

UNIVERZA V LJUBLJANI  
NARAVOSLOVNOTEHNIŠKA FAKULTETA

**DIPLOMSKO DELO**

Luka Bizjak

Ljubljana 2018

UNIVERZA V LJUBLJANI  
NARAVOSLOVNOTEHNIŠKA FAKULTETA  
ODDELEK ZA GEOTEHNOLOGIJO, RUDARSTVO IN  
OKOLJE

**IZRAČUN RADIJA VPLIVA GEOSONDE NA  
TEMPERATURNI POLJE OKOLICE**

DIPLOMSKO DELO

Luka Bizjak

Ljubljana, maj 2018

UNIVERSITY OF LJUBLJANA  
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND ENGINEERING  
DEPARTMENT OF GEOTEHNOLOGY, MINING AND  
ENVIRONMENT

**COMPUTATION OF DOWNHOLE HEAT PUMP  
IMPACT  
RADIUS ON SURROUNDING TEMPERATURE  
FIELD**

DIPLOMA WORK

Luka Bizjak

Ljubljana, 2018

**PODATKI O DIPLOMSKEM DELU**

Število listov: 50

Število strani: 34

Število slik: 6

Število preglednic: 2

Število literaturnih virov: 20

Število prilog: /

Študijski program: Geotehnologija in okolje, 1. stopnja

**Komisija za zagovor diplomskega dela:**

Predsednik: Izr. prof. dr. Evgen Dervarič

Mentor: doc. dr. Goran Vižentin

Somentor: Izr. prof. dr. Janko Bračič

Član: doc. dr. Željko Vukelić

Ljubljana, maj 2018

# Zahvala

Zahvalil bi se svojim strašem, mojemu dekletu Tinci in vsem, ki so mi pomagali pri nastajanju tega diplomskega dela.

# Povzetek

V tem diplomskem delu se bomo ukvarjali s kondukcijskim prenosom toplote na področju geotermije. V prvih poglavjih bomo naredili pregled čez osnove geotermije s poudarkom na fizikalnih osnovah prenosa toplote, obravnavali bomo prenos toplote s kondukcijo, konvekcijo in pa s sevanjem. Povzeli bomo tudi osnove o pridobivanju toplotne energije s pomočjo geosonde, le ta bo tudi konkreten primer za parktični prikaz v zadnjem poglavju. V nadaljevanju se bomo omejili na kondukcijo, in v ta namen bomo obravnavali toplotno enačbo. Poiskali bomo rešitve toplotne enačbe, ki jih bomo v zadnjem poglavju aplicirali na primeru pridobivanja toplotne energije s pomočjo gosonde glede na temperaturno polje okolice.

## **Ključne besede:**

toplota, geotermija, kondukcija, toplotna enačba, geosonda

# Abstract

In this diploma work we will be dealing with conduction heat transfer in the context of geothermics. In first chapters, the basics of the physics of heat transfer will be reviewed. In particular, heat transfer by conduction, convection and radiation. We will also discuss basics of geothermics with some remarks on application of geothermal energy to economical issues. The basics of downhole heat exchangers will be shown. In the remaining chapters we will be focusing on conduction heat transfer and develop basic theory of the heat equation. With the solutions of the heat equations we will look at the impact radius of downhole heat pump on the surrounding temperature field.

## **Key words:**

heat, conduction, geothermics, heat equation, downhole heat pump

# Kazalo

<b>Povzetek</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Slike</b>	<b>5</b>
<b>Tabele</b>	<b>6</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>9</b>
<b>2 Geotermija</b>	<b>11</b>
2.1 Geotermalna energija . . . . .	11
<b>3 Fizikalne osnove prenosa toplote</b>	<b>13</b>
3.1 Kondukcija . . . . .	14
3.2 Konvekcija . . . . .	15
3.3 Sevanje . . . . .	16
<b>4 Načini izkoriščanja geotermalne toplote v svetu</b>	<b>19</b>
4.1 Izkoriščanje toplote, ogrevanje. . . . .	20
4.2 Pridobivanje električne energije s pomočjo geotermalne energije.	20
<b>5 Svetovna poraba geotermalne energije</b>	<b>22</b>
5.1 Izkoriščanje geotermalne energije v Sloveniji . . . . .	23
<b>6 Način iskoriščanja toplote z geosondo</b>	<b>24</b>
6.1 Elementi geosonde . . . . .	24
6.1.1 Izdatnost geosonde . . . . .	25



<b>7</b>	<b>Izračun</b>	<b>27</b>
7.1	Toplotna enačba . . . . .	27
7.1.1	Rešitev homogenega dela toplotne enačbe . . . . .	28
7.1.2	Toplotno jedro . . . . .	29
7.1.3	Rešitev Cauchyjevega problema . . . . .	33
7.2	Radij vpliva . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Praktični prikaz</b>	<b>38</b>
8.1	Toplotno črpanje v danem času . . . . .	39
<b>9</b>	<b>Zaključek</b>	<b>43</b>
<b>10</b>	<b>Literatura</b>	<b>45</b>

# Slike

8.1	Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature, $t = 1h$ . . . . .	39
8.2	Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature, $t = 10h$ . . . . .	40
8.3	Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature, $t = 100h$ . . . . .	40
8.4	Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature, $t = 1000h$ . . . . .	41
8.5	Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature, $t = 1800h$ . . . . .	41
8.6	Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature, $t = 2400h$ . . . . .	42

# Tabele

7.1	Tabela: toplotna prevodnost materialov [20]	37
7.2	Tabela: toplotna difuzivnost [2]	37

# Seznam uporabljenih fizikalnih veličin in simbolov

- $z$  Globina [ $m$ ]
- $\rho$  Gostota [ $\frac{kg}{m^3}$ ]
- $C_p$  Specifična toplota [ $\frac{J}{kgK}$ ]
- $T$  Temperatura [ $K$ ]
- $n$  Množina [ $mol$ ]
- $p$  Tlak [ $Pa$ ]
- $R$  Splošna olinska konstanta [ $\frac{J}{molK}$ ]
- $m$  Masa [ $kg$ ]
- $v$  Hitrost [ $\frac{m}{s}$ ]
- $k_B$  Boltzmannova konstanta [ $\frac{J}{K}$ ]
- $\kappa$  Toplotna prevodnost [ $\frac{W}{mK}$ ]
- $\gamma$  Kinetična vizkoznost [ $\frac{m^2}{s}$ ]
- $k_T$  Koeficient prenosa toplote [ $\frac{W}{mK^2}$ ]
- $h$  Planckova konstanta [ $Js$ ]
- $\sigma$  Stefan-Boltzmannova konstanta [ $\frac{W}{m^2K^4}$ ]
- $\kappa_k$  Toplotna prevodnost kamnine [ $\frac{W}{mK}$ ]
- $\alpha$  Toplotna difuzivnost [ $\frac{m^2}{dan}$ ]

- $q$  Toplotni tok [ $\frac{W}{m^2}$ ]
- $Q$  Grelno število
- $q'$  Toplotna moč na meter vrtnice [ $\frac{W}{m}$ ]
- $R$  Reynoldsovo število
- $P$  Prandtlovo število
- $P_e$  Pechletovo število

# Poglavje 1

## Uvod

V tej nalogi se bomo ukvarjali s kondukcijskim prenosom toplote na področju geotermije. Naša obravnava bo morda malce bolj matematična, vendar bomo na koncu s pomočjo pridobljenih metod ter uporabo ustreznega računalniškega programa lahko rešili tudi probleme iz prakse. Torej, reševali bomo geofizikalni problem, ki je povezan s kondukcijskim prenosom toplote, in sicer zanimal nas bo vpliv geosonde na spremembo temperature v njeni oklici. Naš primarni cilj bo določanje temperaturne spremembe, torej odvzema toplote glede na globino naše vrtine in pa vhodne parametre kot so na primer začetni toplotni tok, konduktivnost zemljine, debelina zemljne plasti in podobno. Iz fizike vemo, da lahko toplotno energijo opišemo s pomočjo toplotne enačbe, zato lahko vsak problem v zvezi s prenosom toplote s kondukcijo prevedemo na reševanje toplotne enačbe z nekimi začetnimi in robnimi pogoji, ki pa so seveda odvisni od našega problema. Moramo pa tudi poudariti, da nam toplotna enačba iz računskega stališča ponuja dva pristopa: prvi je analitičen, v katerem pridemo do rešitev s pomočjo analitičnih metod, drug pristop pa je numeričen, v katerem uporabimo numerične oziroma aproksimacijske metode. Naš pristop se bolj nagiba k analitičnemu in zato tudi vpeljemo potrebna matematična orodja za obravnavo našega problema, na koncu pa bomo vseeno uporabili tudi kaneček numeričnih metod, in sicer pri razvoju naše rešitve v končno funkcijsko vrsto, v torej tako imenovan Taylorjev polinom. Na mestu, ko bomo imeli pred nami natančno formulo oziroma rešitev toplotne enačbe s predpisanim začetnim pogojem, bomo lahko s pomočjo programa Excell numerično izračunali vrednosti, ki nam jih da naša rešitev toplotne enačbe ob tem začetnem pogojem. V vmesnih poglavjih bomo tudi prikazali osnovno teorijo o geotermalni energiji in geosondah, ki predstavljajo naš praktičen primer uporabe pridobljenih računskih metod. Omeniti je še vredno, da si bomo pri obravnavi

praktičnega primera pomagali s programskim paketom Surfer in bomo s pomočjo tega programa izdelali model geosonde na območju. Prikazali bomo vpliv geosonde na temperaturno polje v okolici geosonde. V tem modelnem primeru bomo privzeli, da je naša zemljina izotropna, in tako bomo imeli tudi enotne fizikalne parametre območja. Omenimo tudi, da v realnem to nikakor ni vedno situacija, namreč ponavadi je obravnavana zemljina anizotropna, kar oteži in pa spremeni način računanja.

## Poglavje 2

# Geotermija

Geotermijo bi lahko definirali kot vedo, ki preučuje porazdelitev temperature na Zemlji in pojave, ki vplivajo na to porazdelitev [1].

