

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Finančna matematika - 2. stopnja

Matic Zupančič

Model lokalne volatlnosti

Magistrsko delo
Mentor: izred. prof. dr. Mihael Perman

Ljubljana, 2018

Kazalo

1	Nekaj dejstev o volatilnosti	1
1.1	Kako se je volatilnost naučila smejeti	1
1.2	Vrste volatilnosti	2
1.3	Stilizirana dejstva o volatilnostnem nasmešku	4
2	Teorija Modela lokalne volatilnosti	9
2.1	Funkcija lokalne volatilnosti	9
2.2	Zamenjava spremenljivk v Dupirejevi enačbi	13
3	Volatilnostni nasmešek kot krivulja	17
3.1	Odsotnost metuljeve arbitraže	17
3.2	Odsotnost koledarske arbitraže	19
4	Modeliranje nasmeška s SVI	21
4.1	SVI parametrizacija ploskve	21
4.2	Odsotnost arbitraže na SSVI ploskvi	24
4.3	Algoritem za kalibracijo ploskve totalne variance	35
5	Kalibracija SVI nasmeška s tržnimi podatki S&P 500	36
5.1	Diskontni faktor	36
5.2	Cena terminske pogodbe in dividendni donos	37
5.3	Kalibracija ploskve	38
5.4	Interpolacija in ekstrapolacija na ploskvi	40
6	Model lokalne volatilnosti za S&P 500	42
6.1	Proces lokalne volatilnosti	42
6.2	Ujemanje s tržnimi cenami	44
6.3	Do tveganja nevtralna funkcija gostote	45
7	Pomankljivost Modela lokalne volatilnosti	48

Program dela

V magistrskem delu predstavite Model lokalne volatilnosti najprej s teoretične plati. Obravnavajte implikacije modela in navedite, pod katerimi pogoji model ne dopušča arbitraže. Predstavite pristope k modeliranju in parametrizaciji volatilnostne ploskve. V drugem delu se lotite kalibracije modela. Za podatke izberite ustrezen borzni indeks s trga, kjer je živahno trgovanje in je na voljo dovolj izvedenih papirjev z različnimi ročnostmi in izvršilnimi cenami. Po preverjanju podatkov preizkusite obstoječe Matlab programe za kalibracijo in navedite njihov izvor. Kodo prilagodite vašim izbiram modela in parametrizacije in jo po potrebi nadgradite. Rezultate kalibracije in povratno preverjanje modelskih cen s tržnimi predstavite z grafi in tabelami. Na koncu se kritično ozrite na rezultate modeliranja in kalibracije in pretehtajte dobre in slabe strani Modela lokalne volatilnosti.

Povzetek

V tem magistrskem delu je predstavljena teorija Modela lokalne volatilnosti. V 1. razdelku so navedena in opisana nekatera splošna dejstva glede implicirane volatilnosti na različnih opcijskih trgih. V 2. razdelku je opisana splošna teorija lokalne volatilnosti, čemur sledi splošna teorija volatilnostnega nasmeška v 3. razdelku. 4. razdelek podrobno opiše SVI parameterizacijo volatilnostnega nasmeška, skupaj z navodilom za kalibracijo. V 5. razdelku je demonstrirana dejanska kalibracija modela na tržne cene opcij delniškega indeksa S&P 500 skupaj z oceno kvalitete prilaganja modela podatkom. 7. razdelek izpostavi in opiše glavno pomankljivost Modela lokalne volatilnosti.

Matematična klasifikacija glede na predmet: 91G20, 91G60

Ključne besede: lokalna volatilnost, implicirana volatilnost, vrednotenje izvedenih instrumentov

Abstract

In this master thesis the theory of local volatility model is presented. Section 1 states some general facts about the behaviour of implied volatility in various option markets. In Section 2 the general theory of local volatility is established, followed by a description of model independent theory of volatility smile in section 3. Section 4 describes the SVI parameterization of volatility smile in detail, gives an algorithm for calibration and in Section 5 an actual calibration to S&P 500 option quotes is demonstrated along with estimation of goodness of fit. Section 7 exposes and explains the main weakness of local volatility model.

Mathematical subject classification: 91G20, 91G60

Keywords: local volatility, implied volatility, derivatives pricing

1 Nekaj dejstev o volatilnosti

1.1 Kako se je volatilnost naučila smežati

Borzni zlom 19. oktobra 1987, znan tudi pod imenom Črni ponedeljek, je povzročil, da so finančni strokovnjaki ponovno pretehtali metodologijo vrednotenja izvedenih finančnih instrumentov. Minilo je 14 let od kar so finančni trgi širom sveta prevzeli Black-Scholesove formule in sedaj je bila o pravilnosti in uporabnosti le teh prvič vzbujena večja senca dvoma. Ustvarjalci trga (angl. market makers), upravitelji tveganj in trgovci, ki so bili priča dah jemajočemu 22.6 % padcu Dow Jones Industrial Average delniškega indeksa v enem samem dnevu so sedaj dvomili, da so takšni skrajni vendar možni dogodki všteti v cene izvedenih instrumentov izračunane z Black-Scholesovimi formulami.

Novo prepričanje je velevalo, da bi moral zavarovatelj opcije (angl. underwriter) zaračunati večjo ceno za prodajno opcije globoko pod mejo (angl. out-of-money) kot za ekvivalentno nakupno opcijo globoko pod mejo, razlika pa bi služila kot premija za zavarovateljeve potencialne izgube iz naslova nezmožnosti popolnega ščitenja delte (angl. delta hedging) v luči tovrstnih dogodkov.

Tu je na mestu omeniti, da četudi v teoriji Black-Scholesovega modela zavarovatelj prodajne opcije gibanje cene temelja (angl. underlying) s ščitenjem delte izzvzame iz svojega dobička in izgube (angl. profit and loss, tudi P&L), je slednji v razmerah borznega zloma zaradi nelikvidnosti in širokega razpona med nakupno in prodajno kotacijo na trgu temelja prisiljen na kratko prodajati temelj po neugodni ceni nakupne kotacije, v času ko vsi udeleženci trga temelj prodajajo ter nihče ne kupuje.

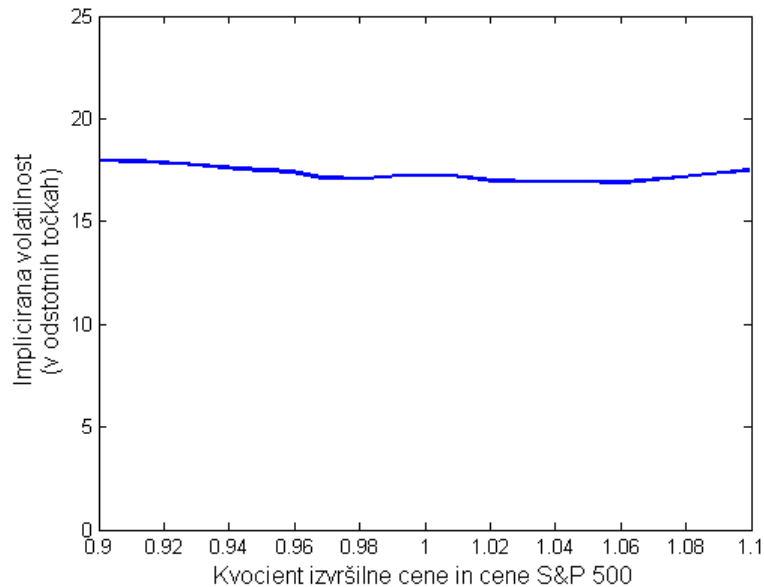
Kakšne posledice pa je to imelo za Black-Scholesov model? Pri istem diskontnem faktorju, dividendnemu donosu (angl. dividend yield) in času do zapadlosti naj bi evropska prodajna opcija izražala višjo implicirano volatilnost kot evropska nakupna opcija z ekvivalentno izvršilno ceno - teza, ki je v nasprotju z Black-Scholesovo predpostavko konstantne volatilnosti. Black-Scholesov model namreč dopušča volatilnost kvečjemu kot spremenljivko časa, ne pa tudi kot spremenljivko izvršilne cene, vrednost tega modelskega parametra pa odraža najboljšo oceno volatilnosti donosov temelja za obdobje do dane zapadlosti, kar pa je lahko ena sama vrednost.

V roku nekaj dni so volatilnosti implicirane iz opcij na delniške indekse pri različni izvršilnih cenah začele izražati obliko padajoče konveksne krivulje namesto premice in tako je nastal fenomen volatilnostnega nasmeška (angl. volatility smile ali volatility smirk ali volatility skew, odvisno od asimetrije krivulje). Slika 1 in Slika 2 prikazujeta obliki volatilnostne krivulje pred in po borznem zlomu.¹ Trgu opcij na delniške indekse so kmalu sledili še drugi opcijski trgi, ki so začeli odražati volatilnostne nasmeške, katerih simetričnost oziroma asimetričnost je pogojena z karakteristikami dinamike temelja.

Čeprav je Black-Scholesov model pred borznim zlomom dobro opisoval obnašanje tržnih cen na različnih opcijskih trgih, je kmalu po Črnem ponedeljku postal zgolj konvencija za citiranje volatilnosti, ter odprl vrata novim finančno-matematičnim modelom, ki so dovoljevali fenomen volatilnostnega nasmeška. Eden izmed prvih takšnih modelov je bil

¹Slika 1 in Slika 2 sta bili ustvarjeni z reproduciranjem originalnih grafov v [1].

Model lokalne volatilnosti.



Slika 1: Tromesečna implicirana volatilnost delniškega indeksa S&P 500 pred Črnim ponedeljkom.

1.2 Vrste volatilnosti

Finančni žargon v angleščini je prežet z temini, ki opisujejo različne vrste volatilnosti. V tem podpoglavju so razloženi nekateri najbolj pomembni.

Implicirana volatilnost

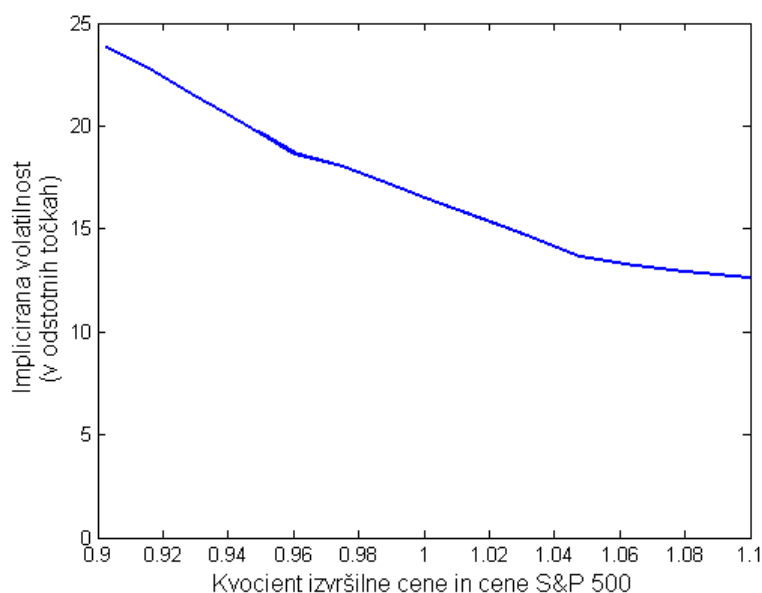
Do sedaj smo že kar nekajkrat omenili Black-Scholsovo implicirano volatilnost. Izračunamo jo tako, da pri dani ceni temelja, času do zapadlosti in nekem fiksiranem popravku za vnaprej predvideno spremembo cene ali strošek držanja temelja z numerično metodo izračunamo pri kateri volatilnosti se cena dana z Black-Scholsovo formulo ujema s tržno ceno. Vnaprej predviden popravek je bodisi delniški donos pri delnicah in delniških indeksih, strošek držanja (angl. cost of carry) pri blagovnih dobrinah ali pa obrestna mera tuje valute v primeru opcije na devizni tečaj. Dobljeno volatilnost nato pomnožimo z $\sqrt{252}$, da jo pretvorimo na letno raven. V tem magistrskem delu bo vrednost Black-Scholsove implicirane volatilnosti označevala notacija σ_{BS} .

Realizirana oziroma zgodovinska volatilnost

Realizirana volatilnost pretvorjena na letno raven je izračunana z cenilko

$$\sigma_H^2 = \frac{252}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 \quad (1)$$

kjer je so S_i cene temelja ob zaprtju, popravljene za izplačane dividende in za razdelitv delnic (angl. share split).



Slika 2: Tromesečna implicirana volatilitnost delniškega indeksa S&P 500 po Črnem pone-deljku.

Volatilitnost na meji (angl. ATM volatility)

Implicirana volatilitnost opcije na meji.

Terminska volatilitnost (angl. forward volatility)

Ker nam volatilitnost na meji pove le pričakovano realizirano volatilitnost za obdobje od danes pa do zapadlosti opcije lahko iz večih volatilitnosti na meji izračunamo kakšna je pričakovana volatilitnost v nekem obdobju v prihodnosti. Ob predpostavki, da so donosi cene temelja med seboj neodvisni, je varianca aditivna, kar nam dovoli dekompozicijo volatilitnosti na meji na sledeč način

$$\sigma_{T_0, T_n}^2 = \frac{1}{T_n - T_0} \left[(T_1 - T_0) \sigma_{T_0, T_1}^2 + (T_2 - T_1) \sigma_{T_1, T_2}^2 + \dots + (T_n - T_{n-1}) \sigma_{T_{n-1}, T_n}^2 \right]$$

iz česar pa lahko sedaj izrazimo terminsko volatilitnost za obdobje $t \in [T_{n-1}, T_n]$

$$\sigma_{T_{n-1}, T_n} = \sqrt{\frac{1}{T_n - T_{n-1}}} \sqrt{(T_n - T_0) \sigma_{0, T_n}^2 - \sum_{i=0}^{n-2} (T_{i+1} - T_i) \sigma_{T_i, T_{i+1}}^2}$$

Ta rekurzivna formula nam omogoči izračun vseh terminskih volatilitnosti v obdobjih $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \dots (T_{n-1}, T_n)$, pod pogojem, da je vrednost pod korenem vselej pozitivna.²

Trenutna volatilitnost (angl. instantaneous volatility)

Je volatilitnost v nekem danem infinitezimalnem trenutku. Če predpostavimo zgolj odvisnost volatilitnosti od časa do zapadlosti velja zveza

²Kasneje bomo spoznali, da je v nasprotnem primeru na trgu možna tako imenovana koledarska arbitraža.

$$\sigma_{BS}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

kjer je T čas do zapadlosti opcije.

Lokalna volatilitnost (angl. local volatility)

Podobno kot trenutna volatilitnost, lokalna volatilitnost izraža volatilitnost v nekem trenutku, pri čemer dodatno predpostavljamo odvisnost volatilitnosti od cene temelja, torej

$$\sigma_{loc} : (S_t, t) \rightarrow \sigma_{loc}(S_t, t)$$

Totalna varianca

Definirana kot

$$w := \sigma_{BS}^2 T$$

se totalna varianca izkaže kot količina, ki je v kontekstu volatilitnosti opcij z različnimi zapadlostmi bolj intuitivna kot implicirana volatilitnost ali implicirana varianca.

Skozi to magistrsko delo bodo pojmi implicirana volatilitnost, implicirana varianca in totalna varianca uporabljeni izmenično, saj je enostavno pretvoriti eno količino v drugo.

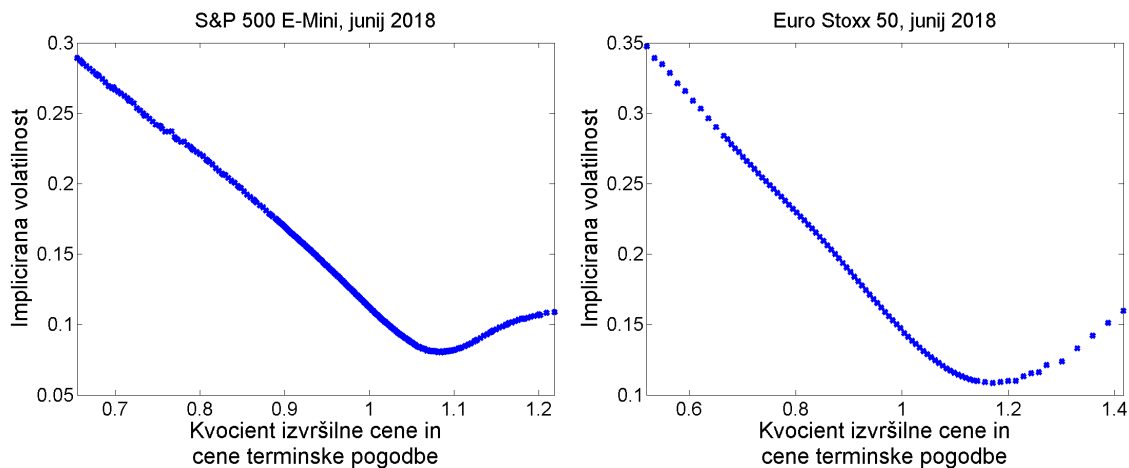
1.3 Stilizirana dejstva o volatilitnostnem nasmešku

Čeprav je nevarno predpostavljati, da je na finančnih trgih nek dogodek nemogoč, nihče ne verjame, da lahko delniški indeks v enem dnevu zraste za 20 %, po drugi strani pa se 20 % padec v enem dnevu smatra za dokaj verjeten dogodek, saj so ga finančni trgi že izkusili. Izpostaviti pa je potrebno, da se različni naložbeni razredi obnašajo na različne načine. Gibanje cen na trgu surove nafte, naprimer, je v glavnem pogojeno z povpraševanjem in ponudbo. Večja prekinitev v dobavi bi lahko povzročila astronomsko rast cen, kar pa se v kontekstu implicirane volatilitnosti izraža s simetričnim volatilitnostnim nasmeškom. Ključno je torej razumeti, da različni opcijski trgi izražajo različne oblike volatilitnostnega nasmeška, te pa so pogojene z karakteristikami trga temelja. Sedaj si bomo ogledali nekatere lastnosti volatilitnostnih nasmeškov na različnih opcijskih trgih bolj podrobno. Vsi grafi v tem poglavju so bili producirani iz podatkov zajetih dne 22.12.2017 na spletni strani www.barchart.com. Z namenom lažjega primerjanja volatilitnostnih nasmeškov za različne temelje sem na x osi izvršilno ceno vselej normaliziral s ceno terminske pogodbe.

