UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Nace Kapus

Kvazicauchyjeva zaporedja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2018

Kazalo

Kvazicauchyjeva zaporedja

POVZETEK

V delu si ogledamo podobnosti in razlike med Cauchyjevimi ter kvazicauchyjevimi zaporedji. Začnemo z lastnostmi kvazicauchyjevih zaporedij v $\mathbb{R}^n$. Nato izpeljemo nekaj računskih lastnosti ter dokažemo izreka o karakterizaciji zveznosti preslikav s Cauchyjevimi ter kvazicauchyjevimi zaporedji. V nadaljevanju se posvetimo kvazicauchyjevim zaporedjem v splošnih metričnih prostorih. Definiramo nepriraščajoče metrične prostore. Ogledamo si nekaj lastnosti ultrametričnih prostorov ter pokažemo, da so nepriraščajoči. Predstavimo p-adična števila kot zanimiv primer ultrametričnega prostora. V zaključku dela naredimo še karakterizacijo ultrametričnih prostorov.

Quasi-Cauchy sequences

ABSTRACT

In this thesis we take a look at the similarities and differences between Cauchy and quasi-Cauchy sequences. We start with the properties of quasi-Cauchy sequences in $\mathbb{R}^n$. After that we examine the continuity of mappings in terms of preserving Cauchy and quasi-Cauchy sequences. Later, we focus on quasi-Cauchy sequences in general metric spaces. We introduce the notion of nonincremental metric spaces. Of our special interest are ultrametric spaces, as it turns out that they are nonicremental. We take a look at the p-adic numbers as an interesting example of ultrametric spaces. Finally, we make a characterization of ultrametric spaces.

Math. Subj. Class. (2010): 30L99

Ključne besede: zaporedje, Cauchyjev pogoj, kvazicauchyjevo zaporedje, nepriraščajoča metrika, ultrametrika

Keywords: sequence, Cauchy condition, quasi-Cauchy sequence, nonincremental metric, ultrametric

1. Uvod

Če želimo za dano zaporedje po definiciji preveriti, ali je konvergentno, moramo poznati njegovo limito. Veliko priročneje bi bilo imeti test, ki ne bi vseboval limite, saj nam ta ponavadi ni na voljo. Prvi je rešil ta problem Bernard Bolzano v 19. stoletju s pomočjo ideje, ki jo je prvi uporabil Augustin Louis Cauchy. Po njem danes imenujemo Cauchyjeva zaporedja. V diplomskem delu bomo podrobneje predstavili šibkejšo verzijo Cauchyjevih zaporedij, tako imenovana kvazicauchyjeva zaporedja. Osredotočili se bomo predvsem na metrične prostore, v katerih pojma Cauchyjevosti ter kvazicauchyjevosti sovpadata.

V uvodnem poglavju si bomo ogledali Cauchyjeva ter kvazicauchyjeva zaporedja v $\mathbb{R}^n$. Sprva bomo predstavili nekaj njunih lastnosti, na koncu poglavja pa dokazali izreka o karakterizaciji zveznosti preslikav s pomočjo zaporedij. V tretjem poglavju se bomo posvetili kvazicauchyjevim zaporedjem v splošnih metričnih prostorih. Podrobneje bomo predstavili ultrametrične prostore ter si ogledali nekaj njihovih lastnosti. Na koncu poglavja bomo predstavili še p-adična števila, enega izmed glavnih virov ultrametričnih prostorov. V zadnjem, četrtem poglavju bomo izvedli topološko karakterizacijo ultrametričnih prostorov.

Snov za diplomsko nalogo je vzeta predvsem po člankih [3] ter [6]. V pomoč pri nekaterih dokazih pa nam bodo [1, 4, 5, 8].

2. Kvazicauchyjeva zaporedja v $\mathbb{R}^n$

V tem poglavju si bomo ogledali lastnosti Cauchyjevih ter kvazicauchyjevih zaporedij v $\mathbb{R}^n$. Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ je preslikava $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Namesto $a(k)$ običajno pišemo $a^{(k)}$ in mu rečemo k-ti člen zaporedja. Ker je

$$(a^{(k)}) = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}),$$

so komponente zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ običajna realna zaporedja. V primeru, ko bomo govorili o realnih zaporedjih v eni dimenziji, jih bomo običajno označevali kot $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Skozi celotno poglavje bo $\|\cdot\|$ označevalo 2-normo, definirano kot

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

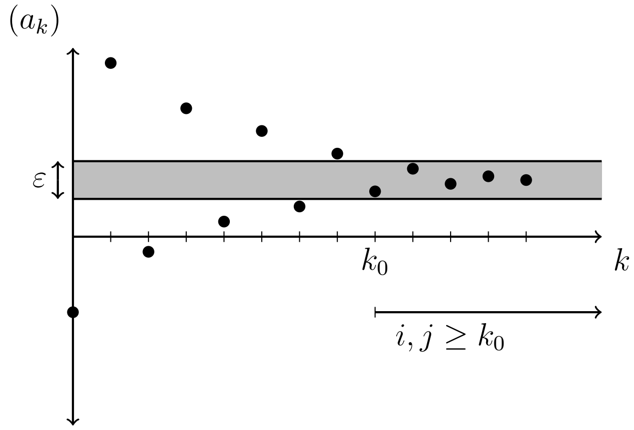
Definicija 2.1. Zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ je *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $k_0 \in \mathbb{N}$, da je $\|a^{(i)} - a^{(j)}\| < \varepsilon$ za poljubna $i, j \geq k_0$.

Povedano drugače, to pomeni, da sta si dovolj pozna člena poljubno blizu. Zaporedje, ki zadošča Cauchyjevemu pogoju, je vedno omejeno. Velja še več. Izkaže se, da je zaporedje konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo.

Kvazicauchyjeva zaporedja definiramo zelo podobno, le da tokrat ne gledamo razlike med vsemi členi od nekje naprej, temveč le med zaporednimi členi.

Definicija 2.2. Zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ je *kvazicauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $k_0 \in \mathbb{N}$, da je $\|a^{(k+1)} - a^{(k)}\| < \varepsilon$ za poljuben $k \geq k_0$.

Zaporedje je torej kvazicauchyjevo, če gre razlika med zaporednima členoma v limiti proti nič. Tako zaporedje za razliko od Cauchyjevega ni nujno omejeno. Ker sta zgornji definiciji skorajda enaki, le da v drugem primeru vzamemo šibkejšo verzijo prvega pogoja (v prvi definiciji lahko izberemo $i = j + 1$ in dobimo drugo), takoj sledi, da so vsa Cauchyjeva zaporedja tudi kvazicauchyjeva. Da pa obrat tega ne drži, nam pokaže naslednji zgled.



Slika 1. Grafični prikaz Cauchyjeve lastnosti v eni dimenziji.

Zgled 2.3. Oglejmo si zaporedje delnih vsot $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ harmonične vrste:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Da pokažemo, da je to zaporedje kvazicauchyjevo, si moramo ogledati razliko dveh zaporednih členov zaporedja:

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, je to zaporedje res kvazicauchyjevo.

Pokažimo sedaj še, da $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni Cauchyjevo. Naj bo $\varepsilon = \frac{1}{3}$ in $m = 2n$. Potem velja:

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon. \end{aligned}$$

Za $m = 2n$ in $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ne obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da bi veljalo $|a_m - a_n| < \varepsilon$ za $m, n \geq k_0$. Torej to zaporedje ni Cauchyjevo. $\diamondsuit$

Računanje z večdimenzionalnimi zaporedji je lahko včasih precej zapleteno. Naslednji izrek nam bo povedal, da je za preverjanje, ali je neko zaporedje Cauchyjevo oziroma kvazicauchyjevo, to dovolj storiti le na komponentah tega zaporedja.

Izrek 2.4. *Zaporedje* $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *je*

i) Cauchyjevo natanko tedaj, ko je Cauchyjevo po komponentah.
ii) kvazicauchyjevo natanko tedaj, ko je kvazicauchyjevo po komponentah.

Dokaz. *i)* $(\Rightarrow)$ Naj bo $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da je $\|a^{(i)} - a^{(j)}\| < \varepsilon$ za vse $i, j \geq k_0$. Torej velja

$$\sqrt{(a_1^{(i)} - a_1^{(j)})^2 + (a_2^{(i)} - a_2^{(j)})^2 + \cdots + (a_n^{(i)} - a_n^{(j)})^2} < \varepsilon$$

za vse $i, j \geq k_0$. Sledi, da je

$$
\begin{aligned}
|a_1^{(i)} - a_1^{(j)}| &< \varepsilon \\
|a_2^{(i)} - a_2^{(j)}| &< \varepsilon \\
&\dots \\
|a_n^{(i)} - a_n^{(j)}| &< \varepsilon
\end{aligned}
$$

za vse $i, j \geq k_0$. Od tod sledi, da je za vsak $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ zaporedje koordinat $(a_l^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo.

($\Leftarrow$) Naj bodo zaporedja $(a_l^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjeva za $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in vsak $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ obstaja $k_0^l \in \mathbb{N}$, da je

$$
|a_l^{(i)} - a_l^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}
$$

za vse $i, j \geq k_0^l$. Naj bo $k_0 = \max\{k_0^1, k_0^2, \dots, k_0^n\}$. Potem je

$$
\begin{aligned}
\|a^{(i)} - a^{(j)}\|^2 &= (a_1^{(i)} - a_1^{(j)})^2 + (a_2^{(i)} - a_2^{(j)})^2 + \cdots + (a_n^{(i)} - a_n^{(j)})^2 \\
&< n\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 = \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

za vse $i, j \geq k_0$. Torej je $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo.

ii) ($\Rightarrow$) Naj bo $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da je $\|a^{(k+1)} - a^{(k)}\| < \varepsilon$ za vse $k \geq k_0$. Torej velja

$$
\sqrt{(a_1^{(k+1)} - a_1^{(k)})^2 + (a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)})^2 + \cdots + (a_n^{(k+1)} - a_n^{(k)})^2} < \varepsilon
$$

za vse $k \geq k_0$. Sledi, da je

$$
\begin{aligned}
|a_1^{(k+1)} - a_1^{(k)}| &< \varepsilon \\
|a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)}| &< \varepsilon \\
&\dots \\
|a_n^{(k+1)} - a_n^{(k)}| &< \varepsilon
\end{aligned}
$$

za vse $k \geq k_0$. Od tod sledi, da je za vsak $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ zaporedje koordinat $(a_l^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo.

($\Leftarrow$) Naj bodo $(a_l^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjeva zaporedja za $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in vsak $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ obstaja tak $k_0^l \in \mathbb{N}$, da je

$$
|a_l^{(k+1)} - a_l^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}
$$

za vse $k \geq k_0^l$. Naj bo $k_0 = \max\{k_0^1, k_0^2, \dots, k_0^n\}$. Potem je

$$
\begin{aligned}
\|a^{(k+1)} - a^{(k)}\|^2 &= (a_1^{(k+1)} - a_1^{(k)})^2 + (a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)})^2 + \cdots + (a_n^{(k+1)} - a_n^{(k)})^2 \\
&< n\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 = \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

za vse $k \geq k_0$. Torej je $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo. $\square$

Na začetku poglavja smo videli, da kvazicauchyjeva zaporedja niso nujno tudi Cauchyjeva. Kdaj pa se to vendarle zgodi?

