

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mark Baltič

**Vektorska polja na sferah**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2018

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Izreki o vektorskih poljih na sferi	4
2.1. Priprava	4
2.2. Osrednji izreki	14
2.3. Browerjev izrek o negibni točki	19
3. Eulerjeva karakteristika in singularnosti na dvodimenzionalnih ploskvah	21
Slovar strokovnih izrazov	24
Literatura	25

# Vektorska polja na sferah

## POVZETEK

V diplomskem delu si ogledamo nekaj dejstev o obstoju neničelnega zveznega tangentnega vektorskega polja na  $n$ -dimenzionalnih sferah. Najprej eksplicitno pokažemo konstrukcijo oz. nakažemo neobstoje takega vektorskega polja pri nižjih dimenzijah, nato pa idejo posplošimo na višje dimenzije. Pri dveh dimenzijah si ogledamo tudi druge objekte in nakažemo indikator, ki določi število izoliranih točk, kjer vektorsko polje izgine. Kot posledico glavnega izreka dokažemo tudi Brouwerjev izrek o negibni točki.

## Hairy ball theorem

### ABSTRACT

In this thesis we show some facts about existence of a non vanishing continuous tangent vector field on a  $n$ -dimensional sphere. At first we explicitly construct such vector field or we indicate the non existence of such vector field at low dimensions and then we generalize the idea to higher dimensions. In the two-dimensional case we also examine other objects and point out the indicator that sets the number of isolated points at which the vector field vanishes. As a consequence of our main theorem we also prove the Brouwer fixed-point theorem.

**Math. Subj. Class. (2010):** 57R25

**Ključne besede:** tangentna vektorska polja, sfera, Brouwerjev izrek o negibni točki, Eulerjeva karakteristika

**Keywords:** tangent vector fields, sphere, Brouwer's fixed-point theorem, Euler characteristic

## 1. UVOD

Izrek o neobstoju neničelnega zveznega tangentnega vektorskega polja je vsekakor med najbolj znanimi izreki. Širen sloves si je zagotovo pridobil z zloglasnim imenom “Hairy ball theorem” ter enostavno razlago problema, ki ga tudi v matematiki manj vešči ljudje razumejo. V manj znanstvenih virih se izrek pogosto glasi kot: “Sfere ne moreš gladko počesati.” Izrek je prvi napisal Henri Poincaré konec 19. stoletja in spada na področji algebraične in diferencialne topologije, dokaz pa je bil podan leta 1912 izpod peresa L. E. J. Brouwerja. Posebej velja poudariti poseben primer – primer dvodimenzionalne sfere –, za katerega izrek pove, da vedno lahko najdemo dve izolirani točki, v katerih vektorsko polje izgine. Tem točkam pravimo *singularne točke*. V diplomskem delu si bomo ogledali analitični dokaz, ki ga je leta 1978 zapisal J. Milnor in je nadvse zanimiv, saj ga je moči v celoti razumeti z znanjem dodiplomskega študija matematike. Preden se lotimo formalnega dokazovanja, pa se še vprašajmo, ali ima ta izrek tudi kakšne uporabne vrednosti?

Obravnava sfere je bila vedno deležna veliko pozornosti vsekakor tudi z razlogom, ker se da Zemljo aproksimirati z dvodimenzionalno sfero. Kakšno vektorsko polje bi si lahko zamislili na Zemlji? Ideja se nam ponuja že med gledanjem večernih poročil, ko pride čas za vremensko napoved. Veter lahko opišemo z vektorskim poljem tako, da za vsak delec podamo vektor njegove hitrosti. Po izreku ima tako vektorsko polje vsaj dve singularni točki, torej točki z vektorjem velikosti 0. V praksi to pomeni, da vselej obstajata na Zemlji točki, kjer je brezvetrje (npr. središče ciklona). Naša trditev seveda ni povsem resnična, saj je sfera dvodimenzionalna mnogoterost, naše vektorsko polje pa je definirano na celotni atmosferi, ki je tridimenzionalen objekt. Izrek lahko torej uporabimo na vsakem nivoju atmosfere, pri čemer moramo zanemariti vpliv vektorskega polja na drugih višinah.

Novejša aplikativnost se skriva v računalništvu z razcvetom VR (*Virtualna resničnost*) tehnologije [10]. Predstavljamo si lahko, da je naša glava v središču dvodimenzionalne sfere in ko se uzremo proti točki na sferi, nam očala prikažejo določeno sliko. Pri dojetanju realnosti igra pomembno vlogo tudi orientacija, torej položaj naših oči v prostoru. To lahko določimo tako, da vsaki točki na sferi določimo enotski vektor, ki kaže od našega levega očesa proti desnemu v smeri pogleda. Tako konstruiramo zvezno vektorsko polje na sferi. Ker se zavedamo, da bo polje v dveh točkah nezvezno, ti dve točki vnaprej določimo. Pogosto sta to južni in severni pol sfere. Ko se torej ozremo navzgor, slika v zenitu obmiruje.

## 2. IZREKI O VEKTORSKIH POLJIH NA SFERI

V tem razdelku bomo dokazali izreke o vektorskih poljih na sferi poljubne dimenzije  $n$ . Najprej se bomo posvetili lihim dimenzijam, saj se izkaže, da je dokaz kratek in enostaven. Pri sodih dimenzijah pa si bomo najprej pomagali s sorodnim izrekom, iz katerega nato hitro izpeljemo želen odgovor. S pomočjo spoznanj o sferah sodih dimenzij pa bomo na koncu izpeljali še en izrek, in sicer znameniti Brouwerjev izrek o negibni točki na disku dimenzije  $n$ .

**2.1. Priprava.** Pred vsem dokazovanjem si za osvežitev spomina oglejmo nekaj definicij in trditev, potrebnih za dokaze osrednjih izrekov, nato pa še intuitiven

pristop k problemu, saj vendar gre za problem geometričnega izvora in matematika je vedno privlačnejša ter lepša, če jo lahko narišemo.

**Definicija 2.1.** *Sfera dimenzije  $n$* , ki jo označimo kot  $\mathbb{S}^n$ , je množica vektorjev  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$  v vektorskem prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ki imajo evklidsko normo (ali dolžino) enako 1.

**Definicija 2.2.** Vektorsko polje  $\mathbf{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je zvezna preslikava, ki vsaki točki  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  prostora  $\mathbb{R}^n$  dodeli vektor  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_m(\mathbf{x}))$  v vektorskem prostoru  $\mathbb{R}^m$ .

*Opomba.* Poudarjeni (odebeljeni) elementi so vedno večdimenzionalni (npr.  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$ ), z nepoudarjenimi znaki pa se nanašamo na enodimenzionalne objekte, oz. koordinate večdimenzionalnih (npr.  $u_1$ ). Prav tako včasih večdimenzionalne objekte na sferi imenujemo *točke*, drugič pa *vektorji*. V tem primeru gre za ekvivalentna izraza, saj lahko vsako točko na sferi natanko določimo z izhodiščnim vektorjem in obratno.

**Definicija 2.3.** Vektorsko polje  $\mathbf{v}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  je *tangentno* na sfero  $\mathbb{S}^n$ , če za vsako točko  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$  in pripadajoči vektor  $\mathbf{v}(\mathbf{u})$  velja, da je skalarni produkt  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u})$  enak 0.

**Definicija 2.4.** Naj bo  $D \subset \mathbb{R}^n$  odprta množica in  $\mathbf{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  zvezna preslikava. Preslikava  $\mathbf{v}$  je *diferenciabilna* v točki  $\mathbf{x} \in D$ , če obstaja linearna preslikava  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , da je

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + A(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}),$$

kjer je  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{o(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ .

Dokaz sledečega izreka najdemo v [4, Izrek 11].

**Izrek 2.5.** *Če je preslikava  $\mathbf{v}$  diferenciabilna, potem so diferenciabilne tudi vse njene koordinatne funkcije  $v_1, \dots, v_n$  in zato tudi parcialno odvedljive v vseh spremenljivkah.*

Dokaz sledečega izreka najdemo v [3, Izrek 39].

**Izrek 2.6** (Lagrangeev izrek). *Naj bo  $f$  zvezna funkcija na  $[a, b]$ , ki je odvedljiva na  $(a, b)$ . Tedaj obstaja takšna točka  $\xi \in (a, b)$ , da je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

**Definicija 2.7.** Za poljuben vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  izračunamo njegovo  $p$ -normo kot:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

**Trditev 2.8.** 2-norma je manjša ali enaka 1-normi.

*Dokaz.* Pogledamo izraza za 2-normo in 1-normo:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Če normi kvadriramo, lahko izpeljemo sledečo oceno:

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |x_i| |x_j| = \|\mathbf{x}\|_1^2.$$

Ker je norma po definiciji vedno nenegativna, lahko obe strani neenačbe korenimo in dobimo

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

*Opomba :* Trditev velja tudi v splošnem, in sicer za vsaki naravni števili  $p$  in  $q$ , za kateri velja  $p < q$ , drži  $\|\mathbf{x}\|_q \leq \|\mathbf{x}\|_p$ .  $\square$

Dokaz sledeče leme najdemo v [8, Izrek 2.33].