Preden se spustimo v analizo volatilitnostnih nasmeškov, pa je potrebno pripomniti še tole. Ko govorimo o implicirani volatilitnosti za izvršilno ceno manjšo od trenutne cene temelja oziroma trenutne cene terminske pogodbe, v glavnem govorimo o implicirani volatilitnosti izračunani iz tržnih cen prodajnih opcij in ko govorimo o implicirani volatilitnosti za izvršilno ceno nad ceno temelja oziroma ceno terminske pogodbe, imamo v mislih implicirano volatilitnost izračunano iz tržnih cen nakupnih opcij. Čeprav prodajno-nakupna pariteta (angl. put-call parity) veleva enakost implicirane volatilitnosti prodajne in nakupne opcije, ponavadi nakupne in prodajne opcije globoko nad mejo niso preveč likvidne in zato nakupne in prodajne kotacije niso na voljo.

Delniški indeksi

Ker so hitri padci in relativno počasna rast glavna karakteristika delniških indeksov, je najbolj izstopajoča lastnost volatilnostnega nasmeška na trgu opcij na delniške indekse asimetričnost nasmeška. Implicirana volatilitet je najvišja za prodajne opcije globoko pod mejo, ter z naraščajočo izvršilno ceno pada nekje do vrednosti cene termske pogodbe, nakar spet začne naraščati, vendar ne doseže istega nivoja. Slika 3 prikazuje volatilnostni nasmešek za ameriški S&P 500 in evropski Euro Stoxx 50 za opcije z zapadlostjo v tretjem petku junija 2018, kot je izgledal dne 22.12.2017.



Slika 3: Tipičen asimetričen volatilnostni nasmešek opcij na delniške indekse.

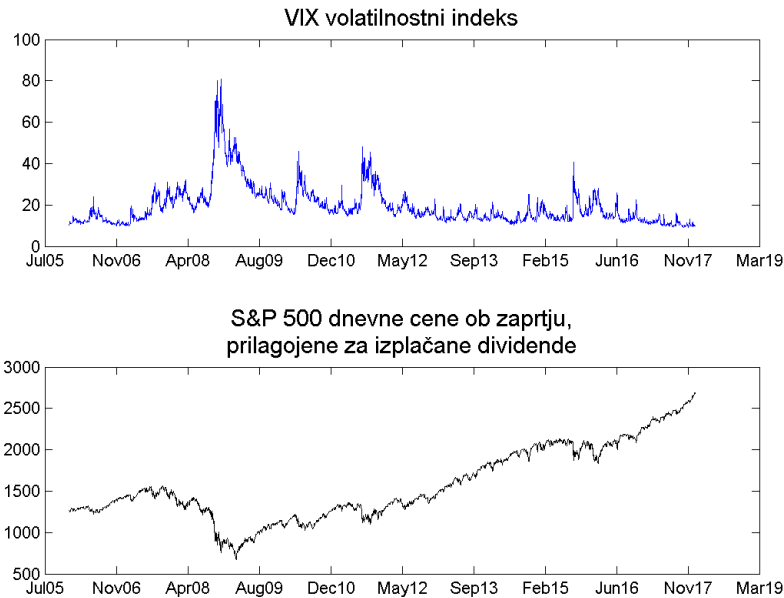
Korelacija med donosi temelja in volatilnostjo narekuje asimetrijo nasmeška in negativna korelacija načeloma pomeni asimetričen volatilnostni nasmešek z visoko implicirano volatilnostjo za prodajne opcije. Donosi delniških indeksov so ponavadi negativno korelirani z volatilnostjo. Slika 4 prikazuje zvezo z volatilnostjo za delniški indeks S&P 500.

Delnice

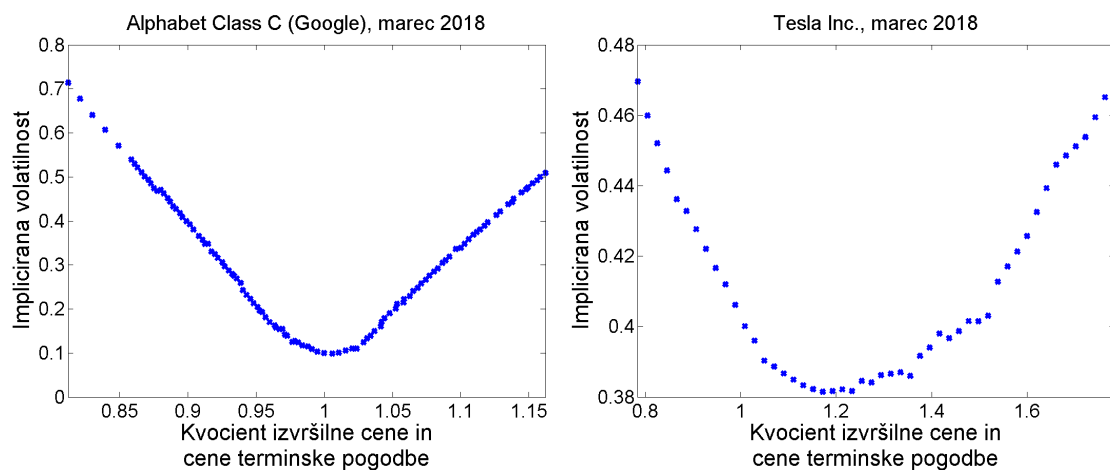
Za razliko od delniških indeksov, cena delnice lahko hitro pade, prav tako pa tudi hitro zraste. Če naprimer podjetje objavi četrtletni dobiček na delnico, ki je višji od soglasnega pričakovanega dobička (angl. consensus earnings), se cena delnice dokaj hitro popravi navzgor. Cena delnice lahko poskoči tudi ob drugačnih dogodkih, naprimer farmacevtska družba lahko pridobi dovoljenje za izdelavo in prodajo novega zdravila, jeklarsko podjetje podpiše donosno pogodbo ali pa tehnološko podjetje objavi prodor na nekem področju. Posledično je volatilnostni nasmešek za opcije na delnice bolj simetričen, kar je razvidno iz slike 5.

Ker je delniški indeks konec koncev kombinacija delnic, kako je možno, da je volatilnostni nasmešek za opcije na delnice simetričen, za opcije na delniške indekse pa asimetričen? To je posledica dejstva, da so večji ekonomski šoki na kapitalnih trgih bolj verjetno negativni kot pozitivni. Če analiziramo zgolj obdobja negativnih donosov na delniških trgih, so donosi med seboj bolj korelirani, kot če gledamo le obdobja pozitivnih donosov. Posledično

⁴VIX je izračunan iz cen opcij na S&P 500 z zapadlostjo okoli enega meseca in je dober prediktor realizirane volatilnosti delniškega indeksa S&P 500.



Slika 4: Ostre padce v ceni delniških indeksov spremljajo skoki v vrednosti volatilnosti in obdobja stalne rasti spremljajo nizke vrednosti volatilnosti. Tu je za približek volatilnosti S&P 500 uporabljen volatilnostni indeks VIX.⁴

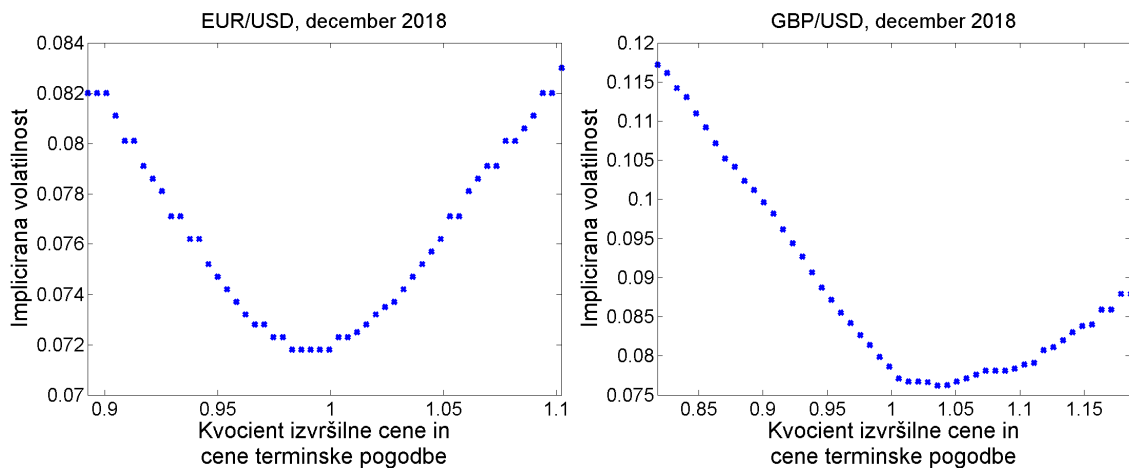


Slika 5: Opcije na Google so najbolj likvidne opcije v delniškem razredu in posledično je vselej na voljo prodajna in nakupna kotacija za vrsto različnih izvršilnih cen. Slika na desni prikazuje, kako so se prodajne opcije na Teslino delnico podražile (implicirana volatilnost levo od kvocienta 1 je zelo visoka), saj je bil obet za Tesline delnice v decembru 2017 precej negativen.

je porazdelitev donosov delniških indeksov bolj asimetrična kot porazdelitev donosov posamezne komponente, kar pa se manifestira v asimetričnem volatilitnem nasmešku.

Devizni tečaji

Volatilnostni nasmešek opcij na devizne tečaje je lahko simetričen ali pa asimetričen. Če imamo devizni tečaj na valuti dveh držav, katerih gospodarstvi sta enako stabilni in se ne pričakuje zvišanja ali pa znižanja vrednosti nobene od valut, potem bo volatilnostni nasmešek imel približno simetrično obliko. V ostalih primerih je nasmešek ponavadi asimetričen.

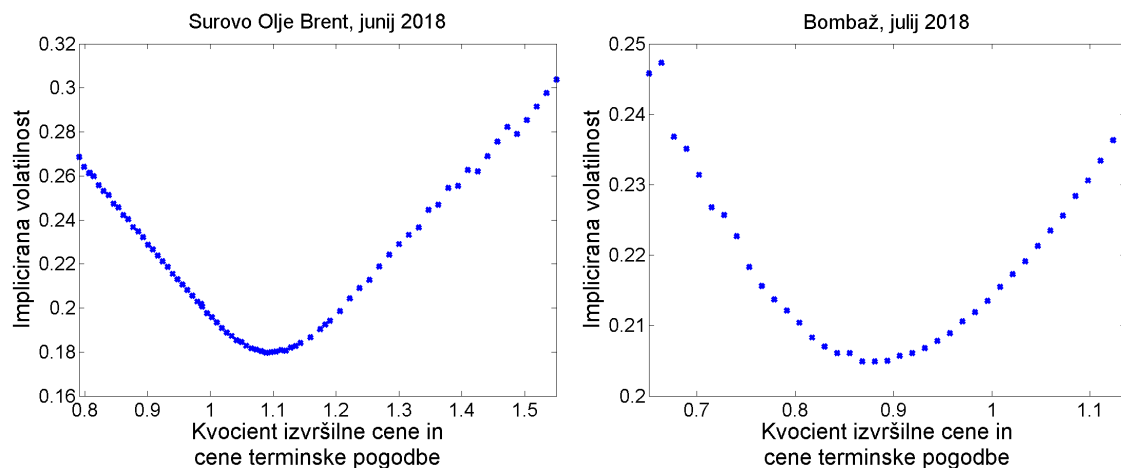


Slika 6: EUR/USD volatilnostni nasmešek ima simetrično obliko, saj sta ameriško in evropsko gospodarstvo smatrana kot enako stabilna, poleg tega pa vrednost obeh valut podpirata tudi centralni banki z visoko količino deviznih rezerv. Na desni strani imamo nasmešek za tečaj GBP/USD, ki v luči Brexita izraža asimetričnost.

Dobrine

Cene na trgih dobrin so bolj ali manj določene s povpraševanjem in ponudbo. Čeprav je za večino trgov povpraševanje relativno stabilno, je variabilna ponudba. Prekinitev dela dobave naftnih energentov naprimer, lahko povzroči sunkovit porast v ceni, odkritje novih zalog pa ceno lahko zbijje. Ostali trgi dobrin se obnašajo na podoben način in zato je volatilnostni nasmešek ponavadi simetričen.

To poglavje zaključujem z navedbo modelsko neodvisnega izreka, ki nam pove, kako iz množice cen evropskih nakupnih opcij lahko ocenimo gostoto porazdelitve cene temelja.



Izrek 1.1 (Breedon-Litzenberger). *Do tveganja nevtralnno funkcijo porazdelitvene gostote*

$$p_Q : (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \rightarrow [0, 1]$$

ki diktira gibanje cene temelja S lahko izrazimo iz množice nediskontiranih cen evropskih nakupnih opcij $C(S_0, T, K)$ z različnimi izvršilnimi cenami K in zapadlostmi T s pomočjo identitete

$$p_Q(x, T) = \left. \frac{\partial^2 C(S_0, T, K)}{\partial K^2} \right|_{K=x} \quad (2)$$

kjer je S_0 cena temelja ob času 0.

Dokaz. Nediskontirana cena evropske nakupne opcije $C(S_0, T, K)$ z izvršilno ceno K in zapadlostjo T je dana z

$$C(S_0, T, K) = \mathbb{E}_Q[(S_T - K)^+]$$

kjer je \mathbb{E}_Q pričakovana vrednost pod do tveganja nevtralnno mero.⁵ Pričakovano vrednost lahko zapišemo z integralom

$$C(S_0, T, K) = \int_K^\infty p_Q(x, T)(x - K)dx$$

Če odvajamo dvakrat po K , pa dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(S_0, T, K)}{\partial K} &= - \int_K^\infty p_Q(x, T)dx \\ \frac{\partial^2 C(S_0, T, K)}{\partial K^2} &= p_Q(K, T) \end{aligned}$$

□

⁵Od sedaj naprej bom izpuščal Q v indeksu in operator $\mathbb{E}[\cdot]$ bo vselej pomenil pričakovano vrednost pod do tveganja nevtralnno mero.

2 Teorija Modela lokalne volatilnosti

Model lokalne volatilnosti je dan z stohastično diferencialno enačbo

$$dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma_{loc}(S_t, t)S_t dW_t \quad (3)$$

ki opisuje gibanje vrednosti temelja, kjer je $\sigma_{loc}(S, t)$ nenegativna deterministična funkcija cene temelja S in časa t določena s tržnimi cenami klasičnih (angl. vanilla) opcij.

Tu je potrebna obrazložitev. Da je komponenta modela za vrednotenje opcij določena s cenami opcij se morda sliši malce zamotano. Razlikovati je potrebno med klasičnimi opcijami za katere obstaja trg, kjer je vselej citirana nakupna in prodajna kotacija, ter opcijami in finančnimi instrumenti za katere trg ne obstaja. Cene klasičnih opcij za različne izvršilne cene in zapadlosti, ki so citirane na trgu so dane s tržnimi cenami in tu ni potreben noben model⁶. Če nas zanima cena klasične opcije za neko izvršilno ceno, pa trg za opcijo s prav to izvršilno ceno ne obstaja, tedaj iz volatilnostnega nasmeška interpoliramo⁷ implicirano volatilnost za to izvršilno ceno, ter jo vstavimo v Black-Scholesovo formulo, da dobimo ceno. Cene eksotičnih opcij⁸ in ostalih izvedenih instrumentov, za katere trg ne obstaja pa je potrebno izračunati z modelom.

Vrednost klasičnih opcij je torej določena s procesom odkrivanja cene na trgu in ne z modelom, zato lahko rečemo, da je $\sigma_{loc}(S, t)$ določena s tržnimi cenami (klasičnih) opcij. Ideja Modela lokalne volatilnosti je preprosta. S tržnimi cenami klasičnih opcij konstruiramo $\sigma_{loc}(S, t)$ tako, da bo vrednotenje klasičnih opcij vrnilo tržne cene. Tedaj predpostavljamo, da bo dobljeni model pravilno vrednotil tudi eksotične opcije in ostale izvedene finančne instrumente.

Ker tu govorimo o verjetnostnem prostoru opremljenim z do tveganja nevtralno mero, lahko pišemo $\mu(z) = r(t) - q(t)$, kjer je $r(t)$ obrestna mera in $q(t)$ dividendni donos.⁹

Model lokalne volatilnosti klasificiramo nekje vmes med modele s konstantno volatilnostjo, kot naprimer Black-Scholesov model, in modele s stohastično volatilnostjo, kot naprimer Hestonov model. Čeprav empirične raziskave nakazujejo, da volatilnost poseduje vse značilnosti slučajne kvantitete namesto deterministične funkcije časa in cene, Model lokalne volatilnosti zaradi enostavnosti kalibracije na tržne cene ostaja priljubljeno orodje med finančnimi strokovnjaki.