Na primer, na površju Zemlje in v njeni atmosferi se nenehno dogajajo zapleteni meteorološki pojavi na katere močno vpliva prav porazdelitev temperature za Zemlji. Geotermija je prisotna tudi v geologiji, kjer je recimo pri študiju sedimentnih kamnin zadosti vedeti, da se temperatura teh ni dvignila do vrednost, ki bi dopuščala rekristalizacijo metamorfoze. V hidrologiji pa je znano, da temperature vplivajo na permabilnosti, katere so definirane s pomočjo lokalnih temperatur nekega danega območja. Ne glede na to da so temperaturni pojavi precej pogosti, namreč zasledimo jih pri skoraj vseh vejah geofizike, smo daleč od popolnega razumevanja temperaturnih sprememb na Zemlji. Recimo, v do danes znanih modelih zemljine notranjosti lahko gostoto in pa pritiske dobro ugotovimo na vseh globinah, s tem mislimo, da je njuna porazdelitev po globini že dobro znana, medtem ko je porazdelitev temperature v teh modelih ekstremno nedoločljiva. Ne glede na vse pa iz že do sedaj znanih raziskav vemo, da temperatura igra eno izmed ključnih vlog v fizikalnem modelu notranjosti Zemlje. Geotermija ima tudi pomemben pomen v praksi, saj nam prek svojih načel omogoča uporabo oziroma izrabo geotermalne energije. Ker pa ima Zemlja zelo veliko zalogo te naravne energije, to vrstno energijo štejemo med obnovljive vire energije [1].

### 2.1 Geotermalna energija

Geotermalna energija je toplota, ki je shranjena v zemeljini notranjosti oziroma v masi kamnin in fluidov v zemeljski skorji. Zaradi zelo velikih temperatur v središču Zemlje se toplotni tokovi širijo proti površju Zemlje. Iz geotermičnih



meritev je znano, da zunanji oziroma atmosferski vplivi na toploto v globini vplivajo na porazdelitev le te od 10 metrov do 15 metrov pod zemljskim površjem. Pri večjih globinah je torej temperatura stalna in se povečuje za približno 3 stopinje celzija na 100 metrov. Iz ekonomskega vidika se izkoriščanje toplotne energije najbolj splača kadar je energija omejena na nekem območju, torej na območjih kot so nahajališča rude, nafte ter zemeljskega plina [11].

Toplota se iz notranjosti Zemlje prenaša prek kondukcije (toplota, ki je shranjena v kamninah in fluidih v zemljni skorji), konvekcije (toplotna energija, ki nastane s gibanjem fluidov v zemljni skorji) in s pomočjo sevanja.

Osnovni pogoji pri izkoriščanju geotermalne energije so naslednji:

- Visok geotermalni gradient območja
- Dobre proizvodne lastnosti in porazdelitev ležišč nosilca toplote
- Primerne fizikalno-kemične lastnosti nosilca toplote
- Majhna razdalja med virom in porabnikom geotermalne energije

Največji pokazatelj perspektivnosti nekega območja je geotermalna anomalija tega območja. Ta iz hidrokemičnega in hidrološkega stališča podaja jasno sliko o možnostih in načinih izkoriščanja energetskega potenciala. Bolj podrobno, geotermalno energijo glede na pojavnost in možnost izkoriščanja delimo na hidrogeotermalno in petrogeotermalno energijo. Hidrogeotermalna energija je energija v tekočih in plinastih fluidih. Petrogeotermalna energija pa je energija, ki izvira iz mase kamnin [11].

## Poglavje 3

# Fizikalne osnove prenosa toplote

Prenos toplote fizikalno v grobem predstavlja termodinamični in kinematični opis različnih pojavov prenosa toplote v različnih fizikalnih sistemih. Glavno vodilo pri fizikalni obravnavi je prav zakon o ohranitvi energije, zato privzamemo tudi hipotezo, da toplota predstavlja svoje vrstno energijo, ki ji pravimo termalna oziroma toplotna energija. Povezavo med pojavi, ki se godijo na atomski ravni in pa na makroskopski ravni, predstavljajo prav zakoni termodinamike. Za teorijo prenosa toplote je najpomembnejši prvi zakon termodinamike, ki pravi, da se notranja energija zaprtega sistema ohranja. Iz konteksta je razvidno, da prvi zakon govori prav o termalnem ravnovesju, zato igra pomembno vlogo pri procesih prenosa toplote.

V splošnem lahko za makroskopski sistem zapišemo enačbo za prenos toplotne energije [13]

$$\nabla \cdot \Phi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho c_p T(x, t) + \sum_{i,j} \frac{d}{dt} s_{i-j}. \quad (3.1)$$

V enačbi (3.1)  $\Phi$  predstavlja toplotni pretok, ta pa je v splošnem sestavljen iz treh členov. Torej  $\Phi = \Phi_k + \Phi_{kon} + \Phi_s$ , tu posamezni členi pomenijo prenos toplote s kondukcijo  $\Phi_k$ , prenos toplote s konvekcijo  $\Phi_{kon}$ , ter prenos toplote s sevanjem  $\Phi_s$ . V enačbi (3.1) nastopa še gostota  $\rho$ , specifična toplota  $c_p$  in pa člen  $\frac{d}{dt} s_{i-j}$ , ki predstavlja sprembo toplotne energije med nosilcema toplote  $i$  in  $j$ .

Zanimivo je, da ima dogajanje na makroskopski ravni tudi vpliv na dogajanje na mikroskopski ravni, kjer lahko termalno energijo kvantiziramo in ji priredimo njene nosilce. Iz zapisanega zgoraj vidimo, da je toplotni pretok odvisen od treh različnih načinov prenosa toplote, ki jih bomo v naslednjih razdelkih obravnavali malce bolj podrobno.

### 3.1 Kondukcija

Kondukcija je prenos toplote skozi snov, deluje iz delca na delec, torej iz molekule na molekulo. Ker privzamemo, da so interakcije med molekulami v snovi povsem elastične in torej reverzibilne, lahko delamo na primer v okviru kinetične teorije plinov, na tem mestu za obravnavane sisteme, da zanje velja vsaj do dobre aproksimacije natančno splošna plinska enačba [8]  $pV = nRT$ , v enačbi nastopajo tlak  $p$ , volumen  $V$ , množina  $n$ , splošna plinska konstanta  $R$  [ $\frac{J}{mol^{-1}K^{-1}}$ ] (ta je v neposredni povezavi s Boltzmannovo konstanto  $k_B$  in Avogadrovim številom  $n_A$  namreč velja  $R = k_B n_A$ ) in temperatura  $T$ . V kinetični teoriji plinov interakcije med delci v snovi opišemo s pomočjo porazdelitve energije, v tem primeru kinetične energije. Ta je za posamezni delec enaka  $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ , kjer je  $m$  masa delca,  $v$  pa je njegova hitrost. Celotna energija sistema s končnim volumnom pa je podana s ustrezno statistično porazdelitvijo, ponavadi vzamemo kar Maxwell-Boltzmann porazdelitev hitrosti, ki je enaka [8]

$$f(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}} d\vec{v} \quad (3.2)$$

S pomočjo statističnih metod lahko iz Maxwell-Boltzmannove porazdelitve izrazimo povprečno hitrost  $\langle \vec{v} \rangle$ , varianco  $\sqrt{\langle \vec{v}^2 \rangle}$  in druge statistične lastnosti. Od tod pa iz enostavnih računov teh vrednosti sledi, da je porazdelitev energije oziroma hitrosti odvisna le od parametrov  $m$ ,  $k_B$  in  $T$ , ker sta prvi dve konstanti v vsakem sistemu, vidimo, da je energija delcev odvisna samo od temperature  $T$ .

Pri kondukciji ob zgornjih privzetkih delci z višjo energijo preko trkov prenesejo del energije na delce z nižjo energijo. Ravnovesje dobimo takrat, ko je temperatura enaka po vsej snovi. Takemu stanju pravimo termalno ravnovesje. Do prenosa toplote s kondukcijo pride predvsem v snovi v trdem agregatnem stanju in v manjšem obsegu tudi pri plinih. Fizikalni model kondukcije je Fourierov kondukcijski zakon [8]. Ta pravi, da je pretok toplote  $\Phi$  na enoto površine [ $m^2$ ] na časovno enoto [ $s$ ] enak produktu negativne vrednosti temperaturnega gradienta  $\vec{\nabla}T$  [ $K$ ] in kondukcijske konstante  $\kappa$  [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ]. Ta konstanta predstavlja toplotno prevodnost snovi. V matematični obliki ta zakon zapišemo:

$$\Phi = -\kappa \vec{\nabla}T \quad (3.3)$$

Porazdelitev toplote  $T = T(x, y, z, t)$  je v splošnem podana s **toplotno (difuzijsko) enačbo**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \vec{\nabla}^2 T \quad (3.4)$$

V enačbi (3.4) nastopa nova konstanta  $\alpha$ , ki ji pravimo difuzijska konstanta za katero velja  $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ .

## 3.2 Konvekcija

Proces prenosa toplote je pri togih telesih manj kompliciran kot pa je prenos toplote v fluidih. Namreč, v teh moramo upoštevati tudi kinematične lastnosti fluida. Na primer, segreto telo se bo v mirojočem fluidu dlje časa hladilo, kot pa če je fluid v gibanju. Takemu gibanju (segretega) fluida, v katerem toplota ni enakomerno porazdeljena, pravimo konvekcija.

Enačbi za prenos toplote med fluidom v gibanju in nekim telesom pravimo toplotno-konveksijska enačba in jo zapišemo v sledeči obliki [9]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \vec{\nabla}^2 T. \quad (3.5)$$

Kjer je  $\vec{v}$  hitrost fluida,  $\alpha$  pa je difuzijska konstanta. Ta enačba je veljavna ob predpostavki, da so razmerja med različnimi temperaturami v fluidu dovolj majhna, sicer moramo v enačbo upoštevati še viskoznost  $\gamma$  fluida. Kot primer si pogledimo konvekcijo v mirovanju, torej temperatura bo v tem primeru konstantna po času. Za pravilno obravnavo moramo poleg enačbe (3.5) upoštevati še enačbe fluidne dinamike, ki izhajajo iz drugega Newtonovega zakona  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ . To so tako imenovane Navier-Stokesove enačbe [9], v našem primeru so zapisane v vektorski obliki:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \vec{\nabla}^2 T \quad (3.6)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \gamma \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (3.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.8)$$

