izraz Vozliščne prostostne stopnje NFS (ang. Node Freedom Signature) [4], ki predstavlja 3 bitni podatek o prostostnih stopnjah v podpori:

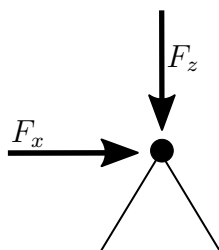
$$NFS = [X_G, Z_G, \Phi_G], \quad (3.14)$$

kjer X_g^B predstavlja omejitev vrednosti u_G , Z_G omejitev vrednosti w_G in Φ_G omejitev vrednosti φ_G .

3.6.0.1 Členkasto vpetje

Členkasto je element vpet, ko ima na vpetem vozlišču omejen translatorskih premik v obeh oseh. Členkasto vpetje ne povzroča momenta. Na sliki 3.10 je prikazana skica podpore z označenim silam reakcije. NFS pa podaja enačba:

$$NFS = [0, 0, 1]. \quad (3.15)$$

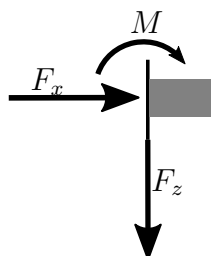


Slika 3.10: Členkasto vpetje z reakcijami.

3.6.0.2 Konzolno vpetje

Konzolno je nosilec vpet, ko ima omejen translatorski in rotacijski premik v vpetem vozlišču. Na sliki 3.11 je prikazana skica podpore z označenim silam in momentom reakcije. NFS pa podaja enačba:

$$NFS = [0, 0, 0]. \quad (3.16)$$

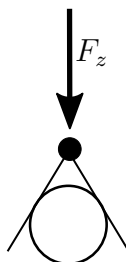


Slika 3.11: Konzolno vpetje z reakcijami.

3.6.0.3 Drsno členkasto vpetje

Drsno je element vpet ko ima premik omejen samo v eni translatorsni osi. Upogibni moment je v vpetem vozlišču 0. Na sliki 3.12 je prikazana skica podpore z označenim reakcijskim silam. NFS pa podaja enačba:

$$NFS = [1, 0, 1]. \quad (3.17)$$



Slika 3.12: Drsno členkasto vpetje z reakcijami.

3.7 Reševanje sistema lineranih enačb

Enačbe so bile urejene na način, da vedno dobimo kvadratno matriko, dokler je sistem statično določen ali predoločen. To pomeni, da imamo enako število neznank kot je enačb. Reševanje sistema linearnih enačb je bilo izvedeno z knjižnjico Numpy [5], ki uporablja knjižnico LAPACK [6]. Reševanje poteka po standardnem Gaussovem načinu.

3.8 Procesiranje rezultatov

Ko imamo določene deformacije nosilca/palice v vozliščih lahko določimo sile v nosilcih. Izračunane pomike v vseh vozliščih, je potrebno identificirati po posameznih končnih elementih konstrukcije. To dosežemo z obratnim postopkom opisanim v poglavju 3.4. Tako lahko izračunamo sile in momente skladno z enačbo:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}. \quad (3.18)$$

3.9 Izračun lastnih frekvenc nosilca

Za določitev lastnih frekvenc je potrebno poiskati rešitev enačbe (2.28), ki predstavlja problem lastnih vrednosti. Le tega rešimo s knjižnjico Numpy [5], ki izrablja knjižnico LAPACK [6].

4 Rezultati

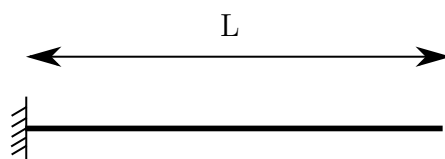
V tem poglavju so predstavljeni rezultat analize izbrane konstrukcije z uporabo razvitega paketa v okviru zaključne naloge, ki smo ga poimenovali StructuralPython [3]. Rešena sta primera konzolno vpetega nosilca in Parkerjevega paličnega mostu.

