UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Samo Boh

VREDNOTENJE NA OTC TRGIH

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2017

Zahvala

Zahvaljujem se vsem, ki so mi stali ob strani v času študija, zlasti staršem, prijateljem in profesorjem.

Kazalo

Slike

Tabele

Program dela

Eden glavnih problemov subjektov na OTC trgih je vrednotenje trgovalnih instrumentov, saj cene tu niso eksplicitno določene, ampak se morata stranki o njih med seboj dogovoriti. Dogovarjanja in pogajanja v veliki meri temeljijo na teoriji iger, v različnih modelih OTC trga pa lahko za vrednotenje uporabimo številne matematične in finančno matematične elemente, kot so navadne in stohastične diferencialne enačbe, nelinearni sistemi enačb in teorija stohastičnega optimalnega upravljanja.

V magistrskem delu predstavite model vzpostavitve ravnovesja na trgu z zaporednimi pogajanji med agenti, osnove teorije stohastičnega optimalnega upravljanja in enega od modelov vrednotenja na OTC trgih ter razširitvi modela na tveganju nenaklonjene agente in prisotnost agregatnih likvidnostnih šokov na trgu.

Ljubljana, 2016

dr. Tomaž Košir

Povzetek

Problem vrednotenja vrednostnih papirjev je pomemben za vse udeležence na OTC trgih, saj cene tu niso eksplicitno določene, ampak se morata stranki o višini transakcije med seboj dogovoriti. V delu sta predstavljena model vzpostavitve ravnovesja na trgu z zaporednimi pogajanji med agenti, ki temelji na teoriji iger in bolj napreden model vrednotenja instrumentov na OTC trgih, ki temelji na rezultatih prvega modela, diferencialnih enačbah in teoriji optimalnega upravljanja. Predstavljeni sta tudi dve razširitvi modela na tveganju nenaklonjene agente in prisotnost agregatnih likvidnostih šokov na trgu. Rezultati in ugotovitve so predstavljeni tudi na konkretnih primerih. Za potrebe razširitve modela na tveganju nenaklonjene agente so v delu predstavljene tudi osnove teorije stohastičnega optimalnega upravljanja in primer uporabe na problemu iz matematičnih financ.

Abstract

The valuation of instruments is relevant for all participants of OTC markets, as the prices in these markets are not explicitly given, meaning that agents need to negotiate the price of the trade. In this thesis we present a model based on game theory which finds an equilibrium in a market with sequential bargaining, and a more advanced model of valuation in OTC markets, using the results of sequential bargaining model, differential equations and stochastic optimal control theory. We also present a version of the pricing model with risk averse agents and a version with the presence of aggregate liquidity shocks. The findings are also illustrated with concrete examples. For the purpose of the version with risk averse agents we also introduce some basic stochastic optimal control theory and a well known example from mathematical finance.

Math. Subj. Class. (2010): 91A80, 91G80

Ključne besede: zaporedna pogajanja, ravnovesna cena, stohastično optimalno upravljanje, vrednotenje na prostih (OTC) trgih, nenaklonjenost tveganju, agregatni likvidnostni šoki

Keywords: sequential bargaining, equilibrium price, stochastic optimal control, valuation in OTC markets, risk aversion, aggregate liquidity shocks

Uvod

Prosti trg ali OTC trg je trg, kjer agenti med seboj trgujejo z vrednostnimi papirji, ki ne kotirajo na borzah. So decentralizirani in trgovanje poteka preko različnih komunikacijskih kanalov. Predstavljajo alternativo trgovanju na urejenih borzah. Instrumenti, s katerimi se največ trguje, so obveznice in delnice običajno manjših podjetij, ki ne kotirajo na borzah, raznorazni izvedeni finančni instrumenti in valute. Instrumenti s katerimi se trguje na OTC trgih so v splošnem bolj tvegani od tistih na urejenih borzah. Na OTC trgu agenti lahko trgujejo tako z za to specializiranimi institucijami, kot tudi neposredno med seboj. Zaradi manjšega nadzora in regulacije so OTC trgi tudi bistveno manj transparentni od organiziranih trgov, kar lahko predstavlja nevarnost za finančno stabilnost v obliki prekomernega kopičenja tveganj. Slednje se je še posebej izrazito pokazalo med finančno krizo leta 2008, ko je na OTC trgu močno primanjkovalo kupcev različnih izvedenih finančnih instrumentov, ki jih ni bilo mogoče ustrezno ovrednotiti. Posledično so mnoge banke zašle v velike likvidnostne težave. Tako so predvsem OTC izvedeni finančni instrumenti odigrali pomembno vlogo pri nastanku globalne finančne krize.

Vrednotenje instrumentov na OTC trgu in pogajanja, ki privedejo do izoblikovanja cene, so tema raziskovalnih člankov že več desetletij. Mehanizme za izoblikovanje cene, ki v veliki meri temeljijo na teoriji iger, so podrobno raziskovali že v osemdesetih letih dvajsetega stoletja, rezultati pa so zanimivi in aktualni še danes. Model z zaporednimi pogajanji, ki vodi do ravnovesne cene trga, bo predstavljen tudi v tem magistrskem delu, rezultati pa bodo uporabljeni v nadaljnjih modelih vrednotenja instrumentov na OTC trgih. Opazovali bomo obnašanje tržnih cen v normalnem okolju, v primeru ko so agenti nenaklonjeni tveganju in primer, ko se na trgu pojavljajo agregatni likvidnostni šoki. V modelih bomo uporabili teorijo iger, diferencialne enačbe in teorijo stohastičnega optimalnega upravljanja, katere osnove bomo na kratko tudi predstavili. Rezultati posameznih modelov bodo ponazorjeni tudi grafično.

V prvem poglavju bomo poiskali ravnovesno ceno na trgu z zaporednimi pogajanji, v drugem si bomo pogledali osnove teorije stohastičnega optimalnega upravljanja in jo za boljšo predstavo uporabili na konkretnem primeru iz matematičnih financ.

V tretjem poglavju bomo uporabil znanje iz prvega in drugega poglavja in si pogledali enega od modelov vrednotenja na OTC trgih in razširitvi modela na tveganju nenaklonjene agente in prisotnost agregatnih likvidnostih šokov na trgu.

Poglavje 1

Ravnovesje na trgu z zaporednimi pogajanji

Za začetek si bomo pogledali model z zaporednimi pogajanji, ki v veliki meri temelji na teoriji iger. V modelu se srečujejo pari agentov s skupnim interesom doseganja dogovora o določeni transakciji. Agenti se med seboj srečujejo po določenem stohastičnem mehanizmu, po uspešnih pogajanjih in doseženem dogovoru o transakciji pa trg zapustijo. Podrobneje bom sam model in analizo rezultatov predstavil v nadaljevanju.

Model, temelji na članku [8]. Glavna dodana vrednost je, da model dokaj dobro zajame lastnosti (sicer precej poenostavljenega) OTC trga pa tudi nepremičninskih trgov, in prispeva k boljšemu razumevanju izoblikovanja cene na mikro nivoju. Noviteta v primerjavi s podobnimi modeli tistega časa so dosti bolje razdelana pogajanja med agenti, ki zagotavljajo boljšo primerljivost modela s trgi realnega sveta.

1.1 Opis modela

V modelu nastopata dve vrsti agentov, ki ju poimenujemo agenti tipa 1 in agenti tipa 2. Vsi agenti istega tipa so si med seboj enaki po določenih karakteristikah. Agenti različnih tipov se med seboj srečujejo po določenem mehanizmu. Ob srečanju pride do pogajanja med agentoma glede delitve enote neke dobrine. V primeru, da agenta dosežeta dogovor glede delitve, se oba umakneta s trga in namesto njiju prideta na trg dva nova agenta. Slednje zagotavlja stabilnost populacije in enak odtok in pritok agentov obeh tipov.

Takšno zasnovo lahko interpretiramo na več načinov. Dokaj naravna interpretacija je, da nastopajoča tipa agentov predstavljata prodajalca oziroma kupca neke dobrine. Takšno trgovanje poteka tudi na OTC trgih. Za potrebe modela lahko kompleksnejše trgovanje, ki poteka na OTC trgih, nekoliko poenostavimo. Vsak prodajalec ima eno enoto neke dobrine, medtem ko vsak kupec želi kupiti eno enoto. Korist, ki si jo agenta med seboj razdelita, pa se nahaja v obliki razlike med dejansko ceno, ki je rezultat pogajanj, in najvišjo ceno, ki bi jo bil kupec pripravljen plačati (najnižjo ceno, po kateri bi bil prodajalec pripravljen prodati dobrino).

Opisani trg ima tudi pomembno dimenzijo časa, ki je diskreten. V obdobju, ki ga nek agent preživi na trgu, se čas meri s pozitivnimi celimi števili t $\in \mathbb{Z}^+$, vključujoč $t = 0$, ki predstavlja čas, ko agent vstopi na trg. Zgornje omejitve za čas v modelu ni, torej privzamemo, da lahko agent ostane na trgu neomejeno dolgo. Procesa, ki v modelu temeljita na času, sta proces srečevanja novih agentov in proces pogajanja med agenti.

1.1.1 Proces srečevanja agentov

Na začetku vsakega časovnega obdobja nastopi faza, v kateri se agenti med seboj lahko srečujejo. V tej fazi lahko vsak agent poišče največ enega novega agenta nasprotnega tipa, s katerim se ni pogajal že v preteklem obdobju. V vsakem časovnem obdobju ima vsak agent tipa 1 (2) verjetnost α (β), da sreča novega partnerja, kjer $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Ker želimo analizirati trg v stabilnem stanju, vzamemo α in β, ki sta funkciji velikosti populacij obeh tipov agentov N_1 in N_2 in mehanizma srečevanja, pri čemer slednji ni eksplicitno definiran. V stabilnem stanju sta N_1 in N_2 konstantni v času, kar pomeni, da sta tudi α in β konstantni.

Da v celoti razumemo pomen stabilnega stanja, se moramo zavedati pomena α in β. Pri danih N_1 in N_2, $\alpha = \alpha(N_1, N_2)$ in $\beta = \beta(N_1, N_2)$ določata intenzivnost srečevanja agentov, poleg tega pa - kot bomo videli v nadaljevanju pri analizi ravnovesja - tudi vplivata na odločitve agentov v fazi pogajanja. Predpostavljamo, da imamo na trgu eksogen priliv agentov, kjer v vsakem časovnem obdobju na trg vstopi enaka količina agentov obeh tipov. V primeru, da bi količini bili eksplicitno določeni kako drugače in ne bi bili enaki, bi ena od obeh populacij agentov rasla brez meja glede na populacijo agentov nasprotnega tipa. V stabilnem stanju sta N_1 in N_2 taka, da je odliv agentov s trga, določen z $\alpha = \alpha(N_1, N_2)$ in $\beta = \beta(N_1, N_2)$, enak eksogenemu prilivu agentov na trg. V nadaljevanju se bomo lahko pri obravnavi ravnovesnega stanja prepričali, da za primer linearnega mehanizma srečevanja, kjer je število srečanj v vsakem obdobju enako $k_1 N_1 + k_2 N_2$, za vsak eksogeno dan priliv agentov na trg in vsako začetno razliko d, obstajata v stabilnem stanju taka N_1 in N_2, da velja $N_2 - N_1 = d$.

1.1.2 Proces pogajanj

V določenem časovnem obdobju se lahko agent pogaja z največ enim partnerjem. Pogajanje z določenim partnerjem pa ni nujno omejeno le na eno časovno obdobje. Za vsakega agenta so v vsaki časovni enoti možna naslednja tri stanja:

- agent nima partnerja,
- agent ima novega partnerja,
- agent ima partnerja, s katerim se je pogajal že v prejšnjem časovnem obdobju.

V zadnjih dveh primerih agenta vstopita v fazo pogajanja.

Postopek pogajanja je v vsakem časovnem obdobju enak. Na začetku je eden izmed dvojice agentov naključno izbran, vsakič z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Izbrani agent predlaga določeno delitev enote dobrine. Nasprotni agent se nato odloči, ali se mu zdi predlagana delitev primerna ali ne. Pozitivno odločitev označimo z "D" in negativno z "N". V primeru, da agent ponudbo sprejme, se pogajanja zaključijo in oba agenta se umakneta s trga. V primeru zavrnitve pa se enak postopek ponovi v naslednjem obdobju, razen v primeru, ko vsaj eden od agentov v procesu srečevanja naslednjega obdobja dobi novega partnerja.

1.1.3 Zaporedje dogodkov

Očitno je, da sta procesa srečevanja in pogajanja medsebojno prepletena. V tem delu si bomo ogledali povezavo med njima s pomočjo opisa zaporedja dogodkov za agenta prvega tipa v določenem časovnem intervalu (podoben opis bi veljal za agenta drugega tipa). Najprej nastopi faza srečevanja. V primeru, da agent ni imel partnerja za pogajanje v prejšnjem obdobju, bo z verjetnostjo α v tem obdobju dobil partnerja, z verjetnostjo $1-\alpha$ pa bo brez partnerja ostal tudi v tem obdobju. V primeru, da je agent v prejšnjem obdobju imel partnerja za pogajanje, so v tem obdobju možni trije primeri: z verjetnostjo α bo agent spoznal novega partnerja in pogajanja na novo začel z njim, z verjetnostjo $(1-\alpha)(1-\beta)$ nihče od obstoječih partnerjev ne bo srečal novega partnerja in bosta nadaljevala medsebojna pogajanja, z verjetnostjo $(1-\alpha)\beta$ pa bo agentov partner iz prejšnjega obdobja srečal novega partnerja, agent pa bo pri iskanju neuspešen in bo posledično ostal brez partnerja.

V modelu predpostavimo, da vsakič, ko agent sreča novega partnerja, zapusti starega in začne pogajanja z novim. Pri obravnavi ravnovesja v nadaljevanju bomo videli, da je takšno vedenje racionalno. Agent namreč sreča novega partnerja še preden ve, ali je stari partner še vedno na voljo ali ne. Tako vsakič, ko so pogajanja neuspešna, oba vpletena agenta tvegata, da bosta v naslednjem obdobju ostala brez partnerja in morala na dosego dogovora čakati še nekaj dodatnih časovnih obdobij. To tveganje ustvari dodatni pritisk na oba agenta, da bi čimprej sklenila dogovor. Za ustvarjanje tega pritiska bi lahko sicer uporabili tudi kakšno drugo predpostavko, a tudi uporabljena ne vpliva na kvaliteto dobljenih rezultatov.

1.1.4 Maksimizacija koristnosti

Lahko se zgodi, da agent zapusti trg po t časovnih obdobjih od vstopa na trg z deležem z enote dobrine $(0 \leq z \leq 1, t \geq 0)$, lahko pa agent nadaljuje svojo prisotnost na trgu v neskončnost in se nikoli ne umakne s trga. Ena najpomembnejših predpostavk modela je, da vsi agenti na trgu želijo maksimizirati svojo koristnost. Koristnost, ko agent dobi delež z neke dobrine, je za oba tipa agentov enaka in podana z $\delta^t z$, kjer je $\delta < 1$ diskontni faktor. Na resničnem trgu bi δ lahko predstavljala netvegano obrestno mero. Koristnost agenta, ki nikoli ne zapusti trga, je enaka 0.

1.1.5 Zgodovine agentov

V modelu predpostavljamo, da imajo agenti popoln spomin. Zgodovina posameznega agenta vsebuje zaporedje vseh opazovanj, ki jih je agent zabeležil med svojo prisotnostjo na trgu do trenutnega časovnega obdobja. V vsakem časovnem obdobju agent zabeleži določene informacije in si jih zapomni. Relevantne informacije, ki si jih zabeleži v časovnem obdobju T, si sledijo v naslednjem vrstnem redu:

1. Ali ima partnerja, ali ne? Če ga ima, ali je je imel istega partnerja tudi v prejšnjem obdobju?
2. Kateri izmed agentov je bil v procesu pogajanja izbran, da predlaga delitev?
3. Kakšna je predlagana delitev?
4. Kakšen je bil odziv na predlagano delitev?

Zbrane informacije so dodane obstoječim informacijam, zbranim do obdobja $T - 1$. Zgodovina določenega agenta v obdobju T je torej zaporedje odgovorov na zgoraj naštetа vprašanja do vključno obdobja T. Zanimale nas bodo predvsem zgodovine, po katerih mora agent sprejeti odločitev. Označimo s H_{pi}^T množico vseh možnih zgodovin, ki se končajo z informacijo, da agent v obdobju T ima partnerja za pogajanje in je za podajanje ponudbe izbran agent tipa $i(i = 1, 2)$. Podobno označimo s H_{oi}^T množico vseh možnih zgodovin, ki se končajo z informacijo o podani ponudbi, na katero se more agent tipa $i(i = 1, 2)$ odzvati. Dodajmo še, da se agent spomni identitete svojega partnerja le v primeru, ko je z njim že v procesu pogajanja, ne spominja pa se partnerja v primeru, da se je z njim že pogajal v preteklosti, ko sta se razšla brez dogovora in se nato ponovno srečala. V slednjem primeru agent partnerja obravnava kot novega partnerja.