V tem poglavju so predstavljena nekatera splošna dejstva iz teorije Modela lokalne volatilnosti.

2.1 Funkcija lokalne volatilnosti

Izrek 2.1 (Dupirejeva enačba). *V Modelu lokalne volatilnosti nediskontirana cena evropske nakupne opcije za dano funkcijo lokalne volatilnost $\sigma_{loc} : (S_t, t) \rightarrow \sigma_{loc}(S_t, t)$ zadošča parcialni*

⁶Je pa delto in ostale grke (angl. greeks) še vedno potrebno izračunati z Black-Scholesovim modelom.

⁷Kako to storiti na način, ki zagotovi odsotnost arbitraže bomo spoznali kasneje.

⁸Pojem eksotična opcija je v finančni terminologiji definiran zelo megleno. To naj bi bila opcija, katere izplačilo je na kompleksen način odvisno od cene temelja.

⁹Lahko seveda tudi strošek držanja ali obrestna mera tuje valute.

diferencialni enačbi

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\sigma_{loc}^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r(T) - q(T)) \left(C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right) \quad (4)$$

Dokaz. Nediskontirana cena evropske nakupne opcije $C(K, T)$ z izvršilno ceno K in zapadlostjo T je dana s pričakovano vrednostjo izplačila, kar lahko z integralom zapišemo v obliki

$$C(K, T) = \int_K^\infty p_Q(S_T, T) (S_T - K) dS_T \quad (5)$$

Ker je S_t difuzijski proces, do tveganja nevtralna gostota p_Q zadošča Kolmogorovi oziroma Fokker-Planckovi parcialni diferencialni enačbi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} (\sigma_{loc}^2 S_T^2 p_Q) - S \frac{\partial}{\partial S_T} (\mu S_T p_Q) = \frac{\partial p_Q}{\partial T}$$

Dvakratno odvajanje (5) po K nas pripelje do podobnega rezultata kot v (2)

$$\frac{\partial C}{\partial K} = - \int_K^\infty p_Q(S_T, T) dS_T \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = p_Q(K, T) \quad (7)$$

Odvajanje (5) po T pa da

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= \int_K^\infty \left\{ \frac{\partial}{\partial T} p_Q(S_T, T) \right\} (S_T - K) dS_T \\ &= \int_K^\infty \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} (\sigma_{loc}^2 S_T^2 p_Q) - \frac{\partial}{\partial S_T} (\mu S_T p_Q) \right\} (S_T - K) dS_T \\ &= (\dagger) \end{aligned}$$

kjer sedaj intergriramo po delih z

$$\begin{aligned} u &= S_T - K \\ du &= dS_T \end{aligned}$$

in

$$dv = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} (\sigma_{loc}^2 S_T^2 p_Q) - \frac{\partial}{\partial S_T} (\mu S_T p_Q) dS_T$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S_T} (\sigma_{loc}^2 S_T^2 p_Q) - \mu S_T p_Q$$

kar da

$$(\dagger) = \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S_T} (\sigma_{loc}^2 S_T^2 p_Q) - \mu S_T p_Q \right) (S_T - K) \right] \Big|_K^\infty}_{A} - \int_K^\infty \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S_T} (\sigma_{loc}^2 S_T p_Q) - \mu S_T p_Q dS_T = (\ddagger)$$

V tej točki predpostavimo, da ima slučajna spremenljivka $S_T \sim p_Q$ končen tretji moment. Ker je $S_T^k p_Q$ nenegativna, sledi iz

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_T^k p_Q dS_T < \infty$$

da mora repno matematično upanje konvergirat proti 0

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_K^\infty S_T^k p_Q dS_T = 0$$

za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ in torej

$$\lim_{S_T \rightarrow \infty} S_T^k p_Q = 0$$

Čeprav dejstvo, da velja

$$\lim_{S_T \rightarrow \infty} \sigma_{loc}(S_T, T)^2 S_T p_Q(S_T, T) = 0$$

ni povsem trivialno, ga uporabimo brez dodatne utemeljitve.¹⁰

¹⁰Sicer sem bil nekoliko skop pri utemeljitvi obstoja in enoličnosti rešitve stohastične diferencialne enačbe (3), a privzemimo, da ta obstaja na nekem območju $D \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. S tem je zadoščeno pogoju za rast in veljati mora $\sigma_{loc}(S_T, T) < c(1 + S_T)$ za vsako točko $(S_T, T) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ in za nek $c \in \mathbb{R}$. Zakaj rešitev obstaja na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ pa se da pokazati z Roger Leejevo momentna formula za implicirano varianco, opisana v [4], ki nam pove, da je rast implicirane variance za dovolj velike izvršilne cene K ob odsotnosti arbitraže sublinearna v K . Iz tega bomo lahko kasneje sklepali, da podobno velja tudi za lokalno volatilitnost.

$$\begin{aligned}
(\ddagger) &= A - \left[-\frac{1}{2}\sigma_{loc}^2 K p_Q - \mu \int_K^\infty S_T p_Q dS_T \right] \\
&= A + \frac{1}{2}\sigma_{loc}^2 K p_Q + \mu \left[\int_K^\infty S_T p_Q dS_T + K \frac{\partial C}{\partial K} - K \frac{\partial C}{\partial K} \right] \\
&= A + \frac{1}{2}\sigma_{loc}^2 K p_Q + \mu \left[C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right] \\
&= A + \frac{1}{2}\sigma_{loc}^2 K \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + \mu \left[C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right]
\end{aligned}$$

Sedaj je potrebno dokazati, da je A enak 0. Trivialno je, da je spodnja meja enaka nič, za zgornjo mejo pa je potrebno dokazati

$$\tilde{A} = \lim_{S_T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S_T} (\sigma_{loc}^2 S_T^2 p_Q) - \mu S_T p_Q \right) (S_T - K) = 0$$

Po L'Hospitalovem pravilu velja

$$\lim_{S_T \rightarrow \infty} S_T^k p_Q = \lim_{S_T \rightarrow \infty} \frac{p_Q}{\frac{1}{S_T^k}} = \lim_{S_T \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial p_Q}{\partial S_T}}{-k \frac{1}{S_T^{k+1}}} = \lim_{S_T \rightarrow \infty} \frac{1}{-k} S_T^{k+1} \frac{\partial p_Q}{\partial S_T} = 0$$

Sedaj lahko vidimo, da ima A' le faktorje oblike $c(S_T) S_T^k p_Q$ za $k \in \{2, 3\}$ in $c(S_T) S_T^3 \frac{\partial p_Q}{\partial S_T}$ za nek omejen c in lahko zaključimo $\tilde{A} = 0$. □

Če pa bi izrazili ceno opcije kot funkcijo cene terminske pogodbe

$$F_T = S_0 \exp \left\{ \int_0^T r(t) - q(t) dt \right\}$$

bi dobili isti izraz minus člen z $r(T) - q(T)$, torej

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\sigma_{loc}^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

iz česar pa lahko izrazimo σ_{loc}

$$\sigma_{loc}(K, T)^2 = \frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \quad (8)$$

Desno stran enakosti lahko izračunamo iz danih tržnih cen evropskih nakupnih opcij, pod pogojem, da imamo dano dovolj gosto množico cen za različne izvršilne cene in zapadlosti. S tem je funkcija lokalne volatilitnosti enolično določena.

2.2 Zamenjava spremenljivk v Dupirejevi enačbi

Tržne cene opcij so citirane z Black-Scholsovimi impliciranimi volatilitetami, kar lahko zapišemo kot

$$C(K, T) = C_{BS}(K, \sigma_{BS}(K, T), T)$$

Bolj ugodno je, če spremenljivki K in σ_{BS}^2 zamenjamo z denarnostjo (angl. moneyness) definirano kot

$$y = \ln\left(\frac{K}{F_T}\right)$$

kjer je F_T cena terminske pogodbe ob času 0, in Black-Scholsovo totalno varianco definirano kot

$$w(K, T) = \sigma_{BS}^2(K, T)T$$

Z zamenjavo spremenljivk Black-Scholsova formula za nediskotirano ceno nakupne opcije postane

$$C_{BS}(y, w) = F_T \left\{ N(d_1) - e^y N(d_2) \right\} \quad (9)$$

$$F_T \left\{ N\left(-\frac{y}{\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{2}\right) - e^y N\left(-\frac{y}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}\right) \right\} \quad (10)$$

Dupirejeva enačba (4) pa

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{v_{loc}}{2} \left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right\} + \mu(T)C \quad (11)$$

kjer je $v_{loc} = \sigma_{loc}^2(K, T)$ lokalna varianca.

Od tu naprej bom ceno evropske nakupne opcije pisal enkrat kot funkcijo denarnosti y in totalne variance w , drugič pa kot funkcijo izvršilne cene K in zapadlosti T in s tem izpostavil količine, ki so bolj prikladne v določenem kontekstu.

Izrek 2.2. Lokalno varianco v_{loc} lahko izrazimo kot

$$v_{loc} = \frac{\frac{\partial w}{\partial T}}{1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \quad (12)$$

Dokaz. Z odvajanjem (9) dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial w^2} &= \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2}\right) \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y \partial w} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w}\right) \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2} - \frac{\partial C_{BS}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial C_{BS}}{\partial w}\end{aligned}$$

Enačbo (11) lahko transformiramo v enačbo odvisno od totalne variance, to pa dosežemo z substitucijami

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{\partial C_{BS}}{\partial y} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y \partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial C_{BS}}{\partial T} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} = \mu(T) C_{BS} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T}\end{aligned}$$

kjer zadnja enakost sledi iz dejstva, da je edina eksplicitna odvisnost cene opcije od T v enačbi (9) skozi ceno termnske pogodbe in njen odvod $\frac{\partial F_T}{\partial T} = F_T \mu(T)$. Enačba (4) tedaj postane

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} &= \frac{v_{loc}}{2} \left\{ -\frac{\partial C_{BS}}{\partial y} + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2} - \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y \partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ &= \frac{v_{loc}}{2} \frac{\partial C_{BS}}{\partial w} \left\{ 2 - \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w}\right) \frac{\partial w}{\partial y} + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}\end{aligned}$$

Z okrajšavo faktorja $\frac{\partial C_{BS}}{\partial w}$ in poenostavljanjem pa dobimo

$$\frac{\partial w}{\partial T} = v_{loc} \left\{ 1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}$$

□

Opomba 2.1. Ob odsotnosti volatilnostnega nasmeška

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial \sigma_{BS}}{\partial K} = 0$$

velja

$$v_{loc} = \frac{\partial w}{\partial T} \tag{13}$$

in lokalna varianca je reducirana v Black-Scholsovo trenutno varianco. Rešitev diferencialne enačbe (13) pa je

$$w(T) = \int_0^T v_{loc}(t) dt$$

Model lokalne volatilnosti je torej ob odsotnosti volatilnostnega nasmeška reduciran v Black-Scholsov model.

Opomba 2.2. Model lokalne volatilnosti je poenostavitev modela stohastične volatilnosti. Bolj podrobno, če imamo dano dinamiko cene temelja ter volatilnosti z stohastičnimi diferencialnimi enačbami

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu(t)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^1 \\ dv_t &= \alpha(S_t, v_t, t)dt + \nu\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t}dW_t^2 \end{aligned}$$

kjer sta W^1 and W^2 standardizirana Wienerjeva procesa z kvadratično variacijo

$$d \langle W_t^1, W_t^2 \rangle = \phi dt$$

tedaj je lokalna varianca do tveganja nevtralna pogojna pričakovana vrednost trenutne variance v_t , pri pogoju, da je cena temelja S_T ob času T enaka K , to je

$$\sigma_{loc}^2(K, T) = \mathbb{E}[v_T | S_T = K]$$

Dokaz. Če apliciramo Itôvo formulo na ceno terminske pogodbe $F_{t,T}$, dobimo

$$\begin{aligned} dF_{t,T} &= d\left(S_t \exp\left\{\int_t^T \mu(s) ds\right\}\right) \\ &= \exp\left\{\int_t^T \mu(s) ds\right\} dS_t - S_t \exp\left\{\int_t^T \mu(s) ds\right\} \mu(t) dt \\ &= \exp\left\{\int_t^T \mu(s) ds\right\} S_t \mu(t) dt + \sqrt{v_t} S_t \exp\left\{\int_t^T \mu(s) ds\right\} dW_t^1 \\ &\quad - S_t \exp\left\{\int_t^T \mu(s) ds\right\} \mu(t) dt \\ &= \sqrt{v_t} F_{t,T} dW_t^1 \end{aligned}$$

pri čemer velja $dF_{t,T} = dS_T$. Nediskontirana cena evropske nakupne opcije z izvršilno ceno K in zapadlostjo T je dana z

$$C(K, T) = \mathbb{E}[(S_T - K)^+]$$

Če odvajamo enkrat po K dobimo

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -\mathbb{E}[\Theta(S_T - K)]$$

kjer je $\Theta(\cdot)$ Heavisidova funkcija. Če odvajamo še enkrat po K pa dobimo

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \mathbb{E}[\delta(S_T - K)]$$

kjer je $\delta(\cdot)$ Dirakova delta funkcija.

Aplikacija Itôve formule na izplačilo opcije nam da

$$d(S_T - K)^+ = \Theta(S_T - K)dS_T + \frac{1}{2}v_T S_T^2 \delta(S_T - K)dT$$

Velja $dF_{T,T} = dS_T$, pri čemer smo prej pokazali, da je $F_{t,T}$ martingal (za dovolj lep proces v_t). Če vzamemo upanje na obe straneh enačbe in uporabimo dejstvo, da da kvadratično integrabilen integrand $\Theta(S_T - K)$ integriran proti martingalu martingal, dobimo

$$dC = d\mathbb{E}[(S_T - K)^+] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[v_T S_T^2 \delta(S_T - K)]dT$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v_T S_T^2 \delta(S_T - K)] &= \mathbb{E}[v_T | S_T = K] K^2 \underbrace{\mathbb{E}[\delta(S_T - K)]}_{p_Q} \\ &= \mathbb{E}[v_T | S_T = K] K^2 \underbrace{\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}_{\text{po (2)}} \end{aligned}$$

Če sestavimo vse skupaj, smo dobili

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \mathbb{E}[v_T | S_T = K] \frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

in če to enačbo primerjamo z definicijo lokalne volatilitnosti v enačbi (8), opazimo, da velja

$$\sigma_{loc}^2(K, T) = \mathbb{E}[v_T | S_T = K]$$

□

3 Volatilnostni nasmešek kot krivulja

Formula (12) nam da eksplicitno zvezo med lokalno varianco in Black-Scholesovo implicirano totalno varianco skozi odvode le te. Po drugi strani pa so cene opcij in zato vrednosti impliciranih volatilitnosti citirane za diskretne kombinacije izvršilnih cen in zapadlosti. Domislili bi se lahko več načinov, kako iz citiranih volatilitnosti za različne denarnosti dobiti zvezno ploskev impliciranih volatilitnosti ali pa morda zvezno ploskev totalne variance. Izkaže se, da je najboljši način kako to lahko storimo, da najprej vse implicirane volatilitnosti pretvorimo v totalno varianco. Nato za vsako zapadlost poiščemo najboljše prileganje za neko vnaprej določeno krivuljo, ki se primerno obnaša, nazadnje pa iz teh krivulj tvorimo ploskev. Tako dobljeno ploskev poimenujemo ploskev totalne variance. Če pa vrednosti na ploskvi pretvorimo nazaj v volatilitnosti, lahko govorimo o volatilitnostni ploskvi. Kot že prej omenjeno, je enostavno eno pretvoriti v drugo, zato bomo tudi ta dva pojma uporabljali izmenično.

Obstaja nemalo različnih parameterizacij za volatilitnostni nasmešek, ampak le boljše posedujejo lastnost lahke razlage parametrov poleg vseh ostalih potrebnih lastnosti. Zaželjeno je, da obstaja enostavna zveza med parametri krivulje in

- volatilitnostjo oziroma varianco na meji,
- asimetričnostjo nasmeška,
- ukrivljenostjo oziroma konveksnostjo nasmeška.

Te lastnosti so potrebne, če želimo kompleksne matematične formule kombinirati z ekonomskim razumevanjem trga. Po drugi strani pa parametrizacija ne sme dopuščati arbitraže, kar je pogoj, ki si ga bomo sedaj ogledali bolj podrobno.

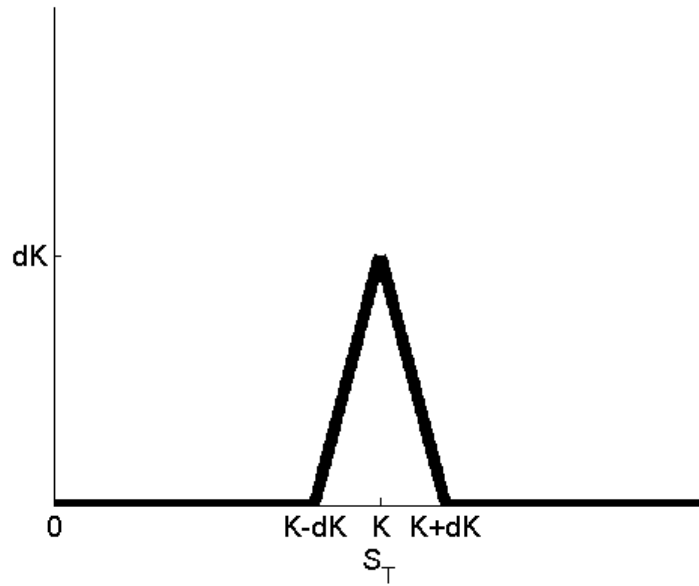
3.1 Odsotnost metuljeve arbitraže

Vzemimo opcijsko strategijo metuljevega razmaka (angl. butterfly spread) z infitezimalnim razmakom, ki sestoji iz dolge pozicije v nakupni opciji z izvršilno ceno $K - dK$, kratke pozicije dveh nakupnih opcij z izvršilno ceno K in dolge pozicije v nakupni opciji z izvršilno ceno $K + dK$.