Trditev 2.5. *Kvazicauchyjevo zaporedje je Cauchyjevo natanko tedaj, ko ima eno samo stekališče.*

Dokaz. Ker so vsa Cauchyjeva zaporedja konvergentna, imajo natanko eno stekališče. Zadostuje torej pokazati, da je vsako kvazicauchyjevo zaporedje z enim samim stekališčem Cauchyjevo.

To bomo pokazali s protislovjem. Recimo, da je $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje, ki ima eno samo stekališče p in ni Cauchyjevo. Potem $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne konvergira k p, torej obstaja $r > 0$, da množica

$$S = \{k \ : \ \|a^{(k)} - p\| \geq r\}$$

vsebuje neskončno elementov. Ker je p stekališče zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, ima množica

$$T = \{k \ : \ \|a^{(k)} - p\| < r/3\}$$

prav tako neskončno elementov.

Ker je $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje, so razdalje med zaporednimi členi od nekje naprej manjše kot $r/3$. Od tod sledi, da vsakič, ko se zaporedje premakne iz množice S v množico T (in obratno), neki člen zaporedja leži tudi v množici

$$V = \overline{K}(p, r)\backslash K(p, \tfrac{r}{3}).$$

Množica V je zaprta in omejena podmnožica $\mathbb{R}^n$, torej je kompaktna. Ker V vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, mora to zaporedje imeti neko stekališče $q \in V$, ki je očitno različno od p. To pa je v nasprotju s predpostavko, da ima zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eno samo stekališče. $\square$

Kaj pa lahko povemo o zaporedjih z več kot enim stekališčem?

Trditev 2.6. *Naj bo $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje, ki je vsebovano v množici D. Množica stekališč zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ je povezana, kadar je izpolnjen eden izmed pogojev:*

(1) $D = \mathbb{R}$,
(2) D je kompaktna.

Dokaz. (1) Naj bosta p in q stekališči kvazicauchyjevega zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $p < q$. Naj bo $r \in (p, q)$. Želimo pokazati, da je potem tudi r stekališče tega zaporedja. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak $a \in \mathbb{R}$ definiramo interval I_a kot

$$I_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Predpostavimo lahko, da je ε tako majhen, da so intervali I_p, I_q ter I_r disjunktni. Ker sta p in q stekališči, intervala I_p in I_q vsebujeta neskončno mnogo členov zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Ker je zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo, so razdalje med zaporednimi členi od nekje naprej manjše od ε. Od tod sledi, da vsakič, ko se zaporedje premakne iz intervala I_p v interval I_q (in obratno), neki člen zaporedja leži tudi v intervalu I_r. Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, I_r vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja. Zato je tudi r stekališče.

(2) Naj bo D kompaktna in $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in D$ kvazicauchyjevo zaporedje. S $CP(a)$ označimo množico stekališč zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Razdaljo med dvema množicama A in B definiramo kot

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Denimo, da $CP(a)$ ni povezana. Potem obstajata dve neprazni zaprti podmnožici F in G v $CP(a)$, da je $CP(a) = F \cup G$ in $F \cap G = \emptyset$. Ker je $CP(a)$ zaprta podmnožica kompaktne množice D, je tudi sama kompaktna. Od tod sledi, da je $\operatorname{dist}(F, G) > 0$. Izberimo tak $r > 0$, da je $\operatorname{dist}(F, G) \geq 3r$. Naj bo

$$F_r = \{x \in D \mid \operatorname{dist}(x, F) < r\} \text{ in } G_r = \{x \in D \mid \operatorname{dist}(x, G) < r\}.$$

Tedaj je $\operatorname{dist}(F_r, G_r) \geq r$. Množici F_r in G_r vsebujeta neskončno mnogo členov zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Res, lahko ju zapišemo kot

$$F_r = \bigcup_{x\in F} K(x, r) \qquad \text{in} \qquad G_r = \bigcup_{x\in G} K(x, r).$$

Ker so točke, po katerih teče unija, stekališča zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, sledi, da vse krogle iz unije vsebujejo neskončno mnogo elementov zaporedja.

Ker je zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo, je za dovolj velike $n \in \mathbb{N}$ $d(a^{(n+1)}, a^{(n)}) < r$. Od tod sledi, da vsakič, ko se zaporedje premakne iz množice F_r v množico G_r (in obratno), neki člen zaporedja leži tudi v množici $C = D \backslash (F_r \cup G_r)$. Torej tudi množica C vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja. Ker je C zaprta podmnožica kompaktne množice D, je kompaktna. Torej ima zaporedje vsaj eno stekališče v množici C, to pa je v nasprotju s predpostavko, da je $C \cap CP(a) = \emptyset$. □

Oglejmo si primer kvazicauchyjevega zaporedja v $\mathbb{R}^2$, katerega množica stekališč ni povezana. Naj bo R_n pravokotnik širine 2 in višine $2n$, postavljen tako, da je njegovo središče v središču koordinatnega sistema. Začnemo v točki $(1, 0)$ in gremo po obsegu pravokotnika R_1 v smeri urinega kazalca s korakom 1, dokler ne pridemo nazaj do točke $(1, 0)$. Potem gremo po obsegu pravokotnika R_2 s korakom $\frac{1}{2}$ itd. Množica stekališč tako dobljenega zaporedja so vse točke z absciso ± 1.

Opomba 2.7. Zaporedja v $\mathbb{R}^n$ je včasih priročneje gledati kot zaporedja v $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (kompaktifikaciji $\mathbb{R}^n$ z eno točko). Če na točko ∞ gledamo kot na stekališče neomejenega zaporedja, po trditvi 2.6 sledi, da je množica stekališč povezana podmnožica v $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

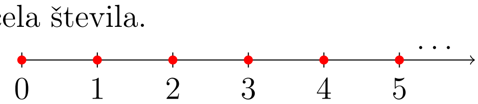
2.1. **Podzaporedja.**

Trditev 2.8. *Vsako podzaporedje Cauchyjevega zaporedja je Cauchyjevo.*

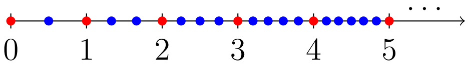
Dokaz. Naj bo $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $i, j \geq k_0$ velja $\|a^{(i)} - a^{(j)}\| < \varepsilon$. Naj bo $(a^{(k_j)})_{j\in\mathbb{N}}$ neko podzaporedje. Ker je $k_{k_0} \geq k_0$, za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsaka $k_i, k_j \geq k_{k_0} \geq k_0$ velja $\|a^{(k_i)} - a^{(k_j)}\| < \varepsilon$. □

Kvazicauchyjeva zaporedja te lastnosti nimajo. Oglejmo si primer kvazicauchyjevega zaporedja, katerega podzaporedje ni kvazicauchyjevo.

Primer 2.9. Naše zaporedje bomo skonstruirali na sledeči način. Za začetek vzemimo vsa nenegativna cela števila.



Med te točke vrinemo dodatne točke. Med 0 in 1 vrinemo eno točko, med 1 in 2 dve točki, med 2 in 3 tri točke itd. To naredimo tako, da so na vsakem intervalu $[i, i+1]$, $i \in \mathbb{N}_0$, razdalje med točkami enake. Dobimo naraščajoče zaporedje realnih števil, ki izgleda takole:



Ker gredo razdalje med zaporednimi členi v limiti proti nič, je to zaporedje kvazicauchyjevo. Podzaporedje celih števil očitno ni kvazicauchyjevo. $\diamondsuit$

Videli smo, da podzaporedja kvazicauchyjevih zaporedij niso nujno kvazicauchyjeva. Ali morda obstajajo kakšna zaporedja s to lastnostjo? Izkaže se, da so to ravno omejena Cauchyjeva zaporedja.

Trditev 2.10. *Omejeno zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjevo natanko tedaj, ko so vsa njegova podzaporedja kvazicauchyjeva.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje. Potem so tudi vsa njegova podzaporedja Cauchyjeva in posledično kvazicauchyjeva.

($\Leftarrow$) Recimo, da zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ni Cauchyjevo oziroma konvergentno. Ker je omejeno, obstajata podzaporedji $(x^{(i_m)})$ in $(y^{(j_m)})$, ki zaporedoma konvergirata k dvema različnima točkama x in y, pri čemer je $i_m \neq j_m$ za vse m. Predpostavimo lahko, da je $i_m < j_m < i_{m+1} < j_{m+1}$ za vsak $m \in \mathbb{N}$. Sedaj pa definiramo novo podzaporedje $(z^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ zaporedja $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kot $z^{(2m-1)} = x^{(i_m)}$, $z^{(2m)} = y^{(j_m)}$. Potem je

$$\lim_{m\to\infty} \|z^{(m)} - z^{(m+1)}\| = \lim_{m\to\infty} \|x^{(i_m)} - y^{(j_m)}\| = \|x - y\| \neq 0.$$

Podzaporedje $(z^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ torej ni kvazicauchyjevo, kar je v nasprotju s predpostavko. $\square$

2.2. **Računanje s kvazicauchyjevimi zaporedji.** V tem razdelku bomo pokazali nekaj računskih lastnosti kvazicauchyjevih zaporedij. Pri tem operacije seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja definiramo po komponentah. Na primeru deljenja to izgleda takole:

$$\frac{a^{(k)}}{b^{(k)}} = \frac{\left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)}{\left(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}\right)} = \left(\frac{a_1^{(k)}}{b_1^{(k)}}, \frac{a_2^{(k)}}{b_2^{(k)}}, \ldots, \frac{a_n^{(k)}}{b_n^{(k)}}\right).$$

Naj bosta $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $(b^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevi zaporedji ter α in β realni števili. Iz Analize I vemo, da sta potem Cauchyjevi tudi zaporedji:

i) $\alpha a^{(1)} + \beta b^{(1)}, \alpha a^{(2)} + \beta b^{(2)}, \ldots$
ii) $a^{(1)} \cdot b^{(1)}, a^{(2)} \cdot b^{(2)}, \ldots$

V primeru, ko je $b_i^{(k)} \neq 0$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ in vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ter $\lim_{k\to\infty} b_i^{(k)} \neq 0$, je Cauchyjevo tudi zaporedje

$$\frac{a^{(1)}}{b^{(1)}}, \frac{a^{(2)}}{b^{(2)}}, \ldots$$

Zanima nas, ali enake lastnosti veljajo tudi za kvazicauchyjeva zaporedja. Izkazalo se bo, da ne.

Trditev 2.11. *Naj bosta $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $(b^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevi zaporedji ter α in β realni števili. Potem je kvazicauchyjevo tudi zaporedje:*

$$\alpha a^{(1)} + \beta b^{(1)}, \alpha a^{(2)} + \beta b^{(2)}, \ldots\ .$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati želimo, da obstaja tak k_0, da za $k \geq k_0$ velja

$$\|(\alpha a^{(k+1)} + \beta b^{(k+1)}) - (\alpha a^{(k)} + \beta b^{(k)})\| < \varepsilon.$$

Ker je $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo, obstaja tak $k_1 \in \mathbb{N}$, da za vsak $k \geq k_1$ velja

$$\|a^{(k+1)} - a^{(k)}\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}.$$

Prav tako obstaja tak k_2, da za $k \geq k_2$ velja $\|b^{(k+1)} - b^{(k)}\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}$. Naj bo $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ in $k \geq k_0$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\|(\alpha a^{(k+1)} + \beta b^{(k+1)}) - (\alpha a^{(k)} + \beta b^{(k)})\| &= \|\alpha(a^{(k+1)} - a^{(k)}) + \beta(b^{(k+1)} - b^{(k)})\| \\ &\leq |\alpha| \cdot \|a^{(k+1)} - a^{(k)}\| + |\beta| \cdot \|b^{(k+1)} - b^{(k)}\| \\ &< |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} = \varepsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

Linearne kombinacije kvazicauchyjevih zaporedij so torej tudi kvazicauchyjeva zaporedja. Zatakne pa se pri produktu dveh kvazicauchyjevih zaporedij. Pri Cauchyjevih zaporedjih je ključno, da uporabimo omejenost zaporedja. Kvazicauchyjeva zaporedja te lastnosti nimajo. Oglejmo si preprost primer, ki bo pokazal, da produkt dveh kvazicauchyjevih zaporedij v splošnem ni kvazicauchyjevo zaporedje.