1.1.6 Strategije

Označimo delež enote dobrine, ki ga prejme agent tipa 1 z x in delež, ki ga prejme agent tipa 2 z $(1-x)$, s čimer dobimo delitev $(x, 1-x)$. Ko torej rečemo, da se partnerja strinjata o delitvi x, s tem mislimo, da partner tipa 1 prejme delež x in partner tipa 2 delež $1-x$ dobrine.

Strategijo agenta tipa 1 definiramo kot zaporedje odločitev in jo označimo z $f = (f^t)_{t=0}^{\infty} \in S_1$. Odločitev, ki nastopi kot t-ta v zaporedju, opiše agentovo ravnanje, pogojeno z informacijami, zbranimi do trenutka, ko mora v času t sprejeti odločitev. To pomeni, da je f^t funkcija definirana na vseh zgodovinah H_{p1}^t in H_{o1}^t. Če je $h^t \in H_{p1}^t$, mora agent podati ponudbo o delitvi in je $f^t(h^t) \in [0,1]$. V primeru, da je $h^t \in H_{o1}^t$ pa se mora agent odločiti, ali bo sprejel ali zavrnil ponudbo, predlagano s strani partnerja, in je $f^t(h^t) \in \{"D", "N"\}$. Strategijo za agenta tipa 2 lahko definiramo analogno in jo označimo z $g \in S_2$.

V nadaljevanju bomo večkrat uporabili pojem *semi-stacionarna strategija*. To je strategija, kjer agent uporabi isto taktiko pogajanja proti vsem partnerjem, ki jih sreča. To pomeni, da zgodovina agenta (koliko časa je bil brez partnerja, število in narava neuspelih pogajalskih poskusov) ne vpliva na strategijo, ki jo bo agent uporabil pri pogajanju z novim partnerjem. Označimo s h^t in $h^{t'}$ dve zgodovini, ki jima je skupno, da se obe zaključita z informacijo, da je agent srečal novega partnerja. Semi-stacionarna strategija f je strategija, ki za vsaki dve zgodovini h^T in $h^{T'}; (T-t = T'-t')$, ki sta enaki h^t in $h^{t'}$ do časa t, in med seboj identični od časa t dalje, velja $f^T(h^T) = f^{T'}(h^{T'})$. Z $\bar{S}_i$ označimo še množico vseh semi-stacionarnih strategij agenta tipa i.

1.1.7 Ravnovesje

Naj bo $f \in S_1$ strategija, ki jo uporablja agent tipa 1, in $g \in \bar{S}_2$ semi-stacionarna strategija. Potem označimo z $U_1(f,g)(h^T)$ pričakovano koristnost v času T, agenta tipa 1 z zgodovino h^T, ki uporablja strategijo $f \in S_1$, pri čemer njegovi pogajalski partnerji uporabljajo semi-stacionarno strategijo $g \in \bar{S}_2$. Možnost, da agentu v času $t > T$ uspe dogovor x s trenutnim partnerjem, je v $U_1(f,g)(h^T)$ vključena z izrazom $\delta^{t-T}x$, uteženim s pripadajočo verjetnostjo. Pričakovana vrednost $U_1(f,g)(h^t)$ je odvisna od zaporedij dveh slučajnih spremenljivk. Prvo zaporedje določa intenzivnost, s katero se združujejo novi pogajalski pari in razhajajo obstoječi (pri danih parametrih α in β), drugo pa določa, kateri izmed partnerjev bo izbran, da poda ponudbo. Tu velja poudariti, da je koncept pričakovane koristnosti $U_1(f,g)(h^T)$ smiseln le v primeru, ko je g semi-stacionarna strategija. V nasprotnem primeru bi bile pomembne tudi zgodovine partnerjev agenta, o katerih pa le-ta nima nobenih informacij, kar bi močno zmanjšalo verodostojnost koncepta $U_1(f,g)(h^T)$. V primeru da vzamemo $g \in S_2$ in $f \in \bar{S}_1$, lahko na podoben način definiramo pričakovano koristnost agenta tipa 2 $U_2(f,g)(h^T)$.

V tej točki je model dovolj dobro definiran, da lahko podamo naslednjo definicijo ravnovesja trga.

Definicija 1.1.7.1. *Ravnovesje trga je par semi-stacionarnih strategij (f_*, g_*), kjer vsi agenti tipa 1 uporabljajo strategijo f_* in vsi agenti tipa 2 strategijo g_* ter za vse možne zgodovine h^T velja,*

$$\begin{aligned} U_1(f_*, g_*)(h^T) &\geq U_1(f, g_*)(h^T) \ \textit{za vse } f \in S_1, \\ U_2(f_*, g_*)(h^T) &\geq U_2(f_*, g)(h^T) \ \textit{za vse } g \in S_2. \end{aligned}$$

Pri iskanju rešitve (f_*, g_*) se bomo torej omejili na model, kjer vsi agenti uporabljajo semi-stacionarne strategije, natančneje, agenti tipa 1 uporabljajo f_* in agenti tipa 2 g_*. Brez te omejitve ne moremo obravnavati procesa pogajanj kot pogajanje s popolnimi informacijami. V modelu brez te predpostavke agenti ne bi imeli vseh relevantnih informacij in analiza rešitve bi bila veliko kompleksnejša. Iz definicije ravnovesja opazimo, da ne glede na zgodovino h^t (tudi v primeru, da zgodovina ni konsistentna z f_*), agent ne more izboljšati svojega izkupička z uporabo katerekoli druge strategije $f \neq f_*$.

1.2 Pogajanje z naključnim izborom predlagatelja

Pogajanje med partnerjema je eden ključnih segmentov modela. V tem delu bomo predstavili proces pogajanj in izpeljali popolno ravnovesje, v nadaljevanju pa bomo rešitev iz tega dela s pomočjo potrebnih prilagoditev vključili v model do sedaj opisanega trga.

V igri nastopata dva igralca - igralec 1 in igralec 2. Med seboj se pogajata o delitvi enote neke dobrine. Pogajanje poteka v diskretnem času, kjer označimo posamezna obdobja s $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. V vsakem obdobju je eden od igralcev z verjetnostjo 1/2 neodvisno od izbire v prejšnjih obdobjih izbran kot predlagatelj delitve enote. V istem obdobju mora nasprotni igralec sprejeti ("D") ali zavrniti ("N") predlagano ponudbo. V primeru, da se igralca dogovorita za delitev x, se igra zaključi z izidom (x, t), kar pomeni, da v času t igralec 1 prejme delež enote x in igralec 2 delež $1 - x$.

Označimo z $u_i(z, t)$ koristnost, ki jo igralec i dobi z izkupičkom deleža z v času t. Tako sta koristnosti naših dveh igralcev v času t enaki $u_1(x, t)$ in $u_2(1 - x, t)$. Predpostavimo, da je v času $t = 0$ koristnost za vsak delež z enaka $u_i(z, 0) = z$ in za kasnejša obdobja $u_i(z, t) \in [0, 1]$. Nadalje predpostavimo, da sta $u_i(z, t)$ in $z - u_i(z, t)$ strogo naraščajoči z z, da je koristnost nikoli zaključenih pogajanj enaka $u_i(0, \infty) = 0$ in da je $u_i(z, t)$ stacionarna skozi čas. Slednja predpostavka pomeni, da je $u_i(z, 0) \geq u_i(z', 1)$ izključno v primeru, ko velja $u_i(z, t) \geq u_i(z', t + 1)$ za vsak t. Predpostavimo še, da oba igralca skušata maksimizirati svojo pričakovano koristnost.

Strategija $f = (f^t)_{t=0}^{\infty}$ za opisano igro ima enako strukturo kot strategija, opisana v prejšnjem poglavju. Definicija zgodovine h^t se tu nekoliko razlikuje, saj vsebuje le odgovore na vprašanja zadnjih treh točk iz 1.1.5.

Naslednja trditev nam zagotavlja obstoj, enoličnost in karakterizacijo popolnega ravnovesja opisane igre. Trditev je analogna glavnemu izreku iz članka [8], ki podrobno obravnava popolno ravnovesje igre pogajanj. V članku najdemo tudi dokaz trditve.

Trditev 1.2.0.1. *Sistem*

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}u_1(x, 1) + \frac{1}{2}u_1(y, 1), \\ 1 - x &= \frac{1}{2}u_2(1 - y, 1) + \frac{1}{2}u_2(1 - x, 1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

ima enolično rešitev (x_*, y_*), kjer velja $y_* \leq x_*$ in enolično popolno ravnovesje igre (f_*, g_*) je

$$f_*^t(h^t) = \begin{cases} x_*, & h^t \in H_{p1}^t, \\ "D", & h^t \in H_{o1}^t \text{ in ponudba je } y \geq y_*, \\ "N", & h^t \in H_{o1}^t \text{ in ponudba je } y < y_*, \end{cases}$$

$$g_*^t(h^t) = \begin{cases} y_*, & h^t \in H_{p2}^t, \\ "D", & h^t \in H_{o2}^t \text{ in ponudba je } x \leq x_*, \\ "N", & h^t \in H_{o2}^t \text{ in ponudba je } x > x_*, \end{cases}$$

Enačba (1.1) pomeni, da sta x_* in y_* takšna, da je za igralca 1 vseeno, če ponudbo y_* sprejme ali zavrne, saj bo v naslednjem obdobju z enakima verjetnostma zmožen pridobiti x_* in y_*. Podobno je igralec 2 indiferenten, če dobi $(1 - x_*)$ v tem obdobju ali pa ponudbo zavrne in dobi $1 - x_*$ ali $1 - y_*$ v naslednjem obdobju.

1.3 Ravnovesje na trgu

To poglavje vključuje glavni izrek, ki zagotavlja obstoj, enoličnost in karakterizacijo ravnovesja na trgu.

Izrek 1.3.0.1. *Obstaja enolično ravnovesje na trgu* (f_*, g_*) *in ravnovesni strategiji sta*

$$f_*^t(h^t) = \begin{cases} x_*, & h^t \in H_{p1}^t, \\ "D", & h^t \in H_{o1}^t \textit{ in ponudba je } y \geq y_*, \\ "N", & \textit{sicer}, \end{cases}$$

$$g_*^t(h^t) = \begin{cases} y_*, & h^t \in H_{p2}^t, \\ "D", & h^t \in H_{o2}^t \textit{ in ponudba je } x \leq x_*, \\ "N", & \textit{sicer}; \end{cases}$$

kjer

$$x_* = \frac{2(1-\delta) + \delta\alpha - \delta(1-\delta)(1-\alpha)(1-\beta)}{2(1-\delta)+\delta\alpha+\delta\beta},$$
$$y_* = \frac{\delta\alpha + (1-\delta)\delta(1-\alpha)(1-\beta)}{2(1-\delta)+\delta\alpha+\delta\beta}.$$

Preostanek poglavja je namenjen dokazu zgornjega izreka. Lastnosti ravnovesja in pomen rešitev x_* in y_* bodo predstavljeni v nadaljevanju.

Spomnimo se, da sta strategiji, uporabljeni v ravnovesju, semi-stacionarni. Opazimo, da tudi agenti pri igri pogajanj opisani v poglavju 1.2 uporabljajo semi-stacionarne strategije, saj uporabijo isto strategijo pri pogajanju z vsemi svojimi partnerji. Označimo semi-stacionarni strategiji iz igre pogajanj iz poglavja 1.2, ki ustrezata strategijama f in g, z $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$.

Dokaz izreka sestoji iz treh trditev. Prva nam bo zagotovila, da vsako ravnovesje na trgu (f, g) vključuje strategiji $(\tilde{f}, \tilde{g})$ iz popolnega ravnovesje igre pogajanj iz poglavja 1.2, z ustrezno izbranimi funkcijami koristnosti. Druga trditev bo s pomočjo trditve 1.3.0.2 pokazala, da je popolno ravnovesje igre pogajanj enako $(\tilde{f}_*, \tilde{g}_*)$, kjer sta f_* in g_* strategiji iz izreka. Prvi dve trditvi torej zagotavljata enoličnost in karakterizirata ravnovesje na trgu. Tretja trditev pa zagotavlja obstoj ravnovesja na trgu in pokaže, da sta ravnovesni strategiji prav (f_*, g_*).

Pred samimi trditvami je potrebnih še nekaj predpostavk. Pri danih strategijah $f \in S_1$ in $g \in \bar{S}_2$, predstavimo posebno notacijo za pričakovano koristnost v dveh posebnih primerih. Definiramo

$$V_1(f,g) = U_1(f,g)(h_-^0), \; W_1(f,g) = U_1(f,g)(h_+^0),$$

kjer h^0_- vključuje le informacijo, da agent v času 0 nima partnerja in h^0_+ informacijo, da agent v času 0 ima partnerja. V primeru, da sta podana $g \in S_2$ in $f \in \bar{S}_1$, lahko analogno definiramo $V_2(f,g)$ in $W_2(f,g)$. Obravnavajmo sedaj agenta tipa 1 in naj bo h^T zgodovina, ki vsebuje informacijo, da ima agent v času T partnerja. Pri danih $f \in S_1$ in $g \in \bar{S}_2$ lahko pričakovano vrednost $U_1(f,g)(h^T)$ izračunamo po naslednjem postopku. Za strategiji lahko vzamemo strategiji, ki ustrezata $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ pogajalske igre iz poglavja 1.2. V primeru, da v igri pogajanj po zgodovini h^T uporabljamo $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$, obstaja določena porazdelitev izidov (x,t). Označimo s τ slučajno spremenljivko, ki predstavlja čas (število obdobij) po katerem se partnerja razideta. To pomeni, da bo τ zavzel vrednost t_0 ob predpostavki, da v naslednjih t_0 obdobjih med partnerjema ni dosežen dogovor in se partnerja razideta v obdobju $T+t_0$. Pogojno na dogodek, da dogovor med partnerjema ni dosežen, torej velja $p(\tau > t_0) = \gamma^{t_0}$, kjer $\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)$. Ob porazdelitvah (x,t) in τ lahko sedaj določimo pričakovano vrednost $U_1(f,g)(h^T)$.

$$\begin{aligned} U_1(f,g)(h^T) = & \sum_{(x_0,t_0)} p[(x,t)=(x_0,t_0)]\{\delta^{t_0} x_0 p(\tau > t_0) \\ & + \sum_{n=1}^{t_0} \delta^n p(\tau > n-1)[\alpha W_1(f,g) + \beta(1-\alpha)V_1(f,g)]\} \\ = & E_{(x,t)}(\gamma^t \delta^t x) + E_{(x,t)} \sum_{n=1}^{t} \gamma^{n-1}\delta^n [\alpha W_1(f,g) \\ & + \beta(1-\alpha)V_1(f,g)]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Pričakovana vrednost v zadnji vrstici je odvisna od porazdelitve izidov (x,t) igre pogajanj, v kateri uporabljamo strategiji $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ ob relevantni zgodovini obravnavanih partnerjev. Prvi člen desne strani enačbe predstavlja možnost, da se bo tekoči pogajalski proces zaključil uspešno, med tem ko drugi člen predstavlja možnost, da se pogajanja končajo neuspešno in se partnerja na neki točki razideta. V slednjem primeru je ob točki razhoda partnerjev pričakovana koristnost W_1 ali V_1, odvisno od tega, ali agent v naslednjem obdobju dobi novega partnerja ali ne.

Formulo 1.2 smo izpeljali upoštevajoč, da sta strategiji semi-stacionarna, a jo lahko razširimo. Označimo $f \in \bar{S}_1, g \in \bar{S}_2$ in naj bo h^T kot prej. Naj bo $f' \in S1$ strategija, ki se lahko razlikuje od f le v zgodovinah, ki po zgodovini h^T vsebujejo informacijo, da ima agent še vedno istega partnerja kot ga je imel v obdobju T. To pomeni, da se lahko strategija f' razlikuje od f le v času trajanja enega procesa pogajanj. Formula 1.2 tako velja tudi za $U_1(f',g)(h^T)$. Pričakovana vrednost je v tem primeru odvisna od porazdelitve izidov (x,t) igre pogajanj z uporabo pogajalskih strategij f' za tekoči proces pogajanja in $\bar{g}$. Pričakovani vrednosti $W_1(f,g)$ in

$V_1(f,g)$ ostaneta enaki kot prej, saj se f' razlikuje od f le v tekočem procesu pogajanja. Analogno bi lahko izpeljali formulo za pričakovano koristnost $U_2(f,g)(h^T)$ agenta tipa 2.

Trditev 1.3.0.2. *Če je par (f,g) ravnovesje na trgu, je $(\tilde{f},\tilde{g})$ popolno ravnovesje igre pogajanj iz poglavja 1.2 s funkcijama koristnosti*

$$\begin{aligned} u_1(z,t) &= \gamma^t\delta^t + \sum_{n=1}^{t} \gamma^{n-1}\delta^n[\alpha W_1 + \beta(1-\alpha)V_1), \\ u_2(z,t) &= \gamma^t\delta^t + \sum_{n=1}^{t} \gamma^{n-1}\delta^n[\alpha W_2 + \beta(1-\alpha)V_2) \end{aligned}$$

kjer $V_i = V_i(f,g)$, $W_i = W_i(f,g)$ in $\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)$.