**Lema 2.9** (Lebesgueova lema). *Za vsako odprto pokritje  $\mathcal{U}$  metričnega kompakta  $X$  obstaja tako imenovano Lebesgueovo število  $\lambda = \lambda(\mathcal{U})$  z lastnostjo, da vsaka krogla s polmerom  $\lambda$  leži v celoti v nekem elementu  $\mathcal{U}$ .*

**Trditev 2.10.** *Naj bo  $A \subset \mathbf{R}^n$  kompaktno območje in naj bo  $\mathbf{v}: A \rightarrow \mathbf{R}^m$  zvezno diferenciable vektorsko polje, ki ga lahko diferenciable razširimo na okolico množice  $A$ . Tedaj obstaja taka Lipschitzeva konstanta  $c$ , da za poljubna vektorja  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  velja*

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\| \leq c \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

*Dokaz.* O tej trditvi se bomo prepričali s sledečim razmislekom. Najprej si zamislimo lažji primer, ko je območje  $A$  kvadrat z robovi vzporednimi koordinatnima osema. Vzemimo zvezno diferenciable preslikavo  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  in za poljubna vektorja  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  izračunajmo normo razlike vrednosti preslikave. Pri tem uporabimo *Lagrangeev izrek 2.6* in lastnost diferenciable preslikave iz izreka 2.5, pri čemer upoštevamo razliko v eni koordinati na enkrat:

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| &= \\ &= |f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) + f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \\ &\leq |f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2)| + |f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1) \right| |x_1 - y_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_2) \right| |x_2 - y_2|, \end{aligned}$$

kjer je  $\xi_j$  točka na intervalu  $(x_j, y_j)$ . Funkcija  $f$  je v tej točki definirana, saj je območje  $A$  konveksno. Ker so parcialni odvodi funkcije  $f$  zvezni na kompaktnem

območju  $A$ , je maksimum zagotovo dosežen in tako lahko vrednosti parcialnih odvodov še navzgor omejimo s konstantami

$$c_j := \max_A \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|.$$

Tako dobimo oceno

$$(1) \quad |f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \leq c_1|x_1 - y_1| + c_2|x_2 - y_2|.$$

Naj bo sedaj območje  $A$  kocka dimenzije  $n$  z robovi vzporednimi koordinatnim osem. Izračun ocen in konstant  $c_j$  lahko posplošimo na funkcije, ki slikajo iz  $n$ -dimenzionalne kocke v realna števila  $\mathbb{R}$ . Opazimo, da so take preslikave ravno koordinate našega vektorskega polja  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ . Za vsako tako preslikavo  $v_i$  in poljubna vektorja  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  lahko torej ocenimo

$$|v_i(\mathbf{x}) - v_i(\mathbf{y})| \leq \sum_{j=1}^n c_{ij}|x_j - y_j|,$$

kjer je

$$c_{ij} := \max_A \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|.$$

Sedaj lahko zapišemo

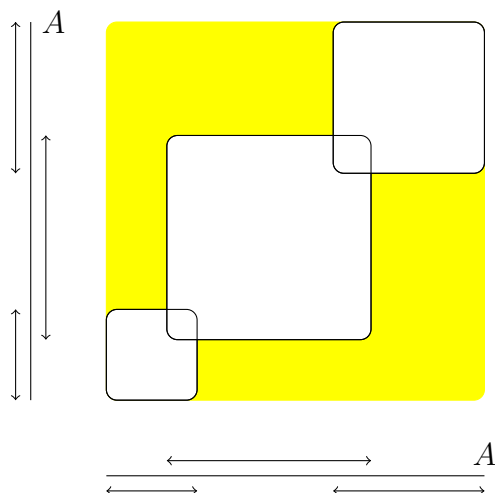
$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\| &\leq \sum_{i=1}^m |v_i(\mathbf{x}) - v_i(\mathbf{y})| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}|x_j - y_j| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost je očitna, druga neenakost sledi iz pokazane ocene (1), prva neenakost pa drži zaradi dejstva, da je 2-norma manjša ali enaka 1-normi (trditev 2.8). Vsota  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}$  je iskana konstanta.

Vrnimo se k splošnemu primeru, ko je  $A$  poljubno kompaktno območje v vektorskem prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Izberimo odprto pokritje z odprtimi  $n$ -dimenzionalnimi kockami  $\{I_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  območja  $A$ . Ker pokrivamo kompaktno množico, obstaja končno podpokritje  $\{I_\alpha | \alpha \in F\}$ . Za vsako kocko  $I_\alpha$  iz končnega pokritja lahko po prejšnjem postopku pridelamo konstanto  $c_\alpha$ , da za vsaka vektorja  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_\alpha$  velja  $\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\| \leq c_\alpha\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Če za vektorja  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{y}$  ne moremo najti takega  $\alpha_0 \in F$ , za katerega bi veljalo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_{\alpha_0}$ , je razdalja med vektorjema navzdol omejena z Lebesgueovim številom  $r$  (po lemi 2.9). Torej  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > r$ . Sedaj pogledamo preslikavo

$$G: A \times A \setminus \bigcup_{\alpha \in F} I_\alpha \times I_\alpha \rightarrow \mathbb{R},$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\|.$$



SLIKA 1. Rumeno območje predstavlja množico  $A \times A \setminus \cup_{\alpha \in F} I_{\alpha} \times I_{\alpha}$ .

Po produktni topologiji je množica  $A \times A$  kompaktna, unija odprtih množic  $\cup_{\alpha \in F} I_{\alpha} \times I_{\alpha}$  pa odprta, zato je definicijsko območje preslikave  $G$  zaprta podmnožica kompakta in zato kompaktna. Ker preslikava  $G$  slika iz kompaktne množice, je navzgor omejena z  $M$ . Za vse pare vektorjev  $(x, y) \in A \times A \setminus \cup_{\alpha \in F} I_{\alpha} \times I_{\alpha}$  si lahko izberemo *Lipschitzovo konstanto*  $c' > \frac{M}{r}$ . Preverimo, da ocena drži:

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\| \leq M < c'r < c'\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Sedaj, ko imamo ocene za vse možne pare  $(x, y) \in A \times A$ , si izberemo *Lipschitzovo konstanto*

$$c := \max \left\{ \max_{\alpha \in F} \{c_{\alpha}\}, c' \right\}.$$

□

**Izrek 2.11** (Uvedba nove spremenljivke v integral). [4, Izrek 32] Naj bo  $A \subset \mathbb{R}^n$  odprta množica z volumnom različnim od 0 ( $\text{vol}(A) \neq 0$ ) in naj bo  $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  zvezna, diferenciable, injektivna preslikava, za katero velja  $\text{vol}(g(A)) \neq 0$ . Naj bo  $J_g$  Jacobijeva matrika preslikave  $g$ , tj. matrika prvih parcialnih odvodov preslikave  $g$ , in naj za vsak element  $x \in A$  velja  $\det(J_g(x)) \neq 0$ . Tedaj je za vsako integrabilno preslikavo  $f: g(A) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija  $x \mapsto (f \circ g)(x)|\det(J_g(x))|$  integrabilna na množici  $A$  in velja

$$\int_{g(A)} f dV = \int_A (f \circ g)|\det(J_g)| dV.$$

*Opomba.* Izrek bomo potrebovali pri dokazu leme 2.18, kjer bomo želeli izračunati prostornino množice. To storimo tako, da vzamemo  $f \equiv 1$  in prostornino izrazimo kot

$$\int_{g(A)} dV = \int_A |J_g| dV.$$

Dokaz sledečega izreka najdete v [7, Trditev 6.5].



**Izrek 2.12** (Izrek o invarianci odprtih množic na mnogoterostih). *Naj bosta  $M$  in  $N$  mnogoterosti iste dimenzije. Poljubna zvezna injektivna preslikava  $f: U \rightarrow N$ , definirana na odprti podmnožici  $U \subset \text{int}M$ , je odprta vložitev, in velja  $f(U) \subset \text{int}N$ .*

Dokaz naslednjega izreka najdemo v [8, Izrek 2.35].

**Izrek 2.13.** *Naj bo  $X$  kompakten,  $Y$  pa Hausdorffov prostor. Tedaj je vsaka injektivna preslikava  $f: X \rightarrow Y$  zaprta vložitev.*

Dokaz sledeče trditve je povzet po [5].

**Trditev 2.14** (Prostornina  $n$ -dimenzionalne krogle). *Naj bo  $\mathbb{B}_R^n$  krogla dimenzije  $n$  in z radijem  $R$ . Njena prostornina se izračuna po enačbi*

$$\text{vol}(\mathbb{B}_R^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n,$$

kjer je  $\Gamma$  Eulerjeva gama funkcija [11].