Ker je izplačilo te strategije vselej nenegativno, sledi po argumentu nearbitraže, da mora biti tudi cena te opcijske strategije za vsak $t \in [0, T]$ nenegativna. Če velikost prej omenjenih pozicij pomnožimo z $\frac{1}{dK^2}$ dobimo neenačbo

$$\frac{C(K + dK) - 2C(K) + C(K - dK)}{dK^2} \geq 0$$

iz česar pa sledi



Slika 7: Izplačilo metuljevega razmaka

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \geq 0$$

ko dK pošljemo proti 0.

To se sedaj navezuje na Breeden-Litzenbergerjevo formulo (2) in nam pove, da je ob odsotnosti metuljeve arbitraže na kontinuumu cen nakupnih opcij zajamčena nenegativnost do tveganja nevtralne gostote. Pogoj odsotnosti metuljeve arbitraže smo tu navedli na modelsko neodvisen način, sedaj pa si oglejmo še, kako se slednje manifestira v okviru Black-Scholesovih formul.

Izrek 3.1. Volatilnostni nasmešek za neko dano zapadlost T je brez metuljeve arbitraže natanko tedaj, ko velja $g(y) \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}$ in

$$\lim_{y \rightarrow \infty} d_1(y) = -\infty$$

pri čemer je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana z

$$g(y) := \left(1 - \frac{yw'(y, \cdot)}{2w(y, \cdot)}\right)^2 - \frac{w'(y, \cdot)^2}{4} \left(\frac{1}{w(y, \cdot)} + \frac{1}{4}\right) + \frac{w''(y, \cdot)}{2} \quad (14)$$

in d_1 dan z

$$d_1 = -\frac{y}{\sqrt{w(y, \cdot)}} + \frac{\sqrt{w(y, \cdot)}}{2}$$

Dokaz. Direkten izračun izraza

$$p_Q(y, \cdot) = e^{rT} \frac{\partial^2 C(y, w(y, \cdot))}{\partial K^2} \Big|_{K=F_t e^y}$$

kjer je $C(y, w(y, \cdot))$ Black-Scholesova nediskontirana cena nakupne opcije

$$C(y, w(y, \cdot)) = F_T \{N(d_1) - e^y N(d_2)\}$$

da

$$p_Q(y, \cdot) = \frac{g(y)}{\sqrt{2\pi w(y, \cdot)}} \exp\left\{-\frac{d_1(y)^2}{2}\right\}$$

Do sedaj smo implicitno predpostavljali, da je funkcija p_Q dobro definirana gostota, katere integral je enak ena. To načeloma ne drži vedno in zato je potrebno vzpostaviti pogoje asimptotičnosti. Za cene nakupnih opcij je potrebno, da konvergirajo proti 0, ko pošljemo y proti neskončno, kar se izkaže, da je ekvivalentno pogoju

$$\lim_{y \rightarrow \infty} d_1(y) = -\infty$$

□

3.2 Odsotnost koledarske arbitraže

Drugi potreben pogoj pa je odsotnost koledarske arbitraže. Cena evropske nakupne opcije z izvršilno ceno K in časom do zapadlosti T_2 mora biti vselej večja od cene evropske nakupne opcije z isto izvršilno ceno in časom do zapadlosti T_1 , kjer je T_2 večji od T_1 .

$$C(K, T_2) > C(K, T_1) \text{ za } T_2 > T_1$$

Najprej si oglejmo zakaj mora to držati. Predpostavimo, da drži obratno, to je $C(K, T_2) \leq C(K, T_1)$. Strategija za arbitražo je naslednja

- Ob času 0, kratko prodamo $C(K, T_1)$, kupimo $C(K, T_2)$ in zaslužimo razliko v premiji.
- Ob času T_1 imamo sedaj dve možnosti. Če velja $S_{T_1} \leq K$, potem je opcija, ki smo jo prodali zapadla brez izplačila in smo profitirali razliko v premijah plus karkoli nam ob zapadlosti T_2 prinese dolga pozicija v nakupni opciji. Če je $S_{T_1} > K$, potem moramo lastniku prodane opcije izplačati $S_{T_1} - K$, za kar si izposodimo temelj, ga damo lastniku opcije, ta pa nam vrne K . Ob času T_2 moramo vrniti izposojen temelj, ki ima sedaj vrednost S_{T_2} in hkrati držimo K ter dolgo pozicijo v evropski nakupni opciji z izplačilom $\max\{S_{T_2} - K, 0\}$. Naša pozicija je torej $-S_{T_2} + K + \max\{S_{T_2} - K, 0\}$, kar je vselej nenegativno.

Pravkar smo pokazali, da $C(K, T_2) \leq C(K, T_1)$ omogoča arbitražo, torej mora veljati $C(K, T_2) > C(K, T_1)$. Po podobnem postopku kot prej lahko sedaj pokažemo, da mora ob odsotnosti koledarske arbitraže veljati

$$\frac{\partial C}{\partial T} \geq 0$$

Izrek 3.2. Ploskev totalne variance je brez koledarske arbitraže natanko tedaj, ko velja

$$\frac{\partial w}{\partial T} \geq 0$$

za vsak $y \in \mathbb{R}$ in vsak $T > 0$.

Dokaz. Black-Scholesova cena nakupne opcije $C(y, w(y, T))$ je monotonno naraščujoča v drugem argumentu. Sledi, da mora biti za fiksni y funkcija $w(y, T)$ nepadajoča. □

4 Modeliranje nasmeška s SVI

4.1 SVI parametrizacija ploskve

V tem razdelku so opisane tri ekvivalentne, a različne parameterizacije tako imenovane Stochastic Volatility Inspired (SVI) krivulje za volatilnostni nasmešek oziroma, če smo bolj natančni za krivuljo totalne variance. Izkaže se, da je koristno imeti možnost alternirati med parametrizacijami in v ta namen so izpeljane preslikave med parametri. Hkrati je opisana in razložena tudi tako imenovana Surface Stochastic Volatility Inspired (SSVI) parametrizacija za celotno ploskev totalne variance. Bolj podrobne izpeljave pa bralec lahko najde v [2].

Definicija 4.1. *Raw SVI parametrizacija totalne variance za množico parametrov $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$ je dana z*

$$w(y; \chi_R) = a + b \left\{ \rho(y - m) + \sqrt{(y - m)^2 + \sigma^2} \right\} \quad (15)$$

kjer je $a \in \mathbb{R}, b \geq 0, |\rho| < 1, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ in $a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \geq 0$.

Definicija 4.2. *Natural SVI parametrizacija totalne variance za množico parametrov $\chi_N = \{\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta\}$ je dana z*

$$w(y; \chi_N) = \Delta + \frac{\omega}{2} \left\{ 1 + \zeta \rho(y - \mu) + \sqrt{(\zeta(y - \mu) + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\} \quad (16)$$

kjer je $\omega \geq 0, \Delta \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, |\rho| < 1$ in $\zeta > 0$.

Lema 4.1. *Zvezi med parametri Raw SVI in Natural SVI sta dani z*

$$(a, b, \rho, m, \sigma) = \left(\Delta + \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), \frac{\omega\zeta}{2}, \rho, \mu - \frac{\rho}{\zeta}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\zeta} \right)$$

in

$$(\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta) = \left(a - \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), m + \frac{\sigma\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \rho, \frac{2b\sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\sigma} \right)$$

Parametre Raw SVI in Natural SVI je težko razložiti, zato je tu še tretja različica parameterizacije iste krivulje, definirana s parametri Raw SVI.

Definicija 4.3. *Jump-Wings SVI parametrizacija s parametri $\chi_J = \{v_t, \psi_t, p_t, c_t \tilde{v}_t\}$ je za dan nabor parametrov $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$ enolično definirana v spodnjih enačbah skupaj z razlagami*

parametrov

$$\begin{aligned}
v_t &= \frac{a + b\{-\rho m + \sqrt{m^2 + \sigma^2}\}}{t} \quad (\text{varianca na meji}) \\
\psi_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} \frac{b}{2} \left(-\frac{m}{\sqrt{m^2 + \sigma^2}} + \rho \right) \quad (\text{asimetrija na meji}) \\
p_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} b(1 - \rho) \quad (\text{nagib levega krila}) \\
c_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} b(1 + \rho) \quad (\text{nagib desnega krila}) \\
\tilde{v}_t &= \frac{1}{t} \left(a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \right) \quad (\text{minimalna varianca})
\end{aligned}$$

kjer je $w_t := v_t t$.

Lema 4.2. Naj bo $m \neq 0$ ($m \in \chi_{\mathbb{R}}$). Za poljuben $t > 0$ definiramo od t odvisni količini

$$\beta := \rho - \frac{2\psi\sqrt{w_t}}{b}$$

in

$$\alpha := \text{sign}(\beta) \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}$$

kjer smo predpostavili $\beta \in [-1, 1]$.¹¹ Tedaj lahko parametre Raw SVI iz parametrov SVI-JW izračunamo z enačbami

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\sqrt{w_t}}{2} (c_t + p_t) \\
\rho &= 1 - \frac{p_t \sqrt{w_t}}{b} \\
a &= \tilde{v}_t t - b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \\
m &= \frac{(v_t - \tilde{v}_t)t}{b\{-\rho + \text{sign}(\alpha)\sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha\sqrt{1 - \rho^2}\}} \\
\sigma &= \alpha m
\end{aligned}$$

Če je $m = 0$, zgornje enačbe še vedno držijo za b , ρ in a , medtem ko je σ dana z $\sigma = \frac{v_t t - a}{b}$.

Dokaz. Enačbe za b , ρ in a sledijo iz Definicije 4.3. Naj bo $m \neq 0$ in naj bo $\beta = \rho - 2\psi_t \frac{\sqrt{w_t}}{b}$ ter $\alpha = \frac{\sigma}{m} \in \mathbb{R}$. Tedaj iz enačb v Definiciji 4.3 sledi

$$\beta = \frac{\text{sign}(\alpha)}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

¹¹ $\beta \in [-1, 1]$ zagotavlja konveksnost nasmeška

iz česar lahko izrazimo α

$$\alpha = \text{sign}(\beta) \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}$$

Uporaba Definicije 4.3 nam da

$$\frac{(v_t - \tilde{v}_t)t}{b} = m\{-\rho + \text{sign}(\alpha)\sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha\sqrt{1 - \rho^2}\}$$

iz česar lahko izrazimo m v odvisnosti α , ter σ iz enakosti $\sigma = \alpha m$. Če je $m = 0$, σ lahko izračunamo iz Definicije 4.3. □

Sedaj definiramo še SSVI ploskev totalne variance.

Naj bo θ_t totalna varianca na meji, to je $\theta_t := \sigma_{BS}^2(0, t)t$ za poljuben $t \geq 0$. Velja $\theta_0 := \lim_{t \rightarrow 0} \theta_t = 0$.

Definicija 4.4. Naj bo $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ gladka funkcija, za katero obstaja limita $\lim_{t \rightarrow 0} \theta_t \varphi(\theta_t)$. Ploskvi dani s predpisom

$$w(y, \theta_t) = \frac{\theta_t}{2} \left\{ 1 + \rho \varphi(\theta_t) y + \sqrt{(\varphi(\theta_t) y + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\} \quad (17)$$

pravimo ploskev SSVI.

Tukaj smo predpostavili, da je θ_t zvezna funkcija, a v praksi imamo dane le točke za različne zapadlosti $\{\theta_{t_0}, \theta_{t_1}, \dots, \theta_{t_n}\}$. Z interpolacijo teh točk lahko ustvarimo zvezno funkcijo.

Opomba 4.1. Totalne variance na meji lahko izračunamo direktno iz tržnih cen opcij in jih interpoliramo na primer z linearno interpolacijo, da dobimo zvezno funkcijo θ_t . S tem smo na enostaven način dosegli, da se tržna terminska struktura totalne variance na meji ujema z terminsko strukturo totalne variance na naši ploskvi.

Opomba 4.2. Če namesto parametrov Natural SVI vstavimo vrednosti

$$\chi_N = \{0, 0, \rho, \theta_t, \varphi(\theta_t)\}$$

dobimo ravno parameterizacijo SSVI ploskve definirane v izrazu (17).

Lema 4.3. Parametre Jump-Wings SVI lahko izrazimo iz parametrov SSVI ploskve z enačbami

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\theta_t}{t} \\ \psi_t &= \frac{1}{2} \rho \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t) \\ c_t &= \frac{1}{2} \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t) (1 + \rho) \\ p_t &= \frac{1}{2} \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t) (1 - \rho) \\ \tilde{v}_t &= \frac{\theta_t}{t} (1 - \rho^2) \end{aligned}$$

Dokaz. Sledi z uporabo Opombe 4.2, Leme 4.1 in Definicije 4.3. □

Nazadnje moramo specificirati še obliko funkcije $\varphi(\theta)$. V tem magistrskem delu je predstavljena parametrizacija za $\varphi(\theta)$ z enim samim parametrom, v [2] pa so navedene še nekatere bolj fleksibilne.

Definicija 4.5. Za $\eta > 0$ definiramo Enostavno parameterizacijo s predpisom

$$\varphi(\theta) := \frac{\eta}{\sqrt{\theta(1+\theta)}}$$

4.2 Odsotnost arbitraže na SSVI ploskvi

V tem razdelku si bomo ogledali kakšne omejitve odsotnost arbitraže implicira za parametre SSVI ploskve.

Izrek 4.1. SSVI ploskev je brez metuljeve arbitraže natanko tedaj, ko za vsak $\theta_t > 0$ velja

- $\theta_t \varphi(\theta_t)(1 + |\rho|) < 4$
- $\theta_t \varphi(\theta_T)^2(1 + |\rho|) \leq 4$

Dokaz. Z namenom poenostavitve oznak bomo opuščali eksplicitno odvisnost θ in φ od t . Zaradi simetričnosti se lahko brez škode za splošnost omejimo na $0 \leq \rho < 1$. Definirajmo $z := \varphi y$. Funkcija g definirana kot v (14) izražena z z ima sedaj obliko

$$g(z) = \frac{f(z)}{64(z^2 + 2z\rho + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

kjer je

$$f(z) := a(z) - b(z)\varphi^2\theta - \frac{c(z)}{16}\varphi^2\theta^2$$

V nadaljevanju bomo večkrat uporabili neenakost

$$z^2 + 2z\rho + 1 = (z + \rho)^2 + 1 - \rho^2 \geq 0$$

Izračun koeficienta $c(z)$ v $f(z)$ nam da

$$\begin{aligned} c(z) &= \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} \left\{ (1 + \rho^2)(z + \rho^2) + 2\rho(z + \rho)\sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} + (1 - \rho^2)\rho^2 \right\} \\ &\geq \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} \left\{ (1 + \rho^2)(z + \rho^2) + 2\rho(z + \rho)^2 + (1 - \rho^2)\rho^2 \right\} \\ &= \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} \left\{ (1 + \rho^2)(z + \rho^2) + (1 - \rho^2)\rho^2 \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

Torej če velja

$$0 \leq \theta\varphi \leq \frac{4}{1+\rho}$$

in

$$0 \leq \theta\varphi^2 \leq \frac{4}{1+\rho}$$

tedaj imamo

$$f(z) \geq \begin{cases} a(z) - \frac{4b(z)}{1+\rho} - \frac{c(z)}{(1+\rho)^2} =: f_1(z) & \text{če } b(z) \geq 0 \\ a(z) - \frac{c(z)}{(1+\rho)^2} =: f_2(z) & \text{če } b(z) < 0 \end{cases} \quad (18)$$

Preverimo lahko, da velja

$$\begin{aligned} \frac{2f_1(z)}{(1+\rho)^2} &= \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} \left\{ z^2\rho - z(1-\rho)\rho + 2(1+\rho)(1-\rho^2) + \rho \right\} \\ &\quad + \rho(z+\rho)^2 + 3\rho(1-\rho^2) + 2(1-\rho^2) - z\rho(z^2 + 2z\rho + 1) \end{aligned}$$

kar je vselej pozitivno za $z < 0$. Z namenom, da bi videli, da je funkcija $f_1(z)$ pozitivna tudi za $z > 0$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \frac{2f_1(z)}{(1+\rho)^2} &= \\ &= \left\{ \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} - (z+\rho) \right\} \left\{ \rho \left(z - \frac{1-\rho}{2} \right)^2 + 2(1+\rho)(1-\rho^2) + \rho \left(1 - \frac{(1-\rho)^2}{4} \right) \right\} \\ &\quad + (1+\rho) \{ z(2-\rho^2) + 2(1+\rho)(1-\rho^2) + \rho \} \end{aligned}$$

Vzemimo sedaj funkcijo $f_2(z)$. Preverimo lahko, da velja

$$f_2(z) = -\frac{2z^3\rho}{(1+\rho)^2} + (z^2 + 2z\rho + 1)^{\frac{3}{2}} + 2(z^2 + 2z\rho + 1) + \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1}$$

kar je pozitivno za $z < 0$. Da bi videli, da je funkcija $f_2(z)$ pozitivna tudi za $z > 0$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= z^3 \frac{1 + \rho^2}{(1 + \rho)^2} + 3z^2 \rho + 2(z^2 + 2z\rho + 1) \\
&\quad + (z^2 + 2z\rho + 1) \left\{ \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} - (z + \rho) \right\} \\
&\quad + \sqrt{z^2 + 2z\rho + 1} + 2z\rho^2 + z + \rho
\end{aligned}$$

Torej velja $f(z) \geq 0$ v vseh primerih. Če dokažemo še, da velja

$$\lim_{y \rightarrow \infty} d_1(y) = -\infty$$

tedaj Izrek 3.1 zagotavlja odsotnost metuljeve arbitraže.