Primer 2.12. Naj bosta zaporedji $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podani z $a_n = b_n = \sqrt{n}$. Ker je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = \lim_{n\to\infty} |b_{n+1} - b_n| &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,\end{aligned}$$

sta $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ res kvazicauchyjevi zaporedji. Njun produkt $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ očitno ni kvazicauchyjevo zaporedje. $\diamondsuit$

2.3. **Karakterizacija zveznosti z zaporedji.** Zveznost preslikave lahko opišemo tudi s pomočjo zaporedij. Tudi tu obstaja zanimiva povezava med Cauchyjevimi in kvazicauchyjevimi zaporedji.

Definicija 2.13. Naj bo $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$. Množico oblike

$$\mathcal{K} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

imenujemo *zaprt kvader.*

Rekli bomo, da preslikava f ohranja Cauchyjeva zaporedja iz kvadra $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, če je $(f(a^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje za vsako Cauchyjevo zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$. Spodnji izrek se v primeru $n = 1$ dokaže pri Analizi 1.

Izrek 2.14. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in D$, ki konvergira k a, zaporedje slik $(f(a^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k $f(a)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo f zvezna v $a \in D$ in $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in D$ zaporedje, ki konvergira k a. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je f zvezna v a, obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\|x - a\| < \delta$ sledi $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Ker zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k a, obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da za $k \geq k_0$ velja $\|a^{(k)} - a\| < \delta$, od koder sledi $\|f(a^{(k)}) - f(a)\| < \varepsilon$. Sledi, da zaporedje $(f(a^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k $f(a)$.

($\Leftarrow$) Denimo, da za vsako zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in D$, ki konvergira k a, zaporedje slik $(f(a^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k $f(a)$. Radi bi videli, da je f zvezna v a. Denimo, da f ni zvezna v a. Torej obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $x^{(n)} \in D$, da je $\|x^{(n)} - a\| < \frac{1}{n}$ in $\|f(x^{(n)}) - f(a)\| \geq \varepsilon$. Ker zaporedje $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti a, zaporedje $(f(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti $f(a)$. Prispeli smo do protislovja, torej je f res zvezna v a. $\square$

Radi bi imeli izrek, kjer bi zajeli zveznost preslikave f na celotni množici in ne le v posamezni točki. V ta namen bomo zgornji izrek nekoliko preoblikovali.

Posledica 2.15 (Karakterizacija zveznosti z zaporedji)**.** *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ zaprt kvader. Preslikava $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$ je zvezna na $\mathcal{K}$ natanko tedaj, ko ohranja Cauchyjeva zaporedja iz $\mathcal{K}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ Cauchyjevo zaporedje in $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$ zvezna preslikava. Ker je $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje, konvergira k neki točki $a \in \mathcal{K}$. Po izreku 2.14 zaporedje slik konvergira proti točki $f(a)$. Torej je zaporedje slik tudi Cauchyjevo zaporedje.

($\Leftarrow$) Naj preslikava $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$ ohranja Cauchyjeva zaporedja iz $\mathcal{K}$. Denimo, da f ni zvezna v neki točki $a \in \mathcal{K}$. Potem obstaja $\varepsilon > 0$ ter zaporedje $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, ki konvergira k a, tako da je $d(f(a^{(k)}), f(a)) > \varepsilon$ za vse $k \in \mathbb{N}$. Sedaj pa definiramo novo zaporedje $(b^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ s predpisom

$$b^{(k)} = \begin{cases} a^{(k)} & , k \text{ sod} \\ a & , k \text{ lih} \end{cases}.$$

Zaporedje $b^{(k)}$ je Cauchyjevo, medtem ko $(f(b^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ ni Cauchyjevo. To pa je v nasprotju s predpostavko, da f ohranja Cauchyjeva zaporedja. Sledi, da je preslikava f zvezna v vsaki točki kvadra $\mathcal{K}$. $\square$

Če f ohranja Cauchyjeva zaporedja na zaprtih kvadrih, je torej zvezna. Ali lahko povemo kaj več o preslikavi, ki ohranja kvazicauchyjeva zaporedja? Najprej si oglejmo pomožno lemo, ki jo bomo potrebovali pri dokazu izreka o karakterizaciji zveznosti s kvazicauchyjevimi zaporedji.

Lema 2.16. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ zaprt kvader in $(a^{(1)}, b^{(1)}), (a^{(2)}, b^{(2)}), \dots$ tako zaporedje urejenih parov točk iz $\mathcal{K}$, da velja $\lim_{i\to\infty} \|a^{(i)} - b^{(i)}\| = 0$. Potem obstaja kvazicauchyjevo zaporedje $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ z lastnostjo, da za vsako naravno število $i \geq 2$ obstaja tak $j \geq 1$, da je $(a^{(i)}, b^{(i)}) = (x^{(j)}, x^{(j+1)})$.*

Dokaz. Za vsak $k \geq 1$ v $\mathcal{K}$ poiščemo take točke $y_0^k, y_1^k, \dots, y_{n_k}^k$, da je $y_0^k = b^{(k)}$, $y_{n_k}^k = a^{(k+1)}$ in $\|y_i^k - y_{i-1}^k\| < \frac{1}{k}$ za $1 \leq i \leq n_k$. Iskano zaporedje je

$$a^{(1)}, b^{(1)}, y_0^1, y_1^1, \dots, y_{n_1}^1, a^{(2)}, b^{(2)}, y_0^2, y_0^2, \dots, y_{n_2}^2, a^{(3)}, b^{(3)}, \dots$$

Preveriti moramo, da je kvazicauchyjevo. Pokažimo, da gredo v limiti razdalje med zaporednimi členi proti 0. Dva zaporedna člena sta lahko:

- $a^{(i)}$ in $b^{(i)}$, razdalja med njima gre proti 0 po predpostavki
- $b^{(i)}$ in y_0^i, razdalja med njima je 0 za vsak i
- $y_{n_k}^k$ in $a^{(k+1)}$, razdalja med njima je 0 za vsak k
- y_i^k in y_{i-1}^k, razdalja med njima gre proti 0, ker velja $\|y_i^k - y_{i-1}^k\| < \frac{1}{k}$ za $1 \leq i \leq n_k$

Zaporedje je torej res kvazicauchyjevo. $\square$

Izrek 2.17 (Karakterizacija zveznosti s kvazicauchyjemi zaporedji)**.** *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ zaprt kvader. Preslikava $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$ je enakomerno zvezna na $\mathcal{K}$ natanko tedaj, ko ohranja kvazicauchyjeva zaporedja iz $\mathcal{K}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje. Ker je f enakomerno zvezna, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\|x-y\| < \delta$ sledi $\|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$. Ker je $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje, obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da velja $\|a^{(k+1)} - a^{(k)}\| < \delta$ za poljuben $k \geq k_0$. Sledi, da je $\|f(a^{(k+1)}) - f(a^{(k)})\| < \varepsilon$ za vsak $k \geq k_0$. Torej, je $(f(a^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje.

($\Leftarrow$) Recimo, da f ni enakomerno zvezna. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da lahko za vsak $m \in \mathbb{N}$ poiščemo taki točki $a_m, b_m \in D$ tako, da je $\|a_m - b_m\| < \frac{1}{m}$ in $\|f(a_m) - f(b_m)\| \geq \varepsilon$. Po lemi 2.16 obstaja kvazicauchyjevo zaporedje $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ z lastnostjo, da za vsak $i \in \mathbb{N}$ obstaja tak $j \in \mathbb{N}$, da je $a^{(i)} = x^{(j)}$ in $b^{(i)} = x^{(j+1)}$. Od tod sledi $\|f(x^{(j)}) - f(x^{(j+1)})\| \geq \varepsilon$, kar pomeni, da $(f(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ ni kvazicauchyjevo zaporedje. To pa je v nasprotju s predpostavko, da f ohranja kvazicauchyjeva zaporedja. □

Zgornji izrek se da še nekoliko izboljšati.

Izrek 2.18. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ zaprt kvader. Preslikava $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$ je enakomerno zvezna na $\mathcal{K}$ natanko tedaj, ko je slika vsakega Cauchyjevega zaporedja iz $\mathcal{K}$ kvazicauchyjevo zaporedje.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo f enakomerno zvezna. Ker so vsa Cauchyjeva zaporedja tudi kvazicauchyjeva, po izreku 2.17 sledi, da je slika vsakega Cauchyjevega zaporedja kvazicauchyjevo zaporedje.

($\Leftarrow$) Predpostavimo, da obstaja f, ki ni enakomerno zvezna, a slika Cauchyjeva zaporedja v kvazicauchyjeva. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da lahko za vsak $n \in \mathbb{N}$ poiščemo taki točki $x^{(k)}, y^{(k)} \in \mathcal{K}$, da je $\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k}$ in $\|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})\| \geq \varepsilon$. Ker je zaprt kvader $\mathcal{K}$ kompaktna množica, ima zaporedje $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentno podzaporedje. S prehodom na podzaporedje lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da konvergira tudi zaporedje $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Ker je $\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$, zaporedje $x^{(1)}, y^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, x^{(3)}, y^{(3)}, \ldots$ konvergira in je zato Cauchyjevo. Po konstrukciji zaporedje $f(x^{(1)}), f(y^{(1)}), f(x^{(2)}), f(y^{(2)}), f(x^{(3)}), f(y^{(3)}), \ldots$ ni kvazicauchyjevo, kar je v nasprotju s predpostavko. □

3. V splošnih metričnih prostorih

Pojem kvazicauchyjevega zaporedja lahko vpeljemo tudi splošneje. Da to storimo, potrebujemo pojem metričnega prostora.

Definicija 3.1. Naj bo M množica in $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ funkcija.

(1) d je *psevdometrika*, če zadošča pogojem $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ in $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ za vse $x,y,z \in M$.
(2) Če d zadošča tudi pogoju, da iz $d(x,y) = 0$ sledi $x = y$ za vse $x, y \in M$, ji rečemo *metrika.*

Paru (M,d) pravimo *metrični prostor.* Sedaj lahko definiramo kvazicauchyjevo zaporedje v splošnem metričnem prostoru.

Definicija 3.2. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v metričnem prostoru (M,d) je *kvazicauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a_{n+1}, a_n) < \varepsilon$ za poljuben $n \geq n_0$.

Največja razlika med kvazicauchyjevimi zaporedji v $\mathbb{R}^n$ in splošnih metričnih prostorih je ta, da v nekaterih pomembnih metričnih prostorih pojma Cauchyjevega in kvazicauchyjevega zaporedja sovpadata.