Dokaz. Najprej opazimo, da u_1 in u_2 zadoščata pogojem iz poglavja 1.2. Predpostavimo sedaj, da $(\tilde{f},\tilde{g})$ ni popolno ravnovesje igre pogajanj. Potem obstaja zgodovina $\tilde{h}^T$ v igri pogajanj, za katero ima eden od igralcev, recimo igralec 1, strategijo $\tilde{f}_0$, različno od $\tilde{f}$, za katero velja

$$\tilde{U_1}(\tilde{f}_0,\tilde{g})(\tilde{h}^T) > \tilde{U_1}(\tilde{f},\tilde{g})(\tilde{h}^T). \tag{1.3}$$

Definirajmo naslednjo pogajalsko strategijo f': agent v pogajanju s svojim prvim partnerjem uporabi strategijo $\tilde{f}_0$, v pogajanju z vsemi naslednjimi agenti pa strategijo $\tilde{f}$. Naj bo h^T zgodovina na trgu za agenta tipa 1, ki je v svojem prvem obdobju dobil partnerja in se od takrat dalje z njim pogaja v skladu z zgodovino $\tilde{h}^T$.

Iz 1.2 in izbire $u_1(z,t)$ sledi

$$U_1(f,g)(h^T) = E(u_1(z,t)) = \tilde{U_1}(\tilde{f},\tilde{g})(\tilde{h}^T), \tag{1.4}$$

kjer zadnja enakost sledi iz definicije $\tilde{U_1}$ in pričakovano vrednost gledamo glede na porazdelitev izidov v igri z $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ po zgodovini $\tilde{h^T}$. Iz izbire f' ter enačb 1.3 in 1.4 sledi

$$\begin{aligned} U_1(f',g)(h^T) &= \tilde{U_1}(\tilde{f}_0,\tilde{g})(\tilde{h}^T) > \tilde{U_1}(\tilde{f},\tilde{g})(\tilde{h}^T) \\ &= U_1(f,g)(h^T), \end{aligned}$$

kar je protislovno s predpostavko, da je (f,g) ravnovesje na trgu. □

Trditev 1.3.0.3. *Če obstaja ravnovesje na trgu, je enolično in podano s parom pogajalskih strategij (f_*,g_*) iz izreka 1.3.0.1.*

Dokaz. Naj bo par strategij (f, g) ravnovesje na trgu. Po trditvi 1.3.0.2 je par $(\tilde{f}, \tilde{g})$ popolno ravnovesje igre pogajanj s funkcijama koristnosti u_1 in u_2 definiranima v trditvi. To pomeni, da sta strategiji $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ določeni z vrednostma x in y, ki zadoščata enačbama

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}u_1(x,1) + \frac{1}{2}u_1(y,1) = \frac{1}{2}\gamma\delta(x+y) + \delta[\alpha W_1 + \beta(1-\alpha)V_1], \\ 1-x &= \frac{1}{2}u_2(1-y,1) + \frac{1}{2}u_2(1-x,1) \\ &= \frac{1}{2}\gamma\delta(1-x+1-y) + \delta[\beta W_2 + \alpha(1-\beta)V_2]. \end{aligned}$$

Pri takšnih strategijah so $W_i = W_i(f,g)$ in $V_i = V_i(f,g)$ podane kot

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ W_2 &= \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1-y), \\ V_1 &= \delta[(1-\alpha)V_1 + \alpha W_1], \\ V_2 &= \delta[(1-\beta)V_2 + \beta W_2]. \end{aligned}$$

Tako smo dobili šest enačb s šestimi neznankami, iz katerih z nekaj računanja dobimo, da sta x in y enaka x_* in y_* iz izreka 1.3.0.1

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(1-\delta) + \delta\alpha - \delta(1-\delta)(1-\alpha)(1-\beta)}{2(1-\delta) + \delta\alpha + \delta\beta}, \\ y &= \frac{\delta\alpha + (1-\delta)\delta(1-\alpha)(1-\beta)}{2(1-\delta) + \delta\alpha + \delta\beta}. \end{aligned}$$

Sledi, da če je par strategij (f, g) ravnovesje na trgu, mora biti enak paru (f_*, g_*) iz izreka 1.3.0.1. □

Trditev 1.3.0.4. *Par strategij (f_*, g_*) iz izreka 1.3.0.1 je ravnovesje na trgu.*

Dokaz. Obravnavajmo agenta tipa 1. Najprej bomo pokazali, da se v primeru, ko vsi agenti uporabljajo strategijo g_*, agent tipa 1 sooča z odločevalnim problemom Markova. Nato bomo s pomočjo že dobljenih rezultatov izpeljali optimalno politiko odločanja za odločevalni problem. Za konec pa bomo ugotovili, da je dobljena optimalna politika odločanja enaka strategiji f_*. Problem, s katerim se sooča agent tipa 1, lahko opišemo z naslednjim odločevalnim problemom Markova. Imamo prostor stanj $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, kjer e_1 predstavlja stanje, v katerem agent nima partnerja, e_2 stanje, v katerem agent ima partnerja in mora podati ponudbo, e_3 stanje, v katerem agent ima partnerja in mora sprejeti ali zavrniti njegovo ponudbo y_* in e_4 stanje, ko je med partnerjema dosežen sporazum (absorbirajoče stanje). Množica akcij vsebuje dve akciji $A = \{$končaj pogajanja, nadaljuj s pogajanji$\}$. Prva akcija pomeni, da agent uspešno zaključi pogajanja z dogovorom, tako da sprejme ponudbo y_* ali ponudi x_*, druga pa, da se proces nadaljuje. V vsakem časovnem obdobju t je agent v določenem stanju $e^t \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ in sprejme odločitev $a_t \in A$. Proces se začne v stanju $e_1 \in \{e_1, e_2, e_3\}$ in poteka v skladu s prehodnimi verjetnostmi $p(e^{t+1} = e_4 | a^t =$ končaj pogajanja$) = 1$ in $p(e^{t+1} = e^t | e^t = e_j, a =$ nadaljuj s pogajanji$)$, ki so podane v naslednji matriki.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1-\alpha & \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha & 0 \\
(1-\alpha)\beta & \frac{1}{2}(1-(1-\alpha)\beta) & \frac{1}{2}(1-(1-\alpha)\beta) & 0 \\
1-\alpha & \frac{1}{2}(1-(1-\alpha)\beta) & \frac{1}{2}(1-(1-\alpha)\beta) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Izkupiček v določenem obdobju je podan s

$$\phi(e^t, a^t) = \begin{cases} x_*, & e^t = e_1, \ a^t = stop, \\ y_*, & e^t = e_2, \ a^t = stop, \\ 0, & sicer. \end{cases}$$

Cilj je poiskati politiko odločanja D, $D(e^0, ..., e^t, t) = a^t$, ki ob začetnem stanju e^0 maksimizira $\Phi(D, e^0) = E[\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \phi(e^t, a^t)]$. Znano je, da za tak odločevalni problem Markova obstaja stacionarna optimalna politika odločanja [1]. Obstaja le omejeno število stacionarnih politik odločanja in za vse velja, da uporabijo akcijo "končaj pogajanja"v primeru, da e^t pripada podmnožici množice $\{e_1, e_2, e_3\}$. Z rutinskim izračunom pridemo do rezultata, da sta optimalni naslednji dve strategiji:

- $D^* =$ "končaj pogajanja", ko je $e^t \in \{e_2, e_3\}$,

- $D' =$ "končaj pogajanja", ko je $e^t = e_2$,

kjer so izkupički strategije D^* enaki

$$\Phi(D^*, e_1) = \frac{\frac{1}{2}\alpha(x_* + y_*)}{1 - (1-\alpha)\delta}; \quad \Phi(D^*, e_2) = x_*; \quad \Phi(D^*, e_3) = y_*.$$

Vsaka strategija $f \in S_1$ implicira politiko odločanja D in za vsako zgodovino h^T, ki se konča v enem izmed stanj e_1, e_2, e_3 je $U_1(f, g_*)(h^T) = \Phi(D, e^0 = e_i)$. Opazimo tudi, da je optimalna politika odločanja D^* natanko način odločanja predpisan z optimalno strategijo f_*. Sledi, da je po zgodovini $h^t \in H^t_{p1}$ in $h^t \in H^t_{o1}$, kjer je bila zadnja ponudba enaka y_*, strategija f_* optimalna. Pri dani zgodovini $h^t \in H^t_{o1}$, kjer je ponudba enaka $y \neq y_*$, mora agent primerjati ponudbo y z

$$(1-\alpha)\beta\delta\Phi(D^* e_1) + \frac{1}{2}(1-(1-\alpha)\beta)\delta[\Phi(D^*, e_2) + \Phi(D^*, e_3)].$$

Če vstavimo v izraz vrednosti za $\Phi(D^*, e_i)$, dobimo vrednost za y_*. Sledi, da je optimalno zavrniti ponudbe $y < y_*$ in sprejeti $y > y_*$, kar narekuje tudi strategija f_*. $\square$

1.4 Analiza rešitve

Po izreku 1.3.0.1 agent tipa 1 ob dogovoru dobi delež

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{2(1-\delta) + \delta\alpha - \delta(1-\delta)(1-\alpha)(1-\beta)}{2(1-\delta) + \delta\alpha + \delta\beta}, \text{ ali} \\ y_* &= \frac{\delta\alpha + (1-\delta)\delta(1-\alpha)(1-\beta)}{2(1-\delta) + \delta\alpha + \delta\beta}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

enote dobrine, odvisno od naključnega izbora agenta, ki poda ponudbo v fazi pogajanja. V ravnovesju dogajanje na trgu poteka brez zastojev - eden izmed partnerjev poda ponudbo x_* ali y_* in drugi partner ponudbo takoj sprejme. Očitno je, da je ponudba x_* višja od ponudbe y_*, kar ponazarja prednost, ki jo ima agent v primeru, ko je izbran, da poda ponudbo. Omenjena razlika je lahko v primeru, ko je stopnja neučakanosti majhna ali je obdobje med pogajanji kratko, zelo majhna.

Vrednost, ki jo agent tipa 1 pridobi s sodelovanjem na trgu, je

$$V_1 = \frac{\delta\alpha}{1-\delta+\delta\alpha}\left(\frac{1}{2}x_* + \frac{1}{2}y_*\right) = \frac{\delta\alpha}{2(1-\delta) + \delta\alpha + \delta\beta}. \tag{1.6}$$

Podobno je vrednost za agenta tipa 2

$$V_2 = \frac{\delta\beta}{1-\delta+\delta\beta}\left(\frac{1}{2}(1-x_*) + \frac{1}{2}(1-y_*)\right) = \frac{\delta\beta}{2(1-\delta) + \delta\alpha + \delta\beta}.$$

V nadaljevanju si bomo pogledali, kako spreminjanje parametrov modela vpliva na vrednosti x_* in V_i. Razlog, da agenti želijo doseči dogovor čimprej, je vrednost, ki jo ima čas, in odlašanje dogovora pomeni izgubo časa. Izguba časa se odraža na dva načina. Prvi je direktna izguba časa, natančneje obdobja med dvema pogajanjema, drugi pa je indirektna izguba, ki nastane zaradi možnosti izgube trenutnega partnerja in posledičnega nadaljnjega čakanja na novega partnerja. Ravnovesna rešitev je torej močno odvisna od relativne pomembnosti teh dveh elementov, ki sta v modelu zastopana z eksogeno podanimi parametri δ, α in β.

1.4.1 Vloga parametra δ

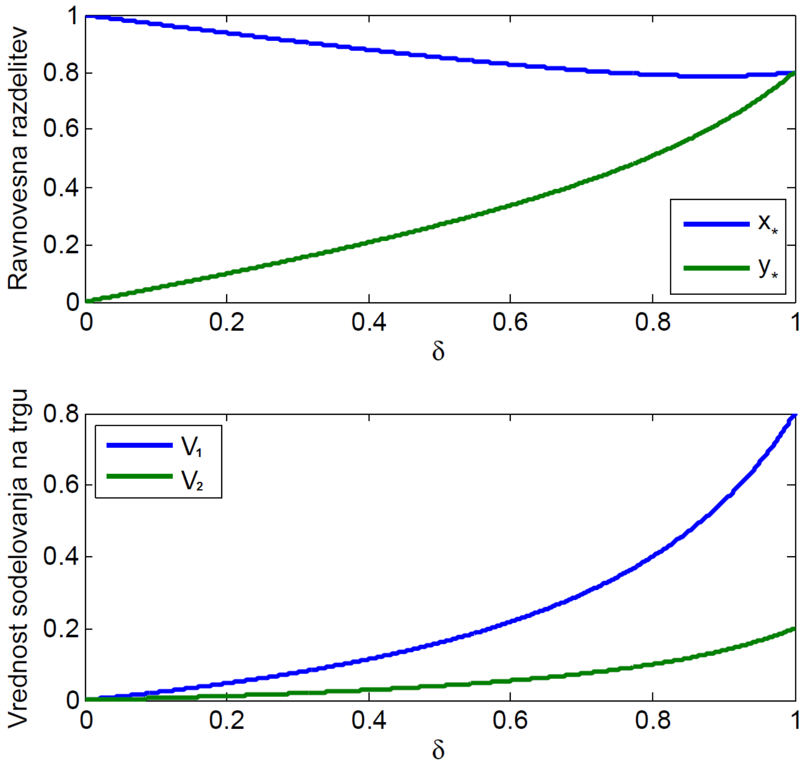
Stopnja neučakanosti je v modelu določena s parametrom δ.

V primeru, ko je δ blizu 1, je stopnja neučakanosti majhna in vrednosti x_* in y_* sta v veliki meri odvisni od parametrov α in β. Enota je tako razdeljena glede na relativno višino parametrov α in β. To potrjuje tudi naslednja limita

$$\lim_{\delta \to 1} x_* = \lim_{\delta \to 1} y_* = \lim_{\delta \to 1} V_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \tag{1.7}$$

V primeru, ko je δ blizu 0, pa je stopnja neučakanosti velika, saj je vrednost direktne izgube časa velika, kar sili agente k čimprejšnjemu sprejemanju dogovorov. V tem primeru imata agenta podobno pogajalsko moč, ne glede na parametra α in β in je glavni faktor, ki določa dogovor med partnerjema, naključna izbira agenta, ki bo podal ponudbo. To se odraža v naslednjih limitah.

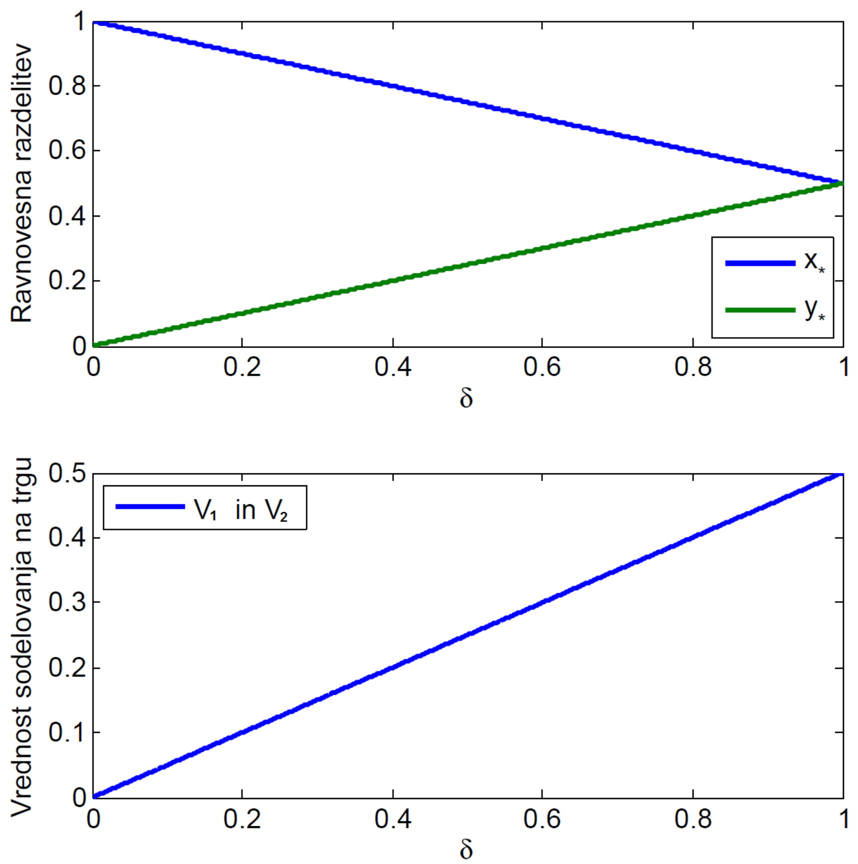
$$\lim_{\delta \to 0} x_* = 1, \quad \lim_{\delta \to 0} y_* = 0, \quad \lim_{\delta \to 0} V_1 = 0. \tag{1.8}$$



Slika 1.1: Ravnovesna delitev dobrine in vrednost sodelovanja na trgu v odvisnosti od parametra δ pri $\alpha = 0.4$ in $\beta = 0.1$

Zgornje zakonitosti prikazuje tudi slika 1.1. Za parametra $\alpha = 0.4$ in $\beta = 0.1$ sta prikazani ravnovesna razdelitev dobrine in vrednost sodelovanja na trgu za oba agenta v odvisnosti od parametra δ, ki se giblje v intervalu $[0, 1]$.