Enostaven izračun pokaže, da to velja čim je zadoščeno pogoju

$$\theta \varphi(\theta)(1 + |\rho|) < 4$$

.

□

Lema 4.4. *Potreben pogoj za odsotnost arbitraže na SSVI ploskvi je*

$$\theta \varphi(\theta)(1 + |\rho|) \leq 4$$

za vsak $\theta > 0$. Če v zgornjem pogoju velja stroga neenakost, je ta pogoj tudi zadosten, sicer pa mora veljati še

$$\theta \varphi(\theta)^2(1 + |\rho|) \leq 4$$

Dokaz. Dokaz je na voljo v [2].

□

Opomba 4.3. *SSVI ploskev z izbiro Enostavne parameterizacije za funkcijo $\varphi(\theta)$ je brez metuljeve arbitraže natanko tedaj, ko velja*

$$\begin{cases} \eta(1 + |\rho|) < 4 & \text{če } \eta \in (0, 1) \\ \eta^2(1 + |\rho|) \leq 4 & \text{če } \eta \in (1, \infty) \end{cases}$$

Dokaz. Sledi iz dejstva, da se funkcija

$$h(z) = \frac{1}{\eta} \theta \varphi(\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1 + \theta}}$$

monotono naraščujoče približuje asimptoti 1, ko povečujemo θ . Lema 4.4 ob izpolnjenih predpostavkah jamči odsotnost metuljeve arbitraže za $\theta < \infty$.

□

Opomba 4.4. SSVI ploskev je brez metuljeve arbitraže natanko tedaj, ko za vsak $t > 0$ velja

- $\sqrt{v_t t} \max\{p_t, c_t\} < 2$
- $(p_t + c_t) \max\{p_t, c_t\} \leq 2$

Dokaz. Sledi iz Izreka 4.1, če oba pogoja izrazimo v obliki Jump-Wings SVI parametrov. □

Izrek 4.2. SSVI ploskev je brez koledarske arbitraže natanko tedaj, ko velja

1. $\frac{\partial \theta_t}{\partial t} \geq 0 \quad \forall t \geq 0$
2. $0 \leq \frac{\partial(\theta \varphi(\theta))}{\partial \theta} \leq \frac{1}{\rho^2} (1 + \sqrt{1 - \rho^2}) \varphi(\theta) \quad \forall \theta > 0$

Dokaz. Ker koledarsko arbitražo lahko tvorimo kvečjemu z opcijami, ki imajo enako denarnost y , lahko brez izgube za splošnost fiksiramo poljuben y . Po verižnem pravilu velja

$$\frac{\partial w(y, \theta_t)}{\partial t} = \frac{\partial w(y, \theta_t)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_t}{\partial t}$$

Če je izpolnjena prva predpostavka, je po Izreku 3.2 SSVI ploskev brez koledarske arbitraže natanko tedaj, ko velja

$$\frac{\partial w(y, \theta_t)}{\partial \theta} \geq 0$$

za vsak $\theta > 0$.

Vzemimo najprej primer $|\rho| < 1$. Za vsak $\theta > 0$ lahko izračunamo, da velja

$$2 \frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} = \Psi_0(x, \rho) + \gamma(\theta) \Psi_1(x, \rho)$$

kjer je

$$x = y \varphi(\theta)$$

$$\gamma(\theta) = \frac{\partial(\theta \varphi(\theta))}{\partial \theta} \frac{1}{\varphi(\theta)}$$

$$\Psi_0(x, \rho) = 1 + \frac{1 + \rho x}{\sqrt{x^2 + 2\rho x + 1}}$$

$$\Psi_1(x, \rho) = x \left\{ \frac{x + \rho}{\sqrt{x^2 + 2\rho x + 1}} + \rho \right\}$$

Opazimo, da je za $|\rho| < 1$ funkcija $\Psi_0(x, \rho)$ strogo pozitivna za vsak $x \in \mathbb{R}$. Definirajmo množico

$$\mathcal{D}_\rho = \begin{cases} (-\infty, 0) \cup (-2\rho, \infty) & \text{če } \rho < 0 \\ (-\infty, -2\rho) \cup (0, \infty) & \text{če } \rho > 0 \\ \mathbb{R} - \{0\} & \text{če } \rho = 0 \end{cases}$$

Tedaj je $\Psi_1(x, \rho) > 0$ za $x \in \mathcal{D}_\rho$ in $\Psi_1(x, \rho) < 0$, če je $x \in \mathbb{R} - (\mathcal{D}_\rho \cup \{0, -2\rho\})$. Sledi

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} \geq 0 \iff \begin{cases} \gamma(\theta) \geq -\frac{\Psi_0(x, \rho)}{\Psi_1(x, \rho)} & \text{za vsak } x \in \mathcal{D}_\rho \\ \gamma(\theta) \leq -\frac{\Psi_0(x, \rho)}{\Psi_1(x, \rho)} & \text{za vsak } x \in \mathbb{R} - (\mathcal{D}_\rho \cup \{0, -2\rho\}) \end{cases} \quad (19)$$

Če je $x \in \{0, -2\rho\}$, tedaj je $\Psi_1(x, \rho) = 0$ in velja $\partial_\theta w(y, \theta) \geq 0$. Neenakosti v (19) tako dajo potreben in zadosten pogoj za odsotnost koledarske arbitraže za poljuben $x \in \mathbb{R}$. Z namenom, da bi določili najožji meji za dopustne vrednosti funkcije $\gamma(\theta)$ pri teh pogojih lahko izračunamo

$$\sup_{x \in \mathcal{D}_\rho} -\frac{\Psi_0(x, \rho)}{\Psi_1(x, \rho)} = 0$$

in

$$\inf_{x \in \mathbb{R} - (\mathcal{D}_\rho \cup \{0, -2\rho\})} -\frac{\Psi_0(x, \rho)}{\Psi_1(x, \rho)} = \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2}$$

Supremum ni nikoli dosežen (funkcija monotno narašča proti 0, ko pošljemo $|x|$ proti neskončno), medtem ko je infimum dosežen v točki $x = -\rho \notin \mathcal{D}_\rho$, torej lahko zapišemo

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} \geq 0 \iff 0 \leq \gamma(\theta) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2}$$

Pripomniti je potrebno, da če je $\rho = 0$, iščemo infimum po prazni množici x -ov in zato zgornja meja ne obstaja.

Če je $\rho = 1$, tedaj za poljubna $(y, \theta) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ velja

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} = \left(1 + \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2}}\right)(1 + \gamma(\theta)x) = \begin{cases} 2(1 + \gamma(\theta)x) & \text{če } x \geq -1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Sklepamo

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$$

če $x \geq 0$, za $x > -1$ pa

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$$

natanko tedaj, ko je $\gamma(\theta) \in [0, 1]$. Podobno za $\rho = -1$ lahko zapišemo

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} = \left(1 + \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2}}\right)(1 - \gamma(\theta)x) = \begin{cases} 2(1 - \gamma(\theta)x) & \text{če } x \leq 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$$

če $x \leq 0$ in za $x \leq 1$,

$$\frac{\partial w(y, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$$

natanko tedaj, ko $\gamma(\theta) \in [0, 1]$. □

Lema 4.5. Z izbiro Enostavne parameterizacije za funkcijo $\varphi(\theta)$ v Definiciji 4.4 je za odsotnost koledarske arbitraže

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial t} \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

potreben in zadosten pogoj.

Dokaz. Definirajmo

$$f(\theta) := \theta \varphi(\theta) = \frac{\eta \theta^{\frac{1}{2}}}{(1 + \theta)^{\frac{1}{2}}} \geq 0$$

Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \eta \left(\frac{1}{2} \theta^{-\frac{1}{2}} (1 + \theta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \theta^{\frac{1}{2}} (1 + \theta)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{\eta}{2} (1 + \theta)^{-\frac{1}{2}} \left(\theta^{-\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{1}{2}} (1 + \theta)^{-1} \right) \end{aligned}$$

Dovolj je dokazati $\frac{f'(\theta)}{\varphi(\theta)} < 1 \leq \frac{1}{\rho^2} (1 + \sqrt{1 - \rho^2})$, saj velja $|\rho| \leq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{f'(\theta)}{\varphi(\theta)} &= \frac{\frac{\eta}{2} (1 + \theta)^{-\frac{1}{2}} \left(\theta^{-\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{1}{2}} (1 + \theta)^{-1} \right)}{\eta \theta^{-\frac{1}{2}} (1 + \theta)^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{1 + \theta} \right) = \frac{1}{2(1 + \theta)} < 1, \quad \forall \theta > 0 \end{aligned}$$

□

Izrek 4.3. Naj bo $w(y, \theta_t)$ SSVI ploskev brez arbitraže. Naj bo $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ nenegativna in naraščajoča funkcija časa. Tedaj je tudi ploskev $w_\alpha(y, \theta_t) := w(y, \theta_t) + \alpha_t$ brez arbitraže.

Dokaz. Najprej pokažimo, da trditev drži za koledarsko arbitražo. Z odvajanjem $w_\alpha(y, \theta_t)$ po t dobimo

$$\frac{\partial w_\alpha(y, \theta_t)}{\partial t} = \frac{\partial w(y, \theta_t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}$$

Ob izpoljenih predpostavkah izreka je desna stran enakosti nenegativna in w_α je brez koledarske arbitraže.

Sedaj pokažimo še, da je w_α tudi brez metuljeve arbitraže. Ker pri metuljevi arbitraži čas do zapadlosti ne igra nobene vloge si bomo poenostavili oznake in v funkciji w izpuščali drugi argument. Pišemo

$$w(y) := w(y, \theta_t)$$

in

$$w_\alpha(y) := w_\alpha(y, \theta_t)$$

Podobno kot v izrazu (14) definiramo g_α , kjer w zamenjamo z w_α . Brez škode za splošnost predpostavimo $\rho < 0$, saj je dokaz simetričen za $\rho > 0$ in trivialen za $\rho = 0$. Vzemimo $G_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirano s predpisom

$$G_\alpha(y) := g(y) - g_\alpha(y)$$

za vsak $y \in \mathbb{R}$, $y^* := -\frac{2\rho}{\varphi(\theta_t)} > 0$ pa naj označuje enolično rešitev enačbe $w'(y) = 0$. Sedaj lahko izračunamo

$$G_\alpha(y) = \frac{w'(y)}{4} \left(\frac{1}{w_\alpha(y)} - \frac{1}{w(y)} \right) \left(4y + w'(y) - w'(y)y^2 \left(\frac{1}{w_\alpha(y)} + \frac{1}{w(y)} \right) \right)$$

z odvajanjem po α pa dobimo

$$\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial \alpha} = -\frac{w'(y)}{4} \frac{(w'(y) + 4y)w_\alpha(y) - 2y^2 w'(y)}{w_\alpha(y)^3} \quad (20)$$

Ker velja

$$w'(0) = \rho \theta_t \varphi(\theta_t) < 0$$

ima enačba

$$w'(y) + 4y = 0$$

enolično rešitev $y_* > 0$ ter velja, da je

$$w'(y) + 4y$$

strogo pozitivno število za vsak $y > y_*$ in strogo negativno za vsak $y < y_*$. Ker je funkcija w strogo konveksna, velja $y_* < y^*$. Tedaj za vsak $y \in (y_*, y^*)$ lahko zapišemo

$$w'(y) < 0$$

$$w'(y) + 4y > 0$$

iz česar sledi $\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial \alpha} > 0$. Ker velja $G_0(y) = 0$, lahko sklepamo, da je $g(y) > g_\alpha(y)$ za vsak $y \in (y_*, y^*)$. Za vsak $y \notin (y_*, y^*)$ pa neenakost $g(y) < g_\alpha(y)$ drži, i brž ko velja $\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial \alpha} < 0$. Vzemimo sedaj primer $y > y^*$. Enačbo(20) lahko zapišemo

$$\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial \alpha} = -\frac{w'(y)}{4} \frac{2y[2w_\alpha(y) - yw'(y)] + w_\alpha(y)w'(y)}{w_\alpha(y)^3}$$

torej je dovolj dokazati neenakost

$$2w_\alpha(y) - yw'(y) > 0$$

za vsak $y > y^*$. Če dokažemo, da velja $\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial \alpha} < 0$ tedaj sledi

$$g_\alpha(y) > g(y) \geq 0$$

in lahko zaključimo, da je ploskev brez metuljeve arbitraže.

Najprej vzemimo vse $y > y^*$, za katere velja $w'(y) > 0$. Zvezno odvedljiva funkcija je konveksna na intervalu $(a, b) \iff f(x) - f(z) \geq f'(x)(x - z)$ za poljubna $(x, z) \in (a, b)$. Če vzamemo $x = y$ in $z = 0$, lahko sklepamo, da velja

$$2w_\alpha(y) - yw'(y) > 0$$

saj je $w_\alpha(0) \geq 0$. Sledi, da velja

$$\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial \alpha} < 0$$

za vsak $y > y^*$.

Za $y < 0$ velja $w'(y) < 0$ in neenakost

$$2w_\alpha(y) - yw'(y) > 0$$

iz česar lahko z argumentom koveksnosti sklepamo podobno kot zgoraj, kar pa implicira $\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial \alpha} < 0$ za poljuben $y < 0$. Za vsak takšen y velja

$$g_\alpha(y) \geq g_\alpha(0)$$

Ker smo že pokazali, da velja $g_\alpha(0) > 0$, rezultat sledi.

Po definiciji g_α in (14) imamo

$$g_\alpha(y) - g_\alpha(0) = \left(1 - \frac{yw'(y)}{2(w(y) + \alpha)}\right)^2 - 1 - \frac{w'(y)^2}{4} \left(\frac{1}{w(y) + \alpha} + \frac{1}{4}\right) \quad (21)$$

$$+ \frac{w'(0)^2}{4} \left(\frac{1}{w(0) + \alpha} + \frac{1}{4}\right) + \frac{w''(y)}{2} - \frac{w''(0)}{2} \quad (22)$$

Funkcija $y \rightarrow w''(y)$ je strogo naraščujoča na intervalu $(0, \frac{k^*}{2})$ in strogo padajoča na $(\frac{k^*}{2}, k^*)$. Izračunamo lahko, da velja $w''(0) = w''(k^*)$, kar nam pove da velja $w''(y) \geq w''(0)$ na $(0, k^*)$. Tedaj velja $w'(0)^2 > w'(y)^2$ on $(0, k^*)$. Z poenostavljanjem (21) dobimo

$$\begin{aligned} g_\alpha(y) - g_\alpha(0) &\geq \left(1 - \frac{yw'(y)}{2(w(y) + \alpha)}\right)^2 - 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{w'(0)^2}{w(0) + \alpha} - \frac{w'(y)^2}{w(y) + \alpha}\right) \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{w'(0)^2}{w(0) + \alpha} - \frac{w'(y)^2}{w(y) + \alpha}\right) - \frac{yw'(y)}{w(y) + \alpha} \end{aligned}$$

Opazimo, da velja

$$w'(y)^2 \leq w'(0)w'(y) \leq w'(0)^2$$

na intervalu $(0, y^*)$, torej sledi

$$g_\alpha(y) - g_\alpha(0) \geq \frac{w'(0)w'(y)}{4} \left(\frac{1}{w(0) + \alpha} - \frac{1}{w(y) + \alpha}\right) - \frac{yw'(y)}{w(y) + \alpha} \quad (23)$$

Sedaj lahko dokažemo, da drži neenakost

$$yw(0) - \frac{w'(0)}{4}[w(y) - w(0)] \geq 0$$

za vsak $y \in (0, y^*)$. Velja

$$yw(0) - \frac{w'(0)}{4}[w(y) - w(0)] = \left(1 - \frac{\rho^2\theta\varphi^2}{8}\right)\theta y + \frac{\rho\varphi\theta^2}{8} - \frac{\rho\varphi\theta^2}{8} \sqrt{\varphi^2 y^2 + 2\varphi\rho y + 1}$$

in iz drugega pogoja Izreka 4.1 sledi

$$1 - \frac{\rho^2\theta\varphi^2}{8} \geq 0$$

Tedaj (za $\rho \leq 0$) desna stran zgornje enačbe predstavlja funkcijo naraščujočo na $(0, y^*)$, ki je pri nič enaka 0. Tedaj po (21)

$$\begin{aligned} g_\alpha(y) - g_\alpha(0) &\geq \frac{-w'(y)}{(w(0) + \alpha)(w(y) + \alpha)} \left\{ y(w(0) + \alpha) - \frac{w'(0)}{4}[w(y) - w(0)] \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Lema 4.6. Naj bosta za T_1 in T_2 , $T_1 < T_2$ dana nasmeška $w(y, T_1)$ in $w(y, T_2)$, ki sta brez metuljeve arbitraže in naj velja $w(y, T_2) \geq w(y, T_1) \forall y \in \mathbb{R}$. Tedaj za poljuben $T \in (T_1, T_2)$ obstaja interpolacija $w(y, T)$, ki je brez metuljeve arbitraže in ne omogoča koledarske arbitraže.