*Dokaz.* Krogla dimenzije  $n$  z radijem  $R$  je množica, podana s predpisom

$$\mathbb{B}_R^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}.$$

Zaradi lažjega zapisa uvedemo novi oznaki za prostornino krogle in ploščino sfere, ki obdaja kroglo. Upoštevamo dejstvo, da sta prostornina in ploščina odvisni od dimenzije  $n$  ter radija  $R$ , in ju označimo kot

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbb{B}_R^n) &= V_n(R), \\ \text{pl}(\mathbb{B}_R^n) &= S_{n-1}(R). \end{aligned}$$

Prostornino krogle izračunamo s pomočjo integrala in jo želimo zapisati v obliki

$$(2) \quad V_n(R) = \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n = C_n R^n,$$

kjer je faktor  $R^n$  posledica razsežnostne analize. Določiti moramo torej le faktor  $C_n$ .

Izračuna prostornine pa se lahko lotimo tudi na drug način. Izračunamo ploščine sfer z radijem  $0 \leq r \leq R$  in te "seštejemo", kar lahko zapišemo kot

$$(3) \quad V_n(R) = \int_0^R S_{n-1}(r) dr.$$

Sedaj lahko s pomočjo *osnovnega izreka analize* (najdemo ga v [4, Izrek 58]) pridemo do zveze

$$(4) \quad S_{n-1}(R) = \frac{\partial V_n(R)}{\partial R} = C_n \frac{\partial R^n}{\partial R} = nC_n R^{n-1}.$$

Če združimo (2), (3) in (4), dobimo zvezo

$$(5) \quad \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n = nC_n \int_0^R r^{n-1} dr.$$

Integral na levi strani enačaja (5) zapišimo v *hiper-sferičnih koordinatah*. Pretvorbe koordinat so sledeče:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\theta_1), \\ x_2 &= r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}), \\ x_n &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}). \end{aligned}$$

Novo spremenljivke so definirane na intervalih:  $r \in [0, R]$ ,  $\theta_i \in [0, \pi]$ , za  $i = 1, 2, \dots, n-2$  in  $\theta_{n-1} \in [0, 2\pi]$ . Novo območje integriranja je torej

$$[0, R] \times \prod_{i=1}^{n-2} [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

Za zapis integrala v novih koordinatah moramo izračunati determinanto matrike prvih odvodov inverza preslikave, ki transformira prvi koordinatni sistem v drugega. Dobimo

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & -r \sin(\theta_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) & r \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) & -r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}) & \cdots & \cdots & \cdots & & -r \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}) \\ \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}) & r \cos(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{n-1}) & \cdots & \cdots & & r \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Vidimo, da elementi drugega stolpca vsebujejo faktor  $r$ , ki ga lahko izpostavimo pred determinanto. To velja tudi za vse stolpce od drugega dalje. Ko iz teh  $n-1$  stolpcev izpostavimo faktor  $r$ , dobimo pred determinanto  $r^{n-1}$ . Ostali elementi v determinanti so odvisni le od polarnih spremenljivk, zato lahko ta faktor zapišemo kot funkcijo polarnih spremenljivk  $q(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ .

Pri vpeljavi novih spremenljivk v levi integral enačbe (5) upoštevamo izračunano determinanto in zapišemo zvezo

$$(6) \quad dx_1 \cdots dx_n = r^{n-1} dr d\Omega_{n-1},$$

kjer je  $d\Omega_{n-1} = q(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$ .

Sedaj vstavimo (6) v levo stran enačbe (5) in to primerjamo z desnim integralom. Vidimo, da se radialna dela ujemata, zato se morata ujemati tudi polarna dela. Zapišimo

$$(7) \quad \int \cdots \int_{\prod_{i=1}^{n-2} [0, \pi] \times [0, 2\pi]} d\Omega_{n-1} = nC_n.$$

Za izračun faktorja  $C_n$  bomo uporabili trik. Zamislimo si funkcijo s predpisom

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}.$$

Izračunajmo integral po vsem prostoru  $\mathbb{R}^n$  z uporabo kartezičnih in hiper-sferičnih koordinat:

$$\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_{[0, \infty) \times \prod_{i=1}^{n-2} [0, \pi] \times [0, 2\pi]} r^{n-1} e^{-r^2} dr d\Omega_{n-1}.$$

Vidimo, da je integrand na desni strani enačaja odvisen le od spremenljivke  $r$ , zato lahko desno stran zapišemo kot produkt dveh integralov. Pri polarnem faktorju upoštevamo zvezo (7). Prav tako lahko preoblikujemo funkcijo pod integralom na levi strani enačaja. Upoštevamo lastnost eksponenta  $e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} = e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2}$  in dejstvo, da ime spremenljivke, po kateri integriramo, nima vpliva na integral. Tako lahko levo stran razcepimo na produkt  $n$  integralov in, če vsem tem zamenjamo ime spremenljivke v  $x$ , dobimo zvezo

$$(8) \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^n = nC_n \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr.$$

Izračunati moramo integrala na obeh straneh enačbe.

Kvadrirajmo levi integral (pod potenco) in ga zapišimo v polarnih koordinatah

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} d\phi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

Z uvedbo nove spremenljivke  $u = r^2$  nadaljujemo z računanjem

$$2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = -\pi(e^{-\infty} - e^0) = \pi.$$

Leva strani enačbe (8) je torej enaka  $\pi^{\frac{n}{2}}$ . Za izračun integrala na desni strani, pa uvedemo novo spremenljivko  $t = r^2$  in dobimo

$$\int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt.$$

Dobljeni integral je ravno Eulerjeva gama funkcija pri vrednosti  $\frac{n}{2}$ .

Enačba (8) se nam preoblikuje v

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} C_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Upoštevamo lastnost Eulerjeve gama funkcije, ki pravi, da za vsako pozitivno število  $x$  velja  $x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$ . Sedaj lahko izrazimo iskani faktor kot

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Prostornina krogle se torej izrazi kot

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n.$$

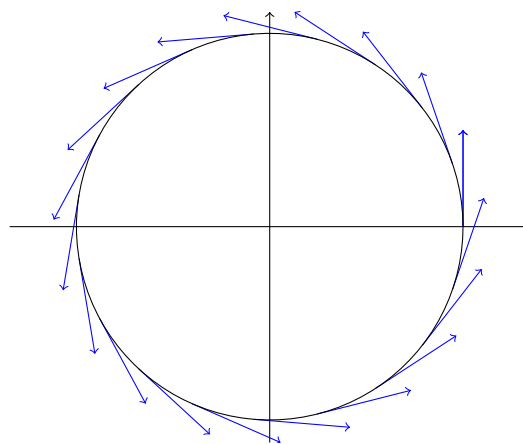
□

Idejo in dokaz sledečega izreka najdemo na [8, str. 81–84].

**Izrek 2.15** (Weierstrassov izrek). *Za poljubno zvezno preslikavo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in poljuben  $\epsilon > 0$  obstaja tak polinom  $p$ , da je  $|f(x) - p(x)| < \epsilon$  za vse  $x \in [a, b]$ .*

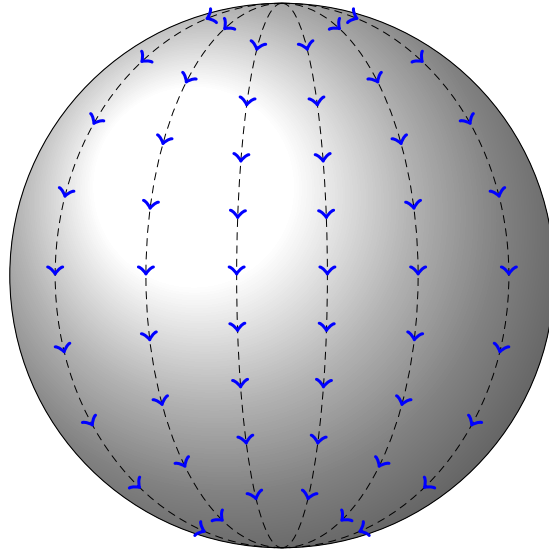
*Opomba.* Marshall Stone je izrek posplošil na poljubne prostore, ki zadoščajo določenim zahtevam. Med te prostore sodijo tudi kompaktni Hausdorffovi prostori. Posplošeni izrek imenujemo *Stone-Weierstrassov izrek*.

Oglejmo si nekaj grafičnih prikazov vektorskih polj na različnih množicah. Za krožnico, vloženo v ravnino, narišimo vektorsko polje v smeri obodne hitrosti točke, ki se giblje po tej krožnici.