Neznake v sistemu enačb (3.6), (3.7), (3.8) so hitrost  $\vec{v}$ , temperatura  $T$  ter tlak  $p$ , od že znanih konstant pa v teh enačbah nastopa še kinematična viskoznost  $\gamma$ . Rešitve sistema so odvisne še od robnih pogojev, zato opazovanemu telesu v fluidu priredimo še karakteristično dolžino  $l$ , hitrost v fluidu  $U$  (ta količina je seveda konstanta v našem primeru) in pa temperaturno razliko med telesom in fluidom  $T_{tl} - T_{fl}$ . Prvi problem, ki se pojavi pri obravnavi zgornjega sistema enačb, je dimenzionalna analiza parametrov konveksijskega prenosa, ki nastopajo v sistemu. V enačbah (3.6), (3.7), (3.8) nastopa pet parametrov (to so seveda fizikalne konstante). Prva enačba (3.6) v sistemu, ki opisuje prenos

toplote na dano telo, je homogena in linearna, zato jo lahko pomnožimo s katerim koli od preostalih parametrov in s tem ne spremenimo njene vsebine. Parametri sistema so naslednji  $[\gamma] = [\alpha] = [m^2 s^{-1}]$ ,  $[U] = [m s^{-1}]$ ,  $[l] = [m]$ ,  $[T_{tl} - T_{fl}] = [K]$ . Iz teh parametrov lahko tvorimo dva brezdimenzijska parametra: to sta Reynoldsovo število  $R = \frac{Ul}{\gamma}$  in pa Prandtlovo število  $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ . Vsak drug brezdimenzijski parameter je možno tvoriti iz  $P$  in  $R$ . Reynoldsovo število nam pove koliko se tok vrtniči na mejnih ploskvah danega telesa, Prandtlovo število pa je materialna konstanta in je neodvisna od toka fluida. Moramo pa omeniti, da vrednost Prandtlovega števila najbolj varira prav pri fluidih, v tekočem agregatnem stanju. Iz konstant  $P$  in  $R$  lahko izpeljemo še Pechletovo število  $P_e = PR = \frac{Ul}{\alpha}$ . Iz zgornje diskusije o parametrih in lastnosti sistema enačb (3.6), (3.7), (3.8) sklepamo, da bosta porazdelitev toplote in hitrosti enaka [9]

$$\frac{T - T_{fl}}{T_{tl} - T_{fl}} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, R, P\right). \quad (3.9)$$

$$\frac{\vec{v}}{U} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, R\right). \quad (3.10)$$

Kjer je  $\vec{r} = (x, y, z)$  smerni vektor, funkciji  $f\left(\frac{\vec{r}}{l}, R, P\right)$  in  $f\left(\frac{\vec{r}}{l}, R\right)$  pa sta taki, da rešita sistem enačb (3.6), (3.7), (3.8). Kot vidimo pri konvekcijskem prenosu toplote dobimo dva "toplotna pretoka". Eden je vezan na kondukcijski prenos, drug pa je kinematične narave, torej je vezan na gibanje fluida. Za dva konvekcijska tokova pravimo, da sta podobna, če sta njuni Reynoldsovi in Prandtlovi števili enaki. Ponavadi pa prenos toplote med fluidom in togim telesom opišemo s pomočjo koeficienta toplotnega prenosa  $k_T [W m^{-1} K^{-2}]$  in je definiran kot:

$$k_T = \frac{\Phi}{T_{tl} - T_{fl}} \quad (3.11)$$

Če je porazdelitev toplote po fluidu že znana, lahko  $k_T$  izračunamo s pomočjo Fourierovega kondukcijskega zakona  $\Phi = -\kappa \vec{\nabla} T$ . Brezdimenzijski parameter, ki karakterizira koeficient toplotnega prenosa, je Nusseltovo število  $N = \frac{k_T l}{\kappa}$ .

### 3.3 Sevanje

Vsa telesa konstantno oddajajo energijo s pomočjo elektro-magnetnega sevanja. Intenzivnost tovrstnega sevanja je predvsem odvisna od temperature in narave površine telesa. Prenos toplote s sevanjem nas predvsem zanima pri visokih temperaturah, medtem ko ga pri nizkih ponavadi zanemarimo. Toplotno

sevanje na elektromagnetnem spektru zaseda valovne dolžine od  $0.1 - 1000 \mu m$ . Fizikalni model [8], ki opisuje popolni toplotni vir sevanja, je model sevanja črnega telesa. Za razumevanje tega pojava moramo najprej poznati nekaj lastnosti nosilcev elektromagnetne energije fotonov. Vsakemu fotonu dodelimo tri brezdimenzijske parametre, ki opišejo delovanje elektromagnetnega sevanja na neko telo, ki prejema elektro-magnetno energijo. Te parametri so absorbnost  $\chi$ , odsevnost  $\delta$  in transmisivnost  $\tau$ . Zanje velja  $\chi + \delta + \tau = 1$ , kjer so  $\chi, \delta, \tau$  vrednosti med 0 in 1. Črno telo je takšen energijski vir, ki absorbira vse sevanje vase, torej zanj velja  $\chi_{ct} = 1$ ,  $\delta_{ct} = 0$ ,  $\tau_{ct} = 0$ . Poleg tega, da vsako telo prejema elektromagnetno sevanje, ga pri temperaturi različni od  $0 K$  tudi oddaja. Tako vsakemu telesu, ki seva priredimo še parameter emisivnosti  $e$ , ki prav tako zavzema vrednosti med 0 in 1. Zvezo med emisivnostjo  $e$  in pa absorbnostjo  $\chi$  za črno telo podaja **Kirchhofov zakon**, ki pravi da za telesa v toplotnem ravnovesju z njihovo okolico velja [8]

$$e(\lambda) = \chi(\lambda). \quad (3.12)$$

za vse valovne dolžine  $\lambda$ . Ker za črno telo velja  $\chi_{ct} = 1$  iz Kirchhofovega zakona sledi, da je  $e_{ct} = 1$ . Zato za črnemu telesu pravimo popolni vir sevanja. Da lahko opišemo sevanje črnega telesa, moramo vedeti njegov frekvenčni spekter, ta pa je podan s Planckovim sevalnim zakonom. Ta je podan pri neki fiksni temperaturi  $T$  črnega telesa, dobimo ga pa tako, da plinu fotonov priredimo Bose-Einsteinovo porazdelitev energije. Energija fotona je enaka  $E = \hbar\omega$ , kjer je  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h$  Planckova konstanta,  $\omega$  pa je krožna frekvenca fotona. Bose-Einsteinova porazdelitev [8] je za ta primer enaka:

$$f_{BE}(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_b T}} - 1}. \quad (3.13)$$

Porazdelitev gostote enrgije je  $u(\omega)d\omega = \hbar\omega n(\omega)d\omega$ , kjer je  $n(\omega)d\omega$  gostota porazdelitve števila fotonov, od tod izpeljemo Planckov sevalni zakon, kjer upoštevamo še  $\omega = 2\pi\nu$ .

**Planckov sevalni zakon** [ $Jm^{-3}Hz^{-1}$ ]:

$$u(\nu)d\nu = \left( \frac{8\pi h}{c^3} \right) \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}. \quad (3.14)$$

Če upoštevamo še zvezo med frekvenco  $\nu$  in valovno dolžino  $\lambda$ ,  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , lahko Planckov sevalni zakon zapišemo v odvisnosti od valovne dolžine, torej dobimo

spekter valovnih dolžin  $u(\lambda)d\lambda$ . Porazdelitev  $u(\lambda)$  odvajamo po  $\lambda$  in poiščemo ekstreme porazdelitve  $u(\lambda)$ , torej rešimo enačbo  $\frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$  za  $\lambda$ , dobimo Wienov zakon, ki pravi da je maksimalna valovna dolžina  $\lambda_{max}$ , ki jo oddaja črno telo, obratno sorazmerna njegovi temperaturi.

**Weinov zakon:**

$$T = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{\lambda_{max}}. \quad (3.15)$$

Iz Wienovega zakona sledi, da je maksimalna valovna dolžina  $\lambda_{max}$  črnega telesa funkcija temperature  $T$ , tej funkciji pravimo barva telesa. Zanimivo je, da so do dobre aproksimacije natančno vse zvezde črna telesa, njihova barva pa nam pove kakšna je njihova temperatura na površju. Ostane nam še Stefan-Boltzmannov zakon, ki nam pove kakšna je gostota svetlobnega toka, ki ga oddaja črno telo. To količino opišemo s pomočjo pretoka sevanja  $J$ . Do Stefan-Boltzmannovega zakona pridemo tako, da integriramo Planckovo porazdelitev po vseh frekvencah, torej  $\int_0^\infty u(\nu)d\nu$  od tod dobimo, da je intenziteta sevanja črnega telesa spet odvisna le od temperature.

**Stefan-Boltzmannov zakon** [ $Wm^{-2}$ ]:

$$J = \sigma T^4. \quad (3.16)$$

Kjer je  $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}]$ , konstanto  $\sigma$  imenujemo Stefan-Boltzmanova konstanta [8].

## Poglavje 4

# Načini izkoriščanja geotermalne toplote v svetu

Geotermalna energija je v splošnem naravna toplota zemlje, ki je prisotna v zemljni sredici, plašču in skorji. Iz površja zemlje se proti središču temperatura v povprečju povečuje za približno  $3^\circ$  do  $4^\circ$  na 100 metrov, tej sprembi temperature po globini pravimo temperaturni gradient  $\vec{\nabla}T$  in je odvisen od faktorjev kot so poroznost, stopnja saturacije z vodo, toplotne prevodnosti kamnin in ostalih sedimentov, ki so prisotni v zgradbi zemljne notranjosti, nahajališč magme in podzemnih nahajališč termalnih vod. Temperaturni gradient ima tudi ekonomski vpliv na izkoriščanje geotermalne energije, namreč visoki gradienti pomenijo, da ni treba vrtati v pretirane globine, kar pa zajetno zmanjša stroške pridobivanja geotermalne energije. Geotermalne sisteme za izkoriščanje toplote lahko razdelimo na odprte krožne procese in pa na zaprte krožne procese. Odprti sistemi so definirani kot odprti-kržni sistemi, v katerih je nosilec toplote kar podzemna voda, in so neposredno vezani na toplotno črpalko. V taki sistemih med zemljino, podzemno vodo in toplotno črpalko ni pregrad. Ločimo odprte sisteme z enim vodnjakom in odprte sisteme z več vodnjaki. Po drugi strani pa lahko geotermalno energijo uporabljamo za pridobivanje električne energije. Vse do danes so se že razvile tehnologije za takšno učinkovito pridobivanje električne energije. Vendar so v tem primeru te tehnologije močno vezane na geotermalni potencial oziroma na temperaturni gradient območja, v katerem bi radi pridobivali električno energijo, in zato teh tehnologij ne moremo efektivno uporabljati povsod po svetu, temveč le v krajih z zadosti velikim geotermalnim potencialom [1].



## 4.1 Izkoriščanje toplote, ogrevanje.

Odprt sistem z enim vodnjakom (single well) je vrtina iz katere črpamo vodo direktno iz vodonosnika, ta pa gre skozi toplotno črpalko. Voda se v teh sistemih ne re-injektira v tla, zato se jo je potrebno ustrezno znebiti. V teh sistemih imamo zato neko neto izgubo podtalne vode. Možni so tudi sistemi (standing column), v katerih je vrtina v direktnem kontaktu s bližnjim vodonosnikom, in vodo iz toplotne črpalke potem re-injektiramo v drug vodonosnik in tako ne pride do nobenih izgub v podzemni vodi [2], [11].