Dokaz. Za dana nasmeška $w(y, T_1)$ in $w(y, T_2)$ lahko izračunamo Black-Scholesove nediskontirane cene nakupnih opcij $C_i := C(F_i, K_i, T_i)$ z zapadlostmi T_i , $i \in \{1, 2\}$. Ker sta oba nasmeška brez metuljeve arbitraže, velja

$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial K_i^2} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

Vzemimo sedaj monotono naraščajočo interpolacijo totalne variance na meji med točkama $w(0, T_1)$ in $w(0, T_2)$ in jo označimo z θ_T . Izvršilno ceno lahko izrazimo kot $K_i = F_i e^y$ za neko fiksno denarnost y . Za zapadlost $T_1 < T < T_2$ za katero želimo interpolirati nasmešek sedaj ceno terminske pogodbe F_T izračunamo bodisi z monotono naraščujočo bodisi z monotono padajočo interpolacijo med točkama F_1 in F_2 , odvisno od tega ali velja $F_1 < F_2$ oziroma $F_1 > F_2$. Tedaj je izvršilna cena na meji ob času T dana z $K_T = F_T e^y$.

Na tem mestu vpeljimo še nekaj oznak.

$$\begin{aligned} F_* &= \min\{F_1, F_2\} \\ F^* &= \max\{F_1, F_2\} \\ K_* &= \min\{K_1, K_2\} \\ K^* &= \max\{K_1, K_2\} \end{aligned}$$

Ker smo ceno terminske pogodbe ob zapadlosti T izračunali z monotono interpolacijo, velja $F_* < F_T < F^*$ iz česar pa sledi $K_* < K_T < K^*$.

Interpolirano ceno $C_T := C(F_T, K_T, T)$ izračunamo po formuli

$$C_T = \alpha_T \frac{K_T}{K_1} C_1 + (1 - \alpha_T) \frac{K_T}{K_2} C_2 \quad (24)$$

kjer je α_T dan z

$$\alpha_T := \frac{\sqrt{\theta_{T_2}} - \sqrt{\theta_T}}{\sqrt{\theta_{T_2}} - \sqrt{\theta_{T_1}}} \in [0, 1] \quad (25)$$

Najprej pokažimo, da interpolirana cena ne omogoča koledarske arbitraže. Ker je $C_1 < C_2$ velja

$$\begin{aligned} C_T &= \alpha_T \frac{K_T}{K_1} C_1 + (1 - \alpha_T) \frac{K_T}{K_2} C_2 \\ &> \alpha_T \frac{K_T}{K_1} C_1 + (1 - \alpha_T) \frac{K_T}{K_2} C_1 \\ &\geq \frac{K_T}{K^*} C_1 \geq C_1 \end{aligned}$$

kjer smo uporabili že izpeljano dejstvo $K_T < K^*$. S tem smo pokazali, da koledarska arbitraža ni možna nad cenami C_1 in C_T . Na podoben način lahko to pokažemo tudi za C_2 in C_T in s tem smo dokazali odsotnost koledarske arbitraže na interpolirani ceni.

Pri predpostavki, da sta $w(y, T_1)$ in $w(y, T_2)$ brez metuljeve arbitraže bomo sedaj pokazali še, da velja

$$\frac{\partial^2 C_T}{\partial K^2} \geq 0$$

Da bi videli, zakaj to drži, najprej enačbo (24) pomnožimo z $\frac{1}{e^y K_T}$. Ker imajo vse opcije enako denarnost, lahko zapišemo

$$\frac{C_T}{F_T} := \alpha_t \frac{C_1}{F_1} + (1 - \alpha_t) \frac{C_2}{F_2} \quad (26)$$

Ker je skupna spremenljivka cenam C_1 , C_2 in C_T le denarnost y , bomo za dokaz odsotnosti metuljeve arbitraže drugi parcialni odvod po K_i najprej morali izraziti z drugim parcialnim odvodom po y .

$$\frac{\partial C(K_i, F_i, T)}{\partial K} = \frac{\partial C(K_i, F_i, T_i)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial K}$$

$$\frac{\partial^2 C(K_i, F_i, T_i)}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 C(K, F, T)}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial K} \right)^2 + \frac{\partial C(K_i, F_i, T_i)}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial K^2}$$

pri čemer je

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} \left(\log \frac{K}{F_i} \right) = \frac{1}{K}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial K^2} = -\frac{1}{K^2}$$

torej lahko zapišemo

$$\frac{\partial^2 C(K_i, F_i, T)}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 C(K_i, F_i, T)}{\partial y^2} \frac{1}{K^2} - \frac{\partial C(K_i, F_i, T)}{\partial y} \frac{1}{K^2}$$

Če sedaj enačbo (26) dvakrat odvajamo po y , lahko zapišemo

$$\frac{K_T^2}{F_T} \frac{\partial^2 C_T}{\partial K^2} = \alpha_t \frac{K_1^2}{F_1} \frac{\partial^2 C_1}{\partial K^2} + (1 - \alpha_t) \frac{K_2^2}{F_2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial K^2}$$

Vsi členi na desni strani so nenegativni, torej mora biti desna stran tudi nenegativna. Zaključimo, lahko, da na interpoliranih cenah ni metuljeve arbitraže. Iz teh cen pa lahko sedaj izračunamo interpolirano volatilitnost z obratom Black-Scholesove formule.

□

4.3 Algoritem za kalibracijo ploskve totalne variance

V tem podglavju je predstavljen učinkovit in robusten algoritem za kalibracijo SVI nasmeškov brez arbitraže s tržnimi cenami opcij, kot je implementiran v [5]. Najprej na podatke kalibriramo celotno SSVI ploskev, s čimer dosežemo dobro ujemanje s tržno terminsko strukturo volatilitnosti na meji. Nato za vsako zapadlost parametre SSVI ploskve preslikamo v parametre Jump-Wings SVI, ter jih uporabimo za začetne vrednosti pri kalibraciji nasmeška, pri čemer z regularizacijo poskrbimo, da ne pride do možnosti koledarske arbitraže.

Ob predpostavki, da so naši podatki očiščeni, je algoritem naslednji.

1. Za vsako zapadlost najprej pretvori implicirano volatilitnost na meji v totalno varianco na meji, ter točke linearno interpoliraj, da dobiš funkcijo θ_t . Če implicirana volatilitnost na meji ni na voljo, jo oceni iz dveh najbližjih točk.
2. Z minimizacijo vsote kvadratov napak SSVI krivulje definirane kot v 17 in tržnih vrednosti totalne variance, poišči optimalni vrednosti parametrov $\rho \in (-1, 1)$ in $\eta > 0$ pri čemer poskrbi, da je zadoščeno nelinearnim vezem danim z Opombo 17, saj te zagotavljajo odsotnost metuljeve arbitraže. Lema 4.5 zagotavlja odsotnost koledarske arbitraže.
3. Začeniš z prvo zapadlostjo, ponovi sledeče za vsako zapadlost.

3.1. Izračunaj Jump-Wing SVI parametre $\{v_t, \psi_t, p_t\}$ iz ρ in η s pomočjo Leme 4.3.

3.2. Izračunaj c_t in \tilde{v}_t ¹²

$$c_t = p_t + 2\psi_t$$
$$\tilde{v}_t = v_t \frac{4p_t c_t}{(p_t + c_t)^2}$$

3.3. Preslikaj Jump-Wings SVI parametre v parametre Raw SVI s pomočjo leme 4.2 ter izračunaj vsoto kvadratov napak med citirano totalno varianco in totalno varianco dobljeno iz kalibrirane krivulje s pomočjo Definicije 4.1.

3.4. Čeprav je ploskev pridobljena v 2. koraku brez arbitraže, kalibracija parametrov nasmeška to lahko pokvari. V ta namen je potrebno k vsoti kvadratov napak prišteti penale. Ker mora biti totalna varianca naraščujoča, je dovolj preveriti, da je totalna varianca na trenutni krivulji v izbrani množici točk $\{y_1, y_2, \dots, y_2\}$ večja od totalne variance na krivulji s krajšo zapadlostjo. Če temu ni tako, prištej penale.

3.5. Koraki 3.2, 3.3 in 3.4 so tedaj ponovljeni znotraj optimizacijske metode, dokler ni zadoščeno nekemu pogoju zaustavitve. Pripomniti je potrebno, da optimiziramo zgolj tri parametre, saj sta c_t in \tilde{v}_t vsako iteracijo izračunana iz enačb v koraku 3.2.

¹²Sledi iz Leme 4.5.

5 Kalibracija SVI nasmeška s tržnimi podatki S&P 500

V tem poglavju je demonstriran postopek čiščenja, preprocesiranja in kalibriranja ploskve na tržne totalne variance, in sicer na način, ki ne dopušča arbitraže. Tržne cene za simbol ^GPSC (S&P 500) so bile zajete na spletni strani `finance.yahoo.com` dne 20. oktobra 2017 ob zaprtju ameriških trgov (21:40 CET). Za demonstracijo postopka na delniškem indeksu S&P 500 sem se odločil, ker je zaradi likvidnosti tega trga na voljo vrsto tržnih cen opcij za različne zapadlosti.

Začel sem s podatki za približno 800 opcij z devetimi različnimi zapadlostmi in sicer od 15. decembra 2017 do 21. julija 2019. Oblika podatkov je kot v spodnji tabeli.

Underlying	Strike	Type	Implied Volatility	Bid	Ask	Expiry
^GSPC	2600.0	call	0.14405152832	170.1	179.7	2019-06-21
^GSPC	2625.0	call	0.141953465805	156.3	166.1	2019-06-21
^GSPC	2650.0	call	0.139618894424	142.9	152.7	2019-06-21
^GSPC	2675.0	call	0.137261435089	130.1	139.8	2019-06-21

Poleg tega je za vsako opcijo na voljo tudi podatek o obsegu trgovanja na ta dan.

5.1 Diskontni faktor

Kateri diskontni faktor je potrebno uporabiti za računanje sedanje vrednosti? Če bi živeli v svetu brez tveganja nasprotne stranke (angl. counterparty risk) in ničelno verjetnostjo neplačila (angl. default probability), tedaj bi bil odgovor diskontiranje z netvegano obrestno mero. V realnosti pa je odgovor odvisen od tega ali izveden instrument kotira na borzi oziroma se z njim trguje na OTC trgu.

Če izveden instrument kotira na borzi, ta funkcionira kot centralna klirinška entiteta, ki zagotavlja poravnavo ob zapadlosti s tem, da od prodajalca izvedenega instrumenta zahteva, da ta na svojem "margin" računu vselej drži zahtevan minimalen kapital, ki se spreminja dnevno skupaj z vrednostjo izvedenega instrumenta. Borza pa po drugi strani kupcu izvedenega instrumenta jamči izplačilo instrumenta, tudi če prodajalec vmes bankrotira. Čeprav je kreditno tveganje na ta način močno reducirano (nasprotna stran za kupca instrumenta je borza, ki si lasti imetje na prodajalčevem računu), strošek financiranja pozicije za prodajalca več kot kompenzira za dejansko obrestno mero in ta strošek je vselej višji od obrestne mere T-Billa, Bunda oziroma Gilta.

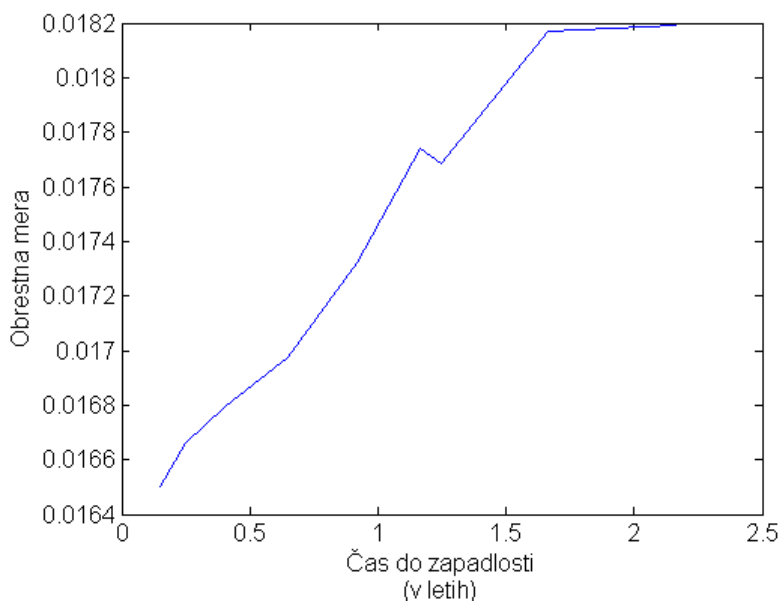
Kako lahko izračunamo obrestno mero za instrumente, ki kotirajo na borzi? Ideja je, da s kombinacijo nakupnih in prodajnic opcij tvorimo sintetično obveznico. Za $K_1 < K_2$ in zapadlost T imejmo dolgo pozicijo v nakupni opciji z izvršilno ceno K_1 , kratko pozicijo v prodajni opciji z izvršilno ceno K_1 , dolgo pozicijo v prodajni opciji z izvršilno ceno K_2 in kratko pozicijo v nakupni opciji z izvršilno ceno K_2 . Ta opsijska strategija se v angleščini imenuje box spread, izplačilo ob zapadlosti pa je

$$\begin{aligned}
V_T^{BOX} &:= C(K_1, T) - P(K_1, T) + P(K_2, T) - C(K_2, T) \\
&= \max\{S - K_1, 0\} - \max\{K_1 - S, 0\} + \max\{K_2 - S, 0\} - \max\{S - K_2, 0\} \\
&= \max\{S - K_1, 0\} + \min\{S - K_1, 0\} + \max\{K_2 - S, 0\} + \min\{K_2 - S, 0\} = \\
&= K_2 - K_1
\end{aligned}$$

Izplačilo je torej konstantno, kar nam dovoljuje, da iz tržne vrednosti te sintetične obveznice ob času 0 izrazimo obrestno mero iz enačbe

$$V_0^{BOX} = (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

kar pa nam bo dalo pravi diskontni faktor. V praksi je potrebno obrestno mero oceniti iz več kombinacij parov (K_1, K_2) , nato pa rezultate povprečiti. Terminalska struktura obrestne mere za S&P 500 opcije na Chicago Board Options Exchange je prikazana na Sliki 8.



Slika 8: Obrestna mera implicirana iz "box spread" opcijske strategije specifična za opcije na S&P 500, ki kotirajo na Chicago Board Options Exchange.

Če se z izvedenim instrumentom trguje na OTC trgu pa je za diskontni faktor potrebno uporabiti "overnight index swap" oziroma OIS obrestno mero. Stvari se zakomplicirajo, če mora prodajalec izvedenega instrumenta jamčiti z zavarovanjem (angl. collateral).

5.2 Cena termnske pogodbe in dividendni donos

Za večino delniških indeksov obstaja likviden trg termnskih pogodb in cena termnske pogodbe je dana s tržnimi cenami tega instrumenta. Za delnice pa temu ni vselej tako in tu je potrebno s pomočjo nakupno-prodajne paritete ceno implicirati iz tržnih cen opcij.

Pri predpostavki, da smo obrestno mero r že izračunali, lahko tedaj iz nakupno-prodajne paritete

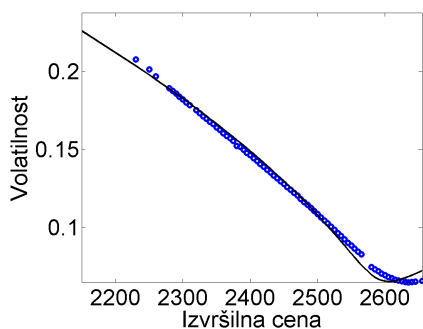
$$C_t - P_t = F_t - Ke^{-rT} \quad (27)$$

izrazimo F_t .

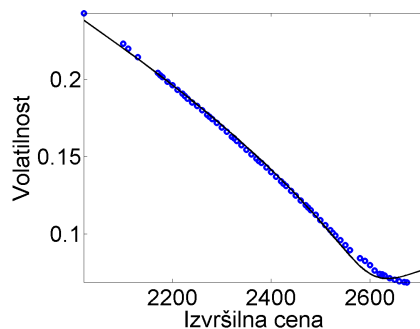
Pričakovane dividende in torej terminska struktura dividendnega donosa se ponavadi modelira posebej. Ker v našem primeru gledamo zgolj dve leti v prihodnost, bomo terminsko strukturo dividendnega donosa skrčili v eno samo vrednost. Ocena enoletnega dividendnega donosa za S&P 500 v zadnjem četrtletju 2017 je bila 1.8%¹³, to vrednost pa bomo vselej uporabili kot dividendni donos za vse zapadlosti, med časom 0 ter julijem 2019.

5.3 Kalibracija ploskve

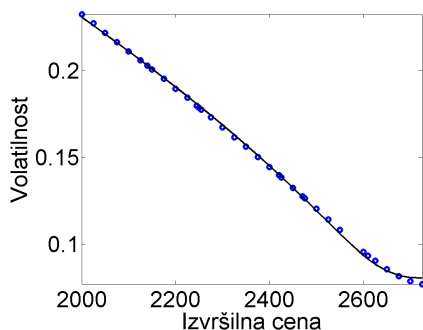
Podatke o tržnih cenah opcij najprej očistimo tako, da odstranimo kotacije vseh opcij, za katere je bil obseg trgovanja na dan 20.10.2017 enak 0. Nato na preostalih podatkih uporabimo algoritem naveden v razdelku 4.3. Na spodnjih grafih je prikazano prilaganje dobljene ploskve in tržne vrednosti implicirane volatilitosti za različne zapadlosti.