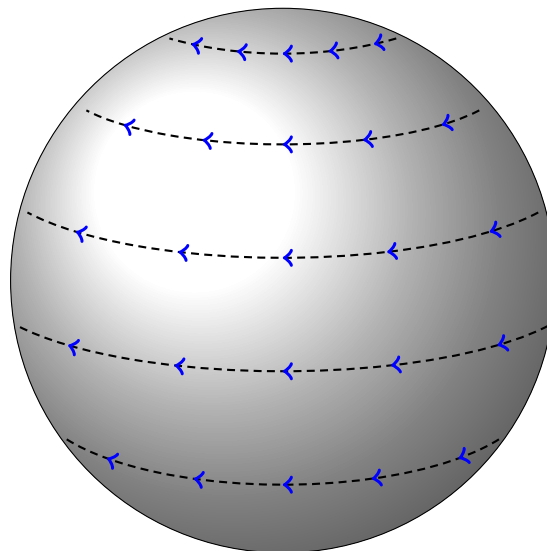


SLIKA 2. Vektorsko polje na krožnici.

Vidimo, da je vektorsko polje zvezno, tangentno in neničelno. Sedaj poskusimo kaj podobnega narediti na dvodimenzionalni sferi.

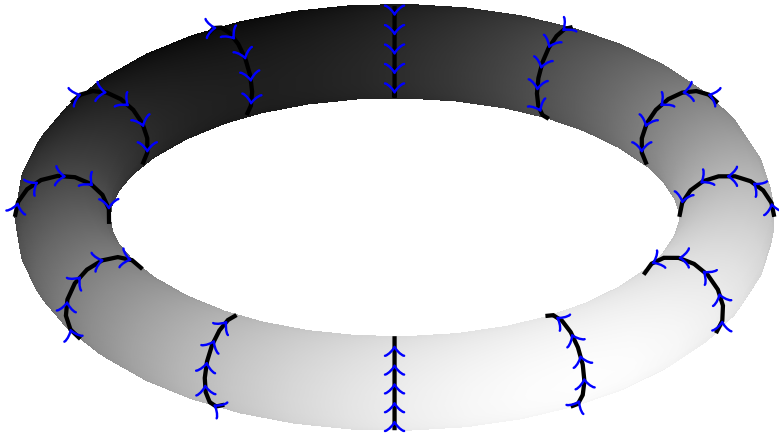


SLIKA 3. Vektorsko polje v smeri poldnevnikov ima na severu “plešo”, na jugu pa “čop”.



SLIKA 4. Vektorsko polje v smeri vzporednikov ima na severu in jugu vrtinec.

Pri sferi ne najdemo zlahka zveznega neničelnega tangentnega vektorskega polja. Ali to velja tudi za druge dvodimenzionalne objekte? Poskusimo na torusu:



SLIKA 5. Neničelno zvezno tangentno vektorsko polje na torusu.

Če torus zavrtimo okoli krožnice, ki poteka skozi središče torusove notranjosti, nam uspe pridelati neničelno zvezno tangentno vektorsko polje.

**2.2. Osrednji izreki.** Prejšnje slike nam namignejo, da želeno vektorsko polje na dvodimenzionalni sferi ne obstaja. V tem razdelku bomo za splošno  $n$ -dimenzionalno sfero dokazali, ali zvezno tangentno neničelno vektorsko polje obstaja. Za sfere lihih dimenzij bomo hitro dobili oprijemljiv odgovor, in sicer eksplicitno bomo pokazali obstoj takega polja. Nato se bomo pa posvetili sferam sodih dimenzij, ki so malo trši oreh. Dokazali bomo, da želeno vektorsko polje ne obstaja. Pri tem si bomo pomagali s sorodnim izrekom, ki govori o neobstoju zveznega diferenciablega tangentnega enotskega vektorskega polja, in potem to znanje uporabili za dokaz izreka o neobstoju zveznega tangentnega neničelnega vektorskega polja. Vsi trije dokazi so povzeti po [6, str. 521–523].

**Izrek 2.16.** *Naj bo  $n \in \mathbb{N}$  liho število. Tedaj obstaja zvezno neničelno tangentno vektorsko polje na  $S^n$ .*

*Dokaz.* Za dokaz tega izreka bomo kar eksplicitno pridelali zvezno neničelno tangentno vektorsko polje na sferi  $S^n$  lihe dimenzije. Idejo dobimo pri sferi dimenzije 1, to je enotska krožnica  $S^1$  vložena v evklidsko ravnino  $\mathbb{R}^2$ . Vsak vektor te sfere lahko zapišemo z dvema koordinatama, torej  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ . Sedaj iščemo predpis za enotski vektor  $\mathbf{v}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ , ki je pravokoten na vektor  $\mathbf{u}$ . Če zamenjamo koordinati in slednji spremenimo predznak, dobimo želeni vektor. Preverimo pravokotnost in dolžino dobljenega vektorja:

$$\begin{aligned}
(u_1, u_2) \cdot (u_2, -u_1) &= u_1u_2 - u_2u_1 \\
&= 0, \\
\|(u_2, -u_1)\| &= \sqrt{u_2^2 + (-u_1)^2} \\
&= \|(u_1, u_2)\| = 1.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je vektorsko polje pravokotno na krožnico  $\mathbb{S}^1$  in da so vrednosti vektorskega polja vselej vektorji dolžine 1. Torej je neničelno.

Analogno lahko definiramo vektorsko polje  $\mathbf{v}$  na lihodimenzionalni sferi  $\mathbb{S}^n$ . Ker ima vsak vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$  sodo koordinat, jih lahko združimo v pare in storimo podobno kot v enodimenzionalnem primeru. Tako definiramo zvezno neničelno tangentno vektorsko polje

$$\mathbf{v}(u_1, \dots, u_{n+1}) = (u_2, -u_1, \dots, u_{n+1}, -u_n).$$

□

**Izrek 2.17.** *Naj bo  $n \in \mathbb{N}$  sodo število. Tedaj ne obstaja zvezno diferenciable enotsko tangentno vektorsko polje na  $\mathbb{S}^n$ .*

*Dokaz.* Dokaz izreka bo pokazan s pomočjo dveh lem. Prva vsebuje lastnost izračuna prostornine kompaktnega območja, druga pa transformacijo enotske sfere na sfero daljšega radija.

Naj bo  $A$  kompaktno območje v prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Za vsako zvezno diferenciable vektorsko polje  $\mathbf{v}: A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  in za vsako realno število  $t$  definirajmo preslikavo

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_t: A &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\
\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Za preslikavo  $\mathbf{f}_t$  bomo sedaj pokazali prvo lemo. Pri tem je vredno opomniti, da domena  $A$  in vektorsko polje  $\mathbf{v}$  ustrezata bolj splošnim zahtevam, ki na prvi pogled nimajo veliko skupnega s formulacijo izreka 2.17.

**Lema 2.18.** *Če je parameter  $t$  dovolj majhen, potem je preslikava  $\mathbf{f}_t$  injektivna in preslika območje  $A$  na območje  $\mathbf{f}_t(A)$ , katerega prostornino lahko izrazimo kot polinomska funkcijo v spremenljivki  $t$ .*

*Dokaz.* Ker je območje  $A$  kompaktno in vektorsko polje  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x})$  zvezno diferenciable, po trditvi 2.10 obstaja taka Lipschitzeva konstanta  $c$ , da za poljubna vektorja  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  velja

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\| \leq c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Izberemo realno število  $t$ , da velja  $|t| < \frac{1}{c}$ , in pokažimo, da je preslikava  $\mathbf{f}_t$  injektivna:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}_t(\mathbf{y}) \\
\mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{y} + t\mathbf{v}(\mathbf{y}) \\
\mathbf{x} - \mathbf{y} &= t(\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})).
\end{aligned}$$

Ocenimo evklidske norme:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |t| \cdot \|\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})\| \leq |t|c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Zaradi izbire parametra  $t$  lahko neenačaj drži le v primeru, ko je  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$ , kar implicira  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Za izračun prostornine potrebujemo *Jacobijevo matriko* preslikave  $\mathbf{f}_t$ , ki jo označim z  $J_{\mathbf{f}_t}$ . Ta je oblike

$$\begin{bmatrix} 1 + t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & t \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & t \frac{\partial v_1}{\partial x_{n+1}} \\ t \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 1 + t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & t \frac{\partial v_2}{\partial x_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t \frac{\partial v_{n+1}}{\partial x_1} & t \frac{\partial v_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & 1 + t \frac{\partial v_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \end{bmatrix}.$$

Za vsak element  $\mathbf{x} \in A$  lahko determinanto te matrike zapišemo kot polinomsko funkcijo v spremenljivki  $t$ :

$$\det(J_{\mathbf{f}_t}(\mathbf{x})) = 1 + t\sigma_1(\mathbf{x}) + t^2\sigma_2(\mathbf{x}) + \cdots + t^{n+1}\sigma_{n+1}(\mathbf{x}),$$

kjer so koeficienti  $\sigma_i$  zvezne funkcije v  $\mathbf{x}$ .