Najpreprostejši oprt sistem z večimi vodnjaki je dvojni sistem (dual wells), ta je sestavljen iz vodnjaka za injektiranje in vodnjaka za "produkcijo" toplote. Sistem deluje tako, da vodo za ogrevanje črpamo iz "produkcijskega" vodnjaka s pomočjo toplotne črpalke, ohlajeno vodo pa potem re-injektiramo v drug vodnjak in tako dobimo krožni proces, v katerem ni neto izgub v podzemni vodi. V Sloveniji se tovrstni sistemi uporabljajo na aluvialnih poljih, kjer gre za pare vrtin (črpalno-nalivalni par). Takim sistemom pravimo nizko entalpijski sistemi [2].

Poznamo tudi sistem "Hot-Dry-Rock" na kratko HDR, ki spada med sisteme z več vodnjaki. Sistem deluje tako, da je na večji globini neka segreta kamnina, ki s svojo toploto segreva vodo, ki je bila injektirana skozi enega ali več vrtin. Segreto vodo spet črpamo na površje s eno ali večimi črpalkami iz produkcijskih vodjakov. Vodo mormo v vrtine injektirati pod ustreznim tlakom, da v zemljini zagotovimo stanje, ki omogoča pretok vode v zemljini do produkcijskih vodnjakov [4].

## 4.2 Pridobivanje električne energije s pomočjo geotermalne energije.

Geotermalne energije za svoje obratovanje potrebujejo visoke temperature, zato je njihova postavitve smiselna le na območjih z visokim geotermalnim potencialom. Temperature za iskoriščanje geotermalne toplote v ta namen pa varirajo od okoli 100° pa do več kot 300°, vrtine pa v globino ponavadi segajo več kilometrov. Osnovni načini pridobivanja električne energije s pomočjo geotermalne energije so geotermalno iskoriščanje (vrelci vroče vode), geotlačno iskoriščanje in hlajenje vročih kamnin.

Trenutno v svetu poznamo štiri različne tipe tehnologij geotermalnih elektrarn:

- "Dry-Steam" tip elektrarne, te s pomočjo geotermalne toplote v obliki

pare poganjajo turbine za proizvodnjo električne energije.

- "Flashed-Steam" tip elektrarne, v tej tehnologiji črpamo vročo geotermalno vodo iz globin pod velikim pritiskom v rezervoare pod nižjim pritiskom, kjer se ta voda spremni v paro in poganja turbine.
- "Binarno-Ciklični" tip elektrarne, v katerem vroči termalni vodi dodamo še dodatni fluid z nižjim vreliščem. Dodatni fluid se spremni v paro in poganja turbine.
- Hibridni tip elektrarn, v tem primeru se uporabi mešanica zgoraj naštetih tipov.

Treba pa je seveda tudi omeniti sisteme za izkoriščanje geotermalne energije, ki so v komercialni rabi, in lahko iz njih prav tako pridobivamo električno energijo. Primarno tu igrajo vlogo toplotne črpalke, ki pa jih vendarle ponavadi uporabljamo za segrevanje vode. Vendar obstajajo tudi sistemi, s pomočjo katerih lahko pridobivamo tudi električno energijo v komercialne namene [11].

## Poglavje 5

# Svetovna poraba geotermalne energije

Elektriko s pomočjo geotermalne energije proizvajajo v 24 – *ih* državah, v petih pa iz geotermalne energije proizvedejo 15% – 22% elektrike od celotne državne porabe električne energije. Zabeleženo je [16], da v 72 državah po svetu uporabljajo geotermalno energijo v različne komercialne namene, predvsem na področju ogrevanja stanovanskih in poslovnih objektov. Za prihodnosti so napovedi za geotermalno energijo obetavne, namreč napovedano je, da naj bi se pridobivanje elektrike s pomočjo geotermalne energije povečalo iz sedajšnjih 10GW na 70GW z razvojem nove tehnologije, ki bi ceno elektrike pridobljeno s tem virom tudi znižale. Trenutno je cena elektrike iz geotermalni elektrarn [16] 40 – 100 *eur/kWh*. Segrevanje s pomočjo geotermalne energije, na primer s pomočjo toplotnih črpalk, postaja zaradi razvoja tehnologije in ugodnih cen vse bolj kompetentno konvencionalnim načinom ogrevanja, ki so bili do sedaj v komercialni rabi. Moramo poudariti, da nekomercialni in komercialni geotermalni sistemi predstavljajo tudi naložbo za prihodnost, namreč prvi predstavljajo naravi prijazno pridobivanje energije brez fosilnih goriv, v komercialnih sistemih pa predstavljajo prihranek pri porabi energije (najpogosteje električne). Geotermalne toplotne črpalke uravnava tudi raven izpusta  $CO_2$ , saj je izpust tega plina za 50% manjši v primerjavi z konvencionalnimi grelniki na fosilna goriva. Moramo omeniti še dejstvo, da geotermalno energijo štejemo med obnovljive vire energije in tako z njeno uporabo pomagamo pri reševanju problematike sprememb podnebja, predvsem pri problematiki globalnega segrevanja [16].

## 5.1 Izkoriščanje geotermalne energije v Sloveniji

V tem razdelku nas zanima poraba geotermalne energije po Sloveniji. V Sloveniji geotermalno energije že dolgo poznamo, vendar je glede na geopotencial Slovenije dokaj slabo izkoriščena. Slovenija ima zaenkrat, za ekonomsko izkoriščanje, danosti le za nizko entalpijske sisteme.

Znano je, da ima v Sloveniji približno 16% ozemlja perspektiven geotermalni potencial. Trenutno se izkorišča največ nizkotemperaturnih geotermalnih virov, ki predstavljajo gospodarsko pomemben vir toplotne energije. Recimo, kar se tiče geotermalne energije za izkoriščanje električne energije v Sloveniji tovrstnih sistemov nimamo. Torej je primarni faktor za izkoriščanje geotermalne energije potreba po toplotni energiji za ogrevanje in hlajenje zasebnih ali pa poslovnih prostorov. Moramo omeniti še uporabo geotermalne energije v turistične namene, v tem primeru je v uporabi tako imenovana geotermalna voda, ki jo izkoriščajo v turistične in zdravilne (toplice) namene v regijah Rogaško-Celjski-Šoštanjski regiji, Planinsko-Laški-Zagorski regiji in Krško-Brežiški regiji [11].

Kar se tiče komercializacije geotermalne energije je znano, da zametki prvih podjetji, ki so se ukvarjali s izkoriščanjem geotermalne energije v komercialne namene, v tem primeru za ogrevanje in hlajenje bivanjskih prostorov, sega v pozna devetdeseta leta. Prvo podjetje, ki se je ukvarjalo s to panogo je bilo iz Kranja, in sicer Geosonda d.o.o. [12]. V Sloveniji imamo vsega skupaj šestinpetdeset geotermalnih vrtin, tri termične izvire na triintrideset lokacijah, za primer podamo lahko še geotermalni izkoristek za leto 2015, ki je znašal 1218 TJ.

## Poglavje 6

# Način iskoriščanja toplote z geosondo

Sistem geosonde je eden izmed sistemov za izkoriščanje geotermalne energije za namen pridobivanja toplote. Sistem deluje tako, da odvzame toploto iz podzemlja in jo s pomočjo toplotne črpalke dovede nazaj na površje. Geosonde izkoriščajo toplotni potencial globokega podzemlja, namreč zaradi ogromne količine toplote v tem območju se ta energija nenehno širi proti površju. Meritve so pokazale, da je temperatura v plitvem podzemlju do 15 metrov globine pod vplivom zunanjih atmosferskih pojavov in se zato stalno spreminjajo, globlje pa je temperatura stalna in se spreminja le z globino (poveča se za približno  $3^\circ$  vsake 100 metrov), torej v teh pogojih največji vpliv na temperaturo prav geotermalni toplotni tok oziroma geotermalna energija iz globin zemlje. Geosonde se uporablja v večih komercialnih namenih, na primer uporabimo jih lahko za segrevanje ali hlajenje stavb, lahko pa tudi za segravanje sanitarne vode. Število vrtin in njihova globina je odvisna od naših energetske potreb, vendar so ponavadi vrtine globoke od 80 do 100 metrov [2].

### 6.1 Elementi geosonde

Sistem geosonda je zaprt krožni sistem, ki ga vstavimo v vrtino in je sestavljen iz dveh do štirih polietilenskih cevi premera  $25,4\text{mm}$ , ki so na koncu vrtine povezane v parih. Skozi cevi se pretaka zmes vode in glikola. Preostali prostor med cevmi pa zapolnimo z dodatno cevjo, skozi katero dovajamo suspenzijo vode in cementa (betonit), ta je zaradi svoje dobre toplotne prevodnosti odličen za odvzem toplote iz tal. S tem ko zapolnimo cevi z betonitom, sistem fiksiramo in omogočimo večji prenos toplote iz okolice [2].

Poznamo sonde v dveh osnovnih izvedbah [2]

- Dvojna U-cev (skozi en krak gre ohlajen fluid, skozi drugega se pa vrača segret fluid, vse skupaj je povezano s toplono črpalko).
- - Koaksialna cev (notranja cev je iz polietilina (PE), skozi njo teče hladna mešanica voda/glikol. Zunanja cev je iz jekla, skozi njo pa teče do toplotne črpalke segreta mešanica voda/glikol).

Pri izgradnji geosonde moramo upoštevati naslednje pogoje [2]

- Najmanjšo razdaljo med vrtinama; ta je 5 do 6 metrov.
- Najmanjšo oddaljenostjo od temeljev objekta; ta je 2 metra.
- Kakovost oziroma vrsto tal (poznati moramo tudi geomehanske lastnosti zemljine).
- Globina vrtine je odvisna od kakovosti tal.
- Izbrati ustrezno mešanico delovnega medija glikol/voda.

### 6.1.1 Izdatnost geosonde

Povprečni odvzem geosonde je na tekoči meter dolžine med 35 in 100  $W/m$ , ta pa je predvsem odvisen od lastnosti zemljine. Seveda moramo pa tudi upoštevati število ur kroženja medija za prenos toplote v nekem daljšem obdobju. Standardno časovno obdobje za delovanje sistema na letni ravni je po DIN normah 1800 ur na območju Primorja in 2400 ur drugod. Podatke o termičnih lastnostih zemljine pridobimo prek laboratorijskih meritev, vendar moramo biti pri le-teh pazljivi na toplotna nihanja na določenih globinah.

Na toplotno izdatnost geosonde vpliva temperaturni gradient (tega moramo določiti iz meritev), gostota zemljskega toplotnega toka ter toplotna prevodnost kamnine  $\kappa_k$ .