4.1 Konzolni nosilec

Analiziran je bil konzolno vpet nosilec katerega parametri so podane v tabeli 4.1. Shema nosilca je prikazana na sliki 4.1.

Preglednica 4.1: Parametri nosilca

L	E	I	A	ρ
1m	2.068×10^{11} Pa	$8,33 \times 10^{-10}$ m ⁴	0.0001 m ²	7830 kg/m ³



Slika 4.1: Shema konzolno vpetega nosilca.

4.1.1 Lastne frekvence

Nosilec je bil modeliran z desetimi končnimi elementi. Za potrditev pravilnosti določanja lastnih frekvenc konstrukcije smo določili lastne frekvence nosilca in izračun primerjali z analitičnimi rezultati podanim v [7]. Lastne frekvence neobremenjenega nosilca so

določene po postopku opisanem v poglavju 2.2. Rezultati izračuna se nahajajo v tabeli 4.2.

Preglednica 4.2: Lastne frekvence konstrukcije

	ANALITIČNO	StructuralPython	Napaka
f_1	8,311 Hz	8,300 Hz	0,13%
f_2	51,94 Hz	52,016 Hz	0,15%
f_3	145,68 Hz	145,648 Hz	0,022%
f_4	285,69 Hz	285,414 Hz	0,097%
f_5	472,22 Hz	471,8202 Hz	0,085%

4.1.2 Diskusija

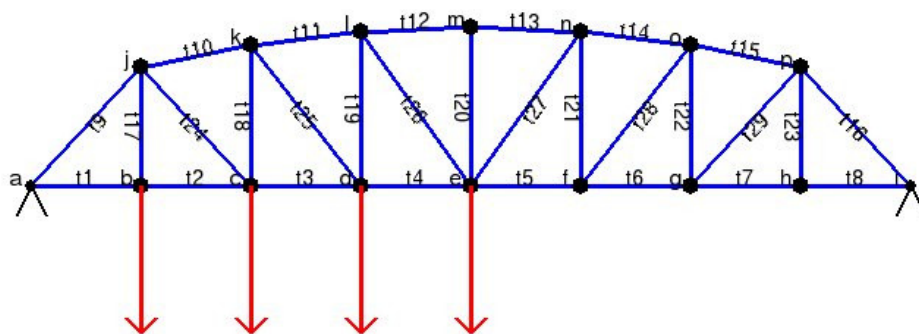
Glede na primerjavo rezultatov v tabeli 4.2, lahko potrdimo pravilnost izračuna lastnih frekvenc za preprost konzolno vpeti nosilec.

4.2 Parkerjev most

Analiziran je bil palični Parkerjev most. Parkerjev most je most, katerega zgornji lok je v krivulji kot je razvidno iz slike 4.2. Most je bil obremenjen s koncentriranimi silami velikosti 1000N. Vse palice v mostu imajo enake lastnosti navedene v tabli 4.3. Izračunani rezultati so bili primerjani s Ansys APDL definiran po postopku opisanem v [8]. Vsaka palica je bila definirana s samo enim končnim elementom. V Ansys je element definiran z elementom LINK1. Seznam vozlišč in potrebne lastnosti se nahajajo v tabeli 4.4. Seznam palic se nahaja v tabeli 4.5. Celotna konstrukcija je prikazana na sliki 4.2. Palice se v skupnih vozliščih med seboj členkasto povezone. To pomeni, da imajo palice identične translatorne prostostne stopnje v skupnih vozliščih.

Preglednica 4.3: Parametri palic parkerjevega mostu.

E	A	ρ
$200 \times 10^9 \text{Pa}$	0.00325m^2	8000kg/m^3



Slika 4.2: Shema sistema generirana s razvito programsko kodo StructuralPython za parkerjev most.

Preglednica 4.4: Vozlišča parkerjevega mostu.