Izračunajmo prostornino množice  $\mathbf{f}_t(A)$ . Po izreku 2.11 o uvedbi nove spremenljivke v integral lahko to prostornino izrazimo kot

$$\text{vol}(\mathbf{f}_t(A)) = \int_{\mathbf{f}_t(A)} dV = \int_A |\det(J_{\mathbf{f}_t}(x))| dV.$$

Če izberemo dovolj majhen parameter  $t$ , je determinanta pozitivna in smemo absolutno vrednost v zadnjem integralu izpustiti. Nato integriramo vsak člen posebej in dobimo izraz

$$\text{vol}(\mathbf{f}_t(A)) = a_0 + ta_1(\mathbf{x}) + t^2a_2(\mathbf{x}) + \cdots + t^{n+1}a_{n+1}(\mathbf{x}),$$

kjer so za  $i = 1, \dots, n + 1$  koeficienti enaki

$$a_i(x) = \int_A \sigma_i(\mathbf{x}) dV = \int \cdots \int_A \sigma_i(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_1 \cdots dx_{n+1},$$

in prosti člen enak  $a_0 = \int_A dV$ .

Vidimo, da se prostornina množice  $\mathbf{f}_t(A)$  izraža kot polinom v spremenljivki  $t$ .  $\square$

Pred dokazom druge leme predpostavimo, da obstaja zvezno diferenciable *enotsko* in *tangentno* vektorsko polje  $\mathbf{v}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Za vsako realno število  $t$  in vsako točko  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$  izračunajmo evklidsko dolžino vektorja  $\mathbf{u} + t\mathbf{v}(\mathbf{u})$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}(\mathbf{u})\|^2 &= (\mathbf{u} + t\mathbf{v}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{u} + t\mathbf{v}(\mathbf{u})) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2t\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u}) + t^2\mathbf{v}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u}) \\ &= 1 + t^2. \end{aligned}$$



Pri izračunu smo upoštevali, da je  $\|\mathbf{u}\|^2 = 1$ , saj je  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$ ,  $\|\mathbf{v}(\mathbf{u})\|^2 = 1$ , ker je vektorsko polje enotsko, in  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u}) = 0$ , saj je vektorsko polje tangентno na sfero. Dolžino lahko torej zapišemo kot

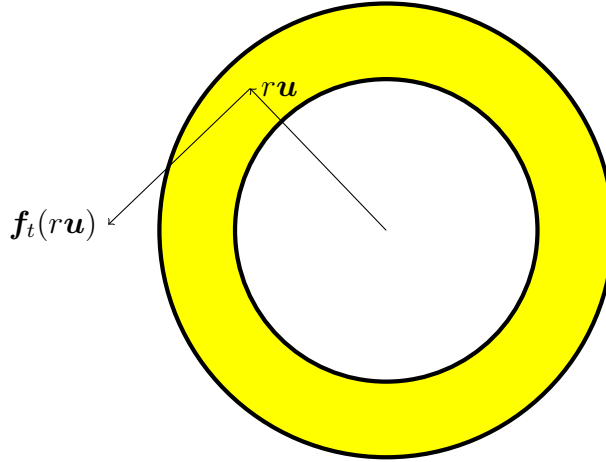
$$(9) \quad \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}(\mathbf{u})\| = \sqrt{1 + t^2}.$$

Sedaj za poseben primer preslikave  $\mathbf{f}_t$ , ko je domena  $A = \mathbb{S}^n$  in je vektorsko polje  $\mathbf{v}$  zvezno, diferenciable, enotsko in tangентno, dokažimo sledečo lemo:

**Lema 2.19.** Če je parameter  $t$  dovolj majhen, preslikava  $\mathbf{f}_t$  preslika enotsko sfero  $\mathbb{S}^n$  v sfero iste dimenzije z radijem  $\sqrt{1 + t^2}$ .

*Dokaz.* Če izberemo število  $t$  dovolj majhno, je po lemi 2.18 preslikava  $\mathbf{f}_t$  injektivna. Po (9) slika preslikava točke z enotske sfere  $\mathbb{S}^n$  v vektorje dolžine  $\sqrt{1 + t^2}$ . Torej je kodomena naše preslikave  $\sqrt{1 + t^2} \cdot \mathbb{S}^n$ . Tedaj je po izreku o invarianci odprtih množic na mnogoterostih (izrek 2.12) preslikava *odprta*. Ker pa preslikava slika iz kompaktnega prostora v Hausdorffov prostor, je po izreku 2.13 preslikava tudi *zaprta*. Sedaj slikamo celotno sfero in pogledamo sliko  $\mathbf{f}_t(\mathbb{S}^n)$ . Očitno drži  $\mathbf{f}_t(\mathbb{S}^n) \subseteq \sqrt{1 + t^2} \cdot \mathbb{S}^n$ . Ker pa je preslikava odprta in zaprta, je tudi slika sfere odprta in zaprta podmnožica zaloge vrednosti, torej komponenta prostora  $\sqrt{1 + t^2} \cdot \mathbb{S}^n$ . Ker pa je ciljni prostor povezan, ima eno samo komponento, iz česar sledi  $\mathbf{f}_t(\mathbb{S}^n) = \sqrt{1 + t^2} \cdot \mathbb{S}^n$ .  $\square$

Sedaj smo opremljeni z vsem, da dokažemo izrek 2.17. Za območje  $A$  si izberemo območje med dvema koncentričnima sferama, kar za poljubni realni pozitivni števili  $a < b$  definiramo kot  $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a \leq \|\mathbf{x}\| \leq b\}$ . Razširimo zvezno diferenciable enotsko tangентno vektorsko polje  $\mathbf{v}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  na območje  $A$  tako, da za vsako realno število  $r$ , za katerega velja  $a \leq r \leq b$ , določimo vektor  $\mathbf{v}(r\mathbf{u}) = r\mathbf{v}(\mathbf{u})$ . Podobno razširimo preslikavo  $\mathbf{f}_t$  na  $A$  s predpisom  $\mathbf{f}_t(r\mathbf{u}) = r\mathbf{u} + t\mathbf{v}(r\mathbf{u}) = r(\mathbf{u} + t\mathbf{v}(\mathbf{u})) = r\mathbf{f}_t(\mathbf{u})$ .



SLIKA 6. Množica  $A$  (rumeno območje) in delovanje preslikave  $\mathbf{f}_t$ .

Po lemi 2.19 preslikava  $\mathbf{f}_t$  preslika meji območja  $A$  v sferi z radijema  $a\sqrt{1 + t^2}$  in  $b\sqrt{1 + t^2}$ , notranjost območja  $A$  pa vmes.

Po trditvi 2.14 vemo, da se prostornina  $m$ -dimenzionalne krogle  $\mathbb{B}_R$  z radijem  $R$  izrazi z enačbo

$$\text{vol}(\mathbb{B}_R) = C(m)R^m,$$

kjer je  $C(m) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$  in  $\Gamma$  Eulerjeva gama funkcija. Izračunajmo prostornino množice  $A$  in njene slike  $\mathbf{f}_t(A)$ :

$$\begin{aligned} \text{vol}(A) &= \text{vol}(\mathbb{B}_b) - \text{vol}(\mathbb{B}_a) \\ &= C(n+1)b^{n+1} - C(n+1)a^{n+1} \\ &= C(n+1)(b^{n+1} - a^{n+1}), \\ \text{vol}(\mathbf{f}_t(A)) &= C(n+1)(b\sqrt{1+t^2})^{n+1} - C(n+1)(a\sqrt{1+t^2})^{n+1} \\ &= C(n+1)(b^{n+1} - a^{n+1})(\sqrt{1+t^2})^{n+1} \\ &= \text{vol}(A)(\sqrt{1+t^2})^{n+1}. \end{aligned}$$

Po lemi 2.18 se mora volumen množice  $\mathbf{f}_t(A)$  izraziti kot polinom v spremenljivki  $t$ . Če je število  $n$  sodo število, pridemo v protislovje. S tem je izrek 2.17 dokazan.  $\square$

S pomočjo izreka 2.17 lahko dokažemo glavni izrek – izrek o neobstoju zveznega neničelnega tangentnega vektorskega polja na sododimenzionalni sferi:

**Izrek 2.20.** *Naj bo  $n \in \mathbb{N}$  sodo število. Tedaj ne obstaja zvezno neničelno tangentno vektorsko polje na  $\mathbb{S}^n$ .*

*Dokaz.* Predpostavimo, da obstaja zvezno neničelno vektorsko polje  $\mathbf{v}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Norma vektorskega polja  $\mathbf{v}$  je zvezna pozitivna funkcija  $\|\mathbf{v}\|: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Ker je njeno definicijsko območje kompaktno, obstaja taka točka  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$ , v kateri doseže minimum. Označimo torej  $m := \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n} \|\mathbf{v}(\mathbf{u})\|$ . Ker je  $\mathbf{v}$  neničelno, je  $m$  pozitivno realno število.