Geotermični gradient dobimo s pomočjo enačbe [2]

$$\vec{\nabla}T = \frac{T}{z} \Rightarrow T = \vec{\nabla}T \cdot z \quad (6.1)$$

Toplotno prevodnost kamnin pa določimo s pomočjo izračunanega gradienta in lokalnega zemljskega toplotnega toka, torej uporabimo Fourierov zakon:

$$\kappa_k = \frac{\Phi_{lokalni}}{\vec{\nabla}T} \quad (6.2)$$

Enačba za toplotno izdatnost geosonde pa je [2]:

$$Q_s = \Phi_{spec} \cdot d . \quad (6.3)$$

Ta enačba je določena glede na toplotno prevodnost kamnine preko katerega potem določimo specifični odvzem toplote  $\Phi_{spec}$  za čas delovanja 1800 ur ali pa 2400 ur.

# Poglavje 7

## Izračun

V tem delu naloge se bomo posvetili matematični oziroma analitični teoriji prenosa toplote s kondukcijo. V prvem delu bomo izpeljali splošni matematični okvir za obravnavo kondukcijskih toplotnih pojavov, torej ukvarjali se bomo s toplotno enačbo. V drugem delu pa bomo pridobljeno teorijo aplicirali na naš praktičen primer, v katerem nas bo zanimala porazdelitev toplotnega toka v vrtini z določeno globino.

### 7.1 Toplotna enačba

V tem delu naloge se bomo posvetili toplotni oziroma difuzijski enačbi, ki v splošnem opisuje kakšna je porazdelitev toplote v prostoru (natančneje, v omejenem delu prostora). Toplotno enačbo bomo pogledali z matematičnega vidika, vendar se v njeno izpeljavo ne bomo spuščali. Povejmo le, da enačbo najlažje izpeljemo s pomočjo Fourierovega zakona o toploti in zakona o ravnovesju energije. Toplotna enačba [7] se glasi:

$$D_a u = f. \tag{7.1}$$

Z  $D_a = -a^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial t}$  smo označili difuzijski operator. Ta linearno deluje na toplotno porazdelitev  $u$ , ki je vsaj dvakrat odvedljiva zvezna funkcija, torej  $u \in C^r(\Omega \times \tau)$ , kjer je  $r \geq 2$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\tau \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Torej bomo iskali rešitve enačbe (3.1) na podmnožicah  $\Omega \times \tau \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  (v našem primeru bo  $n = 3$ ). Pri obravnavi bomo predpostavili, da je  $\Omega$  takšno odprto in omejeno območje, za katerega velja  $\text{int}(\bar{\Omega}) = \Omega$ , tj. notranjost zaprtja množice  $\Omega$  je enaka mno-



žici  $\Omega$ , in da je  $\tau$  kompakten interval na nenegativnem delu realne osi. Naša naloga bo poiskati rešitve enačbe (3.1). Glede na že prej znane začetne pogoje lahko rečemo, da moramo rešiti Cauchyjev problem za enačbo (3.1). Do rešitve bomo prišli v treh delih. Najprej bomo rešili homogeni del enačbe (3.1). To pomeni, da bomo poiskali splošno rešitev enačbe  $D_a u = 0$ . V drugem delu bomo pogledali nekatere lastnosti rešitve homogenega dela, v tretjem pa bomo rešili še nehomogeni del enačbe s pripomočki, ki jih bomo vpeljali v drugem delu.

### 7.1.1 Rešitev homogenega dela toplotne enačbe

Imejmo torej Cauchyjev problem za homogeno toplotno enačbo. Iščemo rešitev med funkcijami  $u \in C^r(\Omega \times \tau)$ . Postavimo še  $\alpha = -a^2$ ,  $r \geq 2$  in  $t \geq 0$ . Problem lahko zapišemo v obliki:

$$\alpha \Delta u(x, t) = u_t(x, t), \quad (7.2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (7.3)$$

kjer je  $x \in \mathbb{R}^n$  in  $\phi \in C(\Omega)$ . Do rešitve bomo prišli s pomočjo Fourierove transformacije [17].

**Definicija 1** *Fourierova transformacija je preslikava  $\mathcal{F}$ , ki funkciji  $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$  priredi funkcijo*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx. \quad (7.4)$$

Podobno definiramo inverzno Fourierovo transformacijo: v definiciji spremenimo le predznak v eksponentnem faktorju in integriramo po  $\xi$ -ju. Znano je, da velja  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ . Pomembno je vedeti, da Fourierova transformacija deluje linearno: če sta  $g, h \in C^r(\mathbb{R}^n)$ , to pomeni  $\mathcal{F}(g + h) = \mathcal{F}(g) + \mathcal{F}(h)$ . Pri reševanju enačbe (3.2) bomo potrebovali še eno lastnost Fourierove transformacije [7]. Namreč, znano je, da velja

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi). \quad (7.5)$$

Nabrali smo dovolj pripomočkov, da lahko rešimo enačbo (3.2). Začnimo transformirati člen za členom (to nam omogoča linearnost Fourierove transformacije). Prvi člen je enak  $\hat{u}_t = \frac{d}{dt} \hat{u}$ , drugega pa dobimo s pomočjo pravila za

odvajanje:  $\Delta \hat{u} = i^2 \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \hat{u}(\xi)$ . Ko združimo oba člena, dobimo navadno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti.

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0. \quad (7.6)$$

Rešitev te enačbe zlahka najdemo in je enaka  $\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$ . Tu smo upoštevali začetni pogoj  $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\phi}(\xi)$ . Do končne rešitve enačbe (3.2) bomo prišli s pomočjo inverzne transformacije. Vemo, da velja  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = u$ . Torej imamo:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot (x-y) - |\xi|^2 t} d\xi \right) dy. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Po nekaj računskih korakih pridemo do rešitve enačbe (7.2) (izračunati moramo Fourierovo transformacijo  $\phi$ -ja in s tem se znebimo nekaterih členov v integralu):

$$u(x, t) = \frac{1}{(2(\pi t)^{1/2})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \quad (7.8)$$

### 7.1.2 Toplotno jedro

Pomembno vlogo pri obravnavi toplotne enačbe ima *toplotno jedro* [6].

**Definicija 2** *Toplotno jedro je funkcija  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je dana s predpisom*

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \quad (7.9)$$

Vemo, da v splošnem  $\Phi(x, t)$  ni navadna funkcija, temveč je regularna distribucija (Križanič 2004). To pomeni, da je za vsako lokalno integrabilno funkcijo  $\phi \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  integral  $\int \Phi \phi$  končen.

**Lema 3** *Velja  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$ .*

**Dokaz**

Lemo bomo dokazali le za primer  $n = 2$ . Izračunati torej moramo

$$\frac{1}{4\pi t} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)/4t} dx_1 dx_2.$$

V integral vplejemo polarne koordinate:  $x_1 = r \cos \phi$ ,  $x_2 = r \sin \phi$ . Imamo:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, t) dx = \frac{1}{4\pi t} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty e^{\frac{-r^2}{4t}} r dr.$$

V drugi integral vpeljemo novo spremenljivko  $\frac{r^2}{4t} = u$ , kar nam da

$$\int_0^\infty e^{\frac{-r^2}{4t}} r dr = 2t \int_0^\infty e^{-u} du = 2t.$$

Se pravi, da je

$$\frac{1}{4\pi t} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty e^{\frac{-r^2}{4t}} r dr = \frac{1}{4\pi t} \cdot 2\pi \cdot 2t = 1.$$

S tem je dokaz za primer  $n = 2$  končan.  $\square$

**Lema 4** *Obravnavajmo integral*

$$f(t_0 - t, x_0, y_0, z_0) = \iiint_{\Omega} \Phi(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z, t_0 - t) dx dy dz,$$

pri čemer je  $\Omega$  neko odprto in omejeno območje v  $\mathbb{R}^3$ . Ko gre  $t_0 - t \rightarrow 0$ , je integral enak 1, če je točka  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ , in je enak 0, če  $(x_0, y_0, z_0) \notin \Omega$ .

**Dokaz**

Vpeljimo nove spremenljivke  $x_1, y_1, z_1$ , definirajmo jih s pomočjo transformacije:

$$T : \Omega \rightarrow \Omega_1,$$

$$T(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (x_1 \sqrt{t_0 - t}, y_1 \sqrt{t_0 - t}, z_1 \sqrt{t_0 - t}).$$

V novih koordinatah dobimo integral

$$f(t_0 - t_1, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{8\pi^{3/2}} \iiint_{\Omega_1} e^{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)/4} dx_1 dy_1 dz_1.$$

Glede na to kako smo vpeljali nove koordinate sledi, da se območje  $\Omega_1$  veča preko vseh mej, ko gre razlika  $t_0 - t$  proti 0. Če je točka  $(x_0, y_0, z_0)$  znotraj  $\Omega$

in gre  $t_0 - t \rightarrow 0$ , se bo območje  $\Omega_1$  razširilo čez vse meje in napolnilo celoten prostor  $\mathbb{R}^3$ . V tem primeru bo iz leme 3 sledilo, da je  $f(t_0 - t, x_0, y_0, z_0) = 1$ . V nasprotnem primeru, ko je  $(x_0, y_0, z_0) \notin \Omega$ , se bo območje  $\Omega_1$  še vedno širilo preko vseh mej, ko  $t_0 - t \rightarrow 0$ . Vendar v tem primeru območje  $\Omega_1$  ne bo napolnilo celega prostora, temveč se bo vedno bolj oddaljevalo od točke  $(x_0, y_0, z_0)$  in s tem tudi od majhne okolice  $\rho(x_0, y_0, z_0)$  te točke. Ker pa po lemi 3 vemo da integral  $f(t_0 - t, x_0, y_0, z_0)$  konvergira v celem prostoru, mora konvergirati tudi v okolici  $\rho(x_0, y_0, z_0)$ . Ker pa ta okolica, s tem ko se območje  $\Omega$  širi, postaja čedalje bolj izolirana, bo v tem primeru integral  $f(t_0 - t, x_0, y_0, z_0)$  enak 0. To pa je ravno to kar smo trdili.  $\square$

**Lema 5** Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  odprto omejeno območje,  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  in naj bo  $f$  gladka in omejena funkcija, tj.  $f \in C^\infty(\Omega)$ . Potem imamo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \iiint_{\Omega} \Phi(x, y, z, t) f(x, y, z) d\Omega = f(x_0, y_0, z_0). \quad (7.10)$$