Definicija 3.3. Metričnemu prostoru (M, d), v katerem je vsako kvazicauchyjevo zaporedje Cauchyjevo, pravimo *nepriraščajoč* metrični prostor. Pripadajoči metriki rečemo *nepriraščajoča metrika.*

Oglejmo si preprost primer nepriraščajočega metričnega prostora.

Primer 3.4. Naj bo (M, d) metrični prostor. Za M vzemimo množico celih števil $\mathbb{Z}$, za d pa navadno evklidsko metriko. Za poljubno kvazicauchyjevo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v M velja, da obstaja tak n_0, da za vsak $n \geq n_0$ velja $d(a_{n+1}, a_n) < \frac{1}{2}$. Torej so vsa kvazicauchyjeva zaporedja v M od nekje naprej konstantna in tako tudi Cauchyjeva. $\diamondsuit$

3.1. **Ultrametrični prostori.**

Definicija 3.5. *Ultrametrični prostor* je metrični prostor (M, d), ki zadošča pogoju:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \text{ za vse } x, y, z \in M.$$

Pogoj iz zgornje definicije imenujemo *ultrametrična neenakost* in je močnejši pogoj od trikotniške neenakosti. Ultrametrične prostore včasih imenujemo tudi *nearhimedski prostori.* V primeru, ko je d psevdometrika, paru (M, d) rečemo *ultrapsevdometrični prostor.* Oglejmo si primer ultrametričnega prostora.

Primer 3.6. Naj bo $D = \{0, 1\}$ in $M = D^{\mathbb{N}}$, kartezični produkt števno mnogo kopij množice D. Elementi v M so zaporedja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemer so x_n le 0 ali 1. Za dve različni zaporedji $x, y \in M$ definirajmo $\delta(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$, torej prvi indeks, pri katerem se zaporedji razlikujeta. Sedaj lahko na M definiramo razdaljo kot

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 2^{-\delta(x,y)} & , \text{sicer} \end{cases}.$$

Pokažimo, da je d ultrametrika. Očitno velja $d(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = y$ in pa $d(x, y) = d(y, x)$. Ker je ultrametrična neenakost močnejši pogoj od trikotniške neenakosti, je dovolj pokazati le slednjo. Želimo videti, da velja $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ za vse $x, y, z \in M$. Za $x = z, y = z$ ali $x = y$ neenakost očitno drži. Naj bodo sedaj x, y in z tri različne točke. Naj bo $k = \delta(x, z)$ in $l = \delta(z, y)$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $k \leq l$. Potem velja $x_n = y_n = z_n$ za vsak $n < k$, torej je $\delta(x, y) \geq k$ in

$$d(x, y) = 2^{-\delta(x,y)} \leq 2^{-k} = \max\{2^{-k}, 2^{-l}\} = \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Torej je d res ultrametrika. $\diamondsuit$

3.2. **Lastnosti ultrametričnih prostorov.** Ultrametrični prostori imajo kar nekaj zanimivih lastnosti. Oglejmo si nekaj najbolj zanimivih.

Trditev 3.7. *Naj bo (M, d) ultrametričen prostor. Potem velja:*

i) *Vsi trikotniki v M so enakokraki.*
ii) *Če je $d(x, y) \leq r$, je $\overline{K}(x, r) = \overline{K}(y, r)$.*
iii) *Če je $K(x, r_1) \cap K(y, r_2) \neq \emptyset$, velja $K(x, r_1) \subseteq K(y, r_2)$ ali $K(y, r_2) \subseteq K(x, r_1)$.*
iv) *Če na M vpeljemo relacijo s predpisom $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) < r$, postane množica r-krogel razbitje prostora (za vsak $r > 0$).*

v) Vsaka krogla je hkrati odprta in zaprta (v inducirani topologiji).

Točka *ii*) pove, da je vsaka točka znotraj zaprte krogle njeno središče, točka *iii*) pa, da če se dve krogli sekata, je ena vsebovana v drugi.

Dokaz. i) Denimo, da v M obstaja neki trikotnik, ki ni enakokrak. Označimo dolžine njegovih stranic z a, b in c. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da velja $a < b < c$. Če za stranico c uporabimo ultrametrično neenakost dobimo:

$$c \leq \max\{a, b\},$$

kar je v nasprotju s predpostavko.

ii) Naj bo z poljubna točka v $\overline{K}(x, r)$. Potem je $d(x, z) \leq r$. Ker je M ultrametrični prostor, velja

$$d(y, z) \leq \max\{d(y, x), d(x, z)\} \leq r.$$

Torej je z vsebovana tudi v $\overline{K}(y, r)$ in zato $\overline{K}(x, r) \subseteq \overline{K}(y, r)$. Če zamenjamo vlogi x in y, dobimo, da velja tudi $\overline{K}(y, r) \subseteq \overline{K}(x, r)$, torej je res $\overline{K}(x, r) = \overline{K}(y, r)$.

iii) Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $r_1 \leq r_2$. Ker je $K(x, r_1) \cap K(y, r_2) \neq \emptyset$, obstaja neki $z \in K(x, r_1) \cap K(y, r_2)$. Po točki *ii*) sledi, da je $K(x, r_1) = K(z, r_1)$ in $K(y, r_2) = K(z, r_2)$. Od tod dobimo

$$K(x, r_1) = K(z, r_1) \subseteq K(z, r_2) = K(y, r_2),$$

torej je res $K(x, r_1) \subseteq K(y, r_2)$.

iv) Pokažimo, da je relacija

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; d(x, y) < r$$

ekvivalenčna. Ker je $d(x, x) = 0 < r$, je $x \sim x$, torej je $\sim$ refleksivna. Iz $d(x, y) = d(y, x)$ sledi, da je $\sim$ simetrična. Če je $x \sim y$ in $y \sim z$, je

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} < r,$$

torej je $x \sim z$ in $\sim$ je tranzitivna. Torej je $\sim$ res ekvivalenčna relacija na M.

Opazimo, da je $K(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\} = \{y \in M \mid x \sim y\} = [x]$. Torej krogle s središčem v x sovpadajo z ekvivalenčnim razredom točke x. Za te pa vemo, da tvorijo razbitje množice, na kateri so definirani, torej v našem primeru prostora M.

v) Najprej pokažimo, da je vsaka odprta krogla tudi zaprta. Naj bo $K(x, r)$ neka odprta krogla. Ker je po *iv*) množica $M \backslash K(x, r)$ unija odprtih krogel je $M \backslash K(x, r)$ odprta. Od tod sledi, da je $K(x, r)$ zaprta.

Pokažimo še, da je vsaka zaprta krogla tudi odprta. Naj bo $\overline{K}(x, r)$ poljubna zaprta krogla in a neka njena robna točka. Po točki *ii*) je a središče $\overline{K}(x, r)$, torej velja $K(a, r) \subset \overline{K}(x, r)$, od koder sledi, da je a notranja točka. Torej je $\overline{K}(x, r)$ odprta. □

Vse zgornje lastnosti so posledica zanimivega pojava v ultrametričnih prostorih. Ultrametrična neenakost namreč povzroči, da relacija "biti ε oddaljen" postane tranzitivna, kar bomo s pridom uporabili tudi pri dokazu naslednje trditve.

Trditev 3.8. *Ultrametrični prostori so nepriraščajoči.*

Dokaz. Naj bo (M,d) ultrametrični prostor in $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, da je $d(a_n, a_{n+1}) < \varepsilon$. Naj bo $n \geq m > n_0$. Z večkratno uporabo ultrametrične neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &\leq \max\{d(a_m, a_{m+1}), d(a_{m+1}, a_{m+2}), \ldots, d(a_{n-1}, a_n)\} \\ &< \max\{\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Torej je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tudi Cauchyjevo. □

Hitro se lahko prepričamo, da obrat zgornje trditve ne drži. Obstajajo torej nepriraščajoči prostori, ki niso ultrametrični. Za $M \subset \mathbb{R}^2$ vzemimo trielementno množico, sestavljeno iz oglišč neenakokrakega trikotnika in za d evklidsko razdaljo. Tak prostor ni ultrametričen (ker trikotnik ni enakokrak), je pa nepriraščajoč, ker je vsako kvazicauchyjevo zaporedje od nekje naprej konstantno, torej tudi Cauchyjevo.

Definicija 3.9. Naj bosta (M_1, d_1) in (M_2, d_2) psevdometrična prostora. Potem sta:

(1) *homeomorfna*, če obstaja homeomorfizem $h\colon M_1 \to M_2$.
(2) *izomorfna*, če obstaja tak homeomorfizem $h\colon M_1 \to M_2$, da sta h in h^{-1} enakomerno zvezni. Taki preslikavi rečemo *izomorfizem.*

Nepriraščajoči prostori torej niso nujno tudi ultrametrični, obstaja pa delni obrat zgornje trditve.

Izrek 3.10. *Naj bo (M,d) nepriraščajoč metrični prostor. Potem je homeomorfen ultrametričnemu prostoru.*

Ideja dokaza je sledeča. S pomočje metrike d iz izreka bomo definirali novo psevdometriko d^*, ki bo zadoščala ultrametrični neenakosti, nato pa bomo pokazali, da sta d in d^* ekvivalentni. Od tod bo sledilo, da je tudi d^* metrika, saj je vsaka psevdometrika, ki je ekvivalentna neki metriki, tudi sama metrika. Res, naj bosta x in y dve različni točki ter psevdometrika d^* ekvivalentna metriki d. Želimo videti, da je $d^*(x,y) > 0$. Denimo, da je $d^*(x,y) = 0$. Ker je d metrika, je $d(x,y) = r > 0$. Potem sta krogli

$$K_1(x, \tfrac{r}{3}) = \{w_1 \mid d(x, w_1) < \tfrac{r}{3}\} \qquad \text{in} \qquad K_2(y, \tfrac{r}{3}) = \{w_2 \mid d(y, w_2) < \tfrac{r}{3}\}$$

disjunktni. Ker sta d in d^* ekvivalentni, obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$K_1^*(x, \delta) = \{z_1 \mid d^*(x, z_1) < \delta\} \subset K_1(x, \tfrac{r}{3})$$

in

$$K_2^*(y, \delta) = \{z_2 \mid d^*(x, z_2) < \delta\} \subset K_2(y, \tfrac{r}{3}).$$

Trikotniška neenakost nam da

$$d^*(x,y) \leq d^*(x, z_1) + d^*(z_1, z_2) + d^*(z_2, y) < 2 \cdot \delta + d^*(z_1, z_2) = 0,$$

od koder sledi $\delta = 0$. Prispeli smo do protislovja. Torej je res $d^*(x,y) > 0$ in d^* je metrika.

Definicija 3.11. Točki x in y iz metričnega prostora (M,d) sta *ε-povezani*, če obstaja zaporedje točk $x_0, x_1, \ldots, x_n$ v M, pri čemer je $x_0 = x$, $x_n = y$ in $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ za $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Zaporedje teh točk se imenuje *ε-veriga*.

Lema 3.12. *Naj bo (M,d) metrični prostor. Za $x, y \in M$ definirajmo d^* kot*

$$d^*(x,y) = \inf\{\varepsilon \mid \textit{točki } x \textit{ in } y \textit{ sta } \varepsilon\textit{-povezani}\}.$$

Potem je d^* ultra-psevdometrika.

Dokaz. Preverimo, da d^* zadošča vsem lastnostim ultra-psevdometrike:

$d^*(x,x) = \inf\{\varepsilon \mid x \text{ in } x \text{ sta } \varepsilon\text{-povezani}\}$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Dve enaki točki sta vedno ε-povezani, saj je pripadajoča ε-veriga samo ta točka. Ker je ε poljuben, sledi $d^*(x,x) = 0$.