Zanimivo je pogledati tudi primer, ko agenti nimajo problemov z iskanjem partnerjev. Na takšnem trgu, kjer velja $\alpha = \beta = 1$, vsak agent v vsakem obdobju pridobi novega partnerja. Kot je razvidno iz slike 1.2, imata tu oba partnerja enako pogajalsko moč, v prednosti pa je zaradi časovnega pritiska (parameter δ) agent, ki je izbran, da poda ponudbo. Vrednost sodelovanja na trgu pa je tu enaka za oba agenta, saj velja $\alpha = \beta$.



Slika 1.2: Ravnovesna delitev dobrine in vrednost sodelovanja na trgu v odvisnosti od parametra δ pri $\alpha = \beta = 1$

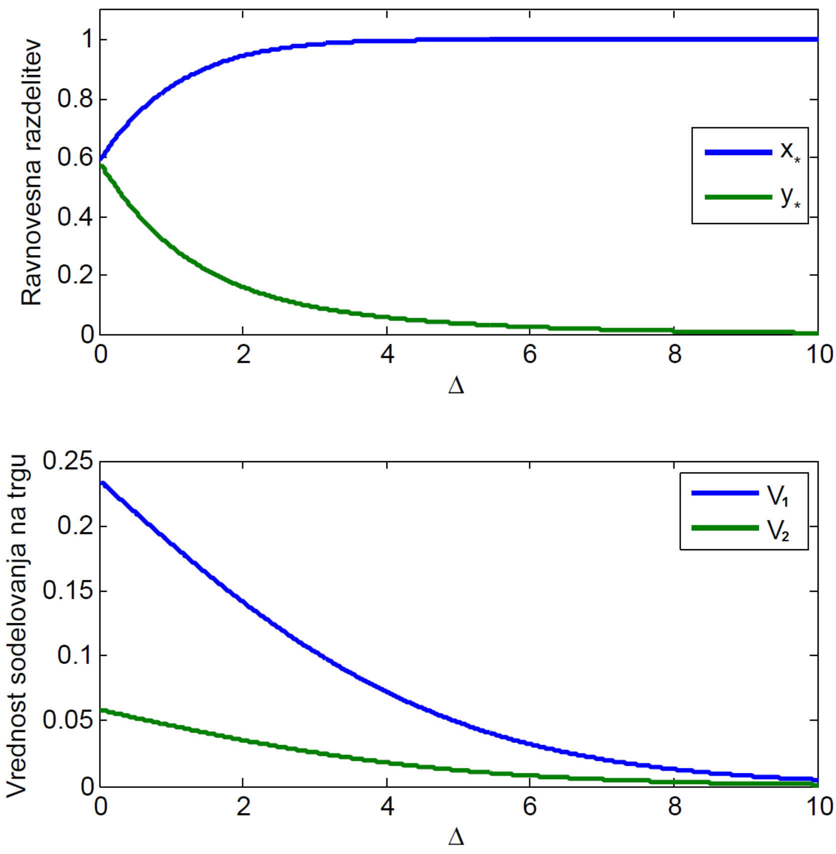
1.4.2 Dolžina obdobja pogajanja

Ravnovesna rešitev je odvisna tudi od pomembnosti dolžine obdobja pogajanja za oba partnerja. Za nazornejšo ponazoritev označimo z Δ dolžino enega obdobja pogajanja in naj bo $\alpha(\Delta) = \alpha\Delta$, $\beta(\Delta) = \beta\Delta$ in $\delta(\Delta) = e^{-r\Delta}$, kjer sta α in β stopnji prihodov agentov obeh tipov in je r subjektivna stopnja pomembnosti časa. Če vstavimo $\alpha(\Delta)$, $\beta(\Delta)$ in $\delta(\Delta)$ v (1.5) in (1.6), dobimo ravnovesno rešitev kot funkcijo Δ. Ker je v realnosti smiselno predpostaviti, da je dolžina posameznega obdobja relativno majhna, si poglejmo obnašanje ravnovesne rešitve v limiti, ko gre dolžina obdobja proti 0. Z uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo

$$\lim_{\Delta \to 0} x_*(\Delta) = \lim_{\Delta \to 0} y_*(\Delta) = \frac{r+\alpha}{2r+\alpha+\beta}, \quad \lim_{\Delta \to 0} V_1(\Delta) = \frac{\alpha}{2r+\alpha+\beta} \tag{1.9}$$

Sledi, da se v primeru, ko je dolžina obdobja med dvema zaporednima pogajanjema zelo kratka, enota dobrine razdeli približno v razmerju $(r+\alpha) : (r+\beta)$.

Zgornje ugotovitve so prikazane tudi na sliki 1.3. Grafa prikazujeta ravnovesno delitev dobrine in vrednost sodelovanja na trgu v odvisnosti od dolžine obdobja pogajanj za vhodne parametre $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$ in $r = 0.6$.



Slika 1.3: Ravnovesna delitev dobrine in vrednost sodelovanja na trgu v odvisnosti od dolžine obdobja pogajanj pri parametrih $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$ in $r = 0.6$

1.4.3 Ravnovesna rešitev kot funkcija N_1 in N_2

Spomnimo se, da lahko parametra α in β gledamo tudi kot funkciji velikosti populacij N_1 in N_2 agentov obeh tipov. Natančna formulacija je odvisna od tehnologije srečevanja oziroma iskanja novih partnerjev, ki pa je v tem modelu nismo eksplicitno definirali. Predpostavimo, da se v vsakem obdobju sreča določeno število parov agentov M, ki je skozi obdobja konstantno. Predpostavimo tudi, da imajo v vsakem obdobju vsi agenti istega tipa enako verjetnost, da dobijo partnerja. To pomeni $\alpha(\Delta) = M/N_1(\Delta)$ in $\beta(\Delta) = M/N_2(\Delta)$. Če vstavimo to v enačbi 1.7 in 1.9, dobimo

$$\lim_{\delta \to 1} x_* = \lim_{\delta \to 1} y_* = \frac{(M/N_1)}{(M/N_1) + (M/N_2)} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta \to 0} x_* = \lim_{\Delta \to 0} y_* &= \frac{r + (M/N_1)}{2r + (M/N_1) + (M/N_2)} \\ &= \frac{(rN_1N_2/M) + N_2}{(2rN_1N_2/M) + N_1 + N_2}.\end{aligned}$$

V skladu s pričakovanji pomeni večje število agentov tipa 2 N_2 na trgu v primerjavi s številom agentov tipa 1 N_1 večji delež za agente tipa 1 v ravnovesni rešitvi. To pomeni, da ima tip agentov, ki je na trgu v manjšini, v izhodišču prednost pri pogajanjih in v ravnovesju iztrži večji delež enote.

Poglavje 2

Stohastično optimalno upravljanje

V tem poglavju bomo obravnavali probleme stohastičnega optimalnega upravljanja, rezultate pa bomo uporabili v nadaljnji obravnavi modelov vrednotenja na OTC trgih. Najprej si bomo pogledali osnovno strukturo problemov optimalnega upravljanja, metode reševanja tovrstnih problemov, za konec pa si bomo pogledali še konkreten primer iz matematičnih financ.

2.1 Problemi optimalnega upravljanja

V splošnem problemi optimalnega upravljanja vsebujejo naslednje štiri elemente:

- **Proces stanj** $Z(\cdot)$. Ta proces vsebuje minimalne informacije, ki jih potrebujemo za opis problema. Običajno je $Z(t) \in \mathbb{R}$ odvisen od kontrolnega procesa in ima ob danem kontrolnem procesu markovsko strukturo. Običajno je dinamika tega procesa določena z enačbo. Za naše potrebe bomo obravnavali le procese stanj, podane z običajno ali stohastično diferencialno enačbo. Proces stanj je lahko načeloma podan tudi s parcialnimi diferencialnimi enačbami, a so problemi v tem primeru neskončno dimenzionalni.

- **Kontrolni proces** $\nu(\cdot)$. Za kontrolni proces mora obstajati kontrolna množica U, ki vsebuje vse možne vrednosti kontrolnega procesa v vseh časih t. Vsebina množice U je odvisna od narave kontrolnega procesa $\nu(t)$. Poleg pogoja $\nu(t) \in U$ lahko za kontrolni proces obstajajo še drugi pogoji. V primeru stohastičnega optimalnega upravljanja mora biti proces prilagojen določeni filtraciji, s katero modeliramo tok informacij. Možna je tudi zahteva, da proces stanj mora zavzemati vrednosti na točno določenem območju, kar lahko implicira tudi dodatne omejitve za kontrolni proces.

- **Množica dopustnih kontrol** $\mathcal{A}$. Kontrolni proces, ki zadošča vsem omejitvam, imenujemo dopustna kontrola. Množica vseh dopustnih kontrol A je lahko odvisna od začetne vrednosti procesa stanj.

- **Ciljni funkcional** $J(Z(\cdot), \nu(\cdot))$. To je funkcional, ki ga je potrebno minimizirati ali maksimizirati. Običajno ima J aditivno strukturo v obliki integrala v določenem časovnem obdobju.

Cilj problema optimalnega upravljanja je torej minimizacija (ali maksimizacija) ciljnega funkcionala J po množici dopustnih kontrol A.

$$\text{Vrednostna funkcija: } = v = \inf_{\nu \in A} J.$$

Glavni problem pri optimalnem upravljanju je poiskati kontrolni proces, ki minimizira vrednostno funkcijo. V nadaljevanju si bomo pogledali pristop, ki uporabi markovsko strukturo problema in uporabi dinamično programiranje. Z uporabo tega pristopa pridemo do določene parcialne diferencialne enačbe, katere rešitev je vrednostna funkcija v. Pri reševanju dobljene diferencialne enačbe lahko dobimo tudi optimalno kontrolo v "povratni obliki", kar pomeni, da dobimo optimalni kontrolni proces $\nu^*(t)$ v obliki $\hat{\nu}(Z^*(t))$, kjer je $\hat{\nu}$ optimalna povratna kontrola, podana s funkcijo stanja, in je Z^* pripadajoči optimalni proces stanj. Optimalni proces stanj Z^* in optimalni kontrolni proces ν^* izračunamo simultano, z rešitvijo dinamike stanj s povratno kontrolo $\hat{\nu}$. Metoda je zelo učinkovita, a ima tudi nekaj tehničnih omejitev. V nadaljevanju bomo metodo predstavili podrobneje in si pogledali tudi primer uporabe na konkretnem primeru.

2.2 Princip in enačba dinamičnega programiranja

V tem delu bomo formulirali abstraktno dinamično programiranje. Princip dinamičnega programiranja (PDP) velja za vse probleme dinamične optimizacije, ki imajo določeno strukturo. Struktura problema torej igra ključno vlogo, zato jo formuliramo z naslednjimi predpostavkami.

1. Predpostavimo, da se za vsako kontrolo ν in začetne podatke (t, z), pripadajoči proces stanj začne znova ob vsakem času ustavljanja $\tau > t$, kar pomeni

$$Z^{\nu}_{t,z}(s) = Z^{\nu}_{\tau, Z^{\nu}_{t,z}(\tau)}(s); \qquad \forall s \leq \tau.$$

2. Če za dva kontrolna procesa $\nu^1(s)$ in $\nu^2(s)$ velja $\nu^1(s) = \nu^2(s)$ za vse $s < \tau$,

kjer je τ čas ustavljanja, potem velja

$$Z_{t,z}^{\nu^1}(s) = Z_{t,z}^{\nu^2}(s); \qquad \forall s \leq \tau.$$

V primeru, ko je ν dopusten za (t, z), je tudi ν, omejen na stohastični interval $[\tau, T]$, dopusten začenši s $(\tau, Z_{t,z}^{\nu}(\tau))$.

3. Predpostavljamo, da iz skupine dopustnih kontrol lahko tvorimo nove dopustne kontrole. Naj bo τ čas ustavljanja, $\nu \in A_{t,z}$ in $\eta^{\nu} = (\tau, Z_{t,z}^{\nu}(\tau))$. Vzemimo $\hat{\nu} \in A_{\eta^{\nu}}$ in definirajmo

$$\bar{\nu}(s) = \begin{cases} \nu(s), & s \leq \tau, \\ \hat{\nu}(s), & s \geq \tau. \end{cases}$$

Veljati mora $\bar{\nu} \in A_{t,z}$. Natančno formulacijo lahko najdemo v [11].

4. Predpostavimo aditivno strukturo ciljnega funkcionala J.

$$J = \int_t^{\tau} L(s, \nu(s), Z_{t,z}^{\nu}(s))ds + G(Z_{t,z}^{\nu}(\tau)).$$

Za vsak primer optimalnega upravljanja, ki ga želimo reševati s pomočjo dinamičnega programiranja, se moremo prepričati, da zgornje predpostavke držijo. Za probleme z ustrezno strukturo imamo na voljo naslednji izrek, ki predstavi princip dinamičnega programiranja.

Izrek 2.2.0.1 (Princip dinamičnega programiranja (PDP)). *Za vsak čas ustavljanja $\tau > t$ velja*

$$v(t, z) = \inf_{\nu \in A_{t,z}} E[\int_t^{\tau} Lds + v(\tau, Z_{t,z}^{\nu}(\tau))|F_t]$$

Podrobnejšo formulacijo in dokaz izreka najdemo v [4] in [11]

S tem izrekom si bomo pomagali pri izpeljavi enačbe dinamičnega programiranja, ki predstavlja infinitezimalno verzijo principa dinamičnega programiranja. Enačba je ključnega pomena pri reševanju problemov optimalnega upravljanja. V splošnem je postopek reševanja tovrstnih problemov naslednji:

- formalno izpeljemo enačbo dinamičnega programiranja,
- poiščemo rešitev enačbe,

- verifikacija - pokažemo, da rešitev enačbe predstavlja vrednostno funkcijo problema z uporabo Itove formule,
- med postopkom verifikacije dobimo kot stranski produkt tudi optimalno politiko odločanja.

Obstajajo tudi drugi pristopi k reševanju, ki pa jih tu ne bomo obravnavali.

Najprej si oglejmo formalno izpeljavo enačbe dinamičnega programiranja, ostale korake pa bomo podrobneje obravnavali kar na konkretnem primeru. Enačbo bomo obravnavali le za primere, ko je proces stanj rešitev stohastične diferencialne enačbe (difuzijski proces). Naj bo slučajna spremenljivka stanj X enolična rešitev enačbe

$$dX = \mu(t, X(t), \nu(t))dt + \sigma(t, X(t), \nu(t)))dW.$$

Naj bo ciljni funkcional podan z

$$J(t, x, \nu) = E[\int_t^T L(s, X_{t,x}^\nu(s), \nu(s))ds + G(X_{t,x}^\nu(T))|F_t],$$

in naj bo pripadajoča vrednostna funkcija

$$v(t, x) := \inf_{\nu \in A_{t,x}} J(t, x, \nu).$$

Predpostavimo vse potrebno, da PDP drži. V PDP uporabimo $\tau = t + h$ in dobimo

$$v(t, x) := \inf_{\nu \in A_{t,x}} E[\int_t^{t+h} Lds + v(t + h, X_{t,x}^\nu(t + h))|F_t].$$

Ta del izpeljave je formalen, saj brez dokaza predpostavimo, da je v dovolj gladka. Po Itovi formuli nato dobimo

$$v(t + h, X_{t,x}^\nu(t + h)) = v(t, x) + \int_t^{t+h} (\frac{\partial}{\partial t} v + \mathscr{L}^{\nu(s)} v)ds + \text{ martingal},$$

kjer

$$\mathscr{L}^\nu v := \mu(t, x, \nu) \cdot \triangledown v + \frac{1}{2}\text{sl } a(t, x, \nu)D^2 v,$$

z označbo

$$a(t, x, \nu) = \sigma(t, x, \nu)\sigma(t, x, \nu)^t \text{ in } sl\ a := \sum_{i=1}^d a_{ii}.$$

V kontekstu PDP tako velja

$$\sup_{\nu \in A_{t,x}} E[-\int_t^{t+h} (\frac{\partial}{\partial t} v + \mathscr{L}^{\nu(s)} v + L)ds] = 0.$$

Predpostavimo, da so koeficienti μ, a in L zvezni. Delimo sedaj zgornjo enačbo s h in pošljimo $h \to 0$. Tako dobimo

$$-\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + H(x,t,\bigtriangledown v(t,x), D^2 v(t,x)) = 0,$$

kjer

$$H(x,t,\xi,A) := sup\{-\mu \cdot \xi - \frac{1}{2} tr\ aA - l;\ (\mu,a,l) \in A(t,x)\},$$

in $(\mu,a,l) \in A(t,x)$, če obstaja tak $\nu \in A_{t,x}$, da

$$(\mu,a,l) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\mu(x,\nu(s),t), a(x,\nu(s),t), L(x,\nu(s),t)) ds.$$

Tu je potrebno poudariti, da predpostavljamo dovoljšno regularnost funkcij μ, a in L ter neutemeljeno domnevamo, da je v gladka. Vseh teh predpostavk ne bi rabili, če bi probleme reševali z uporabo teorije viskoznosti.