### Dokaz

Poglejmo razliko

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \Phi(x, y, z, t) f(x, y, z) d\Omega - f(x_0, y_0, z_0) \iiint_{\Omega} \Phi(x, y, z, t) d\Omega = \\ & = \iiint_{\Omega} \Phi(x, y, z, t) (f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)) d\Omega. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Pokazati moramo, da gre ta razlika proti 0, ko gre  $t \rightarrow 0$  za  $t > 0$ , v nekem območju  $\Omega_1(x_0, y_0, z_0)$  okoli točke  $(x_0, y_0, z_0)$ . Točko  $(x_0, y_0, z_0)$  postavimo za središče majhne krogle  $K_\rho$  z polmerom  $\rho > 0$ . Naj bo  $\rho$  tako majhen, da za  $r \leq \rho$  velja

$$|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Integral bomo razdelili na dva dela. Prvi del integrala bo definiran na krogli  $K_\rho$  s polmerom  $\rho$ , drugi del pa bo definiran po vsej zunajosti te krogle. Prvotni integral je vsota obeh delov. Najprej pogledjmo integral po krogli z polmerom  $\rho$ . Pomagajmo si z oceno:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K_\rho} \Phi(x, y, z, t) (f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)) dV_{K_\rho} \right| \leq \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z, t) dV_{\mathbb{R}^3} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Drugi del integrala pogledjmo bolj natančno. Vemo, da je  $f$  omejena funkcija, torej obstaja takšno število  $M \in \mathbb{R}$ , da je  $|f(x, y, z)| < M$ . Tudi v tem primeru ocenimo integral:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{8(\pi t)^{3/2}} \iiint_{\Omega-K_\rho} e^{-\frac{r^2}{4t}} (f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)) dV_{\Omega-K_\rho} \right| &\leq \\ &\leq \frac{2M}{8(\pi t)^{3/2}} \iiint_{\Omega-K_\rho} e^{-\frac{r^2}{4t}} dV_{\Omega-K_\rho}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Da sklenemo dokaz, moramo ugotoviti, ali integral za neenačajem konvergira. V integralu (3.12) (v delu za znakom  $\leq$ ) uvedemo nove spremenljivke in vpeljemo sferne koordinate:

$$x = \frac{x_1}{\sqrt{t}}, \quad y = \frac{y_1}{\sqrt{t}}, \quad z = \frac{z_1}{\sqrt{t}}, \quad r^2 = \frac{(r_1)^2}{t},$$

$$dxdydz \rightarrow r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr.$$

Dobimo:

$$\frac{2M}{8(\pi)^{3/2}} \iiint_{\Omega-K_{\rho'}} e^{-r_1^2/4} dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\rho'}^{\infty} (r_1)^2 e^{-r_1^2/4} dr_1 = I(r_1).$$

Za integral  $I(r_1)$  trdimo, da velja  $I(r_1) < \infty$ . To trditev dokažimo s pomočjo integrala

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Ker integriramo sodo funkcijo, je  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ . Pokazati moramo, da  $I(x)$  konvergira. Od tod bo sledilo, da tudi  $I(r_1)$  konvergira. Uporabimo Eulerjevo funkcijo  $\Gamma(t)$ , ki je definirana z

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0.$$

V  $I(x)$  vpeljimo novo spremenljivko  $u = x^2$ ,  $du = 2x dx$ . Potem je

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} x e^{-x^2} 2x dx = \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Torej, za dovolj majhen  $t$ , je integral (3.12) manjši od  $\frac{\epsilon}{2}$ . Združimo obe oceni in s tem je dokaz končan.  $\square$

**Komentar.** Namesto integrala (3.10) bi lahko imeli bolj splošen integral

$$\Psi(x_0, y_0, z_0, \xi) = \frac{1}{8(\pi\xi)^{3/2}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z, \xi) dx dy dz.$$

Funkcija  $F(x, y, z, \xi)$  je zvezna in omejena, tj.

$$|F(x, y, z, \xi)| < M$$

za neko pozitivno število  $M$ . Vzemimo, da  $F(x, y, z, \xi)$  enakomerno konvergira v vsaki omejeni oklici  $\Omega'$ , ki leži skupaj z svojim robom v  $\Omega$ , k funkciji  $F(x, y, z)$ , ko gre  $\xi \rightarrow 0_+$ , torej

$$\lim_{\xi \rightarrow 0_+} F(x, y, z, \xi) = F(x, y, z).$$

Potem velja

$$\lim_{\xi \rightarrow 0_+} \Psi(x_0, y_0, z_0, \xi) = F(x_0, y_0, z_0)$$

v vsaki točki  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . To bolj splošno trditev dokažemo podobno, kot smo dokazali lemo 5.

Lemo 5 lahko povežemo s teorijo distribucij [7]. Kot vemo, je  $\Phi(x, t)$  regularna distribucija, vendar se izkaže, da  $\Phi(x, t)$ , ko gre  $t \rightarrow 0$ , postane singularna. Lemo, tokrat kar v spošni obliki (nad  $\mathbb{R}^n$ ), lahko v tem bolj modernem jeziku zapišemo takole [7] :

**Izrek 6** *Ko gre  $t \rightarrow 0$ , družina funkcionalov  $\Phi(x, t)$  šibko konvergira k Diracovem funkcionalu  $\delta(x)$ :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(x, t) = \delta(x) \quad \text{ozioroma} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \langle \Phi(*, t), f \rangle = f(0).$$

Dokaz tega izreka bomo seveda izpustili, saj ga ne potrebujemo v tej splošnosti.

### 7.1.3 Rešitev Cauchyjevega problema

Zdaj obravnavamo nehomegono toplotno enačbo [6]

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, z, t), \quad u_{t=0} = \phi(x, y, z). \quad (7.13)$$

Problem obravnavamo na množici  $\Omega \times \tau \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , kjer je  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  odprta omejena množoca in  $\tau \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  zaprt interval. Rešitev enačbe (3.13) je

funkcija  $u \in C^r(\Omega \times \tau)$ , kjer je  $r \geq 2$ , ki zadošča začetnemu pogoju iz (3.13). Do rešitve Cauchyjeve naloge bomo prišli s pomočjo Greenove formule [18] in pomožnih izrekov iz prejšnega razdelka.

Vzemimo, da je  $\Omega$ , njen rob je sfera  $\partial\Omega = \mathcal{S}$ , in naj bo  $\tau = [0, t_0]$ . Imejmo funkciji  $u, v \in C^r(\Omega \times \tau)$ . Greenova formula se glasi

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\Omega = \iint_{\mathcal{S}} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\mathcal{S}.$$

Tu je  $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad}(u) \cdot n$  smerni odvod, tj. skalarni produkt gradienta in normalnega vektorja  $n$  na sfero  $\mathcal{S}$ . Integral

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega \right) dt &= \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (uv) d\Omega \right) dt \\ &= \iiint_{\Omega} uv d\Omega \Big|_0^{t_0} \end{aligned}$$

združimo z Greenovo formulo, da dobimo

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\Omega} \left[ u \left( \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} \right) - v \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] d\Omega \right) dt &= \\ = \iiint_{\Omega} uv d\Omega \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \left( \iint_{\mathcal{S}} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\mathcal{S} \right) dt. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Če privzamemo, da je  $u$  rešitev enačbe (3.13) za  $v$  pa vzamemo  $\Phi(x, t)$  in uporabimo enakosti  $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f$  ter  $\Delta \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ , imamo

$$\int_0^{t_0} \left( \iint_{\mathcal{S}} \left( \Phi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) d\mathcal{S} \right) dt + \iiint_{\Omega} u \Phi d\Omega \Big|_0^{t_0} = - \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\Omega} \Phi f d\Omega \right) dt. \quad (7.15)$$

Povejmo, da integral  $\int_0^{t_0} \left( \iiint_{\Omega} \Phi(x, y, z, t) F(x, y, z, t) d\Omega \right) dt$  absolutno konvergira natanko takrat, ko je  $F(x, y, z, t)$  zvezna in omejena funkcija. Torej

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\Omega} |\Phi(x, y, z, t) F(x, y, z, t)| d\Omega \right) dt &\leq \\ &\leq \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\Omega} \Phi(x, y, z, t) \sup |F(x, y, z, t)| d\Omega \right) dt \leq \sup |F(x, y, z, t)| t_0. \end{aligned}$$

Privzemimo torej, da sta  $f(x, y, z, t)$  in  $\phi(x, y, z)$  zvezni in omejeni funkciji. Poglejmo enačbo (3.15), ko območje  $\Omega$  narašča preko vseh mej. Privzamemo

lahko, na primer, da je  $\Omega$  krogla s polmerom  $r$ , pri čemer  $r \rightarrow \infty$ . V enačbi (3.15) bomo po teh privzetkih dobili integral po sferi  $\partial\Omega$ . Po posledici Greenove formule bo ta integral enak 0, saj smo predpostavili, da sta  $u$  in  $\frac{\partial u}{\partial n}$  omejeni funkciji, za  $e^{-r^2/\xi}$  je pa očitno, da gre proti 0, ko gre  $r \rightarrow \infty$ . Tako imamo:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} u\Phi \, dx dy dz \Big|_0^{t_0} = - \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\mathbb{R}^3} \Phi f(x, y, z, t) \, dx dy dz \right) dt.$$

Da preverimo konvergenco integrala  $\iiint_{\mathbb{R}^3} u\Phi dx dy dz \Big|_0^{t_0}$ , ko gre  $t \rightarrow t_0$ , uporabimo lemo 4. Imamo:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} u\Phi \, dx dy dz = u(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

Ob upoštevanju začetnega pogoja iz (3.13), že lahko zapišemo končno rešitev enačbe (7.13):

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0, t_0) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \phi(x, y, z)\Phi \, dx dy dz - \\ &- \int_0^{t_0} \left( \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z, t)\Phi \, dx dy dz \right) dt. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Podobno, kot smo prišli do rešitve v  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  pridemo do rešitve tudi v  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  ter v  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  [6]. Na primer, rešitev nehomogene toplotne enačbe v  $\mathbb{R}^2 \times \tau$ , kjer je  $\tau$  zaprt interval v  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  in pišemo  $r := |x - y|$ , je:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, t_0) &= \frac{1}{4\pi t_0} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{r^2}{4t_0}} \phi(x, y) dx dy - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{t_0 - t} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}} f(x, y, t) dx dy \right) dt. \end{aligned} \quad (7.17)$$



## 7.2 Radij vpliva

Radi bi ugotovili kakšna je porazdelitev toplote  $T$  v okolici vrtine za namen izkoriščanja toplote z geosondo. Naš problem lahko v grobem opišemo kar takole: imamo vrtino z globino  $h$ , v vrtini je na določeni globini voda, ki jo črpamo s pomočjo sistema geosonde. Zanima nas odvzem toplote, ki ga koristimo pri črpanju. Podan je torej toplotni tok  $q$  pred črpanjem in znane so tudi toplotne lastnosti kamnin oziroma zemljin iz katerih črpamo (to je toplotna prevodnost  $\kappa$ , toplotna difuzivnost  $\alpha$  ter toplotna tranzmisivnost  $T_t$ ). Predpostavljamo pa tudi izotropijo naših kamnin po globini in prenos toplote zgolj v horizontalni smeri, kar zreducira naš problem v dvodimenzionalni problem iz sicer tridimenzionalnega problema. S tem dobimo še neko dodatno simetrijo, saj lahko uporabimo polarne ali pa cilindrične koordinate, ki še nekoliko olajšajo reševanje problema. Ker je prenos toplote močno odvisen od toplotne prevodnosti in toplotne difuzivnosti materialov, podajamo na naslednji strani še tabele z pomembnejšimi vrednostmi teh snovnih lastnosti. Torej zanima nas kako se spreminja (v skladu s toplotno enačbo) parameter  $u_t = \frac{r^2}{4\alpha t}$ , podrobnosti bodo jasne v naslednjem poglavju. Parametru  $u_t$  sugestivno pravimo kar radij vpliva.