Stone-Weierstrassov izrek 2.15 nam pove, da so polinomi gosti v prostoru zveznih funkcij, ki slikajo iz kompaktnega Hausdorffovega prostora v množico realnih števil. Natančneje – za vsak  $\epsilon > 0$ , vsak kompakten Hausdorffov prostor  $X$  in vsako zvezno funkcijo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  obstaja polinom  $q$ , da velja  $\|f - q\|_\infty < \epsilon$ . Zapišemo vektorsko polje po komponentah  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ . Vsaka komponenta  $v_i$  je zvezna preslikava iz kompaktnega Hausdorffovega prostora v realna števila, zato obstaja tak polinom  $p_i$ , ki se od komponente v supremum normi razlikuje za manj kot  $\frac{m}{2(n+1)}$ . Tako smo dobili polinomsko preslikavo  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ , za katero velja:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \|v_1 - p_1\|_\infty + \dots + \|v_{n+1} - p_{n+1}\|_\infty < (n+1) \frac{m}{2(n+1)} = \frac{m}{2}.$$

Torej velja, da za vsak vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$  drži zveza  $\|\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{u})\| < \frac{m}{2}$ .

Sedaj definiramo vektorsko polje  $\mathbf{w}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  s predpisom

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}) - (\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}.$$

S pomočjo skalarnega produkta dobimo

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Pri računanju skalarnega produkta smo uporabili dejstvo, da  $\mathbf{u}$  leži na enotski sferi in zato velja  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$ . Zgornji izračun nam pove, da je vektorsko polje  $\mathbf{w}$  tangentno na  $\mathbb{S}^n$  v vsaki točki  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^n$ .

Z upoštevanjem norme točk na enotski sferi lahko iz prejšnje zveze dobimo

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u})| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u})| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{u})\| < \frac{m}{2},$$

kjer smo pri prvi enakosti upoštevali, da je  $\mathbf{v}$  tangentno vektorsko polje na sferi.

S pomočjo zgornje ocene lahko ocenimo tudi  $\|\mathbf{w}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u})\| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u})| < \frac{m}{2}$ . Sedaj pa po trikotniški neenakosti velja:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{u})\| &= \|\mathbf{w}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{u})\| \\ &\leq \|\mathbf{w}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u})\| + \|\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{u})\| \\ &< \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m. \end{aligned}$$

Vidimo torej, da se vektorsko polje  $\mathbf{w}$  razlikuje od polja  $\mathbf{v}$  za manj kot  $m$  v vsaki točki na enotski sferi. Ker je  $m$  po definiciji minimum funkcije  $\|\mathbf{v}\|$ , tudi  $\mathbf{w}$  ne doseže ničle v nobeni točki. Sedaj lahko definiramo polje  $\mathbf{W}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{w}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{w}(\mathbf{u})\|}$ . To je zvezno diferenciable enotsko tangentno vektorsko polje na  $\mathbb{S}^n$ . Ker je  $n$  sodo število, pridemo v protislovje z izrekom 2.17.  $\square$

**2.3. Browerjev izrek o negibni točki.** Obstaja veliko dokazov, ki potrjujejo slavni Browerjev izrek. S pomočjo izreka o neobstoju neničelnega zveznega vektorskega polja na sododimenzionalni sferi bomo podali enega izmed dokazov (ta je povzet po [6, str. 523–524]).

**Izrek 2.21** (Browerjev izrek o negibni točki.). *Naj bo preslikava  $\mathbf{f} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  zvezna. Tedaj ima  $\mathbf{f}$  negibno točko.*

*Dokaz.* Predpostavimo, da obstaja taka zvezna preslikava  $\mathbf{f} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ , ki nima negibne točke. To pomeni  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$  za vsak  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$ . Na tem disku lahko definiramo neničelno zvezno vektorsko polje  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . V vsaki robni točki  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^{n-1}$  kaže to vektorsko polje “navzven”, tj.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u}) > 0$ . Res, saj dobimo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Ta izraz je vedno pozitiven, saj je  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{f}(\mathbf{u})\| \cos \phi \leq 1$ , kjer je  $\phi$  kot med  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ , ter  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 1$  natanko tedaj, ko je  $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ . To pa po predpostavki o  $\mathbf{f}$  ni mogoče.

Vektorsko polje uredimo tako, da vsako točko na enotski sferi preslika samo vase. Zapišimo

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})}.$$

Vidimo, da za vsak  $\mathbf{x}$ , za katerega velja  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$ , sledi  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . To so ravno točke na enotski sferi. Po podobnem razmisleku kot prej lahko sklepamo, da je imenovalec v zapisu neničeln za vsak  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$ , torej je vektorsko polje  $\mathbf{w}$  zvezno. Če sta vektorja  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  linearno neodvisna, je vektorsko polje  $\mathbf{w}$  ravno njuna linearna kombinacija in zato različno od nič. V primeru, ko sta  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  linearno odvisna, torej  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}$ , lahko z upoštevanjem pravil za skalarni produkt dobimo

$$(10) \quad (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\alpha\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \alpha\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{x}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{x}(1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})}{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})} \\ &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})}{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})} \\ &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})} \neq 0. \end{aligned}$$

Pri zadnji enakosti smo upoštevali (10), pri neenakosti pa predpostavko, da  $\mathbf{f}$  nima negibne točke.

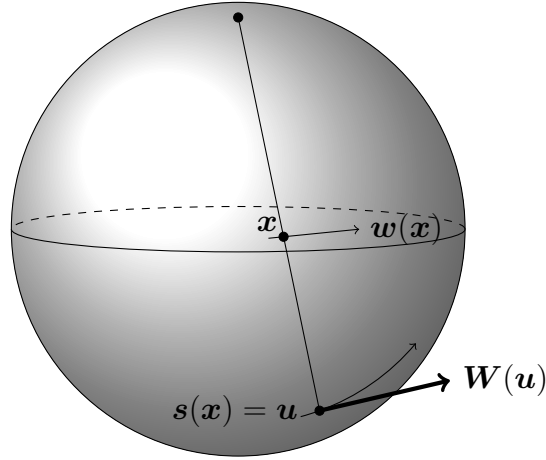
Sedaj bomo konstruirali neničelno zvezno vektorsko polje na sferi  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Prostor  $\mathbb{R}^n$  identificiramo s hiperravnino – točkami, ki imajo zadnjo koordinato enako nič ( $x_{n+1} = 0$ ). Hiperravnina torej seka sfero v “ekvatorju”. (Za lažjo predstavo si predstavljamo tridimenzionalni model, kjer je hiperravnina kar  $\mathbb{R}^2$  s koordinato  $z = 0$ ,  $\mathbb{S}^n$  enačimo s  $\mathbb{S}^2$ , disk  $\mathbb{B}^n$  pa z dvodimenzionalnim diskom  $\mathbb{B}^2$ . To je torej enotski krog na ravnini  $\mathbb{R}^2$  z robom  $\mathbb{S}^2$ .) Uporabili bomo zožitev stereografske projekcije iz severnega pola  $(0, \dots, 0, 1)$ , ki bijektivno preslika vsako točko  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$  v točko na spodnji hemisferi  $\mathbb{S}_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n | x_{n+1} \leq 0\}$ . Zožitev stereografske projekcije je torej zvezna preslikava  $\mathbf{s} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}_-^n$  s predpisom

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \frac{(2x_1, \dots, 2x_n, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1)}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 1}.$$

Preverimo dva robna pogoja: točka 0 se preslika v  $\mathbf{s}(0) = \frac{(0, \dots, 0, -1)}{1}$ , kar je natanko južni pol sfere; točka na robu diska ( $\|\mathbf{x}\| = 1$ ) pa se preslika v  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \frac{(2x_1, \dots, 2x_n, 0)}{2} = (x_1, \dots, x_n, 0) = \mathbf{x}$ .