Za velik razred problemov velja, $A_{t,x} = L^\infty((0,\infty) \times \Omega; U)$ za neko množico U. Potem velja,

$$A(t,x) = \{(\mu(x,\nu,t), a(x,\nu,t), L(x,\nu,t);\ \nu \in U\},$$

in

$$H(x,t,\xi,A) = \sup_{\nu \in U} \{-\mu(x,\nu,t) \cdot \xi - \frac{1}{2} sl\ a(x,\nu,t)A - L(x,\nu,t)\}.$$

Tako smo izpeljali enačbo za probleme s končnim horizontom. Pomemben razred problemov pa so tudi problemi z diskontiranim neskončnim horizontom. Pri tovrstnih problemih je enačba stanj homogena skozi čas in je časovni horizont enak $t = \infty$. Da pa bi zagotovili končnost ciljnega funkcionala, moramo tekoče vrednosti eksponentno diskontirati

$$J(x,\nu) := E \int_0^\infty e^{-\beta t} L(s, X_x^n u(s), \nu(s)) ds.$$

Nato po istem postopku kot pri izpeljavi enačbe dinamičnega programiranja za končni časovni horizont dobimo za neskončnega

$$\beta v(x) + H(x, \bigtriangledown v(x), D^2 v(x)) = 0, \tag{2.1}$$

kjer je za $A_{t,x} = L^\infty((0,\infty) \times \Omega; U)$,

$$H(x,\xi,A) = \sup_{\nu \in U} \{-\mu(x,\nu) \cdot \xi - \frac{1}{2} sl\ a(x,\nu,t)A - L(x,\nu)\}.$$

2.3 Mertonov problem optimalnih investicij in potrošnje

V tem delu si bomo pogledali primer problema stohastičnega optimalnega upravljanja in reševanje le tega.

Mertonov problem optimalnih investicij in potrošnje je dobro poznan primer iz financ. Na trgu imamo dva finančna instrumenta: tvegan vrednostni papir, na primer delnico, in netvegan vrednostni papir v obliki obveznice. Vrednost delnice $S(t)$ modeliramo kot rešitev enačbe

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dW],$$

kjer je W standardno enodimenzionalno Brownovo gibanje, μ in σ pa sta dani konstanti. Ceno obveznice s fiksno obrestno mero r pa modeliramo kot

$$dB(t) = B(t)[rdt].$$

Naj bo $X(t)$ znesek, investiran v obveznico v času t, $Y(t)$ investicija v delnice, $l(t)$ stopnja prenosa investicij iz obveznic v delnice, $m(t)$ stopnja prenosa v obratni smeri in naj bo $c(t)$ stopnja potrošnje. Za $X(t)$ in $Y(t)$ lahko tako ob predpostavki, da na trgu nimamo transakcijskih stroškov, definiramo naslednji dve enačbi:

$$\begin{aligned} dX(t) &= rX(t)dt - l(t)dt + m(t)dt - c(t)dt, \\ dY(t) &= Y(t)[\mu dt + \sigma dW] + l(t)dt - m(t)dt. \end{aligned}$$

Premoženje v času t definiramo kot

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

in zapišemo

$$\pi(t) = \frac{Y(t)}{Z(t)}.$$

Z uporabo danih definicij dobimo naslednjo enačbo

$$dZ(t) = Z(t)[r + \pi(t)(\mu - r))dt + \pi(t)\sigma dW] - c(t)dt.$$

V žargonu stohastičnega optimalnega upravljanja je tu proces stanj $Z = Z_z^{\pi,c}$, kontrolna procesa pa sta $\pi(t) \in \mathbb{R}$ in $c(t) \geq 0$. Ker je možno prenašati sredstva iz delnic v obveznice in obratno, ni potrebno ločeno spremljati trenutnih sredstev vloženih v oba finančna instrumenta.

Imamo še dodatno omejitev za proces stanj in sicer $Z \geq 0$. Množica dopustnih kontrol je tako podana kot

$$A_z := \{(\pi(\cdot), c(\cdot)) | \text{ procesa } \pi \text{ in } z \text{ sta omejena in tako prilagojena, da je } Z_Z^{\pi,c} \geq 0 \text{ skoraj gotovo}\}.$$

Ciljni funkcional J je pričakovana diskontirana koristnost, pridobljena s potrošnjo. Definiramo ga kot

$$J = E[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(c(t))dt],$$

kjer je $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ koristnostna funkcija. Zanimiv razred koristnostnih funkcij za obravnavo je $U(c) = \frac{c^p}{p}$, kjer $0 < p < 1$. V tem primeru dobimo

$$v(z) := \sup_{(\pi,c)\in A_z} E[\int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{1}{p}(c(t))^P dt | Z_z^{\pi,c}(0) = z].$$

Zaradi linearne strukture enačbe procesa stanja za vsak $\lambda > 0$ velja $(\pi, \lambda c) \in A_{\lambda z}$, če in samo če $(\pi, c) \in A_z$. Tako velja

$$v(\lambda z) = \lambda^p v(z),$$

iz česar sledi

$$v(z) = v(1)z^p$$

Priti moremo torej samo do vrednosti $v(1)$ in pripadajoče optimalne strategije, za kar bomo uporabili dinamično programiranje. Kot bomo videli v nadaljevanju, je to eden redkih problemov stohastičnega optimalnega upravljanja z gladko in eksplicitno rešitvijo.

Najprej bomo uporabili enačbo (2.1), ki je za ta problem z uporabo infimuma namesto supremuma enaka

$$\beta v(z) + \inf_{\pi\in\mathbb{R}, c\geq 0}\{-(r + \pi(\mu - r))zv_z(z) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 z^2 v_{zz}(z) + cv_z(z) - \frac{1}{p}c^p\} = 0,$$

kar lahko zapišemo kot

$$\beta v(z) - rzv_z(z) - \sup_{\pi\in\mathbb{R}}\{\pi(\mu - r)zv_z(z) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 z^2 v_{zz}(z) - \sup_{c\geq 0} -cv_z(z) + \frac{1}{p}c^p\} = 0.$$

Neposredno lahko izračunamo, da je ob pogoju $v_z(z) > 0 > v_{zz}(z)$

$$\beta v(z) - rzv_z(z) - \frac{1}{2}\frac{((\mu - r)zv_z(z))^2}{\sigma^2 z^2 v_{zz}(z)} - H(v_z(z)) = 0,$$

kjer

$$H(v_z(z)) = \frac{1-p}{p}(v_z(z))^{\frac{p}{p-1}},$$

in sta maksimizatorja

$$\pi^* = -\frac{(\mu - r)zv_z(z)}{\sigma^2 z^2 v_{zz}(z)}, \qquad c^* = (v_z(z))^{\frac{1}{p-1}}.$$

Če sedaj v zgornje enačbe vstavimo $v(z) = v(1)z^p$, dobimo optimalni rešitvi

$$c^*(t) = (pv(1))^{\frac{1}{1-p}} Z^*(t), \qquad \pi^*(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-p)}, \tag{2.2}$$

in

$$v(1)[\beta - rp - \frac{p(\mu - r)^2}{2(1-p)\sigma^2}] - \frac{1-p}{p}(pv(1))^{\frac{p}{p-1}} = 0$$

z rešitvijo za $v(1)$

$$v(1) = \alpha := \frac{(1-p)^{1-p}}{p}[\beta - rp - \frac{p(\mu - r)^2}{2(1-p)\sigma^2}]^{p-1},$$

kjer zahtevamo

$$\beta > rp + \frac{p(\mu - r)^2}{2(1-p)\sigma^2}.$$

Zgornje rešitve izgledajo zadostne, a se je zaradi formalnega načina izpeljave diferencialne enačbe dinamičnega programiranja vseeno potrebno prepričati o ustreznosti rešitve s pomočjo koraka verifikacije.

Izrek 2.3.0.1 (Verifikacija). *Funkcija αz^p z α kot zgoraj je vrednostna funkcija in optimalni politiki odločanja sta definirani z enačbo (2.2).*

Dokaz. Naj bo $u(z) := \alpha z^p$. Za $z > 0$ in $T > 0$ naj bo $\nu = (\pi(\cdot), c(\cdot)) \in A_z$ poljubna dopustna investicijska in potrošna strategija. Postavimo $Z := Z_z^n u$. Uporabimo Itovo formulo na funkciji $e^{-\beta t}u(Z(t))$ in dobimo

$$e^{-\beta T}E[u(Z(T))] = u(z) + \int_0^T e^{-\beta t}E[-\beta u(Z(t)) + \mathscr{L}^{\pi(t),c(t)}u(Z(t))]dt,$$

kjer je $\mathscr{L}^{\pi,c}$ infinitezimalni generator procesa premoženja. Upoštevajoč dejstvo, da u reši enačbo dinamičnega programiranja, velja za katerakoli π in c

$$\beta u(z) - \mathscr{L}^{\pi,c}u(z) - \frac{1}{p} \geq 0,$$

iz česar sledi

$$u(z) \geq E[e^{-\beta T}u(Z(T)) + \int_0^T e^{-\beta t}\frac{1}{p}(c(t))^p dt].$$

Z direktnim izračunom lahko pokažemo, da

$$\lim_{T\to\infty} E[e^{-\beta T}u(Z(T))] = \lim_{T\to\infty} E[e^{-\beta T}\alpha(Z(T))^p] = 0.$$

Po Fatoujevi lemi velja

$$\lim_{T\to\infty} E[\int_0^T e^{-\beta t}\frac{1}{p}(c(t)^p dt] = J(z;\pi(\cdot), c(\cdot)).$$

Ker to velja za vse možne kontrole, smo dokazali

$$u(z) = \alpha z^p \geq v(z) = \text{vrednostna funkcija.}$$

Da dokažemo še nasprotno neenakost, uporabimo kontroli (π^*, c^*) iz enačbe 2.2. Naj bo Z^* pripadajoči proces stanj. Potem velja

$$\beta u(z) - \mathscr{L}^{\pi^*,c^*}u(z) - \frac{1}{p}(c^*)^p = 0.$$

Torej,

$$\begin{aligned} E[e^{-\beta T}u(Z^*(T)) =& u(z) + \int_0^T e^{-\beta T}E[-\beta u(Z^*(t)) + \mathscr{L}^{\pi^*,c^*}u(Z^*(t))]dt \\ =& u(z) + E[\int_0^T e^{-\beta t}\frac{1}{p}(c^*(t))^p dt]. \end{aligned}$$

Ponovno pošljemo $T \to \infty$. Ker lahko Z^* in druge spremenljivke izračunamo eksplicitno, lahko enostavno pridemo do limite zgornje enačbe. Dobimo

$$u(z) = J(z;\pi^*, c^*).$$

Tako dobimo $u(z) = v(z) = J(z;\pi^*, c^*)$. $\square$

Poglavje 3

Model vrednotenja na OTC trgih

3.1 Osnovni model z agenti, nevtralnimi do tveganja

V tem delu bom predstavil osnovni model OTC trga, kjer so agenti nevtralni do tveganja in lahko med seboj trgujejo in se pogajajo o cenah transakcij. V nadaljevanju bomo obravnavali še razširitvi modela na tveganju nenaklonjene agente in na prisotnost agregatnih likvidnostnih šokov. Modeli so osnovani na modelu iz [3].

3.1.1 Nastavek modela

Agenti v osnovnem modelu nastopajo na trgu ves čas, so nevtralni do tveganja in trošijo določeno dobrino s stopnjo preference časa $\beta > 0$. Agentove preference glede potrošnje se odražajo s koristnostjo $E(\int_0^\infty e^{-\beta t} dC_t)$, ki vključuje agentov kumulativni proces potrošnje C v primeru, ko je integral definiran.

Agenti lahko investirajo v bančni račun, ki ga lahko smatramo kot varno obveznico in prinaša gotov donos r. V model moramo vključiti omejitev, ki preprečuje prekomerno zadolževanje. Predstavimo jo v obliki spodnje meje za proces likvidnega premoženja W. Ker so agenti do tveganja nevtralni, vzamemo $r = \beta$.

Agenti lahko med seboj trgujejo z dolgoročnim vrednostnim papirjem. Do prodaje lahko pride le v primeru, ko se agent sreča z drugim agentom. Začnemo s preprostim vrednostnim papirjem, ki izplača eno enoto potrošnje na časovno enoto. V razširitvi modela na tveganju nenaklonjene agente bomo obravnavali tudi vrednostne papirje, ki izplačujejo naključne dividende.

Agente bomo za začetek razdelili v dve skupini - skupina, ki si želi posedovati vrednostni papir in skupina, ki si tega ne želi. Agente prve skupine poimenujemo "naklonjeni" agenti, agente druge skupine pa "nenaklonjeni". V primeru, ko nenaklonjeni agent poseduje vrednostni papir, utrpi strošek na časovno enoto v višini δ, medtem ko naklonjeni agent tovrstnih stroškov nima. V realnosti bi takšni stroški lahko bili posledica trenutne nizke likvidnosti agenta, visokih stroškov financiranja, nezaželene visoke korelacije med donosi vrednostnega papirja in ostalimi denarnimi prilivi agenta, negativnih davčnih posledic ali nizke vrednosti vrednostnega papirja za določenega agenta (na primer, če je vrednostni papir nepremičnina).

Tip posameznega agenta, predstavljen v prejšnjem odstavku, je markovska veriga. Iz naklonjenega v nenaklonjeni tip prehaja z intenzivnostjo λ_d in v obratni smeri z λ_u. Procesa, ki določata tip agenta katerih koli dveh agentov sta med seboj neodvisna. Spremembe tipov agentov spodbujajo trgovanje na trgu - naklonjeni agenti želijo pridobiti vrednostni papir, medtem ko se ga nenaklonjeni agenti želijo znebiti. Spremembo iz naklonjenega v nenaklonjenega agenta lahko v realnosti razumemo kot likvidnostni šok agenta (na primer nenadni veliki odlivi kapitala sklada), medtem ko lahko spremembo iz nenaklonjenega v naklonjenega agenta razumemo kot izboljšanje stanja in povrnitev likvidnosti agenta.

Na začetku v modelu poseduje vrednostni papir delež s agentov. Vsak agent lahko poseduje največ eno enoto vrednostnega papirja. Kratke prodaje so v modelu prepovedane. Ker je koristnost linearna, lahko brez škode za splošnost določimo, da ima agent imetnik vrednostnega papirja v tistem trenutku v lasti eno enoto letega, medtem ko ima neimetnik nič enot. Tako smo dobili štiri različne skupine agentov, ki predstavljajo celotno populacijo $T = \{ho, hn, lo, ln\}$. Prva črka (h in l) predstavlja trenutno naklonjenost posedovanja vrednostnega papirja, kjer h pomeni naklonjenost in n nenaklonjenost, druga črka pa nam pove, ali agent poseduje enoto vrednostnega papirja ali ne, kjer o pomeni, da poseduje in n, da ne poseduje.

Označimo z $\mu_\sigma(t)$ delež agentov tipa $\sigma \in T$ v času t. Za vsak čas $t \geq 0$ mora veljati

$$1 = \mu_{ho}(t) + \mu_{hn}(t) + \mu_{lo}(t) + \mu_{ln}(t). \tag{3.1}$$

Za delež lastnikov, ki hkrati ponazarja tudi povprečno količino vrednostnega papirja na agenta iz populacije, pa mora veljati

$$s = \mu_{ho}(t) + \mu_{lo}(t) \tag{3.2}$$

Tako kot v modelu iz poglavja 1 se tudi v tem modelu agenti med seboj srečujejo z določeno intenzivnostjo λ, ki ponazarja agentovo sposobnost iskanja partnerjev. Predpostavimo, da je partner, ki ga agent sreča, naključno izbrani agent iz populacije. Verjetnost, da bo agentov partner tipa σ, je tako določena z μ_σ. Sledi, da je za posameznega agenta intenzivnost srečevanja agentov tipa σ enaka $\lambda\mu_\sigma$. Po zakonu velikih števil velja, da agente tipa hn kontaktirajo agenti tipa lo z intenzivnostjo

$\lambda\mu_{lo}\mu_{hn}$ skoraj gotovo in prav tako skoraj gotovo agenti tipa lo kontaktirajo agente tipa hn z enako intenzivnostjo. Sledi, da je skupna intenzivnost tovrstnih srečanj enaka $2\lambda\mu_{lo}\mu_{hn}$.

3.1.2 Pogajanja

Poglejmo si najprej pogajanja med agentoma, ki so razširitev pogajanj iz prvega poglavja, prilagojena za uporabo v našem modelu. Najprej si bomo pogledali pogajanja v diskretnem času, kasneje pa tudi razširitev na zveznega. Enako kot v prvem poglavju je ob srečanju dveh agentov eden naključno izbran, da predlaga ceno - prodajalec z verjetnostjo $\hat{q}$ in kupec z verjetnostjo $1-\hat{q}$. Drugi agent nato takoj sprejme ali zavrne ponudbo. V primeru zavrnitve neuspešni prodajalec prejme v tekočem obdobju dividende, ki jih prinaša vrednostni papir. V naslednjem obdobju, Δ_t kasneje, je eden od agentov ponovno naključno izbran, da predlaga novo ceno. Podobno kot v modelu iz prvega poglavja tudi tu lahko pride do razdora med agentoma, a so razlogi tu nekoliko drugačni. Poleg možnosti, da eden od agentov poišče novega partnerja (možno le v primeru, ko so menjave partnerjev dovoljene), lahko do razdora pride tudi v primeru, ko se enemu ali obema agentoma spremeni naklonjenost do posedovanja vrednostnega papirja. V primeru spremembe omenjene naklonjenosti agent ne bi imel več koristi od nakupa ali prodaje vrednostnega papirja.