#	IME	X [m]	Z [m]	PODPORA	TIP POVEZAVE	NAKLON
1	a	0,0	10,8	ČLENKASTO VPETJE	ČLENEK	0
2	b	7,5	10,8	/	ČLENEK	0
3	c	15,0	10,8	/	ČLENEK	0
4	d	22,5	10,8	/	ČLENEK	0
5	e	30,0	10,8	/	ČLENEK	0
6	f	37,5	10,8	/	ČLENEK	0
7	g	45,0	10,8	/	ČLENEK	0
8	h	52,5	10,8	/	ČLENEK	0
9	i	60,0	10,8	ČLENKASTO VPETJE	ČLENEK	0
10	j	7,5	2,7	/	ČLENEK	0
11	k	15,0	1,2	/	ČLENEK	0
12	l	22,5	0,3	/	ČLENEK	0
13	m	30,0	0,0	/	ČLENEK	0
14	n	37,5	0,3	/	ČLENEK	0
15	o	45,0	1,2	/	ČLENEK	0
16	p	52,5	2,7	/	ČLENEK	0

Preglednica 4.5: Palice parkerjevega mostu.

#	IME	TIP	VOZL. 1	VOZL. 2
1	t1	Palica	a	b
2	t2	Palica	b	c
3	t3	Palica	c	d
4	t4	Palica	d	e
5	t5	Palica	e	f
6	t6	Palica	f	g
7	t7	Palica	g	h
8	t8	Palica	h	i
9	t9	Palica	a	j
10	t10	Palica	j	k
11	t11	Palica	k	l
12	t12	Palica	l	m
13	t13	Palica	m	n
14	t14	Palica	n	o
15	t15	Palica	o	p

#	IME	TIP	VOZL. 1	VOZL. 2
16	t16	Palica	p	i
17	t17	Palica	j	b
18	t18	Palica	k	c
19	t19	Palica	l	d
20	t20	Palica	m	e
21	t21	Palica	n	f
22	t22	Palica	o	g
23	t23	Palica	p	h
24	t24	Palica	j	c
25	t25	Palica	k	d
26	t26	Palica	l	e
27	t27	Palica	e	n
28	t28	Palica	f	o
29	t29	Palica	g	p

4.2.1 Notranje sile

Izračunane notranje sile so navedene v tabeli 4.6 in primerjane z ANSYS APDL. Med izračuni ni razlik, kar potrjuje pravilno delovanje programa. Sile v tabeli so usmerjene od vozlišča 1 do vozlišča 2.

Preglednica 4.6: Izračunane sile.

IME PALICE	ANSYS [N]	StructuralPython [N]	Δ [N]
t1	133,21	133,21	0
t2	133,21	133,21	0
t3	1102,5	1102,5	0
t4	1336,9	1336,9	0
t5	265,48	265,48	0
t6	-459,97	-459,97	0
t7	-1255,7	-1255,7	0
t8	-1255,7	-1255,7	0
t9	-3747,82	-3747,82	0
t10	-3585,2	-3585,2	0
t11	-3776,9	-3776,9	0
t12	-3475,0	-3475,0	0
t13	-3475,0	-3475,0	0
t14	-2697,8	-2697,8	0
t15	-1991,8	-1991,8	0
t16	-1703,5	-1703,6	0,1
t17	1000	1000,0	0
t18	-46,875	-46,875	0
t19	700	700	0
t20	277,78	277,78	0
t21	-928,57	-928,57	0
t22	-859,38	-859,38	0
t23	0	0	0
t24	-1426,7	-1426,7	0
t25	380,70	380,70	0
t26	-477,91	-477,91	0
t27	1365,4	1365,4	0
t28	1178,4	1178,4	0
t29	1171,2	1171,2	0

4.2.2 Lastne frekvence

Kot zadnja stvar je bilo potrebno določiti lastne frekvence mostu. V tabeli 4.7 so prikazani izračuni in primerjani z Ansys APDL.