Če sta x in y ε-povezani, sta tudi y in x ε-povezani in pripadajoča ε-veriga je kar ista veriga v obratnem vrstnem redu. Od tod sledi $d^*(x,y) = d^*(y,x)$.

Naj bosta x in z ε-povezani ter z in y δ-povezani. Če pripadajoči ε in δ-verigi staknemo skupaj, dobimo novo verigo, na kateri so vse razdalje med sosednjimi točkami manjše ali enake $\max\{\varepsilon, \delta\}$. Od tod sledi $d^*(x,y) \leq \max\{d^*(x,z), d^*(z,y)\}$ za vse $x, y, z \in M$. Torej je d^* res ultra-psevdometrika. □

Dokaz izreka 3.10. Naj bo (M,d) nepriraščajoč metrični prostor. Trdimo, da je metrika d ekvivalentna psevdometriki d^* iz leme.

Označimo $K_d(x,\varepsilon) = \{y \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ in $K_{d^*}(x,\varepsilon) = \{y \mid d^*(x,y) < \varepsilon\}$ odprti krogli s središčem v x in polmerom ε v pripadajočih metrikah. Iz definicije d^* sledi, da za vsak par $x, y \in M$ velja $d^*(x,y) \leq d(x,y)$. Res, naj bo $d(x,y) = r$. Potem sta x in y r-povezani (pripadajoča r-veriga sta samo ti dve točki). Razdalja $d^*(x,y)$ je strogo manjša od $d(x,y)$ v primeru, ko obstaja takšna točka z, da je $d(x,z) < r$ in $d(y,z) < r$. Iz tega sledi, da za vsak $x \in M$ in vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$K_d(x,\varepsilon) \subseteq K_{d^*}(x,\varepsilon).$$

Z drugimi besedami, topologija, ki jo porodi psevdometrika d, je finejša od topologije, ki jo porodi metrika d^*. Naša trditev bo dokazana, ko pokažemo tudi obratno. Želimo torej videti, da za poljubna $x \in M$ in $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja $K_{d^*}(x,\delta) \subseteq K_d(x,\varepsilon)$.

Denimo, da tak δ ne obstaja. Potem lahko za vsako naravno število n najdemo točko a_n, ki je vsebovana v krogli $K_{d^*}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ in ni v $K_d(x,\varepsilon)$. Ker je $d^*(x,a_n) < \frac{1}{n}$, po definiciji obstaja $\frac{1}{n}$-veriga točk $x_0, x_1, \ldots, x_k$, ki se začne v x in konča v a_n. Tvorimo zaporedje točk

$$x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0.$$

To zaporedje se začne v x, pride do točke zunaj $K_d(x,\varepsilon)$, ter se nato spet vrne nazaj. Pri tem so vse razdalje med členi manjše od $\frac{1}{n}$. Temu zaporedju rečemo $\frac{1}{n}$-obhod. Če staknemo 1-obhod, $\frac{1}{2}$-obhod, $\frac{1}{3}$-obhod,..., dobimo zaporedje $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Če sta y_i in y_{i+1} konec enega obhoda in začetek drugega, je $d(y_i, y_{i+1}) = 0$. Če pa sta y_i in y_{i+1} znotraj nekega obhoda (npr. $\frac{1}{n}$-obhoda) je $d(y_i, y_{i+1}) < \frac{1}{n}$. Po konstrukciji je $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje. Pokažimo, da $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ni Cauchyjevo. Naj bo $K \in \mathbb{N}$ poljuben. Poiščemo taka $j > i \geq K$, da je $y_i = x$ začetek obhoda in y_j središče tega obhoda. Potem je $d(y_i, y_j) \geq \varepsilon$. Torej $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ res ni Cauchyjevo zaporedje. Našli smo kvazicauchyjevo zaporedje, ki ni Cauchyjevo, to pa je v nasprotju s predpostavko, da je (M,d) nepriraščajoč metrični prostor. □

Trditev 3.13. *Naj bo $h\colon (M_1,d_1) \to (M_2,d_2)$ izomorfizem. Potem h slika kvazicauchyjeva zaporedja v kvazicauchyjeva zaporedja.*

Dokaz. Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_1$ kvazicauchyjevo zaporedje in $h\colon (M_1,d_1) \to (M_2,d_2)$ izomorfizem. Naj bo $\varepsilon > 0$. Radi bi videli, da je potem tudi $(h(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \in M_2$ kvazicauchyjevo zaporedje. Ker je preslikava h izomorfizem, je enakomerno zvezna. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $d_1(x_1, x_2) < \delta$ sledi

$d_2(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon$ za vsaka $x_1, x_2 \in M_1$. Ker je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $d_1(a_{n+1}, a_n) < \delta$ za $n \geq n_0$. Sledi, da za $n \geq n_0$ velja $d_2(h(a_{n+1}), h(a_n)) < \varepsilon$, torej je $(h(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ kvazicauchyjevo zaporedje. □

Iz zgornje trditve takoj sledi, da so nepriraščajoči tudi vsi prostori, ki so izomorfni nekemu ultrametričnemu prostoru. Na tem mestu se lahko vprašamo, ali morda zadošča tudi homeomorfnost z nekim ultrametričnim prostorom? Naslednji primer pokaže, da to ne velja.

Primer 3.14. Vsi diskretni metrični prostori so homeomorfni ultrametričnemu prostoru. Res, če je (M, d) diskreten metrični prostor, potem za vsako točko $x \in M$ obstaja $\varepsilon > 0$, da je $K(x, \varepsilon) = \{x\}$. Tak prostor je homeomorfen prostoru z diskretno metriko, ki je definirana kot

$$d^*(x, y) = \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

in je ultrametrika. Če za M vzamemo množico delnih vsot harmonične vrste in za d evklidsko metriko, je (M, d) diskreten metrični prostor, torej homeomorfen ultrametričnemu, ni pa nepriraščajoč. ♢

Sedaj vemo, da so nepriraščajoči vsi ultrametrični prostori ter prostori, ki so izomorfni nekemu ultrametričnemu prostoru. Kako pa je z obratom te trditve? Torej zanima nas, ali je vsak nepriraščajoč prostor izomorfen kakšnemu ultrametričnemu prostoru? Tudi to trditev bomo ovrgli s protiprimerom.

Primer 3.15. Naj bo (M, d) izomorfen ultrametričnemu prostoru (M, d^*) in naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\gamma > 0$, da iz $d^*(x, y) < \gamma$ sledi $d(x, y) < \varepsilon$. Podobno lahko najdemo $\delta > 0$, da iz $d(x, y) < \delta$ sledi $d^*(x, y) < \gamma$. Naj bosta x in y δ-povezani v (M, d). Potem obstajajo točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ v M, da je $x_0 = x, x_n = y$ in $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ za $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Od tod sledi, da je $d^*(x_i, x_{i+1}) < \gamma$, torej sta x in y γ-povezani v (M, d^*). Ker pa je d^* ultrametrika, z večkratno uporabo ultrametrične neeanakosti dobimo, da je $d^*(x, y) < \gamma$, od koder pa sledi, da je $d(x, y) < \varepsilon$.

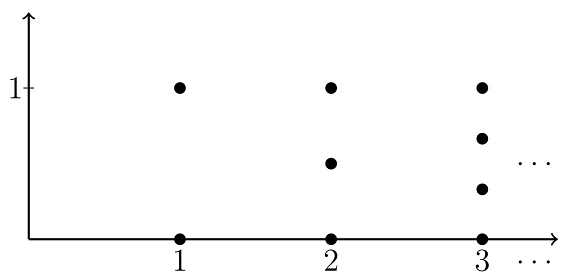
Ugotovili smo, da če je (M, d) izomorfen ultrametričnemu prostoru, velja sledeče:

(1) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz δ-povezanosti x in y sledi $d(x, y) < \varepsilon$.

Naj bo sedaj

$$M = \{(n, m/n) \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ in } n \geq 1 \text{ ter } 0 \leq m \leq n\}$$

in d evklidska metrika. Množica M sestoji iz števno mnogo stolpcev, ki so med sabo



Slika 2. Množica M.

oddaljeni za 1. Torej je vsako kvazicauchyjevo zaporedje od nekje naprej vsebovano samo v enem stolpcu. Vsak stolpec pa ima končno mnogo točk, torej je vsako kvazicauchyjevo zaporedje od nekje naprej konstantno, torej tudi Cauchyjevo. Sledi, da je (M, d) nepriraščajoč metrični prostor. Po drugi strani pa (M, d) ne zadošča (1) za $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Za vsak $\delta > 0$ lahko najdemo tak n, da je $\frac{1}{n} < \delta$. Točki $p_1 = (n, 0)$ in $p_2 = (n, 1)$ sta očitno δ-povezani, vendar je $d(p_1, p_2) = 1 > \varepsilon$. Torej (M, d) ni izomorfen ultrametričnemu prostoru. $\diamondsuit$

3.3. **p-adična števila.** V tem razdelku si bomo podrobneje ogledali p-adična števila, enega izmed pomembnejših primerov ultrametričnih prostorov.

Definicija 3.16. Naj bo p praštevilo. Preslikavi $\nu_p \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, definirani s predpisom

$$\nu_p(n) = \begin{cases} \max\{v \in \mathbb{N}_0 : p^v \mid n\} & , n \neq 0 \\ \infty & , n = 0 \end{cases},$$

pravimo *p-adični red* ali *p-adična valuacija* na $\mathbb{Z}$.

Za racionalna števila definiramo p-adični red kot

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} \nu_p(a) - \nu_p(b) & , \frac{a}{b} \neq 0 \\ \infty & , \frac{a}{b} = 0 \end{cases}.$$

Dobra definiranost sledi iz

$$\nu_p\left(\frac{a \cdot c}{b \cdot c}\right) = \nu_p(a) + \nu_p(c) - \nu_p(b) - \nu_p(c) = \nu_p\left(\frac{a}{b}\right).$$

Definicija 3.17. Naj bo p praštevilo. Preslikavo $|\cdot|_p \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definirano s predpisom

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\nu_p(x)} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases},$$

imenujemo *p-adična absolutna vrednost na polju $\mathbb{Q}$*.

Zgoraj definirana absolutna vrednost inducira metriko $d_p \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, podano s predpisom $d_p(x, y) = |x - y|_p$. Da je d_p res metrika, bomo pokazali pri dokazu naslednje trditve. Da se pokazati (izrek Ostrowskega, glej [2, poglavje 1.3]), da je racionalna števila možno opremiti le s tremi bistveno različnimi absolutnimi vrednostmi: trivialno, evklidsko in p-adično (za neko praštevilo p).