Koristnost posameznega agenta je odvisna od trenutnega stanja agenta $\sigma(t) \in T$ in premoženja na njegovem bančnem računu $W(t)$. Skupna koristnost je tako $W(t) + V_{\sigma(t)}$, kjer je za vse tipe agentov $\sigma \in T$, V_σ določena konstanta.

Najprej bomo obravnavali primer (uporabljen tudi v nadaljevanju modela), kjer je agentom menjava partnerjev dovoljena. Predpostavimo, da v primeru, ko agent pride v kontakt z novim partnerjem, starega zapusti in začne pogajanja z novim. Edina možnost, kjer imata partnerja korist od sklenitve dogovora o prodaji, je ko agent tipa lo proda vrednostni papir agentu tipa hn. Agent, ki je izbran za določanje cene, postavi takšno ceno, da je njegov partner indiferenten do sprejema oziroma zavrnitve ponudbe. Koristnost v primeru zavrnitve je povezana z ravnovesnimi strategijami od trenutka zavrnitve dalje. Naj bo P_σ cena, ki jo predlaga agent tipa $\sigma \in \{hn, lo\}$ in naj bo $\bar{P} = \hat{q}P_{lo} + (1-\hat{q})P_{hn}$. Če upoštevamo še dinamiko konstante V_σ posameznega agenta, imamo

$$\begin{aligned} P_{hn} - \Delta V_l &= e^{-(r+\lambda_d+\lambda_u+2\lambda\mu_{lo}+2\lambda\mu_{hn})\Delta_t}(\bar{P} - \Delta V_l) + O(\Delta_t^2) \\ -P_{lo} + \Delta V_h &= e^{-(r+\lambda_d+\lambda_u+2\lambda\mu_{lo}+2\lambda\mu_{hn})\Delta_t}(-\bar{P} + \Delta V_h) + O(\Delta_t^2), \end{aligned} \tag{3.3}$$

kjer $\Delta V_l = V_{lo} - V_{ln}$ in $\Delta V_h = V_{ho} - V_{hn}$.

Ceni P_{hn} in P_{lo} imata skupno limito $P = lim_{\Delta_t \to 0} P_{hn} = lim_{\Delta_t \to 0} P_{lo}$. Iz zgornjih dveh enačb dobimo, da limitna cena in limitni vrednostni funkciji izpolnjujejo enačbo

$$P = \Delta V_l(1-q) + \Delta V_h q,$$

kjer je $q = \hat{q}$.

Rezultat je zanimiv z vidika, da pogajalska moč q prodajalca ni odvisna od parametrov modela, ampak le od verjetnosti, da je prodajalec izbran za predlagatelja cene. Sposobnost iskanja novih partnerjev agenta torej ne vpliva na agentovo pogajalsko moč q. Razlog za to je, da ima sposobnost srečevanja novih partnerjev dva učinka - naredi agenta manj potrpežljivega, hkrati pa poveča partnerjevo tveganje izgube partnerja. Ta dva efekta se v ravnovesju izničita.

V primeru, da agentom menjava partnerja ne bi bila dovoljena, bi enakosti (3.3) veljali za

$$q = \frac{\hat{q}(r + \lambda_u + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo})}{\hat{q}(r + \lambda_u + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}) + (1-\hat{q})(r + \lambda_u + \lambda_d + 2\lambda\mu_{hn})}$$

Izid pogajanj bi vodil do podobne rešitve za ravnovesno ceno, a v tem primeru je pogajalska moč odvisna tudi od parametrov modela. Enačbi za ravnovesno ceno torej nista povsem primerljivi.

3.1.3 Reševanje modela

Do rešitve modela bomo prišli v dveh korakih. Kot že omenjeno, imata partnerja korist od sklenitve dogovora o prodaji le tedaj, ko agent tipa *lo* proda vrednostni papir agentu tipa *hn*. V tem primeru pride do pogajanj med partnerjema in vzpostavi se ravnovesna cena, po kateri prodajalec takoj proda vrednostni papir kupcu. Razporeditev vrednostnih papirjev lahko torej obravnavamo brez sklicevanja na ceno prodaj. Pri danem gibanju deležev različnih tipov agentov $\{\mu(t); t \geq 0\}$, je tako koristnost agenta skozi čas odvisna od trenutne agentove naklonjenosti do posedovanja vrednostnega papirja, posedovanja ali neposedovanja vrednostnega papirja, problema pogajanja med partnerjema in ravnovesne cene, ki se vzpostavi. V ravnovesju so stopnje sprememb deležev vseh štirih tipov agentov enake

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_{hn}(t) &= -2\lambda\mu_{hn}(t)\mu_{lo}(t) - \lambda_d\mu_{hn}(t) + \lambda_u\mu_{ln}(t) \\
\dot{\mu}_{ho}(t) &= 2\lambda\mu_{hn}(t)\mu_{lo}(t) - \lambda_d\mu_{ho}(t) + \lambda_u\mu_{lo}(t) \\
\dot{\mu}_{lo}(t) &= -2\lambda\mu_{hn}(t)\mu_{lo}(t) - \lambda_u\mu_{lo}(t) + \lambda_d\mu_{ho}(t) \\
\dot{\mu}_{ln}(t) &= 2\lambda\mu_{hn}(t)\mu_{lo}(t) - \lambda_u\mu_{ln}(t) + \lambda_d\mu_{hn}(t)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Intuicijo za prvo enačbo lahko pojasnimo z naslednjim principom: kadarkoli hn agent sreča lo agenta, pride do prodaje in spremembe tipov obeh agentov. Tako lahko, upoštevaje zakon velikih števil, pojasnimo prvi člen desne strani enačbe. Preostala dva člena predstavljata spremembe agentov tipa hn v ln agente in spremembe agentov tipa ln v hn agente s pripadajočima intezivnostma sprememb λ_d in λ_u. S podobno intuicijo lahko pojasnimo tudi ostale tri enačbe.

Mogoče je dokazati, da obstaja enolična ravnovesna rešitev za $\{\mu(t); t \geq 0\}$ v obliki vektorja konstant, dobljenega iz sistema enačb (3.4), ko $\dot{\mu}(t) = 0$.

Ko imamo deleže agentov posameznih tipov v stabilnem stanju določene, lahko izračunamo ravnovesne intenzivnosti medsebojnega srečevanja agentov različnih tipov, njihove koristnosti od sedanje in prihodnje potrošnje in ravnovesno ceno vrednostnega papirja P. Kot že omenjeno je agentova koristnost v trenutku $t \geq 0$ odvisna od trenutnega tipa $\sigma(t) \in T$ agenta in premoženja $W(t)$. Agentovo koristnost lahko zapišemo kot $W(t) + V_{\sigma(t)}$, kjer so $V_{\sigma(t)}$ konstante odvisne od tipa agenta.

V stabilnem stanju mora biti stopnja rasti pričakovane neposredne koristnosti katerega koli agenta enaka diskontni stopnji r. Tako v stabilnem stanju pridemo do naslednjih enačb

$$\begin{aligned}
0 &= rV_{lo} - \lambda_u(V_{ho} - V_{lo}) - 2\lambda\mu_{hn}(P - V_{lo} + V_{ln}) - (1 - \delta) \\
0 &= rV_{ln} - \lambda_u(V_{hn} - V_{ln}) \\
0 &= rV_{ho} + \lambda_d(V_{ho} - V_{lo}) - 1 \\
0 &= rV_{hn} - \lambda_d(V_{hn} - V_{ln}) - 2\lambda\mu_{lo}(V_{ho} - V_{hn} - P)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Cena je določena z dvostranskimi pogajanji med partnerjema. Agent, ki je naklonjen posedovanju vrednostnega papirja, a le tega ne poseduje, je pripravljen za pridobitev vrednostnega papirja plačati največ vrednost spremembe konstante $\Delta V_h = V_{ho} - V_{hn}$. Agent, ki poseduje vrednostni papir, a je temu nenaklonjen, pa zahteva za prodajo najmanj $\Delta V_l = V_{lo} - V_{ln}$. Kot smo že pokazali, iz pogajanj dobimo ceno

$$P = \Delta V_l(1 - q) + \Delta V_h q, \tag{3.6}$$

kjer je $q \in [0, 1]$, in predstavlja pogajalsko moč prodajalca.

Na tej točki bomo upoštevali predpostavko, da agenti med pogajanji smejo iskati nove partnerje, in se tako ognili situaciji, da bi bila pogajalska moč q odvisna od ostalih parametrov modela. Upoštevajoč predpostavko je pogajalska moč odvisna le od verjetnosti, da bo agent izbran za predlagatelja cene, in je enaka $q = \hat{q}$, kjer je $\hat{q}$ omenjena verjetnost.

Sistem linearnih enačb (3.5) in (3.6) ima tako enolično rešitev za ceno vrednostnega papirja

$$P = \frac{1}{r} - \frac{\delta}{r}\frac{r(1-q) + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}(1-q)}{r + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}(1-q) + \lambda_u + 2\lambda\mu_{hn}q}. \tag{3.7}$$

3.1.4 Analiza rezultatov

Dobljena cena predstavlja sedanjo vrednost dividend $\frac{1}{r}$, znižano za nelikvidnostni diskont. Pri nespremenjenih ostalih parametrih bo cena nižja, če:

- ima nenaklonjeni lastnik vrednostnega papirja manjše možnosti, da v naslednjem obdobju postane naklonjen posedovanju vrednostnega papirja (nižji λ_u),
- je količina naklonjenih agentov, ki vrednostnega papirja ne posedujejo (potencialnih kupcev), μ_{hn} manjša,
- so možnosti, da agent postane nenaklonjen posedovanju (λ_d) večje,
- je kupcu lažje poiskati nove potencialne prodajalce (višji μ_{lo}) in
- ima prodajalec nižjo pogajalsko moč q.

Ti zaključki temeljijo na predznakih parcialnih odvodov desne strani enačbe (3.7), kar pomeni da takšni zaključki držijo v primeru, ko sprememba parametra nima vpliva na ostale parametre, ki nastopajo v enačbi. Vemo, da so sicer deleži μ v stabilnem stanju odvisni od λ_d, λ_n in λ, kar zgornjo analizo nekoliko kompromitira. V naslednji trditvi bomo videli, kako spreminjanje parametrov modela v resnici vpliva na ceno v stabilnem stanju P.

Trditev 3.1.4.1. *V stabilnem stanju je ravnovesna cena padajoča s parametri δ, s in λ_d, in naraščajoča s parametroma λ_u in q. V primeru, da je $s < \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_d}$, velja $P \to \frac{1}{r}$, ko $\lambda \to \infty$. Hkrati je P naraščajoča z λ za vsak $\lambda \geq \bar{\lambda}$ za neko konstanto $\bar{\lambda}$, odvisno od ostalih parametrov modela.*

Dokaz. Negativno povezavo cene s parametrom δ in pozitivno s parametrom q je enostavno dokazati, saj ostale spremenljivke, ki nastopajo v enačbi 3.7, niso odvisne od omenjenih dveh. S preprostim parcialnim odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial \delta} &= -\frac{r(1-q) + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}(1-q) + \lambda_u + (1-q)}{r(r + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}(1-q) + \lambda_u + 2\lambda\mu_{hn}q)} < 0 \\
\frac{\partial P}{\partial q} &= \frac{\delta}{r}\frac{a(2\lambda\mu_{hn} + r) + (r + 2\lambda\mu_{lo})\lambda_u}{(a + \lambda_u - 2\lambda q(\mu_{lo} - \mu_{hn}))^2} > 0
\end{aligned}$$

kjer

$$a = r + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}$$

Če si predstavljamo P in μ_σ kot funkciji parametrov λ_d in s, lahko z odvajanjem pridemo do rezultata, da je odvod cene P po λ_d pozitiven večkratnik naslednjega izraza

$$\begin{aligned}&(rq + \lambda_u + 2\lambda\mu_{hn}q(1 + 2\lambda\frac{\partial\mu_{lo}}{\partial\lambda_d}(1-q))\\ &-(r(1-q) + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}(1-q))(2\lambda\frac{\partial\mu_{hn}}{\partial\lambda_d}q).\end{aligned}$$

Izraz je pozitiven v primeru, ko je $\frac{\partial\mu_{lo}}{\partial\lambda_d}$ pozitiven in $\frac{\partial\mu_{hn}}{\partial\lambda_d}$ negativen.

Ti dve dejstvi lahko uporabimo v naslednjem smislu. Iz enačb (3.1), (3.2) in (3.4) ter dejstva, da $\mu_{lo} + \mu_{ln} = \frac{\lambda_d}{\lambda_d+\lambda_u} = 1 - y$, kjer

$$y = \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \lambda_d},$$

sledi, da μ_{lo} reši kvadratno enačbo

$$2\lambda\mu_{lo}^2 + (2\lambda(y-s) + \lambda_u + \lambda_d)\mu_{lo} - \lambda_d s = 0. \tag{3.8}$$

Ta kvadratna enačba ima eno negativno rešitev in eno rešitev na intervalu $(0,1)$, ki je enaka μ_{lo}.

Če odvajamo enačbo 3.8 po λ_d, ugotovimo, da

$$\frac{\partial\mu_{lo}}{\lambda_d} = \frac{s - \mu_{lo} - 2\lambda\frac{\partial y}{\partial\lambda_d}\mu_{lo}}{2\lambda\mu_{lo} + 2\lambda(y-s) + \lambda_u + \lambda_d} > 0,$$

saj je $\frac{\partial y}{\partial\lambda_d} < 0$. Na podoben način lahko pridemo do

$$\frac{\partial\mu_{hn}}{\partial\lambda_d} = \frac{-\lambda_d + 2\lambda\frac{\partial y}{\partial\lambda_d}\mu_{hn}}{2\lambda\mu_{lo} + \lambda_u + \lambda_d} < 0,$$

s čimer smo dokazali trditev, da cena pada z λ_d. Na podoben način lahko dokažemo tudi, da $\frac{\partial\mu_{lo}}{\partial\lambda_u} < 0$ in $\frac{\partial\mu_{hn}}{\partial\lambda_u} > 0$, kar implicira, da P narašča z λ_u.

Za konec si poglejmo še relacijo med ceno in deležem lastnikov s. Iz

$$\frac{\partial\mu_{lo}}{\partial s} = \frac{\lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}}{2\lambda\mu_{lo} + 2\lambda(y-s) + \lambda_u + \lambda_d} > 0$$

in

$$\frac{\partial \mu_{hn}}{\partial s} = \frac{-\lambda_u - 2\lambda\mu_{hn}}{2\lambda\mu_{lo} + \lambda_u + \lambda_d} < 0,$$

sledi, da cena pada z deležem lastnikov s.

Za dokaz, da cena narašča z λ za dovolj velik λ, zadostuje dokazati, da odvod cene P po λ spremeni predznak le končno mnogokrat, in da cena v limiti gre proti svoji zgornji meji $\frac{1}{r}$, ko $\lambda \to \infty$. Prvi pogoj je očitno izpolnjen, medtem ko drugi sledi iz enačbe 3.7, s tem da ob predpostavki $s < \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_d}$, $\lambda\mu_{lo}$ ostane omejen in $\lambda\mu_{hn} \to \infty$, ko $\lambda \to \infty$.

□

Pogoj $s < \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_d}$ pomeni, da v stabilnem stanju ni dovolj vrednostnih papirjev, da bi jih vsi naklonjeni agenti lahko posedovali. Pod tem pogojem je cena na trgu s popolno konkurenco in brez trenj enaka sedanji vrednosti dividend $\frac{1}{r}$, saj je marginalni lastnik vedno agent, naklonjen posedovanju vrednostnega papirja, ki ne utrpi stroškov posedovanja le-tega. Ko gre intenzivnost iskanja novih agentov λ v neskončnost in posledično trenja izginejo, se tudi naša cena iz enačbe (3.7) približa ceni na trgu s popolno konkurenco - nelikvidnostni diskont v tem primeru izgine. Iz trditve 3.1.4.1 sledi tudi, da se cena niža z višjim deležem lastnikov s, višjo intenzivnostjo prehodov iz naklonjenega v nenaklonjeno stanje (likvidnostni šoki), in z nižjo intenzivnostjo prehodov iz nenaklonjenega v naklonjeno stanje (okrevanje po šoku).

Trditev 3.1.4.1 pojasni intuitivno pričakovano zvišanje cene v primeru, ko se znebimo trenj na trgu z $\lambda \to \infty$, a obstaja tudi alternativen razmislek. Z $s > \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_d}$ ima marginalni investitor nižjo rezervacijsko vrednost ΔV_h, kar lahko vodi do višje cene vrednostnega papirja. Na primer: naklonjeni agent na nelikvidnem OTC trgu bi utegnil plačati višjo ceno od cene na trgu s popolno konkurenco, saj je vrednostni papir težko najti in ne more izkoristiti takojšnje konkurence med prodajalci vrednostnega papirja.