V ta namen nas zanimajo rešitve toplotne enačbe v dveh prostorskih dimenzijah:

$$\alpha \cdot (T_{xx}(x, y, t) + T_{yy}(x, y, t)) = T_t(x, y, t). \quad (7.18)$$

V enačbi je  $T$  temperatura ( $[K]$ ), ki v enačbi nastopa kot funkcija treh spremenljivk  $(x, y, t)$ ,  $\alpha$  pa je difuzijska konstanta. Vrednosti  $\alpha$  za različne materiale so podane v tabeli (7.2).

Tabela 7.1: Tabela: toplotna prevodnost materialov [20]

Toplotne prevodnosti materialov [ $\kappa$ ]		
Material	[ $W/mK$ ]	Vir
Zemljna skorja	2,0 – 2,5	Kappelmeyer and Hanel (1974)
Kamnine	1,2 – 5,9	Sass et. al (1974)
Peščenjak	2,5	Clark (1966)
Skrilavica	1,1 – 2,1	Clark (1966), Blackwell and Steele (1989)
Apnenec	2,5 – 3	Clark (1966), Robertson (1979)
Voda	0,6 pri 20°C	Birch et al. (1942)
Nafta	0,15 pri 20°C	Birch et al. (1942)
Led	2,1	Gretner (1981)
Zrak	0,025	CRC (1974) Handbook
Metan	0,033	CRC (1974) Handbook

Tabela 7.2: Tabela: toplotna difuzivnost [2]

Toplotna difuzivnost [ $\alpha$ ]		
Material	[ $m^2/dan$ ]	Vir
Skale, kamen	0,1728	Kasuda (1965)
Suhi pesek	0,00864	Kasuda (1965)
Mokri pesek	0,0864	Kasuda (1965)
Suha glina	0,01728	Kasuda (1965)
Mokra Glina	0,1296	Kasuda (1965)

# Poglavje 8

## Praktični prikaz

V tem razdelku si bomo pogledali konkreten problem, in sicer zanima nas odvzem toplote s geosondo na območju, znane količine so v tem primeru globina vrtine  $[h]$ , toplotna prevodnost  $[\kappa]$ , toplotna kapacitivnost  $[C]$ , toplotni tok  $[q]$ , toplotna transmisivnost  $[T_t]$  ter debelina plasti  $[d]$ .

Naš problem je sledeč: imamo geosondo na ombočju, ki je v prerezu enako plošči  $20 \times 20m$ . Geosonda je postavljena v središču območja. Predpostavljamo, da poteka odvzem toplote le v horizontalni smeri ter da v zemljini ni vode. Podatki za naš primer so:

- toplotna prevodnost  $\kappa = 4 \frac{W}{mK}$
- debelina plasti  $d = 150m$
- toplotna moč na meter vrtine  $q' = 50 \frac{W}{m}$
- toplotna difuzivnost  $\alpha = 2 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

Za določitev odvzema toplote moramo rešiti naslednjo enačbo:

$$\alpha(T_{xx} + T_{yy}) = T_t. \quad (8.1)$$

Enačbo (8.1) pretvorimo v polarne (cilindrične) koordinate [18], dobimo naslednjo enačbo:

$$\alpha(T_{rr} + \frac{1}{r}T_r) = T_t. \quad (8.2)$$

Člen  $\frac{1}{r^2}T_{\theta\theta}$  smo zanemarili saj je pri realnih vrednostih  $r$  poljubno majhen in zato zanemarljiv v enačbi. S pomočjo substitucije  $T' = \frac{T}{r}$  reduciramo enačbo (8.2) na enačbo oblike:

$$\alpha T'_{rr} = T'_t. \quad (8.3)$$

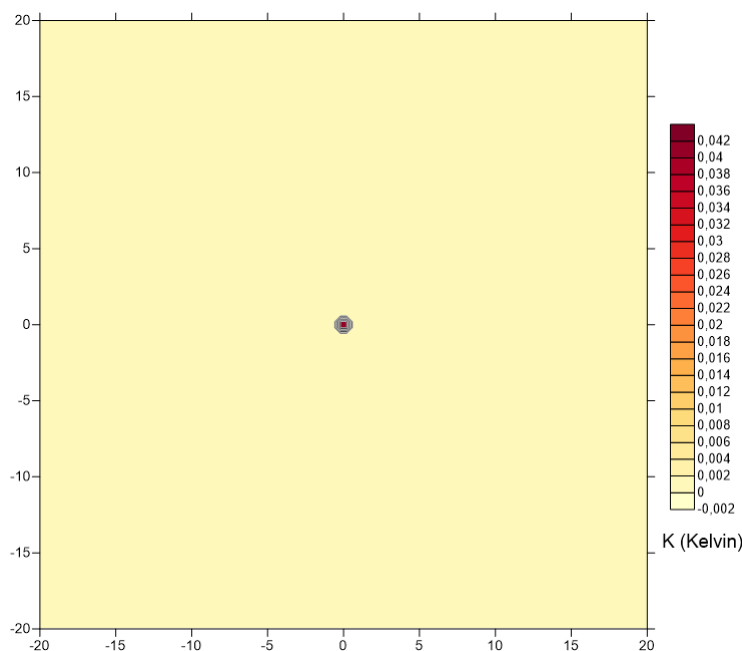
To pa je toplotna enačba iz prejšnjega razdelka, zato jo lahko rešimo s pomočjo formule (7.8) s  $\phi(r) = q'$ , dobimo rešitev:

$$T(r, t) = \frac{q'}{4\pi\kappa} \cdot w \left( \frac{r^2}{4\alpha t} \right). \quad (8.4)$$

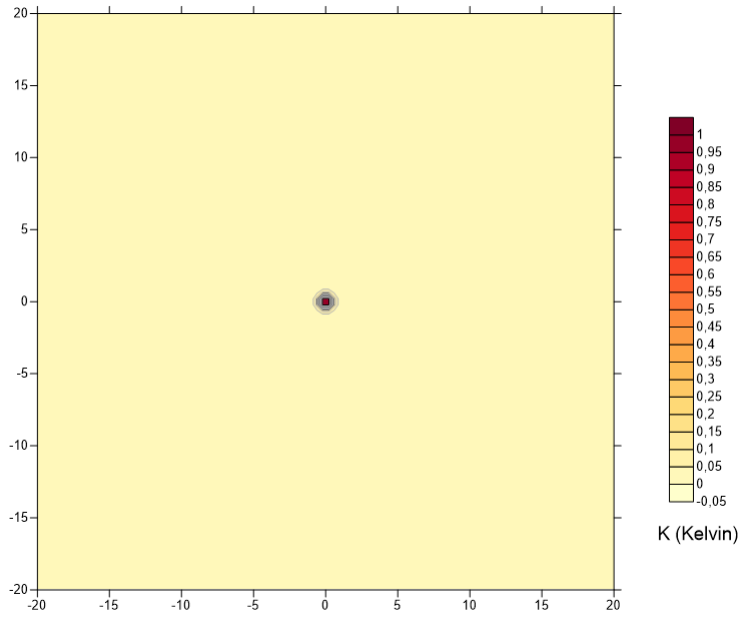
Faktor  $w$  v rešitvi (8.4) je eksponentni integral (to je izraz oblike  $f(y) = \int_y^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$ ) [19] v spremenljivki  $\frac{r^2}{4\alpha t}$ .

Rešitev (8.4) smo numerično aproksimirali z razvojem v končno vrsto (Taylorjev polinom) v programu Excell. Podatke iz Excella smo uvozili v program Surfer, v katerem smo skonstruirali grafe odzema toplote v različnih časih. V grafih na naslednjih straneh je prikazan odzema toplote s pomočjo geosonde v času od 1 ure do 2400 ur.