Trditev 3.18. *$(\mathbb{Q}, d_p)$ je ultrametričen prostor.*

Dokaz. Pokažimo, da d_p zadošča vsem lastnostim ultrametrike. Da je $|x|_p = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$, sledi direktno iz definicij ν_p in $|\cdot|_p$. Razdalja d_p je simetrična. Res, iz definicije ν_p sledi, da za vsak $x \in \mathbb{Q}$ velja $\nu_p(-x) = \nu_p(x)$. Sledi

$$d_p(x, y) = |x - y|_p = p^{-\nu_p(x-y)} = p^{-\nu_p(y-x)} = |y - x|_p = d_p(y, x).$$

Ker je trikotniška neenakost šibkejši pogoj od ultrametrične neenakosti, je dovolj dokazati le slednjo. Želimo torej videti, da velja

$$d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(z, y)\} \text{ za vse } x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Ker sta $x, y \in \mathbb{Q}$, ju lahko zapišemo kot ulomka $x = \frac{a}{b}$ in $y = \frac{c}{d}$. Potem je $x + y = \frac{ad+bc}{bd}$ in zato

$$\begin{aligned}\nu_p(x+y) = \nu_p\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) &= \nu_p(ad+bc) - \nu_p(bd) \\ &= \nu_p(ad+bc) - \nu_p(b) - \nu_p(d).\end{aligned}$$

Najvišja potenca p, ki deli $ad + bc$, ne more biti manjša od najvišje potence, ki deli tako ad kot tudi bc, zato velja:

$$\begin{aligned}\nu_p(x+y) &\geq \min\{\nu_p(ad), \nu_p(bc)\} - \nu_p(b) - \nu_p(d) \\ &= \min\{\nu_p(a) + \nu_p(d), \nu_p(b) + \nu_p(c)\} - \nu_p(b) - \nu_p(d) \\ &= \min\{\nu_p(a) + \nu_p(d) - \nu_p(b) - \nu_p(d), \nu_p(b) + \nu_p(c) - \nu_p(b) - \nu_p(d)\} \\ &= \min\{\nu_p(a) - \nu_p(b), \nu_p(c) - \nu_p(d)\} = \min\{\nu_p\left(\frac{a}{b}\right), \nu_p\left(\frac{c}{d}\right)\} \\ &= \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $-\nu_p(x+y) \leq \max\{-\nu_p(x), -\nu_p(y)\}$ in zato tudi $p^{-\nu_p(x+y)} \leq \max\{p^{-\nu_p(x)}, p^{-\nu_p(y)}\}$. Sledi

$$\begin{aligned}d_p(x,y) = |x-y|_p = p^{-\nu_p(x-y)} &= p^{-\nu_p(x+(-y))} \leq \max\{p^{-\nu_p(x)}, p^{-\nu_p(-y)}\} \\ &= \max\{p^{-\nu_p(x)}, p^{-\nu_p(y)}\} = \max\{|x|_p, |y|_p\}.\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}d_p(x,y) &= |x-y|_p = |(x-z) + (z-y)|_p \leq \max\{|x-z|_p, |z-y|_p\} \\ &= \max\{d_p(x,z), d_p(z,y)\}.\end{aligned}$$

□

Izkaže se, da racionalna števila $\mathbb{Q}$ s tako dobljeno metriko niso poln metrični prostor. Oglejmo si zaporedje, podano s predpisom $a_n = p^n, n \in \mathbb{N}$. Iz

$$d_p(a_m, a_n) = |p^m - p^n|_p = p^{-\nu_p(p^m - p^n)} = p^{-\min\{m,n\}}$$

sledi, da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo, vendar brez limite v $\mathbb{Q}$. Metrični prostor $(\mathbb{Q}, d)$ zato napolnimo. Tako dobljen prostor imenujemo p-adična števila in ga označimo s $\mathbb{Q}_p$. Elementi $\mathbb{Q}_p$ so ekvivalenčni razredi Cauchyjevih zaporedij, kjer sta dve zaporedji ekvivalentni, če njuna razlika konvergira proti 0. Pri tem se lastnost ultrametričnosti prenese iz $(\mathbb{Q}, d_p)$ na množico p-adičnih števil.

4. Karakterizacija ultrametričnih prostorov

Vsaka metrika na nekem prostoru določa odprte in zaprte množice, kar posledično inducira topologijo na tem prostoru. Večkrat se zgodi, da imamo podano neko topologijo in nas zanima, ali je inducirana z neko metriko. V tem poglavju si bomo pogledali, katerim pogojem mora zadoščati topološki prostor, da je nearhimedsko metrizabilen. Preden pa navedemo in dokažemo glavni izrek, se spomnimo nekaterih topoloških pojmov.

Definicija 4.1. Naj bo (X, τ) topološki prostor. *Baza topologije* τ je taka družina odprtih množic, da lahko vsako množico iz τ zapišemo kot unijo baznih množic.

Definicija 4.2. Družina množic $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ topološkega prostora X je *lokalno končna*, če vsaka točka $x \in X$ premore okolico, ki seka le končno mnogo različnih množic X_λ.

Vsaka končna družina je seveda lokalno končna. Oglejmo si še nekaj primerov.

Primer 4.3. Naj bo $X = \mathbb{R}$.

(1) $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ je lokalno končna družina.
(2) $\{(n, +\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je lokalno končna družina kljub temu, da se vsi členi paroma sekajo.
(3) $\{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je družina, ki ni lokalno končna. $\diamondsuit$

Definicija 4.4. Bazo prostora, ki je števna unija lokalno končnih družin, imenujemo *NS-baza.* Če je NS-baza sestavljena iz množic, ki so hkrati odprte in zaprte, ji rečemo *0-dimenzionalna NS-baza.*

NS-baza se imenuje po matematikih Junichiju Nagati in Juriju Mikhailoviču Smirnovu, ki sta v petdesetih letih prejšnjega stoletja dokazala izrek o metrizabilnosti topoloških prostorov.

Izrek 4.5 (Nagata-Smirnov)**.** *Topološki prostor X je metrizabilen natanko tedaj, ko je regularen in ima NS-bazo.*

Preden ga dokažemo, pa potrebujemo še pojem parakompaktnega ter perfektno normalnega prostora.

Definicija 4.6. Pokritje $\mathcal{A}$ za prostor X je *finejše* od pokritja $\mathcal{B}$, če je vsaka množica iz $\mathcal{A}$ vsebovana v neki množici iz $\mathcal{B}$. Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako odprto pokritje za X finejše lokalno končno odprto pokritje.

Trditev 4.7. *Vsak metrični prostor je parakompakten.*

Trditev je prvi dokazal Arthur Harold Stone na sredini 20. stoletja. Mi bomo pokazali dokaz Mary Ellen Rudin (glej [9]), ki je precej krajši.

Dokaz. Naj bo $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ odprto pokritje metričnega prostora (X, d). Pri tem je $\mathcal{A}$ neka indeksna množica, ki je dobro urejena. Induktivno (glede na n) definirajmo družine $\{D_{\alpha,n} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ podmnožic prostora X kot

$$D_{\alpha,n} = \bigcup_x K(x, \tfrac{1}{2n}).$$

Pri tem unija teče po točkah prostora X, ki zadoščajo pogojem:

(1) α je najmanjši tak element množice $\mathcal{A}$, da je $x \in C_\alpha$,
(2) $x \notin D_{\beta,j}$ za $j < n$ in $\beta \in \mathcal{A}$,
(3) $K(x, \frac{3}{2n}) \subset C_\alpha$.

Iz definicije sledi, da so množice $D_{\alpha,n}$ odprte, iz zadnje točke pa sledi, da je $D_{\alpha,n} \subset C_\alpha$. Pokažimo, da je $\{D_{\alpha,n}\}$ pokritje za X. Naj bo $x \in X$. Vzemimo najmanši tak $\alpha \in \mathcal{A}$, da je $x \in C_\alpha$ in $n \in \mathbb{N}$, da je $K(x, \frac{3}{2^n}) \subset C_\alpha$. Bodisi je $x \in D_{\beta,j}$ za $j < n$ in $\beta \in \mathcal{A}$ bodisi je $x \in D_{\alpha,n}$. Torej je $\{D_{\alpha,n}\}$ odprto pokritje, ki je finejše od $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

Pokažimo še, da je to pokritje lokalno končno. Naj bo $x \in X$ in α najmanjši tak indeks, da je $x \in D_{\alpha,n}$ za neki n. Izberimo $j \in \mathbb{N}$ tako, da je $K(x, 2^{-j}) \subset D_{\alpha,n}$. Pokazati moramo:

i) za $i \geq n + j$, krogla $K(x, 2^{-n-j})$ ne seka nobenega izmed $D_{\beta,i}$,
ii) za $i < n + j$, krogla $K(x, 2^{-n-j})$ seka $D_{\beta,n}$ za največ en β.

Ker je $i > n$, po točki (2) sledi, da ima vsaka krogla z radijem 2^{-i}, uporabljena v definiciji $D_{\beta,i}$, središče y zunaj $D_{\alpha,n}$. Iz $K(x, 2^{-j}) \subset D_{\alpha,n}$ sledi, da je $d(x, y) \geq 2^{-j}$. Ker pa je $i \geq j + 1$ in $n + j \geq j + 1$ je $K(x, 2^{-n-j}) \cap K(y, 2^{-i}) = \emptyset$.

Naj bo $p \in D_{\beta,i}, q \in D_{\gamma,i}$ ter $\beta < \gamma$. Želimo videti, da je $d(p,q) > 2^{-n-j+1}$. Naj bosta y in z taki točki, da velja $p \in K(y, 2^{-i}) \subset D_{\beta,i}, q \in K(z, 2^{-i}) \subset D_{\gamma,i}$. Po točki (3) je $K(y, 3 \cdot 2^{-i}) \subset C_\beta$, po točki (2) pa $z \notin C_\beta$. Sledi, da je $d(y,z) \geq 3 \cdot 2^{-i}$ in $d(p,q) > 2^{-i} \geq 2^{-n-j+1}$. □

Definicija 4.8. Topološki prostor X je *perfektno normalen*, če lahko vsaki dve zaprti disjunktni množici A in B ločimo z neko zvezno funkcijo $f\colon X \to [0,1]$. Pri tem sta A in B zaporedoma prasliki elementov $\{0\}$ in $\{1\}$.

Trditev 4.9. *Hausdorffov prostor X je perfektno normalen natanko tedaj, ko je normalen in je vsaka zaprta množica v X števen presek odprtih množic.*

Pri dokazu si bomo pomagali z Urisonovo lemo, ki nam da definicijo normalnosti v malo drugačni obliki.

Izrek 4.10 (Urisonova lema)**.** *Hausdorffov prostor X je normalen natanko takrat, ko za poljubni disjunktni neprazni zaprti podmnožici $A, B \subset X$ obstaja preslikava $f\colon X \to [0,1]$. Pri tem je $f(A) = \{0\}$ in $f(B) = \{1\}$.*

Preslikavo f iz Urisonove leme imenujemo Urisonova funkcija za množici A in B. Urisonovo lemo smo dokazali pri Splošni topologiji (glej [7]).

Dokaz trditve 4.9. ($\Leftarrow$) Naj bo X normalen in naj bo vsaka zaprta množica v X števen presek odprtih množic. Po Urisonovi lemi za poljubni disjunktni neprazni zaprti podmnožici $A, B \subset X$ obstaja taka zvezna preslikava $f\colon X \to [0,1]$, da je $f(A) = \{0\}$ in $f(B) = \{1\}$. Od tod sledi, da je $A \subset f^{-1}(\{0\})$ in $B \subset f^{-1}(\{1\})$. Pokažimo, da za vsaki dve disjunktni neprazni zaprti podmnožici A in B obstajata taki Urisonovi funkciji g in h, da je $A = g^{-1}(\{0\})$ in $B = h^{-1}(\{0\})$.