Preglednica 4.7: Lastne frekvence parkerjevega mostu.

	StructuralPython [Hz]	ANSYS [Hz]	Δ [Hz]	Δ [%]
f_0	7,3202	7,3379	0,0177	0,24
f_1	14,482	14,568	0,086	0,59
f_2	23,678	23,785	0,107	0,45
f_3	27,956	28,342	0,386	2,1
f_4	40,919	41,992	1,073	2,6

4.2.3 Diskusija

Primerjava med izračunanimi notranjimi silami v palicah mostu, ki se nahaja v tabeli 4.6 potrjuje pravilnost izračuna. Do manjše razlike v palici "t15" pride zaradi zaokroževanja.

Primerjava izračunanih lastnih frekvenc mostu v tabeli 4.7 potrjuje pravilnost izračuna lastnih frekvenc. Do manjših razlik med frekvencami pride najverjetneje, zaradi razlik v načinu izračuna problema lastnih vrednosti, ne pa zaradi razlik v masni in togostni matriki, saj bi sodeč po [8] morali biti enaki kot uporabljeni v nalogi.

5 Zaključki

V tej nalogi je bilo opisan postopek analize ravninske konstrukcije sestavljene iz enodimenzijskih konstrukcijskih elementov, in sicer:

- Izračun notranjih sil v konstrukciji po metodi MKE
- Dokaz o natančnosti s primerjavo izračuna z rezultati ANSYS APDL
- Izračun lastnih frekvenc konstrukcije in primerjava le-teh

V sklopu diplomske naloge smo uspešno razvili algoritem, ki na podlagi definicije sistema uspešno generira togostno in masno matriko ter izvede izračune za določitev notranjih sil pod obremenitvijo in določitev lastnih frekvenc konstrukcije. Pravilnost je bila potrjena preko primerjav z analitičnimi rezultati ter uporabo programskega paketa Ansys APDL. V nalogi smo končne elemente definirali na podlagi Euller-Bernoullijeve formulacije. Za večjo natančnost izračunov bi lahko uporabili Timoshenkovo formulacijo za opis nosilca. V nalogi smo zanemarili spreminjanje geometrije nosilca zaradi obremenitev.

5.0.1 Predlogi za nadaljnje delo

Ta program omogoča analizo 2D konstrukcij, tako da je logična nadgradnja formulacije za analizo 3D konstrukcij. Trenutno sta implementirana dva tipa končnega elementa in oba za popis palic in nosilcev v konstrukciji. Naslednja stopnja v razvoju bi predstavljala vključitev različnih tipov končnih elementov. V nalogi so lastnosti konstrukcijskega elementa neodvisne od obremenitve. Razširitev formulacije bi lahko upoštevala spremembe v togostni in masni matriki kot posledica obremenitev na elementu.

Literatura

- [1] N. Mole: *Predavanja predmeta Metode numeričnega modeliranja*. Dostopno na: <http://lab.fs.uni-lj.si/lnms/LNMS-slo/mnm.php>.
- [2] S. Rao: *Mechanical Vibrations*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2011.
- [3] I. Banfi: *Structural Python*. Dostopno na: <https://github.com/igorbanfi/Structural-Python>.
- [4] C. A. Felippa: *Introduction to finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado, Boulder, Colorado, USA, 2004.
- [5] *Numpy knjižnica*. Dostopno na: <https://github.com/numpy/numpy>.
- [6] *LAPACK knjižnica*. Dostopno na: <https://github.com/Reference-LAPACK/lapack>.
- [7] J. Lilley: *University of Alberta - ANSYS Tutorials*. Dostopno na: <https://sites.ualberta.ca/~wmoussa/AnsysTutorial/>.
- [8] ANSYS: *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications*. ANSYS, Inc, Canonsburg, PA, USA, 2009.