Definirajmo vektorsko polje  $\mathbf{W}$  na spodnji hemisferi za vsako točko  $\mathbf{u} = \mathbf{s}(\mathbf{x})$  kot smerni odvod funkcije  $\mathbf{s}$  v točki  $\mathbf{x}$  v smeri vektorja  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ . (Vektor  $\mathbf{W}(\mathbf{u})$  si lahko predstavljamo kot vektor obodne hitrosti delca, ki se giblje po parametrično podani sferični krivulji, ki je podana s predpisom  $t \mapsto \mathbf{s}(\mathbf{x} + t\mathbf{w}(\mathbf{x}))$ , pri  $t = 0$ .) Tako smo dobili zvezno neničelno vektorsko polje na  $\mathbb{S}_-^n$ . Opazimo, da je za vsako točko  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_-^{n-1}$  ( $\mathbf{u} = \mathbf{s}(\mathbf{u})$ ), element vektorskega polja oblike  $\mathbf{W}(\mathbf{u}) = (0, \dots, 0, \beta)$  za neki  $\beta > 0$ . Geometrijsko lahko do tega sklepa pridemo na sledeč način. Izberemo fiksno točko  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{S}_-^{n-1}$ . Za  $t \in [-1, 0]$  opiše krivulja  $t \mapsto \mathbf{u} + t\mathbf{w}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + t\mathbf{u}$  daljico od izhodišča koordinatnega sistema do točke  $\mathbf{u}$ . Ko to daljico s preslikavo  $\mathbf{s}$  projeciramo na spodnjo hemisfero, dobimo izsek krožnega loka, ki je ravno četrtina velike krožnice (“poldnevnika”). Za vsak  $t$  leži vektor  $\mathbf{W}(\mathbf{s}(\mathbf{u} + t\mathbf{u}))$  v hiperravnini tega “poldnevnika” in je pravokoten na vektor  $\mathbf{s}(\mathbf{u} + t\mathbf{u})$ . Ko je  $t = 0$ , leži vektor  $\mathbf{s}(\mathbf{u})$  na hiperravnini  $\mathbb{R}^n$ , zato  $\mathbf{W}(\mathbf{u})$  kaže v smeri  $x_{n+1}$  osi. Delec, ki se premika po delu poldnevnika  $t \mapsto \mathbf{s}(\mathbf{u} + t\mathbf{u})$  je pri  $t = -1$  v južnem polu ( $x_{n+1} = -1$ ), pri  $t = 0$  pa na ekvatorju ( $x_{n+1} = 0$ ). Zadnja komponenta  $\mathbf{W}(\mathbf{s}(\mathbf{u} + t\mathbf{u}))$  je torej vselej

pozitivna, zato je tudi  $\lim_{t \uparrow 0} \mathbf{W}(s(\mathbf{u} + t\mathbf{u})) = (0, \dots, 0, \beta)$  in  $\beta > 0$ .



SLIKA 7. Konstrukcija vektorskega polja  $\mathbf{W}$ .

Za določitev vektorskega polja na  $\mathbb{S}_+^n$  uporabimo zožitev stereografske projekcije iz južnega pola  $\mathbf{s}' : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}_+^n$  s predpisom

$$\mathbf{s}'(\mathbf{x}) = \frac{(2x_1, \dots, 2x_n, 1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 1}.$$

Podobno definiramo vektorsko polje  $\mathbf{W}' : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}_+^n$  kot smerni odvod funkcije  $\mathbf{s}'$  v točki  $\mathbf{x}$  v smeri  $-\mathbf{w}(\mathbf{x})$ . Ponovno dobimo zvezno neničelno vektorsko polje na hemisferi. Za točke  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^{n-1}$  ponovno velja, da  $\mathbf{W}'(\mathbf{u})$  kaže v pozitivni smeri osi  $x_{n+1}$ . Vektorski polji  $\mathbf{W}$  in  $\mathbf{W}'$  sta torej zvezni, definirani na lokalno končnem zaprtem pokritju sfere  $\mathbb{S}^n$  in se ujemata na preseku (na  $\mathbb{S}^{n-1}$ ). Skupaj torej tvorita neničelno zvezno vektorsko polje na sferi  $\mathbb{S}^n$ . Čim je  $n$  sodo število, je to v protislovju z izrekom 2.20.

Izrek smo torej dokazali za sfere sodih dimenzij. V kolikor je  $n$  liho število, tj.  $n = 2k - 1$  za neko naravno število  $k$ , lahko vsako zvezno preslikavo  $\mathbf{f} : \mathbb{B}^{2k-1} \rightarrow \mathbb{B}^{2k-1}$  razširimo do zvezne preslikave  $\mathbf{F} : \mathbb{B}^{2k} \rightarrow \mathbb{B}^{2k}$  kot  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_{2k}) = (\mathbf{f}(x_1, \dots, x_{2k-1}), 0)$ . Če  $\mathbf{f}$  nima negibne točke, potem tudi  $\mathbf{F}$  nima negibne točke. S to predpostavko preslikava  $\mathbf{F}$  ustreza prejšnjemu primeru in tako zopet pridemo do protislovja. Browerjev izrek torej drži vedno.  $\square$

### 3. EULERJEVA KARAKTERISTIKA IN SINGULARNOSTI NA DVODIMENZIONALNIH PLOSKVAH

Ta razdelek služi zgolj kot zanimivost in ne kot izčrpno poglavje na temo singularnosti na dvodimenzionalnih ploskvah. Predstaviti želimo le presenetljivo povezanost med geometrijsko in diskretno vejo matematike. Če bi bralec želel izčrpno poglavje na to temo, opremljeno z vsemi potrebnimi dokazi, naj si ogleda [2, Poglavje 4]. Razlog, da izpustimo podrobnosti, tiči v tem, da ta del prekaša znanje dodiplomskega

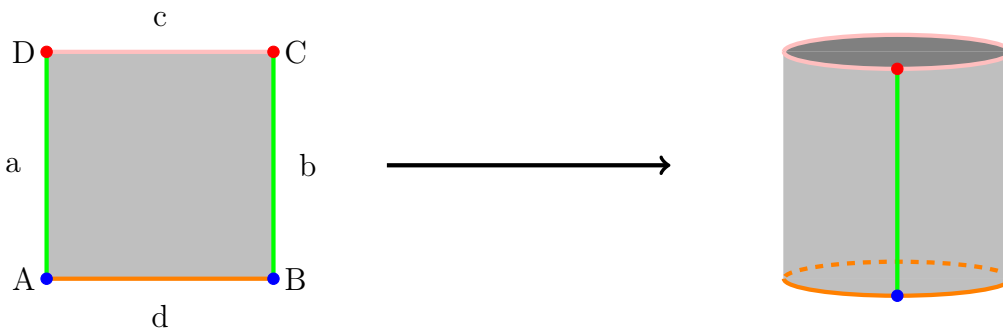
študenta matematike in s tem celotni diplomski nalogi odvzame čar enostavnega razumevanja.

Dokazali smo izreke o neobstoju zveznega tangentnega neničelnega vektorskega polja na sododimenzionalni sferi. Vendar se za konec vrnimo nazaj na dvodimenzionalen primer, saj je tudi najbolj otipljiv in predstavljen. V razdelku 2.1 smo si ogledali sfero in torus ter poskušali najti zvezno tangentno nenično vektorsko polje. Na torusu nam je zlahka uspelo (5), na sferi (3, 4) pa smo v vsakem primeru dobili natanko dve točki, v katerih je vektorsko polje izginilo. Te točke imenujemo *singularne točke*. Naravno se je vprašati, katera lastnost loči sfero od torusa ter slednjemu omogoča obstoj želenega vektorskega polja. Skrivnost tiči v načinu predstavitve ploskev in *Eulerjevi karakteristiki*.

Povezane kompaktne 2-mnogoterosti imenujemo *ploskve*. V [9, Poglavje 13] je zapisan način, kako lahko vsako ploskev predstavimo kot *poliedrsko ploskev* – ploskev predstavimo kot kvocientni prostor družine ravninskih mnogokotnikov, katerih nekatere stranice paroma identificiramo z linearnimi homeomorfizmi. Vsak mnogokotnik je sestavljen iz *robov* (daljice, ki omejujejo mnogokotnik), *oglišč* (točke, v katerih se robovi stikajo) in *lic* (površina, ki je omejena z robovi). Med identificiranjem robov se identificirajo (zlepijo v isto točko) tudi nekatera oglišča. Končne slike teh objektov imenujemo *j-celice*  $K^{(j)}$ , in sicer

- 0 – celice so slike oglišč,
- 1 – celice so slike robov,
- 2 – celice so slike lic.

**Primer 3.1.** Imejmo kvadrat, ki mu identificiramo robova  $a$  in  $b$ . Pri tem pazimo, da robova zlepimo tako, da se oglišči  $A$  in  $B$  zlepita v skupno točko ter oglišči  $C$  in  $D$  v skupno.



SLIKA 8. Identificiranje robov in oglišč.