Res, množico A najprej zapišemo kot števen presek odprtih množic $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Lahko predpostavimo, da velja $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ in $U_1 \cap B = \emptyset$. Naj bo g_n Urisonova funkcija za zaprti množici A in U_n^C, pri čemer je $g_n(A) = \{0\}$. Potem je $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n$ očitno Urisonova funkcija za A in B. Ker iz $x \notin A$ sledi, da $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da $x \notin U_{n_0}$, od koder sledi $g_{n_0}(x) = \{1\}$ in zato $g(x) \geq \frac{1}{2^{n_0}}$. Torej je res $g^{-1}(\{0\}) = A$.

Na enak način dobimo funkcijo h, za katero je $h^{-1}(\{0\}) = B$. Sedaj pa definiramo

$$\phi(x) = \frac{g(x)}{g(x) + h(x)}.$$

Očitno velja $\phi(A) = \{0\}$ ter $\phi(B) = \{1\}$. Velja tudi $\phi^{-1}(\{0\}) = A$ in $\phi^{-1}(\{1\}) = B$. Res, če bi veljalo $\phi^{-1}(\{0\}) \supset A$, bi to pomenilo, da obstaja neka točka $y \notin A$, da je $\phi(y) = 0$. Od tod sledi $g(y) = 0$. To pa je v nasprotju s tem, da je $g^{-1}(\{0\}) = A$. Zveznost ϕ sledi iz dejstva, da sta množici A in B disjunktni, torej je $g(x) + h(x) \neq 0$ za vsak $x \in X$.

($\Rightarrow$) Naj bo X perfektno normalen. Potem za vsaki dve zaprti disjunktni podmnožici $A, B \subset X$ obstaja taka zvezna funkcija $f\colon X \to [0,1]$, da je $f^{-1}(\{0\}) = A$ in $f^{-1}(\{1\}) = B$. Potem je f očitno Urisonova funkcija za A in B, od koder sledi, da je X normalen. Ker pa lahko zaprto množico A zapišemo kot $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) < \frac{1}{n}\}$, in ker je f zvezna, je A števen presek odprtih množic. □

Sedaj imamo vse pripravljeno za dokaz izreka o metrizabilnosti topoloških prostorov.

Dokaz izreka 4.5. ($\Rightarrow$) Ker je X metrizabilen, je regularen. Pokažimo še, da obstaja neka NS-baza za X. Naj bo $\mathcal{A}_m$ pokritje za X z odprtimi kroglami s polmerom $1/m$. Po trditvi 4.7 je X parakompakten, torej obstaja neko finejše pokritje $\mathcal{B}_m$ za X, ki je lokalno končno. Definirajmo

$$\mathcal{B} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_m.$$

Družina $\mathcal{B}$ je števna unija lokalno končnih družin. Pokažimo, da je baza za X. Ker je vsaka odprta množica unija odprtih krogel, zadostuje pokazati, da za vsak $x \in X$ ter vsak $\varepsilon > 0$, obstaja neki $B \in \mathcal{B}$, da je

$$x \in B \subseteq K(x, \varepsilon).$$

Izberimo tak $m \in \mathbb{N}$, da je $1/m < \varepsilon/2$. Ker je $\mathcal{B}_m$ pokritje za X, obstaja neki $B \in \mathcal{B}_m$, ki vsebuje x. Ker ima B premer manj kot $2/m < \varepsilon$, je $B \subseteq K(x, \varepsilon)$. Torej je $\mathcal{B}$ res NS-baza za X.

($\Leftarrow$) Naj bo $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ NS-baza prostora X, kjer je $\mathcal{U}_n = \{U_{n,\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{A}_n\}$ lokalno končna družina odprtih množic. Izrek bomo dokazali tako, da bomo poiskali homeomorfizem f iz X v podprostor normiranega prostora

$$l^2(\mathcal{U}) = \left\{ f \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{u \in \mathcal{U}} |f(u)|^2 < \infty \right\}.$$

Pokažimo, da je X perfektno normalen. Naj bo U poljubna odprta množica. Ker je X regularen, za vsak $x \in U$ obstaja taka množica $U_{n(x),\alpha(x)}$, da je $x \in U_{n(x),\alpha(x)} \subset \overline{U}_{n(x),\alpha(x)} \subset U$. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ naj bo

$$F_k = \bigcup \{\overline{U}_{n(x),\alpha(x)} \mid n(x) = k\}.$$

Ker je $\{U_{k,\alpha}\}_\alpha$ lokalno končna družina, je množica F_k zaprta v X. Iz $U = \bigcup_k F_k$ sledi, da je vsaka odprta množica števna unija zaprtih množic. Po de Morganovemu zakonu sledi, da je vsaka zaprta množica števen presek odprtih množic. Potrebujemo še normalnost prostora X.

Naj bosta C in D zaprti, disjunktni podmnožici v X. Potem je $X \backslash D$ odprta. Ker ima X NS-bazo, lahko najdemo tako števno družino odprtih množic $\{U_n\}$, da je $X \backslash D = \bigcup_n U_n = \bigcup_n \overline{U}_n$. Potem je $\{U_n\}$ pokritje za C in nobena množica $\overline{U}_n$ ne seka D. Podobno najdemo odprto pokritje $\{V_n\}$ za D, tako da nobena izmed množic $\overline{V}_n$ ne seka C. Sedaj pa definiramo

$$U_n' = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i \qquad \text{in} \qquad V_n' = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i.$$

Potem sta $U' = \bigcup_n U_n'$ in $V' = \bigcup_n V_n'$ zaporedoma disjunktni odprti okolici C in D. Res, množice U_n' pokrivajo C, ker vsaka točka iz C pripada nekemu U_i in ni v nobenem $\overline{V}_i$. Podobno V_n' pokrivajo D. Sledi, da je $U' = \bigcup_n U_n'$ okolica za C in $V' = \bigcup_n V_n'$ okolica za D. Presek $U' \cap V'$ je prazen, ker smo vsako točko iz preseka $U \cap V$ odšteli na nekem končnem koraku konstrukcije. Po trditvi 4.9 je X perfektno normalen.

Ker je X perfektno normalen, za vsak par (n, α) obstaja taka zvezna funkcija $\varphi_{n,\alpha} \colon X \to [0,1]$, da je $\varphi_{n,\alpha}^{-1}(0) = X \backslash U_{n,\alpha}$. Pokažimo, da je preslikava $f \colon X \to l^2(\mathcal{U})$, podana s koordinatnimi funkcijami

$$f_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\varphi_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{1 + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_n} \varphi^2_{n,\beta}(x)}},$$

homeomorfizem.

Za vsak x je $\{f_{n,\alpha}(x)\}$ element v $l^2(\mathcal{U})$. Ker je $\{U_{n_0,\alpha}\}$ lokalno končna družina, sledi, da je za vsak n_0 $\varphi_{n_0,\alpha}(x) \neq 0$ le za končno mnogo α. Torej je tudi le končno mnogo $f_{n,\alpha}(x)$ različnih od 0. Sledi

$$\sum_{n,\alpha} f^2_{n,\alpha}(x) = \sum_n \sum_\alpha f^2_{n,\alpha}(x) \leq \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$$

Vsaka izmed $f_{n,\alpha}$ je zvezna. Res, $\varphi_{n,\alpha}$ so zvezne na X. Za vsak n_0 je $\{U_{n_0,\alpha}\}$ lokalno končna družina, torej ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka le končno mnogo $U_{n_0,\alpha}$. Sledi, da je $\sum_{\beta \in \mathcal{A}_n} \varphi^2_{n_0,\alpha}$ končna in zvezna funkcija na X.

Preslikava f je injektivna. Če je x različen od y, obstaja neka okolica $U_{n,\alpha}$, tako da je $x \in U_{n,\alpha}$ in $y \notin U_{n,\alpha}$. Od tod sledi $\varphi_{n,\alpha}(x) > 0, \varphi_{n,\alpha}(y) = 0$ in zato $f(x) \neq f(y)$.

Preslikava f je zaprta. Naj bo $A \subset X$ zaprta in $x \notin A$. Potem obstaja tak par (n_0, α_0), da je $x \in U_{n_0,\alpha_0} \subset X \backslash A$. Za vsak $a \in A$ je $\varphi_{n_0,\alpha_0}(a) = 0$, medtem ko je $\varphi_{n_0,\alpha_0}(x) =: k > 0$. Sledi, da je $d(f(x), f(A)) \geq k \cdot \frac{1}{n_0}$ in $f(x) \notin \overline{f(A)}$.

Preslikava f je zvezna. Naj bo $x_0 \in X$ in $\varepsilon > 0$. Izberemo tak n_0, da je

$$\sum_{n > n_0} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Naj bo $W(x_0)$ okolica x_0, ki seka končno mnogo $U_{n,\alpha}$ za $n \leq n_0$. Sledi, da je med vsemi funkcijami $f_{n,\alpha}$, ki imajo prvi indeks $n \leq n_0$, le končno mnogo takih, ki na $W(x_0)$ niso identično enake 0. Naj bo takih funkcij N. Zaradi zveznosti funkcij $f_{n,\alpha}$ lahko izberemo tako okolico $V(x_0) \subset W(x_0)$, da za vsak $x \in V(x_0)$ vseh teh N zveznih funkcij zadošča

$$|f_{n,\alpha}(x) - f_{n,\alpha}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}.$$

Od tod za vsak $x \in V(x_0)$ sledi

$$\sum_{\substack{\alpha \\ n \leq n_0}} |f_{n,\alpha}(x) - f_{n,\alpha}(x_0)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

in

$$\sum_{n > n_0, \alpha} |f_{n,\alpha}(x) - f_{n,\alpha}(x_0)|^2 \leq 2 \sum_{n > n_0} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Pri tem smo v zadnji neenakosti upoštevali, da za poljubni dve realni števili a in b velja $|a - b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2$. Sledi, da je $f(V(x_0)) \subset K(f(x_0), \varepsilon)$ in f je zvezna. S tem smo pokazali, da je f homeomorfizem in dokazali izrek. □

Posledica 4.11. *V 2-števnih prostorih je regularnost ekvivalentna metrizabilnosti.*

Dokaz. Naj bo X 2-števen prostor. Potem ima neko števno bazo $B = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Če B zapišemo kot $B = \bigcup_n B_n$, kjer je vsaka $B_n = \{U_n\}$, vidimo da X zadošča predpostavkam izreka 4.5, zato je metrizabilen. □

4.1. **Separabilni prostori.** Karakterizacijski izrek ultrametričnih prostorov bomo zaradi preprostosti dokazali najprej za separabilne prostore, kasneje pa še za bolj splošne topološke prostore.

Definicija 4.12. Topološki prostor X je *separabilen*, če vsebuje kako števno gosto podmnožico.

Najpreprostejši primer separabilnih prostorov so končne ali pa števno neskončne množice. Števna gosta podmnožica je v tem primeru kar cel prostor. Primer neštevnega separabilnega prostora je realna premica. Primer števne goste podmnožice je množica racionalnih števil.

Izrek 4.13. *Separabilen topološki prostor S je nearhimedsko metrizabilen natanko tedaj, ko zadošča pogojema:*

(1) S je Hausdorffov (dovolj je tudi T_0),

(2) v S obstaja števna baza iz množic, ki so hkrati odprte in zaprte.

Dokaz. ($\Rightarrow$) *(1)* Vsak metrični prostor je Hausdorffov.

(2) V poglavju o ultrametričnih prostorih smo pokazali, da so vse krogle hkrati odprte in zaprte ter da za vsak $r > 0$ množica r-krogel tvori razbitje prostora. Ker je prostor separabilen, v njem obstaja števna gosta množica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sledi, da je

$$\bigcup_{r_0\in\mathbb{Q}^+} \{K(x_n, r_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

števna baza za S iz množic, ki so hkrati odprte in zaprte.