Mogoče je preveriti, da lahko dobljene rezultate posplošimo na vrednostne papirje s tveganimi dividendami vsaj v naslednjih točkah:

- V primeru tveganih dividend s konstantnim pozitivnim trendom ν je ravnovesna cena vrednostnega papirja enaka ceni iz (3.7), pomnoženi s faktorjem ν.

- V primeru, da so stopnja dividend in stroški nelikvidnosti proporcionalni s procesom X z $E_t[X(t+u)] = X(t)e^{\nu u}$ za neko konstantno stopnjo rasti ν, so tudi cena in vrednostne funkcije proporcionalne z X s faktorjem $e^{\nu u}$, vzemši $r - \nu$ za obrestno mero r.

- V primeru, da proces stopnje dividend X zadošča $E_t[X(t+u)] = X(t)+mu$ za konstantno stopnjo m, in če so stroški nelikvidnosti konstantni, so vrednosti za lastnike podane v obliki $\frac{X(t)}{r} + v_\sigma$ in v_σ za agente brez vrednostnega papirja. Cena ima v tem primeru strukturo $\frac{X(t)}{r} + p$. Pri tem sta v_σ in p konstanti.

Pogledali si bomo model s tveganimi dividendami, simuliranimi z uporabo prve od zgornjih treh točk, v kontekstu nenaklonjenosti tveganju agentov.

3.2 Razširitev na nenaklonjenost tveganju

V tem delu si bomo pogledali razširitev osnovnega modela vrednotenja na tveganju nenaklonjene agente. Motivi agentov za trgovanje bodo tu izhajali iz različnih sposobnosti varovanja pred tveganjem in posledične pridobljene koristi, ki jo agenti pridobijo s posedovanjem vrednostnega papirja. Poskrbeli bomo tudi za primerljivost dobljenih rezultatov s tistimi iz osnovnega modela.

Agenti v tej razširitvi imajo konstantno absolutno tveganju nenaklonjeno (angleško CARA) aditivno koristnostno funkcijo s koeficientom absolutne nenaklonjenosti tveganju γ in časovno preferenco β. Koeficient absolutne nenaklonjenosti tveganju, definiran kot

$$A(c) = \frac{u''(c)}{u'(c)},$$

je torej konstanten za vsak c in je enak γ.

Vrednostni papir ima kumulativen proces dividend D, ki zadošča enačbi

$$dD(t) = m_D dt + \sigma_D dB(t),$$

kjer sta m_D in σ_D konstanti in je B standardno Brownovo gibanje v danem verjetnostnem prostoru, prilagojeno filtraciji F_t. Agent i ima kumulativen proces drugih denarnih prilivov η^i, podan z enačbo

$$d\eta^i(t) = m_\eta dt + \sigma_\eta dB^i(t),$$

kjer je standardno Brownovo gibanje B^i definirano z enačbo

$$dB^i(t) = \rho^i(t) dB(t) + \sqrt{1-\rho^i(t)^2} dZ^i(t)$$

za standardno Brownovo gibanje Z^i, neodvisno od B in kjer je $\rho^i(t)$ "takojšnja korelacija" med dividendami in drugimi denarnimi pritoki agenta i. ρ^i modeliramo kot markovsko verigo z dvema stanjema - ρ_h in $\rho_l > \rho_h$. Parameter ρ je torej določen z notranjim tipom agenta (naklonjenost oziroma nenaklonjenost posedovanju vrednostnega papirja). Agent, ki je trenutno naklonjen posedovanju, ima $\rho^i(t) = \rho_h$ in torej vrednoti vrednostni papir višje kot agent, ki posedovanju ni naklonjen, saj imajo prirastki procesa drugih denarnih tokov naklonjenega agenta manjšo pogojno korelacijo z dividendami vrednostnega papirja. Tako kot v osnovnem modelu so tudi tukaj notranji tipi agentov paroma neodvisne markovske verige, ki menjajo notranji tip agenta iz naklonjenega v nenaklonjen tip z intenzivnostjo λ_d in v obratni smeri z intenzivnostjo λ_u. Obravnavali bomo le poenostavljen model, kjer lahko agent poseduje le θ_o (velik lastnik) ali θ_n (mali lastnik) enot vrednostnega papirja, kjer $\theta_o > \theta_n$. Tako kot v osnovnem modelu se tudi tu agenti srečujejo z intenzivnostjo λ in je množica možnih tipov agentov enaka $T = \{lo, ln, ho, hn\}$. Črki o in n v tem primeru označujeta agente, ki posedujejo θ_o oziroma θ_n enot vrednostnega papirja. Pri dani količini Θ enot vrednostnega papirja na agenta mora veljati

$$(\mu_{lo} + \mu_{ho})\theta_o + (\mu_{ln} + \mu_{hn})\theta_n = \Theta.$$

Iz enačbe (3.1) sledi, da je delež lastnikov, ki posedujejo θ_o enot vrednostnega papirja, enak

$$\mu_{lo} + \mu_{ho} = s = \frac{\Theta - \theta_n}{\theta_o - \theta_n}. \tag{3.9}$$

Obravnavajmo sedaj agenta s procesom $\{\sigma(t); t \geq 0\}$, ki določa njegovo naklonjenost oziroma nenaklonjenost posedovanju vrednostnega papirja in procesom $\{\theta(t) = \theta_o$, ko $\sigma(t) \in \{ho, lo\}$ in $\theta(t) = \theta_n$ sicer; $t \geq 0\}$, ki določa količino enot vrednostnega papirja, ki jo agent trenutno poseduje. Predpostavimo, da na trgu obstaja likvidna obveznica s fiksno, netvegano obrestno mero r, določeno izven modela. Zaloga obveznic je neomejena. Proces premoženja agenta W lahko tako opišemo z enačbo

$$dW(t) = (rW(t) - c(t))dt + \theta(t)dD(t) + d\eta(t) - Pd\theta(t),$$

kjer je c agentov proces potrošnje, η proces drugih denarnih prilivov in P cena enote vrednostnega papirja, ki je v tem modelu v ravnovesju konstanta. Zadnji člen enačbe predstavlja plačila, povezana s trgovanjem z vrednostnim papirjem. Proces potrošnje c mora biti merljiv, integrabilen in mora zadoščati pogoju transverzalnosti, ki ga bomo predstavili kasneje. Obravnavajmo sedaj ravnovesje v stabilnem stanju in označimo z $J(w, \sigma)$ posredno koristnost agenta tipa $\sigma \in \{lo, ln, ho, hn\}$ s trenutnim premoženjem w. Soočamo se s problemom stohastičnega optimalnega upravljanja. Na tem koraku uporabimo znanje iz poglavja 2. Če predpostavimo dovoljšno odvedljivost, dobimo z uporabo enačbe 2.1 naslednje enačbe dinamičnega programiranja (Hamilton-Jacobi-Bellmanove enačbe).

Za agenta tipa lo

$$
\begin{aligned}
0 = \sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}} \{ & -\beta J(w,lo) + J_w(w,lo)(rw - \bar{c} + \theta_o m_D + m_\eta) \\
& + \frac{1}{2} J_{ww}(w,lo)(\theta_o^2 \sigma_D^2 + \sigma_\eta^2 + 2\rho_l \theta_o \sigma_D \sigma_\eta) - e^{-\gamma \bar{c}} \\
& + \lambda_u [J(w,ho) - J(w,lo)] + 2\lambda \mu_{hn} [J(w + P\bar{\theta}, ln) - J(w,lo)] \},
\end{aligned}
$$

agenta tipa ln

$$
\begin{aligned}
0 = \sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}} \{ & -\beta J(w,lo) + J_w(w,lo)(rw - \bar{c} + \theta_n m_D + m_\eta) \\
& + \frac{1}{2} J_{ww}(w,lo)(\theta_n^2 \sigma_D^2 + \sigma_\eta^2 + 2\rho_l \theta_n \sigma_D \sigma_\eta) - e^{-\gamma \bar{c}} \\
& + \lambda_u [J(w,hn) - J(w,ln)] \},
\end{aligned}
$$

agenta tipa ho

$$
\begin{aligned}
0 = \sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}} \{ & -\beta J(w,ho) + J_w(w,ho)(rw - \bar{c} + \theta_o m_D + m_\eta) \\
& + \frac{1}{2} J_{ww}(w,ho)(\theta_o^2 \sigma_D^2 + \sigma_\eta^2 + 2\rho_h \theta_o \sigma_D \sigma_\eta) - e^{-\gamma \bar{c}} \\
& - \lambda_d [J(w,ho) - J(w,lo)] \},
\end{aligned}
$$

in agenta tipa hn

$$
\begin{aligned}
0 = \sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}} \{ & -\beta J(w,hn) + J_w(w,hn)(rw - \bar{c} + \theta_n m_D + m_\eta) \\
& + \frac{1}{2} J_{ww}(w,hn)(\theta_n^2 \sigma_D^2 + \sigma_\eta^2 + 2\rho_h \theta_n \sigma_D \sigma_\eta) - e^{-\gamma \bar{c}} \\
& + \lambda_d [J(w,hn) - J(w,ln)] + 2\lambda \mu_{lo} [J(w - P\bar{\theta}, ho) - J(w,hn)] \},
\end{aligned}
$$

kjer je $\theta = \theta_o - \theta_n$. V nadaljevanju bomo ugotovili, da je posredna koristnost agenta tipa σ s trenutnim premoženjem w enaka

$$
J(w,\sigma) = -e^{-r\gamma(w + a_\sigma + \bar{a})}, \tag{3.10}
$$

kjer

$$
\bar{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\log r}{\gamma} + m_\eta - \frac{1}{2} r\gamma\sigma_\eta^2 - \frac{r-\beta}{r\gamma}\right),
$$

in kjer je za vsak tip agenta σ konstanta a_σ določena na sledeč način. Pogoji prvega reda za HJB enačbo agenta tipa σ implicirajo, da je optimalna stopnja potrošnje enaka

$$
\bar{c} = \frac{log(r)}{\gamma} + r(w + a_\sigma + a). \tag{3.11}
$$

Če stopnjo potrošnje iz zgornje enačbe vstavimo v HJB enačbe, dobimo sistem enačb, ki natančno določa koeficiente a_σ.

Podobno kot v osnovnem modelu je cena P določena z uporabo pogajanja s pogajalsko močjo prodajalca q. Pri rezervacijskih vrednostih prodajalca in kupca, dobljenih iz $J(w, \sigma)$, mora ravnovesna cena zadoščati pogoju $a_{lo} - a_{ln} \leq P\bar{\theta} \leq a_{ho} - a_{hn}$. Tako smo prišli do naslednje trditve.

Trditev 3.2.0.1. *V ravnovesju je agentova potrošnja podana s (3.11), vrednostna funkcija s (3.10) in* $(a_{lo}, a_{ln}, a_{ho}, a_{hn}, P) \in \mathbb{R}^5$ *rešijo sistem*

$$\begin{aligned}
0 =& ra_{lo} + \lambda_u \frac{e^{-r\gamma(a_{ho}-a_{lo})} - 1}{r\gamma} + 2\lambda\mu_{hn} \frac{e^{-r\gamma(P\bar{\theta}+a_{ln}-a_{lo})} - 1}{r\gamma} - (k(\theta_o) - \theta_o\bar{\delta}) \\
0 =& ra_{ln} + \lambda_u \frac{e^{-r\gamma(a_{hn}-a_{ln})} - 1}{r\gamma} - (k(\theta_n) - \theta_n\bar{\delta}) \\
0 =& ra_{ho} + \lambda_d \frac{e^{-r\gamma(a_{hn}-a_{ln})} - 1}{r\gamma} - k(\theta_o) \\
0 =& ra_{hn} + \lambda_d \frac{e^{-r\gamma(a_{ln}-a_{hn})} - 1}{r\gamma} + 2\lambda\mu_{lo} \frac{e^{-r\gamma(P\bar{\theta}+a_{ho}-a_{hn})} - 1}{r\gamma} - k(\theta_n),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

kjer je

$$\begin{aligned}
k(\theta) &= \theta m_D - \frac{1}{2} r\gamma(\theta^2\sigma_D^2 + 2\rho_h\theta\sigma_D\sigma_\eta) \\
\bar{\delta} &= r\gamma(\rho_l - \rho_h)\sigma_D\sigma_\eta > 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

in Nashevo ravnovesno enačbo

$$q(1 - e^{r\gamma(P\bar{\theta}-(a_{lo}-a_{ln}))}) = (1-q)(1 - e^{r\gamma(-P\bar{\theta}+a_{ho}-a_{hn})}). \tag{3.14}$$

Dokaz. Za agentovo potrošnjo in trgovalno strategije mora veljati pogoj transverzalnosti. To pomeni, da za vsak začetni tip agenta σ_0 velja

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\beta T} E_0[e^{-r\gamma W_T}] = 0.$$

Intuitivno ta pogoj pomeni, da agenti na dolgi rok ne morejo vzdrževati visoke potrošnje s prekomernim zadolževanjem. Pokazati moremo, da naša optimalna potrošnja in optimalna trgovalna strategija zadoščata temu pogoju.

Domnevamo, da za našo optimalno strategijo velja

$$E_0[J(W_T, \sigma_T)] = e^{(\beta-r)T} \times J(W_0, \sigma_0).$$

Pogoj transverzalnosti je tu izpolnjen, saj

$$\begin{aligned} e^{-\beta T} E_0[e^{-r\gamma W_T}] &= -e^{-\beta T} E_0[J(W_T,\sigma_T) e^{r\gamma(\bar{a}+a_{\sigma_T})}] \\ &\leq -\sup_\sigma e^{r\gamma(\bar{a}+a_\sigma)} e^{-rT} J(W_0,\sigma_0) \\ &\xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Domneva je osnovana na podlagi dejstev, da mora biti marginalna koristnost $u'(c_0)$ potrošnje v času 0 enaka marginalni koristnosti $e^{(r-\beta)T} E_0[u'(c_T)]$ potrošnje v času T, in da je marginalna koristnost proporcionalna z vrednostno funkcijo našega CARA okvirja. Da bi domnevo dokazali, si poglejmo naslednjo enačbo, ki opisuje dinamiko premoženja agenta tipa σ

$$\begin{aligned} dW &= (\frac{\log r}{\gamma} - ra_\sigma - r\bar{a} + \theta_\sigma m_D + m_\eta)dt + \theta_\sigma \sigma_D dB + \sigma_\eta dB^i - Pd\theta_\sigma \\ &= (-ra_\sigma + \theta_\sigma m_D + \frac{1}{2} r\gamma\sigma_\eta^2 + \frac{r-\beta}{r\gamma})dt + \theta_\sigma\sigma_D dB + \sigma_\eta dB^i - Pd\theta_\sigma \\ &= M(\sigma)dt + \sqrt{\Sigma(\sigma)} d\hat{B} - Pd\theta_\sigma, \end{aligned}$$

kjer so M, Σ in standardno Brownovo gibanje $\hat{B}$ določeni z zgornjo enačbo. Definiramo naslednjo funkcijo

$$f(W_t,\sigma_t,t) = E_t[J(W_T,\sigma_T)] = E_t[e^{-r\gamma(W_T + a_{\sigma_T} + \bar{a})}].$$

Po Itovi formuli dobimo

$$0 = f_t + f_w M(\sigma) + \frac{1}{2} f_{ww}\Sigma(\sigma) + \sum_{\{\sigma':\sigma'\neq\sigma\}} \lambda(\sigma,\sigma')(f(w + z(\sigma,\sigma')P,\sigma',t) - f(w,\sigma,t)), \tag{3.15}$$

kjer je $\lambda(\sigma,\sigma')$ intenzivnost prehajanja iz tipa σ v σ' in je $z(\sigma,\sigma')$ enak -1, 1 ali 0, odvisno od vrste spremembe - ali gre za prodajo, nakup, ali spremembo naklonjenosti do posedovanja vrednostnega papirja. Obvezen pogoj tu je, da velja $f(w,\sigma,T) = e^{-r\gamma(w+a_\sigma+\bar{a})}$.

Sledi dejstvo, da je $f(w,\sigma,t) = e^{(\beta-r)(T-t)} J(w,\sigma)$, saj slednja funkcija očitno izpolnjuje zgornji pogoj, poleg tega pa tudi reši enačbo 3.15, kar lahko potrdimo z uporabo a_σ iz 3.12. □

Poglejmo si še obnašanje cene v primeru, ko nimamo težav z nepopolnim iskanjem partnerjev.