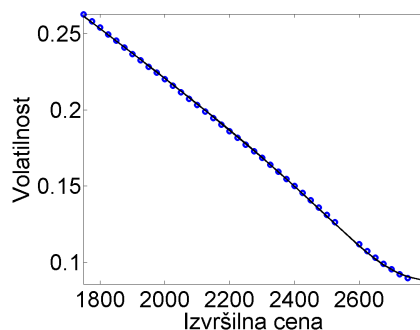
Slika 9: Zapadlost 15.12.2017



Slika 10: Zapadlost 19.1.2018

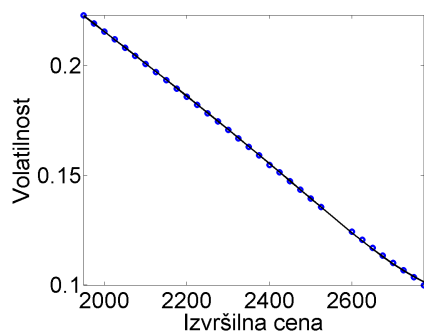


Slika 11: Zapadlost 16.3.2018

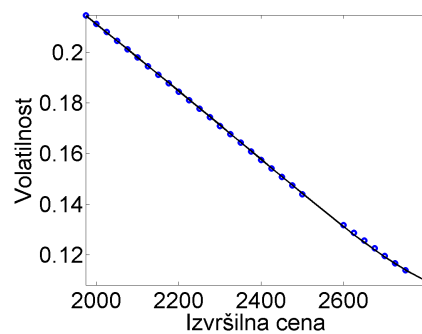


Slika 12: Zapadlost 15.6.2018

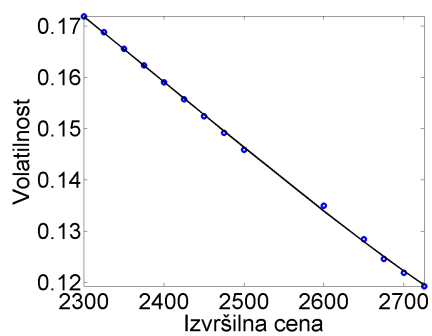
¹³Vzeto iz <http://www.multip1.com/s-p-500-dividend-yield/> dne 20.10.2017.



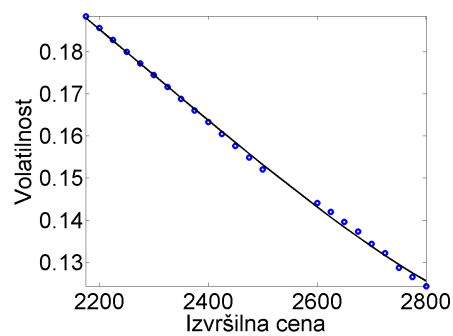
Slika 13: Zapadlost 21.9.2018



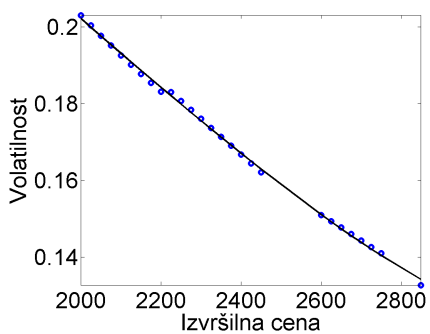
Slika 14: Zapadlost 21.12.2018



Slika 15: Zapadlost 18.1.2019



Slika 16: Zapadlost 21.6.2019



Slika 17: Zapadlost 20.12.2019

5.4 Interpolacija in ekstrapolacija na ploskvi

S kalibracijo SVI na tržne vrednosti totalne variance smo dobili devet nasmeškov za devet različnih zapadlosti. Sedaj pa si oglejmo, kako z interpolacijo izračunamo volatilnost za poljubno kombinacijo denarnosti in zapadlosti na način, ki ne omogoča arbitraže. Šele tedaj lahko zares govorimo o ploskvi totalne variance.

Postopek interpolacije, ki ne ustvari arbitraže, je v resnici opisan že v dokazu Leme 4.6, vendar ga bom tu vseeno navedel še enkrat. Za izračun volatilnosti v točki (y, T) , kjer je $y = \log \frac{K}{F_T}$ denarnost, T pa čas do zapadlosti je postopek naslednji.

- Poišči najbližja časa do zapadlosti T^- in T^+ , za katera imamo na voljo SVI nasmešek dobljen iz tržnih vrednosti implicirane volatilnosti, tako da velja $T^- < T < T^+$.
- Izračunaj nediskontirani Black-Scholesovi ceni nakupnih opcij $C^- := C(y, T^-)$ in $C^+ := C(y, T^+)$, kjer za volatilnost vstaviš točki iz SVI nasmeškov. Poskrbi tudi, da v Black-Scholesovo formulo vstaviš pravilno vrednost obrestne mere in dividendnega donosa za čas do zapadlosti.
- Oceni vrednost F_T z linearno iterpolacijo točk F_{T^-} in F_{T^+} .
- Iz SVI nasmeškov izračunaj totalni varianci na meji θ_{T^-} in θ_{T^+} , ter z linearno interpolacijo oceni totalno varianco na meji za čas do zapadlosti T .
- Izračunaj izvršilne cene

$$K_T = F_T e^y$$

$$K_{T^-} = F_{T^-} e^y$$

$$K_{T^+} = F_{T^+} e^y$$

- Izračunaj interpolirano ceno

$$\alpha_T = \frac{\sqrt{\theta_{T^+}} - \sqrt{\theta_T}}{\sqrt{\theta_{T^+}} - \sqrt{\theta_{T^-}}}$$

$$C_T = K_T \left(\alpha_T \frac{C^-}{K_{T^-}} + (1 - \alpha_T) \frac{C^+}{K_{T^+}} \right)$$

- Z Newton-Raphsnovo metodo izračunaj implicirano volatilnost za interpolirano ceno opcije C_T .

Zgoraj opisani postopek nam omogoča izračun volatilnosti zgolj za čas do zapadlosti med najkrajšim časom do zapadlosti T_0 in najdaljšim časom do zapadlosti T_n danih opcij.

Za izračun volatilnosti za $T \in [0, T_0]$ je potrebno za C^- uporabiti ceno opcije, za katere je čas do zapadlosti je enak 0. Cena za tako opcijo pa je kar izplačilo in lahko pišemo

$$C^- = \max\{S_0 - S_0 e^y, 0\}$$

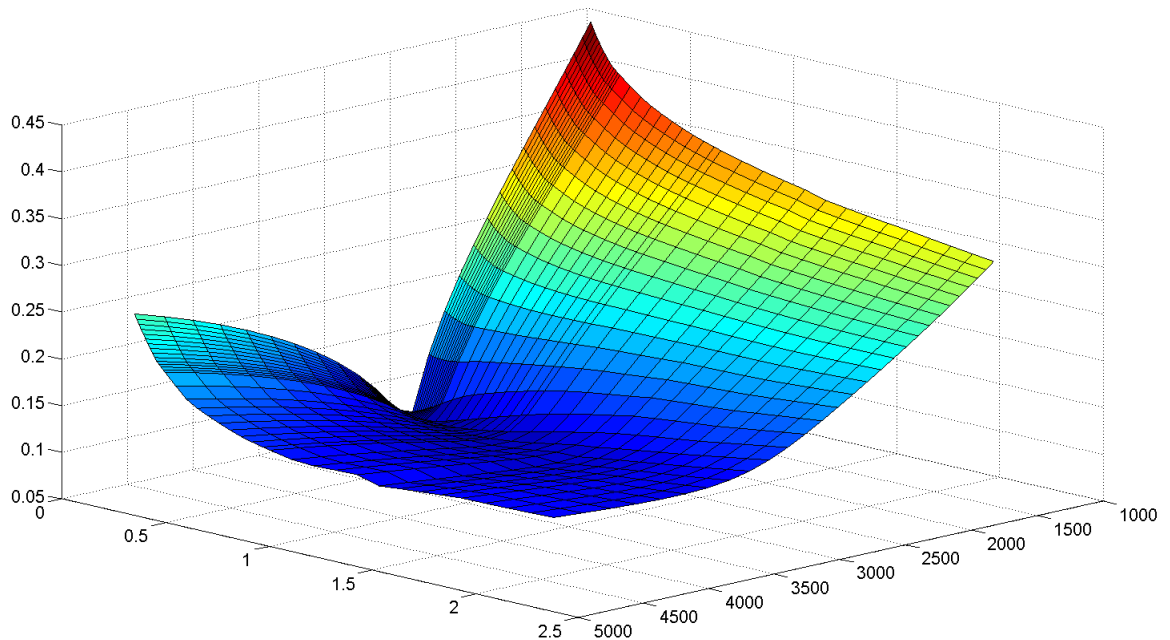
pri čemer z S_0 označujemo ceno temelja ob času 0.

Pri izračunu volatilnosti za $T > T_n$ pa je potrebno ploskev ekstrapolirati na sledeč način: najprej ekstrapoliramo funkcijo totalne variance na meji θ_t , pri čemer je edini pogoj na izbiro metode ekstrapolacije, da so funkcijske vrednosti naraščajoče v času (in pa seveda zveznost). Za $T > T_n$ definiramo

$$w(y, T) := w(y, T_n) + \theta_T - \theta_{T_n}$$

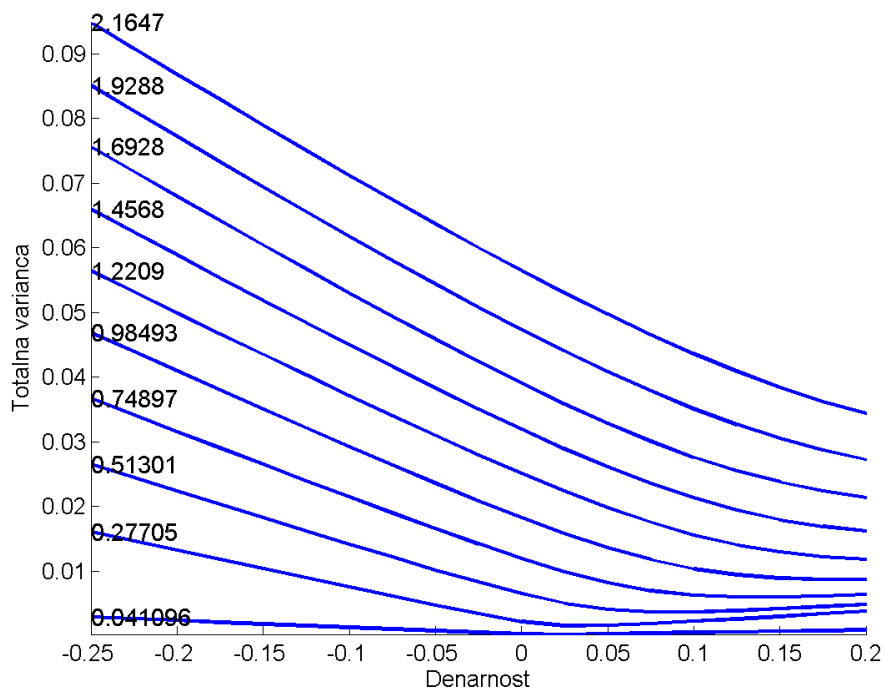
Ker velja $\theta_T > \theta_{T_n}$, Izrek 4.3 jamči odsotnost arbitraže.

Slika 6.1 prikazuje dobljeno volatilnostno ploskev¹⁴, kjer sem denarnost y za boljšo predstavo pretvoril v izvršilno ceno. Slika 5.4 pa prikazuje nasmeške za vseh devet zapadlosti in za dodatno zapadlost bližje $T = 0$. Ker se nasmeški med seboj ne sekajo, je razvidna odsotnost koledarske arbitraže.



Slika 18: Volatilnostna ploskev

¹⁴Totalno varianco smo tu pretvorili v volatilnost.



Slika 19: Krivulje totalne variance.

6 Model lokalne volatilnosti za S&P 500

6.1 Proces lokalne volatilnosti

Izrek 2.2 nam pove, kako iz ploskve totalne variance izračunamo lokalno volatilnost.

$$\sigma_{loc} = \sqrt{\frac{\frac{\partial w}{\partial T}}{1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}}$$

Tu se nam bolj splača uporabljati Raw SVI parameterizacijo za w , kot je dana v Definiciji 4.1. Odvode po y lahko izračunamo analitično

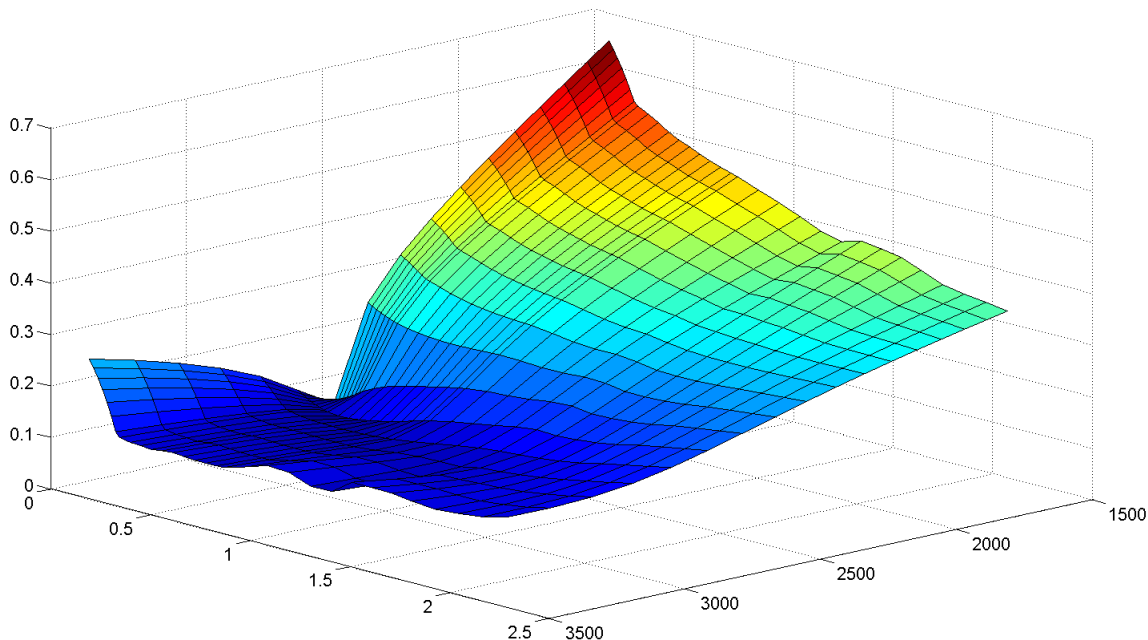
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{b(\rho\sqrt{(y-m)^2 + \sigma^2} + y - m)}{\sqrt{(y-m)^2 + \sigma^2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{b\sigma^2}{((y-m)^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

za $\frac{\partial w}{\partial T}$ pa je potrebno uporabiti centralno diferenco

$$\frac{\partial w(y, T)}{\partial T} \approx \frac{w(y, T+h) - w(y, T-h)}{2h}$$

pri čemer za h vzamemo relativno veliko vrednost ¹⁵, saj na ta način dosežemo določeno stopnjo glajenja po časovni osi. Za $T < h$, v diferenci namesto $w(y, T - h)$ vstavimo vrednost $w(y, T)$, ter imenovalec delimo z dva.



Slika 20: Ploskev lokalne volatilnosti dobljena iz ploskve volatilnosti. V okolici časa do zapadlosti $T = 1$ in $T = 1.5$ lahko opazimo povečane vrednosti lokalne volatilnosti, kar je najbolj verjetno posledica ameriških vmesnih volitev 6. Novembra 2018, ter izstopa Združenega Kraljestva iz Evropske Unije 29. Marca 2019.

V tej točki imamo vse, kar potrebujemo za Monte Carlo simulacijo procesa lokalne volatilnosti. Spomnimo se, da je dinamika cene temelja v Modelu lokalne volatilnosti dana z stohastično diferencialno enačbo

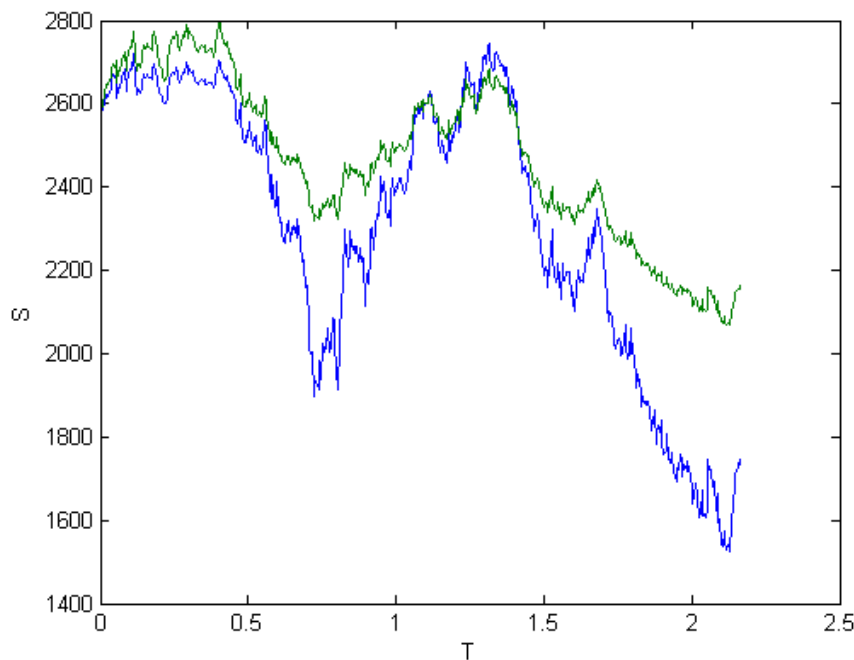
$$dS_t = (r(t) - q(t))S_t dt + \sigma_{loc}(S_t, t)S_t dW_t \quad (28)$$

kjer je W_t standardiziran Wienerjev proces. Enačbo (28) lahko numerično rešimo z Euler-Maruyama diskretizacijo, kjer je vrednost temelja ob času $t + \Delta$ dana z

$$S[t + \Delta] = S[t] + (r(t) - q(t))S[t]\Delta + \sigma_{loc}(S[t], t)S[t]\sqrt{\Delta} \cdot z$$

in kjer je $S[0] = S_0$ ter $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

¹⁵ $h = \frac{1}{12}$ naprimer.