($\Leftarrow$) Naj bo $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ števna baza množic, ki so hkrati odprte in zaprte. Vsaki točki $x \in S$ priredimo zaporedje števil $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, pri čemer je $x_i = 1$, če $x \in B_i$ in 0 sicer. Razdaljo med dvema točkama definiramo kot

$$d(x, y) = \max_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n} \, |x_n - y_n|\right\}.$$

Pokažimo, da tako definirana razdalja zadošča aksiomom ultrametrike.

Naj bo $x = y$. Potem je tudi $x_i = y_i$ za vse $i \in \mathbb{N}$, od koder sledi $d(x, y) = 0$. Naj bo $d(x, y) = 0$ in naj bo $x \neq y$. Ker je prostor T_0, obstaja neka odprta okolica V ene izmed točk, ki ne vsebuje druge. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $x \in V$ in $y \notin V$. Ker je V unija neke podmnožice baznih množic $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, je $y \in V$, kar je protislovje. Zato je $x = y$.

Simetričnost preslikave d sledi iz simetričnosti absolutne vrednosti.

Preveriti moramo še ultrametrično neenakost. Ta očitno drži v primerih, ko je $x = z$, $y = z$ ali $x = y$. Naj bodo sedaj x, y in z različne točke. Naj bo $d(x, z) = \frac{1}{n_1}$ in $d(z, y) = \frac{1}{n_2}$. Zaporedji $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se ujemata v prvih $n_1 - 1$ členih, zaporedji $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pa v prvih $n_2 - 1$ členih. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da velja $n_1 \leq n_2$. Potem se tudi zaporedji $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ujemata v prvih $n_1 - 1$ členih, od koder sledi

$$d(x, y) \leq \frac{1}{n_1} = \max\left\{\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right\} = \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Pokazati moramo še, da je topologija, ki jo inducira metrika d ekvivalentna originalni topologiji na S.

Naj bo B_n neka bazna množica in $x \in B_n$. Želimo najti tak $\delta > 0$, da bo $K(x, \delta) \subseteq B_n$. Pokažimo, da je iskani δ enak $\frac{1}{n}$. Naj bo $y \in K(x, \frac{1}{n})$. Potem je $d(x, y) < \frac{1}{n}$, od koder po definiciji metrike d sledi, da je $y_i = x_i$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ker je $x \in B_n$, je zato tudi $y \in B_n$.

Naj bo $y \in K(x, \frac{1}{n})$. Iščemo tako odprto množico U v S, da bo $y \in U \subseteq K(x, \frac{1}{n})$. Ker je $d(x, y) < \frac{1}{n}$ sledi, da je $x \in B_i$ natanko tedaj, ko je $y \in B_i$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sedaj definirajmo

$$U = \bigcap_{\substack{x \in B_i \\ 1 \leq i \leq n}} B_i.$$

Ker je množica U končen presek odprtih množic, je odprta. Ker vsebuje x, je neprazna. Pokažimo še, da velja $U \subseteq K(x, \frac{1}{n})$. Naj bo $y \in U$. Iz konstrukcije množice U sledi, da je $y \in B_i$ natanko takrat, ko je $x \in B_i$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sledi, da je $d(x, y) \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ in zato $y \in K(x, \frac{1}{n})$. □

4.2. **Splošni topološki prostori.** Pri dokazu izreka za splošne topološke prostore si bomo pomagali s posplošenimi Hilbertovimi prostori.

Naj bo $\beta \geq \aleph_0$ kardinalnost množice indeksov $\{\alpha\}$. Potem ima množica urejenih parov $\{(n, \alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$ prav tako kardinalnost β. To sledi iz dejstva, da za vsaki dve kardinalni števili κ_1 in κ_2, od katerih je vsaj ena transfinitivna velja, da je $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$. Več o kardinalni aritmetiki si bralec lahko prebere v [4, poglavje 2.7].

Definicija 4.14. Naj bo $\beta \geq \aleph_0$ kardinalnost množice indeksov $\{\alpha\}$. *Posplošen Hilbertov prostor* N^β je prostor karakterističnih funkcij na množici $\{(n, \alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Točke prostora N^β so torej funkcije, ki slikajo iz množice $\{(n, \alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$ v množico $\{0, 1\}$. Razdaljo med dvema funkcijama definiramo kot

$$d(\xi, \eta) = \max_{n, \alpha} \left\{ \frac{1}{n} \, |\xi(n, \alpha) - \eta(n, \alpha)| \right\}.$$

Trditev 4.15. *Množica (N^β, d) je ultrametričen prostor.*

Dokaz. Pokažimo, da d zadošča lastnostim ultrametrike. Očitno velja $d(\xi, \eta) = 0$ natanko tedaj ko je $\xi = \eta$. Simetričnost preslikave d sledi iz simetričnosti absolutne vrednosti. Pokažimo še da d zadošča ultrametrični neenakosti. Za različni točki ξ in η naj bo maksimum dosežen v (m, α). Tedaj je

$$d(\xi, \eta) = \frac{1}{m} \, |\xi(m, \alpha) - \eta(m, \alpha)| = \frac{1}{m},$$

od koder sledi

$$\xi(m, \alpha) = 1 \text{ ali } 0 \qquad \text{in} \qquad \eta(m, \alpha) = 0 \text{ ali } 1.$$

Naj bo ζ neka tretja točka. Potem je

$$\begin{aligned} \max\{d(\xi, \zeta), d(\eta, \zeta)\} &\geq \frac{1}{m} \max\{|\xi(m, \alpha) - \zeta(m, \alpha)|, |\eta(m, \alpha) - \zeta(m, \alpha)|\} \\ &= \frac{1}{m} = d(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Torej je d res ultrametrika. □

Izrek 4.16. *Topološki prostor je nearhimedsko metrizabilen natanko tedaj, ko je Hausdorffov (ali celo T_0) in ima 0-dimenzionalno NS-bazo.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Vsak metrični prostor M je Hausdorffov. Naj bo $\{U_\varepsilon\}$ pokritje M z disjunktnimi, odprtimi in zaprtimi ε-kroglami. Da tako pokritje obstaja sledi iz tega, da je v nearhimedsko metrizabilnem prostoru množica ε-krogel razbitje prostora. Iskana 0-dimenzionalna NS-baza je potem družina

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U_{1/n}\}.$$

($\Leftarrow$) Naj bo H nek T_0 prostor skupaj z 0-dimenzionalno NS-bazo $\{U_{n,\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Izrek bo dokazan, če najdemo nek homeomorfizem f iz H v posplošen Hilbertov prostor N^β. Naj bo β kardinalnost množice indeksov $\{\gamma\} = \{(n,\alpha) \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathcal{A}\}$. Definiramo $U_{n,(n,\alpha)} = U_{n,\alpha}$ in $U_{n,(m,\alpha)} = \emptyset$ za $n \neq m$. Družine $\{U_{n,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ostanejo lokalno končne. Za vsako točko $x \in H$ in za vsak par (n,γ) definiramo funkcijo $\xi(x)$ kot

$$\xi_{n,\gamma}(x) = \begin{cases} 1, & x \in U_{n,\gamma} \\ 0, & x \in H\backslash U_{n,\gamma} \end{cases}.$$

Sedaj lahko za vsako točko $x \in H$ definiramo $f(x) \in N^\beta$ kot $f(x) = \{\xi_{n,\gamma}(x)\}$. Pokažimo, da je f homeomorfizem.

Preslikava f je injektivna. Res, za vsaki dve različni točki x in y obstaja neka množica $U_{n,\alpha}$, ki vsebuje x in ne vsebuje y. Sledi, $\xi_{n,\gamma}(x) = 1$, $\xi_{n,\gamma}(y) = 0$ in $f(x) \neq f(y)$.

Preslikava f je zvezna. Naj bo O_ε $1/m$-okolica točke $f(x) = \{\xi_{n,\gamma}(x)\}$ v N^β. Za točko x obstaja taka odprta okolica $O(x)$, ki seka le končno mnogo množic $U_{n,\alpha}$ za $n \leq m$. Med temi $U_{n,\alpha}$ sta dva tipa: $U_{k,\alpha}$, ki vsebujejo x in $U_{l,\alpha}$, ki ne vsebujejo x. Naj bo

$$V(x) = \left[\bigcap_{k\leq m} U_{k,\alpha} \backslash \bigcup_{l\leq m} U_{l,\alpha}\right] \cap O(x).$$

Ker so vse $U_{n,\alpha}$ odprto zaprte, je $V(x)$ odprta okolica točke x, za katero velja

$$f(V(x)) \subset O_\varepsilon.$$

Res, za vsako točko $y \in V(x)$ in $n \leq m$ je $\xi_{n,\gamma}(x) - \xi_{n,\gamma}(y) = 0$, kajti x in y sta hkrati v $U_{n,\alpha}$ oziroma njegovemu komplementu. Od tod sledi

$$d(f(x), f(y)) = d(\xi_{n,\gamma}(x), \xi_{n,\gamma}(y)) = \max_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \ |\xi_{n,\gamma}(x) - \xi_{n,\gamma}(y)| \right\} \leq \frac{1}{m+1}.$$

Pokažimo še, da je f odprta. Naj bo $O \subset H$ odprta in $x \in O$. Potem obstaja taka množica $U_{s,\alpha}$, da je $x \in U_{s,\alpha} \subset O$. Torej je $\xi_{s,\gamma}(x) = 1$. Če za neko točko $y \in H$ velja $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{s}$, iz definicije d sledi, da je $\xi_{s,\gamma}(y) = 1$, od koder sledi $y \in U_{s,\alpha} \subset O$. Torej je $f(O)$ odprta množica v $f(H)$. Sledi, da je f homeomorfizem in naš izrek je dokazan. □

Slovar strokovnih izrazov

cluster point stekališče
locally finite lokalno končen
nonincremental space nepriraščajoč prostor – prostor, v katerem je vsako kvazicauchyjevo zaporedje tudi Cauchyjevo
NS-base NS-baza – števna unija lokalno končnih družin
one-to-one mapping injektivna preslikava

paracompact parakompakten – prostor je parakompakten, če ima vsako odprto pokritje prostora finejše lokalno končno pokritje

perfectly normal perfektno normalen – prostor je perfektno normalen, če je normalen in je vsaka zaprta podmnožica števen presek odprtih množic

refinement finejše pokritje

ultrametric space ultrametričen prostor

uniformly continuous enakomerno zvezen

Literatura

[1] Y. Azouzi, *Cluster points of slow sequences*, Amer. Math. Monthly **125** (2018) 457–461.

[2] G. Bachman, *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*, Academic Press, London, 1964.

[3] D. Burton in J. Coleman, *Quasi-Cauchy sequences*, Amer. Math. Monthly **117** (2010) 328–333.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Alynn and Bacon Series in Advanced Mathemathics, Allyn and Bacon, Boston, 1978.

[5] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010; dostopno tudi na `http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf`.

[6] J. de Groot, *Non-archimedean metrics in topology*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956) 948–953.

[7] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.

[8] C. Perez-Garcia in W. H. Schikhof, *Locally convex spaces over non-archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010; dostopno tudi na `http://assets.cambridge.org/97805211/92439/excerpt/9780521192439_excerpt.pdf`.

[9] M. A. Rudin, *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc **4** (1998) 1211–1218.