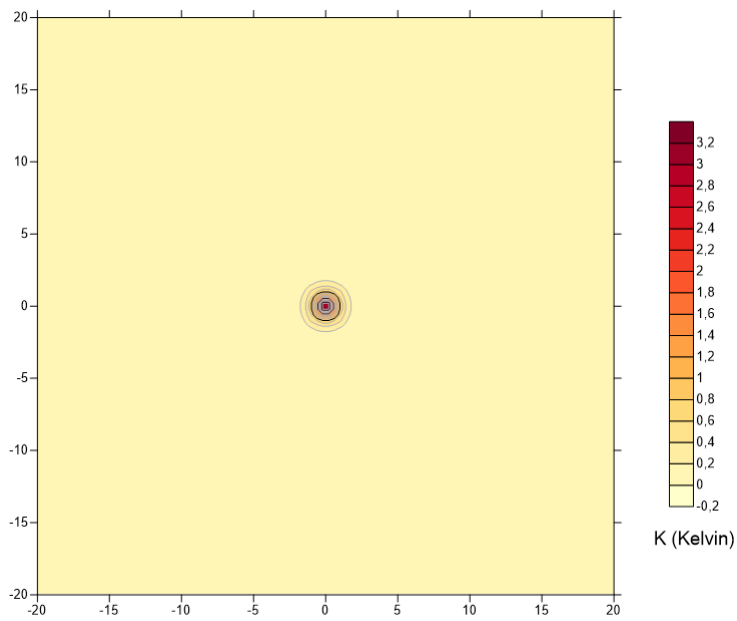
## 8.1 Toplotno črpanje v danem času



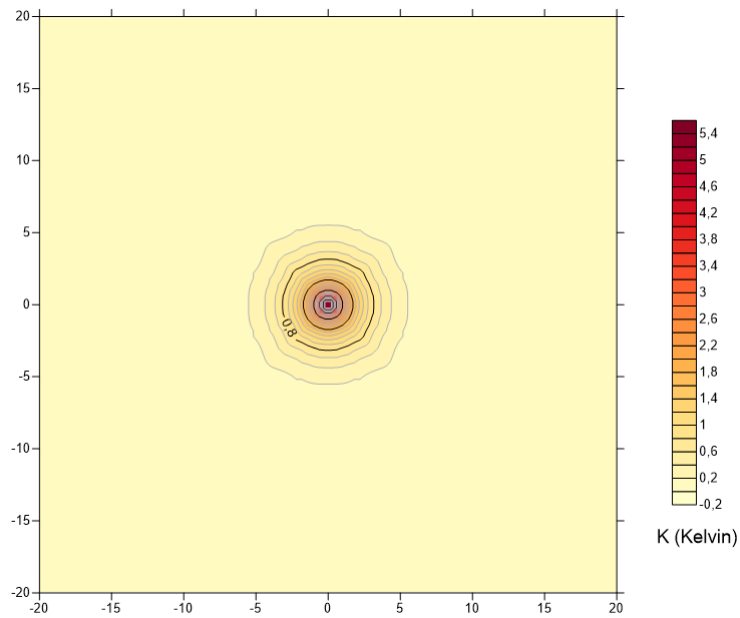
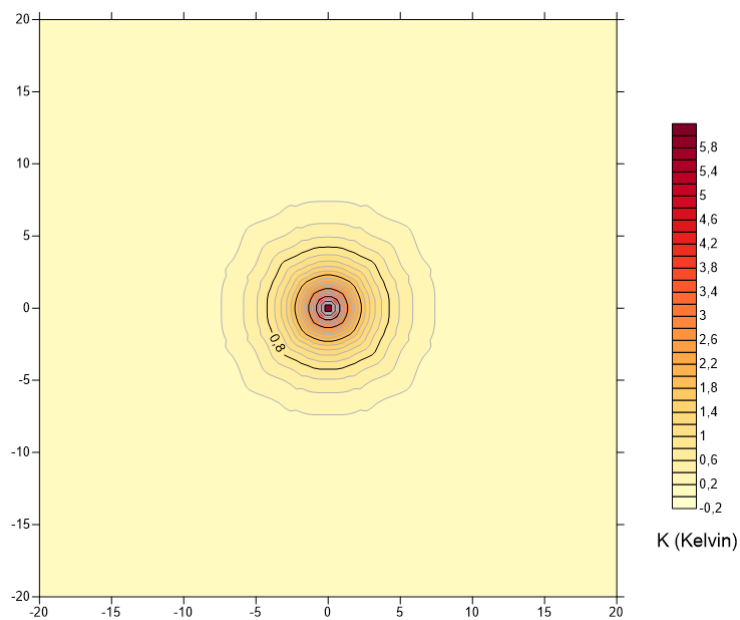
Slika 8.1: Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature,  $t = 1h$ .

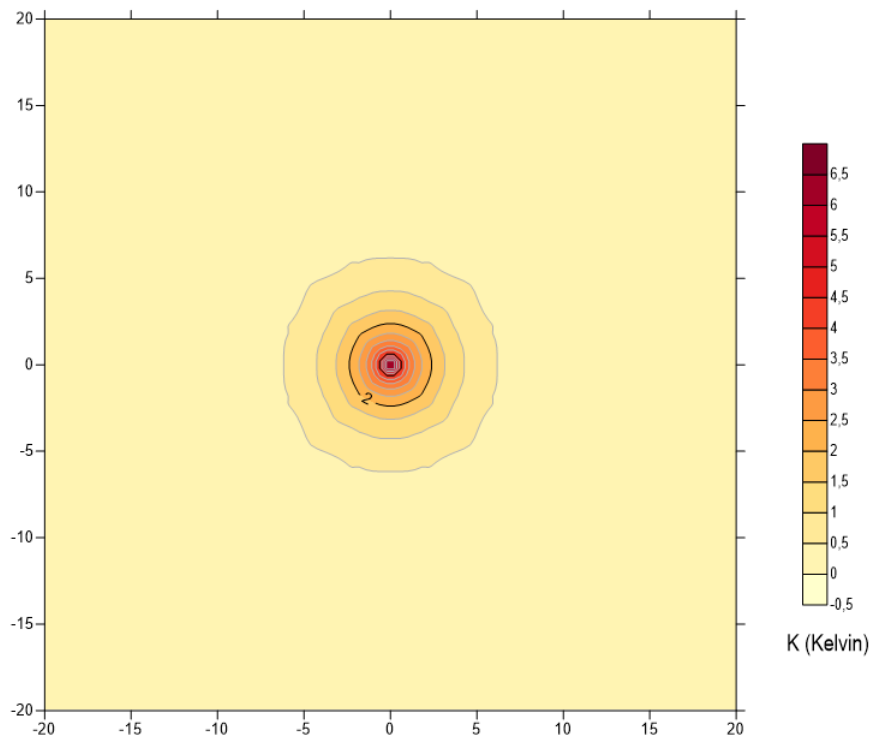


Slika 8.2: Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature,  $t = 10h$ .



Slika 8.3: Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature,  $t = 100h$ .

Slika 8.4: Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature,  $t = 1000h$ .Slika 8.5: Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature,  $t = 1800h$ .



Slika 8.6: Izračun vpliva geosonde na znižanje temperature,  $t = 2400h$ .

# Poglavje 9

## Zaključek

V tem diplomskem delu je bilo vodilo, da obravnavamo toplotno enačbo iz matematičnega vidika in nato naše ugotovitve apliciramo na nek konkreten tehnični problem.

V prvih poglavjih smo obravnavali teoretične osnove geotermije in prenosa toplote (kondukcija, konvekcija, sevanje) ter osnovno o izkoriščanju geotermalne toplote s pomočjo geosonde. V zadnjih poglavjih pa obravnavamo toplotno enačbo in aplikacijo njenih rešitev na problem črpanja toplote s pomočjo geosonde.

Kondukcijski prenos toplote opišemo oziroma modeliramo s pomočjo toplotne enačbe  $\Delta u = f$ , naš pristop k tej enačbi je bil matematičen. Obravnavali smo tako homogeno kot nehomogeno enačbo. Homogeno enačbo  $\Delta u = 0$  smo rešili s pomočjo osnovnih lastnosti Fourierove transformacije tako, da smo problem prevedli na navadno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Nehomogeno enačbo  $\Delta u = f$  pa smo rešili s pomočjo Greenove formule iz vektorske analize (glej [18] in [7]) za primer, ko je ambientni prostor dimenzije 3. V zadnjem poglavju smo pridobljeno teoretsko znanje o toplotni enačbi aplicirali na konkreten primer odvzema toplote z geosondo iz temperaturnega polja okolice. Obravnavali smo sistem z eno geosondo na globini  $150m$ , predpostavili smo, da prenos toplote poteka samo v horizontalni smeri, homogenost zemljine, ter da zemljina ni zasičena z vodo. S rešitvijo enačbe (7.18) smo lahko s pomočjo programa Surfer in Excell konstruirali model geosonde na območju in rezultate prikazali v obliki grafov (slike od 8.1 do 8.6). Iz grafov je razvidno, da je črpanje največje v središču, nato se črpanje v odvisnosti od časa dokaj kmalu zmanjša na konstantno raven (to je na raven na kateri ni črpanja toplote). Iz grafov je razvidno kako odvisno je toplotno črpanje od



časa črpanja, namreč na grafu postaja lijak lepo viden že v časih od 10 do 100 ur. V tem delu smo se osredotočili na primer, ko je zemljina izotropna, torej imamo toplotno prevodnost  $\kappa$  enako v vseh smereh. Vendar bi lahko rešili s podobnimi metodami tudi primer, ko imamo anizotropijo v naši zemljini. V tem primeru bi imeli anizotropijo v horizontalni smeri, to pomeni,  $\kappa$  ni več konstanten, ko se gibljemo horizontalno. V tem primeru je  $\kappa_h = \frac{\kappa_x}{\kappa_y}$ , kjer koordinati  $x, y$  sovpadata z glavnimi smermi toplotne prevodnosti. Z linearno interpolacijo tovrstnih točk dobimo elipso, ki predstavlja vse možne smeri anizotropije po horizontali. Odvzem toplote v tem primeru dobimo tako, da izračunamo vrednosti, ki jih dobimo iz rešitev toplotne enačbe, v vsaki točki na elipsi po metodi predstavljeni v tem diplomskem delu.

# Poglavje 10

## Literatura

- [1] J. Goguel, *La Geothermie*, Paris, Doin Editeurs, 1975 11, 19
- [2] J. Jakopič *Primerjava različnih načinov zajema toplote iz zemeljske skorje v Sloveniji*, Diplomski seminar, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Naravoslovnotehnična fakulteta, 2015 6, 20, 24, 25, 26, 37
- [3] A. Gosar, D. Ravnik *Uporabna geofizika*, Ljubljana, Naravoslovnotehnična fakulteta, 2007
- [4] K. Corn *Konstruiranje in dimenzioniranje toplotne črpalke za gretje in hlajenje*, Diplomski seminar, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2012 20
- [5] W.A. Strauss *Partial differential equations an introduction*, John Wiley & Sons, 2008
- [6] S. L. Sobolev *Partial differential equations of mathematical physics*, Pergamon press, 1964 29, 33, 35
- [7] F. Križanič *Parcialne diferencialne enačbe*, Ljubljana, DMFA - založništvo, 2004 27, 28, 33, 43
- [8] L. A. Kirkby *Physics a student companion*, Scion Publishing Ltd, 2011 14, 17, 18
- [9] L. D. Landau, E.M. Lifshitz *Fluid mechanics*, Pergamon Press, 1987 15, 16
- [10] M. Kardar *Statistical physics of particles*, Cambridge University Press, 2007

- [11] R. Matuš *Izbira geotehnoških parametrov pri izrabi plitve geotermalne energije*, Magistersko delo, Ljubljana, Naravoslovnotehnična fakulteta, 2017 12, 20, 21, 23
- [12] B. Grobovšek *Praktična uporaba toplotnih črpalk*, Ljubljana, Energetika marketing, 2009 23
- [13] M. Kaviany *Heat transfer physics*, Cambridge University Press, 2008 13
- [14] A. Tveito, R. Winther *Introduction to partial differential equations a computational approach*, Texts in applied mathematics, Springer-Verlag New York, 1998
- [15] A. E. Musset, M. A. Khan *Looking into the earth*, Cambridge University Press, 2000
- [16] R. Bertani *Geothermal power generation in the world 2010-2014 update report*, Proceedings of World Geothermal congress 2015, Melbourne, 2015 22
- [17] E.M. Stein, R. Shakarchi *Fourier analysis an introduction*, Princeton, Princeton University Press, 2003 28
- [18] P. C. Matthews *Vector Calculus*, Springer undergraduate texts in mathematics, London, Springer-Verlag London, 1998 34, 38, 43
- [19] N. Bleinstein, R. A. Handelsman *Asymptotic expansions of integrals*, New York, Dover Publications Inc. , 1986 39
- [20] L. Eppelbaum, I. Kutasov, A. Pilchin *Applied Geothermics*, Lecture Notes in Earth System Sciences, Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014 6, 37