Slika 21: Simulirana trajektorija procesa lokalne volatilnosti je narisana z modro. Z uporabo istih vzorcev iz standardne normalne porazdelitve je z zeleno narisana trajektorija geometrijskega Brownovega gibanja s primerljivo konstantno volatilnostjo.

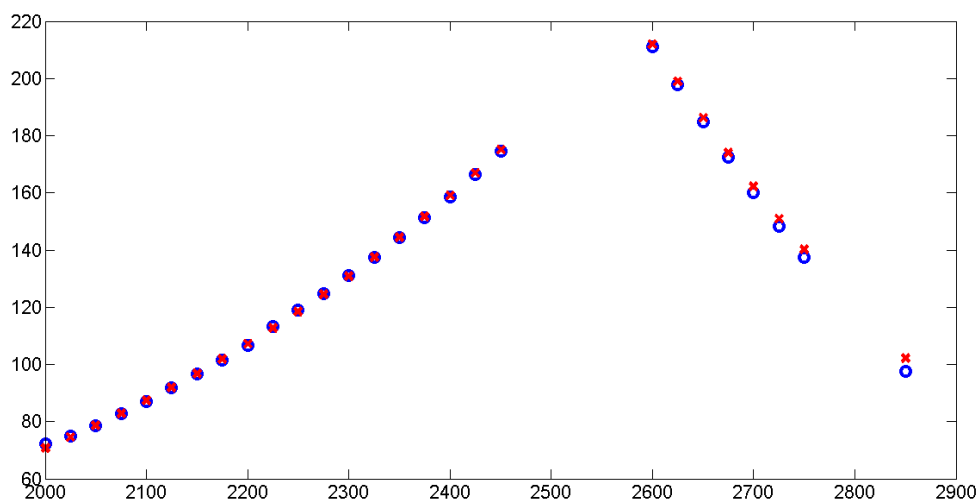
6.2 Ujemanje s tržnimi cenami

Do sedaj se še nismo vprašali, kako dobro se naš model prilega podatkom in kakšen kriterij za ugotavljanje tega naj uporabimo. Ideja je enostavna: ker smo našo ploskev lokalne volatilnosti konstruirali iz tržnih cen opcij, bi sedaj cenjenje istih pogodb z našim modelom moralo dati cene, ki se ujemajo s tržnimi cenami. Opcije v našem modelu lahko sedaj vrednotimo bodisi z reševanjem Dupirejeve parcialne enačbe (4), bodisi z Monte Carlo simulacijo. Odločimo se za Monte Carlo simulacijo, kjer generiramo 100.000 trajektorij, v vsaki pa z Euler-Maruyama diskretizacijo naredimo 200 korakov. Slika 22 prikazuje ujemanje med izračunanimi in tržnimi cenami opcij. Opazimo lahko, da je prileganje sprejemljivo, ni pa idealno.

V tej točki je zanimivo demonstrirati, da je Black-Scholesov model nezmožen replicirati tržne cene klasičnih opcij, saj ne dopušča volatilnostnega nasmeška. Kakšno terminsko strukturo volatilnosti $\sigma(t)$ je najbolje izbrati, da bomo pri vrednotenju z Black-Scholesovim modelom čim bolj pravični? Če bi izbrali terminsko volatilnost na meji, bi sistematično podcenjevali vse opcije, ki niso na meji. Ker je prileganje našega Modela lokalne volatilnosti zadovoljivo, lahko simuliramo trajektorije cen temelja, ter za nabor časov do zapadlosti t_1, t_2, \dots, t_n povprečimo lokalno volatilnost za različne cene temelja

$$\hat{\sigma}(t_i) = \frac{1}{N} \left(\sigma_{loc}(t_i, S_1) + \sigma_{loc}(t_i, S_2) + \dots + \sigma_{loc}(t_i, S_N) \right)$$

Iz točk $\hat{\sigma}(t_1), \hat{\sigma}(t_2), \dots, \hat{\sigma}(t_n)$ tvorimo terminsko strukturo volatilnosti, katere vrednosti



Slika 22: Cene klasičnih nakupnih in prodajnih opcij za zapadlost 20.12.2019. Modri krogi označujejo tržne cene, rdeči križci pa cene izračunane z Modelom lokalne volatilitosti.

uporabimo pri simulaciji geometrijskega Brownovega gibanja, ki narekuje ceno temelja v Black-Scholsovemu modelu. Slika 23 prikazuje primerjavo tržnih cen in cen izračunanih po zgornjem postopku. Razvidno je, da so opcije pod mejo močno podcenjene, kar je seveda pričakovano.

6.3 Do tveganja nevtralna funkcija gostote

V dokazu Izreka 3.1 smo že pokazali, kako pridemo do eksplicitnega izraza za do tveganja nevtralne funkcijo gostote p_Q

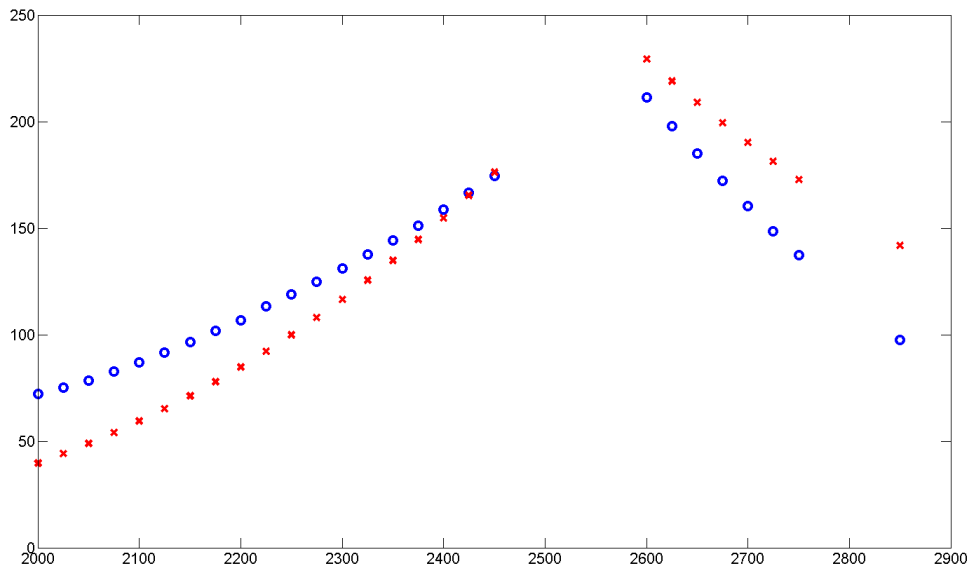
$$p_Q(y, \cdot) = \frac{g(y)}{\sqrt{2\pi w}} \exp\left\{-\frac{d_1(y)^2}{2}\right\} \quad (29)$$

Vzemimo na znanje, da do p_Q lahko pridemo tudi z reševanjem Kolmogorove oziroma Fokker-Planckove parcialne diferencialne enačbe

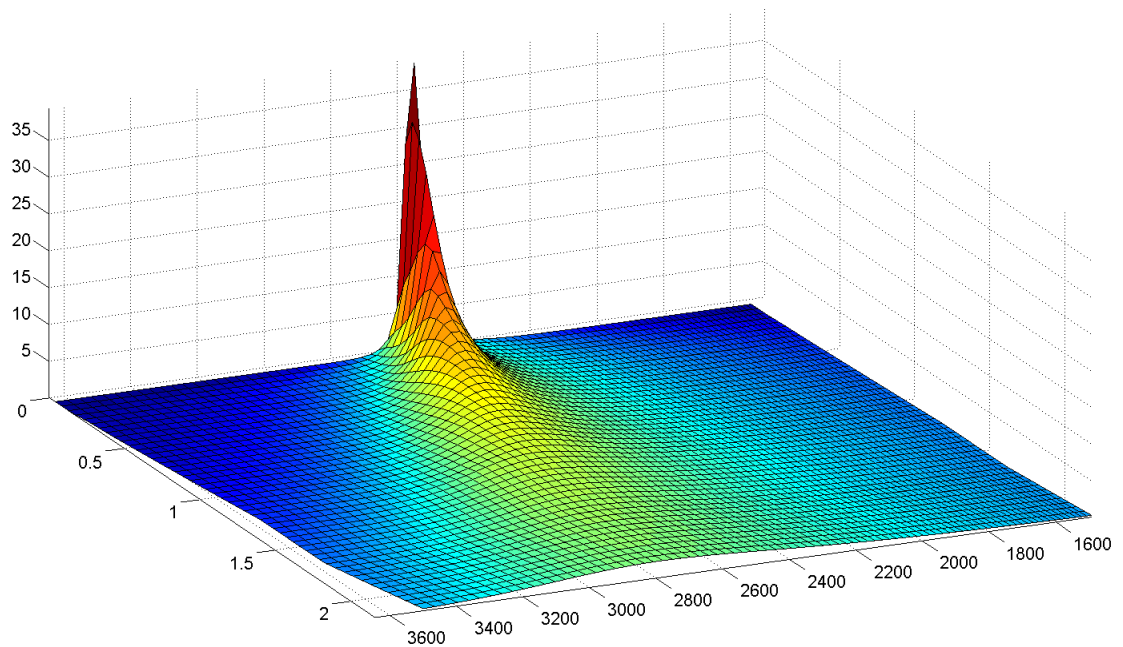
$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} (\sigma_{loc}^2 S_T^2 p_Q) - S \frac{\partial}{\partial S_T} (\mu S_T p_Q) = \frac{\partial p_Q}{\partial T}$$

ampak, tu jo dobimo zastoj in v eksplicitni obliki. Slika 24 prikazuje graf do tveganja nevtralne gostote. Tu sem za lažjo predstave ponovno pretvoril spremenljivko denarnosti v spremenljivko izvršilne cene.

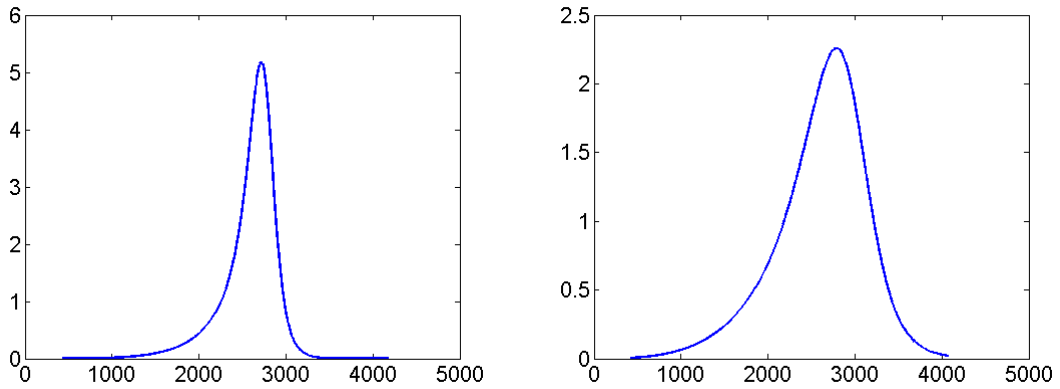
Opazimo lahko, da je najvišja vrednost gostote (angl. mode) naraščajoča s časom, saj je bil dne 20.10.2017 ob zajetju podatkov obet za rast S&P 500 delniškega indeksa pozitiven. Po drugi strani pa gostota s časom postaja vse bolj ploščata in razpršena, kar je tipična lastnost difuzijskega procesa, proces lokalne volatilitosti pa je difuzijski proces.



Slika 23: Cene klasičnih nakupnih in prodajnih opcij za zapadlost 20.12.2019. Modri krogi označujejo tržne cene, rdeči križci pa cene "replicirane" z Black-Scholesovim modelom.



Slika 24: Do tveganja nevtralna gostota porazdelitve cene S&P 500 dne 20.10.2017.



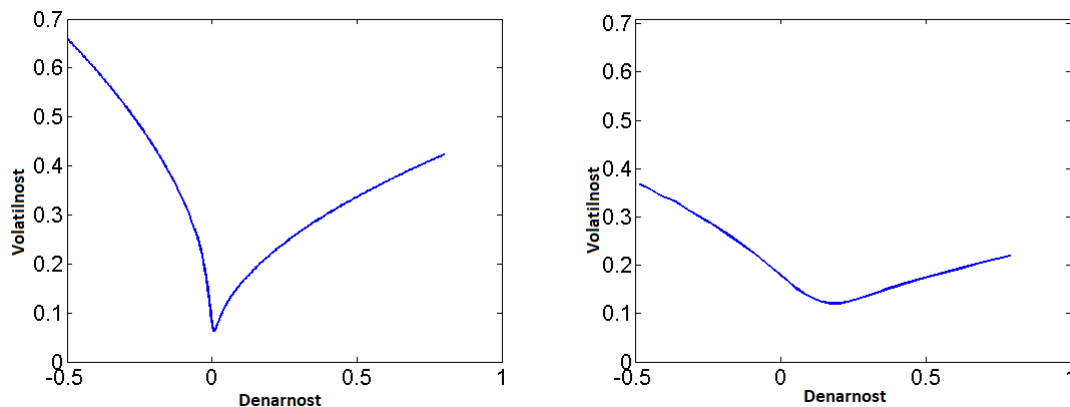
Slika 25: Do tveganja nevtralna gostota cene S&P 500 za fiksni T . Na levi strani imamo gostoto za zapadlost 16.3.2018, na desni pa za zapadlost 20.12.2019.

Slika 25 prikazuje gostoti pri fiksni T . Kot omenjeno v podpoglavju 1.3, porazdelitev cene delniškega indeksa izraža asimetričnost z debelim levim repom.

7 Pomankljivost Modela lokalne volatilnosti

Model lokalne volatilnosti je lahko implementirati ter z njim replicirati tržne cene klasičnih opcij. Posledično je model v praksi pogosto uporabljen za vrednotenje opcij, katerih izplačilo je odvisno od poti cene temelja, kot so na primer barierne in azijske opcije. Glavna kritika modela lokalne volatilnosti pa je nerealistična dinamika volatilnosti.

Problematično je zlasti dejstvo, da Model lokalne volatilnosti producira terminski volatilnosti nasmešek (volatilnostni nasmešek za neko obdobje v prihodnosti), ki je preveč ploščat. Na Sliki 26 lahko opazimo razliko v ukrivljenosti med volatilnostnim nasmeškom in terminskim volatilnostnim nasmeškom.



Slika 26: Slika na levi prikazuje volatilnostni nasmešek s časom do zapadlosti treh mesecev. Slika na desni pa prikazuje terminski volatilnostni nasmešek za obdobje od 18 do 21 mesecev.

Terminski volatilnostni nasmešek naj bi bil najboljša ocena kako bo volatilnostni nasmešek izgledal v prihodnosti, Model lokalne volatilnosti pa vselej napove, da bo terminski volatilnostni nasmešek bolj ploščat, kot pa volatilnostni nasmešek ob času 0. Ta nekonstistentnost pa ima izrazite posledice pri vrednotenju nekaterih eksotičnih opcij, katerih cena je implicitno odvisna od terminskega volatilnostnega nasmeška.

Literatura

- [1] Emanuel Derman, Michael B. Miller, *The volatility smile*, 1. izdaja, Wiley, New Jersey, 2016.
- [2] Jim Gatheral, Antoine Jacquier, *Arbitrage-free SVI volatility surfaces*, [ogledano 27.12.2017], dostopno na <https://arxiv.org/pdf/1204.0646.pdf>
- [3] Bernt Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5. izdaja, Springer Science & Business Media, 2003
- [4] Roger W. Lee, *The Moment Formula for Implied Volatility at Extreme Strikes*, [ogledano 11.03.2018], dostopno na <http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/prob/research/moment.pdf>
- [5] Philipp Rindler, *Gatherals and Jacquier's Arbitrage-Free SVI Volatility Surfaces (Matlab implementacija)*, [ogledano 27.12.2017], dostopno na https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/49962-gatherals-and-jacquier-s-arbitrage-free-svi-volatility-surfaces?s_cid=ME_prod_FX
- [6] H. Berestycki, J. Busca, .I Florent, *Asymptotics and calibration of local volatility models*, [ogledano 3.10.2017], dostopno na <http://www.cmap.polytechnique.fr/~rama/dea/bbf.pdf>
- [7] Jim Gatheral *The Volatility Surface, a Practitioner's Guide*, 1. izdaja, John Wiley & Sons, New Jersey, 2006