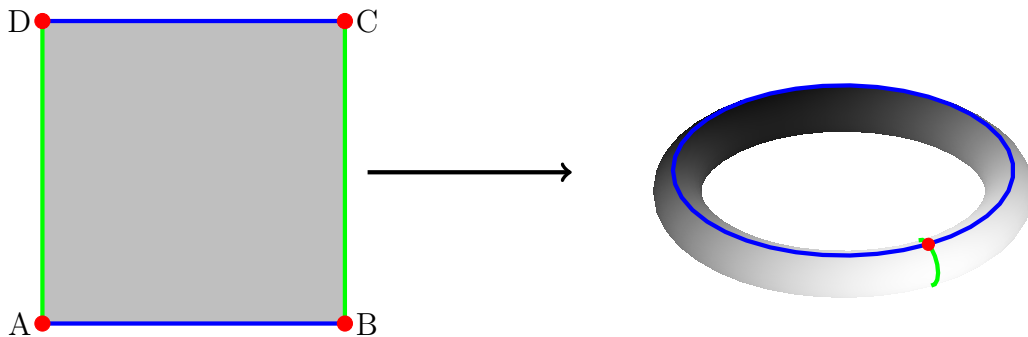
Vidimo, da sta  $a$  in  $b$  postala ista 1 – celica. Ker pa smo pri tem paroma zlepili tudi oglišči  $A$  in  $B$  ter  $C$  in  $D$ , sta sliki robov  $c$  in  $d$  krožnici. Število 0 – celic je  $|K^{(0)}| = 2$ , število 1 – celic:  $|K^{(1)}| = 3$  in število 2 – celic:  $|K^{(2)}| = 1$ .  $\diamond$

**Definicija 3.2.** *Eulerjeva karakteristika* ploskve  $P$  je število, ki ga izračunamo tako: ploskev  $P$  predstavimo kot *poliedrsko ploskev*, nato pa s pomočjo števila  $j$  – celic uporabimo enačbo

$$\chi(P) = |K^{(0)}| - |K^{(1)}| + |K^{(2)}|.$$

Vsekakor bo najlažje, da te izraze strnemo in prikažemo z zgledom:

**Primer 3.3.** Imejmo kvadrat v ravnini. Najprej mu identificiramo (zlepimo) spodnjo in zgornjo stranico tako, da paroma zlepimo oglišči  $A$  in  $D$  ter oglišči  $B$  in  $C$ . Nato pa še levo in desno stranico prvotnega kvadrata – oziroma robova odprtega valja – da dobimo torus. Pri tem smo zlepili tudi točki, ki smo ju dobili z lepljenjem prvotnih oglišč. Opazimo, da se vsa štiri oglišča kvadrata preslikajo v isto točko na torusu.



SLIKA 9. Konstrukcija torusa iz mnogokotnika.

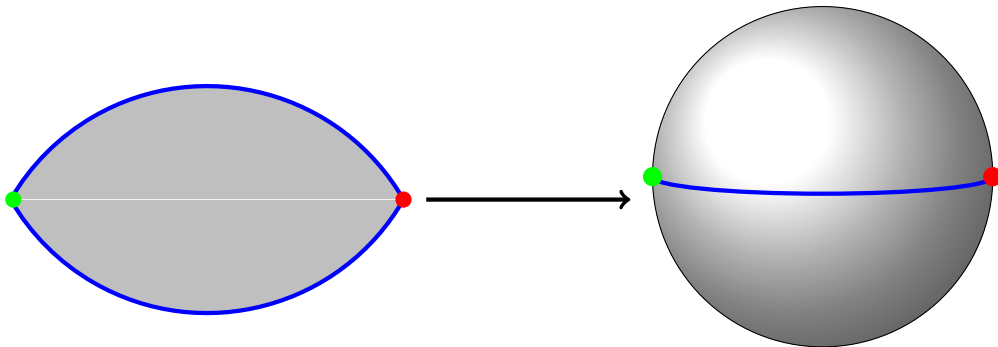
Sedaj lahko izračunamo *Eulerjevo karakteristiko* torusa  $\mathbb{T}$ :

$$\chi(\mathbb{T}) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

◇

Naredimo še primer za sfero:

**Primer 3.4.** Narišimo dva oglišča in ju povežimo z dvema robovoma. Nato identificiramo (zlepimo) robova tako, da oglišči ostaneta pri miru, in dobimo sfero:



SLIKA 10. Konstrukcija sfere iz mnogokotnika.

Izračunajmo *Eulerjevo karakteristiko* še v tem primeru:

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2 - 1 + 1 = 2.$$

◇

V razdelku 2.1 smo konstruirali zvezno tangentno vektorsko polje, ki je bilo na torusu neničelno, na sferi pa smo uspeli narediti zvezno tangentno vektorsko polje z dvema izoliranimi singularnima točkama. Vidimo, da se število singularnosti ujema z *Eulerjevo karakteristiko*, kar je tudi ugotovitev *Poincar'e–Hopfevega* izreka [2, Izrek 4-3]. Če bi se bolj poglobili v izrek, bi ugotovili, da nam *Eulerjeva karakteristika* ne poda neposrednega števila izoliranih singularnosti, temveč vsoto vseh *indeksov* točk na ploskvi. Indeks določimo tako: okrog točke na ploskvi narišemo krožnico s tako majhnim radijem, da se znotraj krožnice nahaja največ ena singularnost, in med sprehodom po krožnici v pozitivni smeri pogledamo smeri vektorjev, ki jih poda vektorsko polje v točkah krožnice. Štejemo, kolikokrat se vektor “zavrti za polni kot”. Za vsak polni kot v pozitivni smeri prištejemo 1, za vsak polni kot v negativni smeri pa prištejemo  $-1$ . Za točke, kjer nimamo singularnosti, dobimo indeks 0. Za singularne točke, dobljene v primerih  $(5, 3, 4)$  – “vrtinec, čop in pleša” – velja, da imajo indeks 1. Zato potrebujemo na sferi vedno par takih točk. Obstaja tudi vektorsko polje na sferi, ki ima samo eno singularnost z indeksom 2, ki jo imenujemo “dipol”.

Poliedrska struktura (in posledično tudi *Eulerjeva karakteristika*) pa se ohranja pri homeomorfnih deformacijah ploskev. Zato sklepamo, da se število izoliranih singularnosti zveznega tangentnega vektorskega polja tudi ohranja. Če torej sfero homeomorfno deformiramo v rotacijski elipsoid (najboljša aproksimacija Zemljinega površja) ali pa v obliko krave, tudi novim oblikam ne moremo konstruirati tangentnega zveznega neničelnega vektorskega polja. Od tod izvira tudi izraz: “Every cow must have at least one cowlick.” (*prevod*: “Vsaka krava mora imeti vsaj en vrtinec.”)[12]. S svojim znanjem vemo, da mora imeti natanko dva.



SLIKA 11. Homeomorfna transformacija sfere v kravo (slika ustvarjena s pomočjo [1]).

#### SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

**ball** krogla

**Brouwer fixed-point theorem** Brouwerjev izrek o negibni točki



**circumference** krožnica  
**closed set** zaprta množica  
**compact** kompakten  
**connected component** komponenta  
**continuous** zvezen  
**cube** kocka  
**differentiable** diferenciablen  
**Euler characteristic** Eulerjeva karakteristika  
**fixed-point** negibna točka  
**homeomorphic** homeomorfen  
**Lipschitz constant** Lipschitzeva konstanta  
**norm** norma  
**open set** odprta množica  
**polynomial function** polinomska funkcija  
**sphere** sfera  
**stereographic projection** stereografska projekcija  
**tangent** tangenti  
**torus** torus  
**unit vector** enotski vektor  
**vector field** vektorsko polje  
**volume** prostornina

#### LITERATURA

- [1] Andre (<https://mathematica.stackexchange.com/users/5467/andre>), *How to make a Spherical Cow?*, Mathematica Stack Exchange, [ogled 9. 4. 2018], dostopno na <https://mathematica.stackexchange.com/a/125057>.
- [2] E. Early, *On the Euler Characteristic*, MIT Undergraduate Journal of Mathematics, str. od 37 do 47, dostopno tudi na [http://cgvr.cs.uni-bremen.de/teaching/cg\\_literatur/Euler%20Characteristic%20-%20Edward%20Early.pdf](http://cgvr.cs.uni-bremen.de/teaching/cg_literatur/Euler%20Characteristic%20-%20Edward%20Early.pdf).
- [3] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010; dostopno tudi na <http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf>.
- [4] J. Globevnik, M. Brojan: *Analiza II*, verzija 10. 9. 2010, [ogled 26. 3. 2018], dostopno na <https://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf>.
- [5] H. Haber: *The volume and surface area of an n-dimensional hypersphere*, [ogled 9. 4. 2018], dostopno na [http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/volume\\_11.pdf](http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/volume_11.pdf).
- [6] J. Milnor, *Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 7 (Aug. - Sep., 1978), Mathematical Association of America, str. od 521 do 524, dostopno tudi na <http://www.jstor.org/stable/2320860>.
- [7] J. Mrčun: *Topologija*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2008.
- [8] P. Pavešić: *Splošna topologija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.
- [9] S. Strle: *Izbrane teme iz geometrijske topologije*, 2016.
- [10] *eleVRant: The Hairy Ball Theorem in VR Video*. [ogled 26. 3. 2018], dostopno na [elevator.com/elevrant-the-hairy-ball-theorem-in-vr-video/](http://elevator.com/elevrant-the-hairy-ball-theorem-in-vr-video/).
- [11] *Funkcija gama*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 26. 3. 2018], dostopno na [https://sl.wikipedia.org/wiki/Funkcija\\_gama](https://sl.wikipedia.org/wiki/Funkcija_gama).
- [12] *Hairy ball theorem*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 26. 3. 2018], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Hairy\\_ball\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Hairy_ball_theorem).
- [13] *Vector fields on spheres*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 26. 3. 2018], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_fields\\_on\\_spheres](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_fields_on_spheres).