Trditev 3.2.0.2. *Če velja $s < \mu_{hn} + \mu_{ho}$, in gre $\lambda \to \infty$ velja*

$$P \to \frac{k(\theta_0) - k(\theta_n)}{r\bar{\theta}}.$$

Dokaz. Trditev izhaja iz enačb 3.12 - 3.14 in dejstva, da $\lambda\mu_{hn} \to \infty$, medtem ko je $\lambda\mu_{lo}$ omejen. □

Da bomo lahko primerjali ravnovesno stanje tega modela z osnovnim modelom, bomo uporabili linearizacijo $e^z - 1 \approx z$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
0 &\approx ra_{lo} - \lambda_u(a_{ho} - a_{lo}) - 2\lambda\mu_{hn}(P\bar{\theta} - a_{lo} + a_{ln}) - (k(\theta_o) - \theta_o\bar{\delta}) \\
0 &\approx ra_{ln} - \lambda_u(a_{hn} - a_{ln}) - (k(\theta_n) - \theta_n\bar{\delta}) \\
0 &\approx ra_{ho} - \lambda_u(a_{lo} - a_{ho}) - k(\theta_o) \\
0 &\approx ra_{hn} - \lambda_u(a_{ln} - a_{hn}) - 2\lambda\mu_{lo}(a_{ho} - a_{hn} - P\bar{\theta}) - l(\theta_n) \\
P\bar{\theta} &\approx (1-q)(a_{lo} - a_{ln}) + q(a_{ho} - a_{hn}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Te enačbe imajo enako strukturo kot enačbe 3.5 iz osnovnega modela z do tveganja nevtralnimi agenti. Stopnja dividend za velike lastnike je tu enaka $k(\theta_o)$ in za male lastnike $k(\theta_n)$. Stroški, povezani z nelikvidnostjo (nenaklonjenostjo posedovanju), so podani z $\bar{\delta}$ iz 3.13. Osnovni model lahko tako vidimo kot do tveganja nevtralno aproksimacijo efekta nelikvidnosti pri iskanju partnerjev v modelu z nenaklonjenostjo tveganju. Če rešimo zgornji linearizirani model, dobimo ravnovesno ceno

$$P = \frac{k(\theta_o) - k(\theta_n)}{r\bar{\theta}} - \frac{\bar{\delta}}{r}\frac{r(1-q) + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}(1-q)}{r + \lambda_d + 2\lambda\mu_{lo}(1-q) + \lambda_u + 2\lambda\mu_{hn}q}.$$

Cena je enaka ceni pri popolni likvidnosti iskanja partnerjev, zmanjšana za nelikvidnostni premijo, ki jo lahko vidimo kot trajno premijo tveganja, povezanega z nelikvindonstjo iskanja partnerjev. Nelikvidnostna premija je odvisna od višine razlike med motivi za ščitenje portfelja posedovanju vrednostnega papirja naklonjenih in nenaklonjenih agentov, izražene v parametru $\bar{\delta}$ iz 3.13. Naklonjeni agent si tako prizadeva zaščititi portfelj, medtem ko nenaklonjen agent ponuja zaščito, za kar pa zaračuna določeno premijo za tveganje.

3.2.1 Primer

Za numerične zglede bomo obravnavali trg s približno petdesetodstotnim letnim prometom (v enem letu približno 50 % vseh vrednostnih papirjev zamenja lastnika), kar se ujema z OTC trgom obveznic podjetij. V tabeli 3.1 najdemo parametre osnovnega, do tveganja nevtralnega modela v osnovnem stanju.

Tabela 3.1: Vhodni parametri osnovnega modela

λ	λ_u	λ_d	s	r	β	q	δ
635	5	0.5	0.8	0.05	0.05	0.5	2.5

Dobljeni deleži in cena v ravnovesnem stanju pa so predstavljeni v tabeli 3.2.

Tabela 3.2: Deleži posameznih tipov agentov in cena vrednostnega papirja v stabilnem stanju osnovnega modela

μ_{ho}	μ_{ho}	μ_{ho}	μ_{ho}	P
0.7972	0.1118	0.0028	0.0882	18.38

Poglejmo si, kaj predstavljajo posamezni parametri. Intenzivnost iskanja $\lambda = 625$ implicira, da se bo agent v povprečju v enem letu srečal z $2\lambda = 1250$ ostalimi agenti. Ker ima leto približno 250 trgovalnih dni, to pomeni, da se bo agent dnevno srečal s $1250/250 = 5$ agenti. Pri dobljenem deležu tipov agentov v stabilnem stanju ugotovimo, da je povprečni čas, potreben za prodajo vrednostnega papirja, enak $250/(2\lambda\mu_{hn}) = 1.8$ dneva. Intenzivnosti $\lambda_u = 5$ prehodov iz do posedovanja vrednostnega papirja naklonjenega stanja v naklonjeno, in obratno $\lambda_d = 0.5$ iz naklonjenega v nenaklonjeno, pomenita, da naklonjeni agent ostane naklonjen v povprečju $1/0.5 = 2$ leti, med tem ko nenaklonjen agent ostane nenaklonjen v povprečju $1/5 = 0.2$ leti. S takšnimi intenzivnostmi dobimo letni promet $2\lambda\mu_{lo}\mu_{hn}/s = 49$ %. Delež agentov, ki posedujejo vrednostni papir, je enak $s = 0.8$, diskontna netvegana obrestna mera je $r = 5\%$, kupec in prodajalec imata vsak polovico pogajalske moči, kar določa $q = 0.5$ in strošek povezan z nelikvidnostjo je enak $\delta = 2.5$, kar bomo videli tudi s pomočjo dodatnih parametrov za nenaklonjenost tveganju v tabeli 3.3.

Tabela 3.3: Dodatni parametri za nenaklonjenost tveganju

γ	ρ_h	ρ_l	μ_η	σ_η	μ_D	σ_D	Θ	θ_o	θ_n
0.01	-0.5	0.5	10000	10000	1	0.5	16000	20000	0

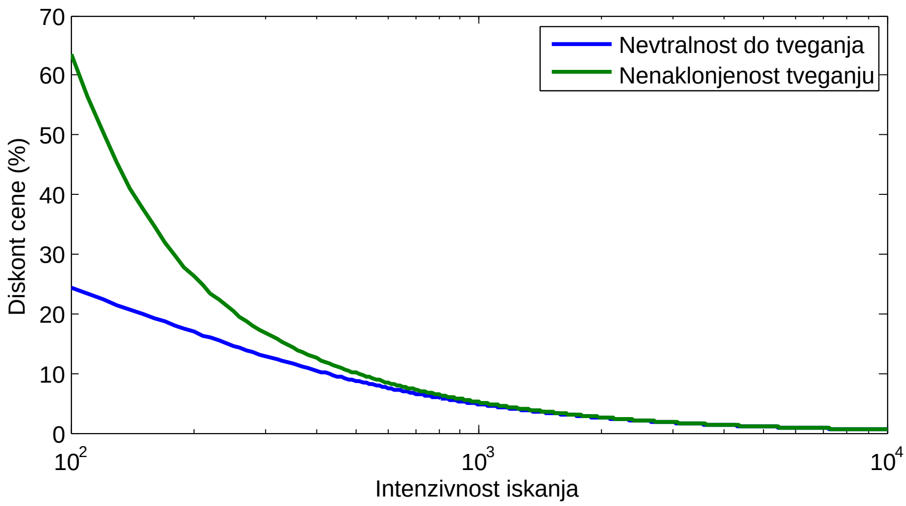
Vidimo lahko, da je kot posledica nelikvidnosti povezane z iskanjem, le majhen delež $\mu_{lo}/s = 0.0028/0.8 = 0.35\%$ vrednostnih papirjev alociran "napačno" (v lasti nenaklonjenih agentov). Vseeno pa ima ta majhen delež kar znaten vpliv na ravnovesno ceno $P = 18.38$, ki je precej nižja od cene popolnega trga $1/r = 20$. Z drugimi besedami, vrednostni papir si lahko predstavljamo kot obveznico z dividendami 1 in donosom $1/P = 1/18.38 = 5.44\%$, ki je 44 baznih točk višji od donosa $r = 5\%$ na trgu s popolno likvidnostjo.

Osnovni, do tveganja nevtralni model iz tabele 3.1, ustreza modelu s tveganju nenaklonjenimi agenti z dodatnimi parametri, podanimi v tabeli 3.3 v naslednjih treh točkah.

- Nelikvidnostni strošek $\delta = \bar{\delta} = 2.5$ nenaklonjenega agenta je enak strošku za varovanje portfelja modela z nenaklonjenostjo tveganju iz 3.13
- Celotna količina vrednostnih papirjev Θ in možne pozicije agentov θ_o in θ_n z uporabo enačbe 3.9 implicirajo enak delž $s = 0.8$ agentov, ki posedujejo večjo količino vrednostnega papirja (θ_o) .
- Netvegana različica dividend na vrednostni papir $(k(\theta_o) - k(\theta_n))/(\theta_o - \theta_n) = 1$ je enaka kot v osnovnem modelu.

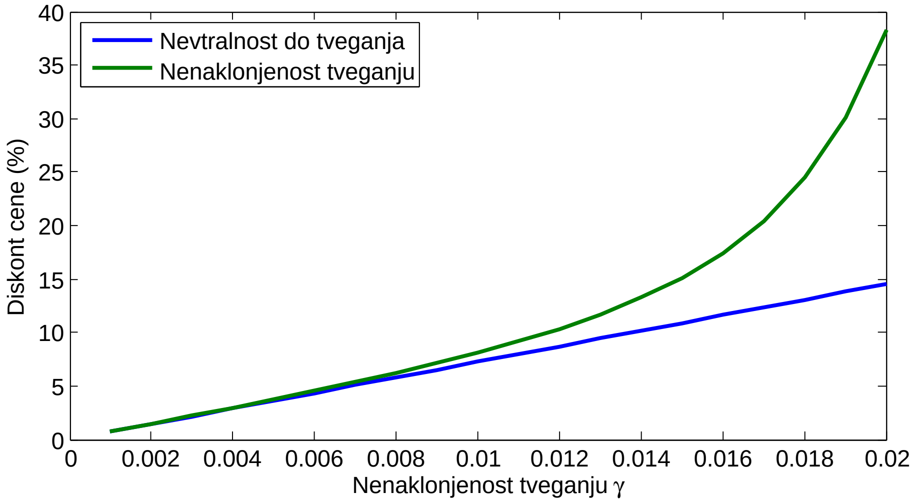
Parametra pričakovane vrednosti $\mu_D = 1$ in volatilnosti $\sigma_D = 0.5$ implicirata, da je standardni odklon letnega donosa dividend približno $\sigma_D/P = 2.75\%$.

Slika 3.1 prikazuje, kako se ob povečani likvidnosti pri iskanju novih partnerjev, merjeni s parametrom λ, cena vrednostnega papirja dvigne. Graf odraža dejstvo, da ob večanju parametra λ, alokacija in cena vrednostnih papirjev konvergirata proti tistima s popolnega trga (trditvi 3.1.4.1 in 3.2.0.2). Sliki 3.2 in 3.3 prikazujeta, kako se cena znižuje v primerjavi s ceno na popolnem trgu, če povečujemo stopnjo nenaklonjenosti γ in volatilnost donosov.



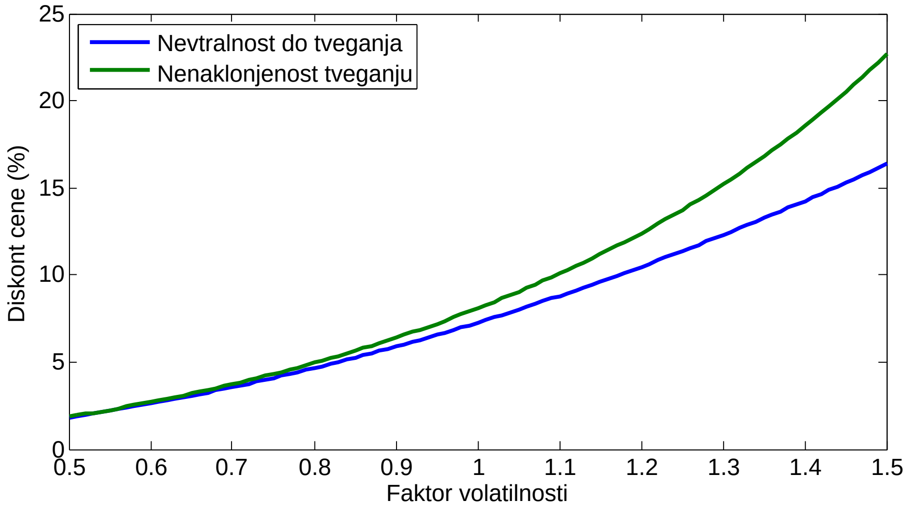
Slika 3.1: Odvisnost cene od intenzivnosti iskanja λ

Graf prikazuje proporcionalno znižanje cene vrednostnega papirja glede na ceno na popolnem trgu kot funkcijo intenzivnosti iskanja λ. Zelena krivulja ustreza modelu s tveganju nenaklonjenimi agenti, podanemu z enačbami 3.12 - 3.14, modra krivulja pa ponazarja lineariziran model, podan s sistemom 3.16 z do tveganja nevtralnimi agenti.



Slika 3.2: Odvisnost cene od nenaklonjenosti tveganju in posredne nelikvidnosti

Graf prikazuje proporcionalno znižanje cene vrednostnega papirja glede na ceno na popolnem trgu kot funkcijo koeficienta nenaklonjenosti tveganju γ. Zelena krivulja ustreza modelu s tveganju nenaklonjenimi agenti, podanemu z enačbami 3.12 - 3.14, modra krivulja pa ponazarja lineariziran model, podan s sistemom 3.16 z do tveganja nevtralnimi agenti, kjer se strošek posedovanja vrednostnega papirja $\bar{\delta}$ in stopnja dividend k spreminjata z γ (posredna nelikvidnost).



Slika 3.3: Odvisnost cene od volatilnosti in posredne nelikvidnosti

Graf prikazuje proporcionalno znižanje cene vrednostnega papirja glede na ceno ne popolnem trgu, kot funkcijo faktorja volatilnosti s katerim pomnožimo volatilnost drugih denarnih prilivov σ_η in volatilnost dividend σ_D. Zelena krivulja ustreza modelu s tveganju nenaklonjenimi agenti podanega z enačbami 3.12 - 3.14, modra krivulja pa ponazarja lineariziran model podan s sistemom 3.16 z do tveganja nevtralnimi agenti, kjer se strošek posedovanja vrednostnega papirja $\bar{\delta}$ in stopnja dividend k spreminjata s $\sigma_e ta$ in σ_D (posredna nelikvidnost).

Na slikah so prikazana ravnovesna stanja in sicer tako za model z nenaklonjenostjo tveganju podan z enačbami 3.12 - 3.14 (zelene krivulje), kot tudi za lineariziran, do tveganja nevtralen model, podan s sistemom enačb 3.16 (modre krivulje).

Vidimo, da se diskont cene povečuje z nenaklonjenostjo tveganju in povečano volatilnostjo. Za izbrane parametre je efekt relativno velik. Diskont cene se giblje v razponu od 1% do 40%, odvisno od nenaklonjenosti tveganju in samega tveganja.

3.3 Model z likvidnostnimi šoki na trgu

Do sedaj smo si ogledali, kako nepopolno iskanje novih partnerjev vpliva na ravnovesno ceno v stabilnem stanju, kjer so agenti izpostavljeni idiosinkratičnim likvidnostnim šokom. Na trgu nismo imeli nobene negotovosti na nivoju trga kot celote.

Videli smo, da nepopolno iskanje vpliva na ravnovesno ceno vrednostnega papirja, v tem delu pa bomo pokazali, da ima vpliv tudi na odpornost proti likvidnostnim šokom trga kot celote. Na trgu bo tako večja skupina agentov doživela likvidnostni šok simultano. Pogledali si bomo gibanje cene takoj po likvidnostnem šoku, okrevanje v daljšem časovnem horizontu, vpliv nevarnosti prihodnjih šokov na ceno in spremembe v času potrebnem za iskanje novih partnerjev.

Nekoliko bomo prilagodili osnovni model iz 3.1 (ali linearizirani model iz 3.2). Osnovnemu modelu dodamo občasne, časovno naključne likvidnostne šoke na nivoju celotnega trga. Ob vsakem tovrstnem šoku določen delež naključno izbranih agentov, ki so naklonjeni posedovanju vrednostnega papirja, izgubi likvidnost in postane posedovanju nenaklonjen. Prihode šokov predstavimo kot neodvisen Poissonov proces z intenzivnostjo prihodov ξ.

Po zakonu velikih števil ob vsakem likvidnostnem šoku trga dobimo novo porazdelitev $\mu = \bar{\mu}$, za katero velja $\bar{\mu} \in [0,1]^4$, ustreza enačbama 3.1 in 3.2, in ima povečan delež nelikvidnih agentov (nenaklonjenih posedovanju vrednostnega papirja); tako lastnikov kot nelastnikov. Velja $\bar{\mu}_{lo} > \mu_{lo}(t)$ in $\bar{\mu}_{ln} > \mu_{ln}(t)$. Vsak naklonjeni lastnik ostane naklonjen z verjetnostjo $1 - \pi_{ho}(t) = \bar{\mu}_{ho}/\mu_{ho}(t)$ in postane nenaklonjen z verjetnostjo $\pi_{ho}(t)$. Podobno naklonjeni nelastnik ostane naklonjen z verjetnostjo $1 - \pi_{hn}(t) = \bar{\mu}_{hn}/\mu_{hn}(t)$ in postane nenaklonjen z verjetnostjo $\pi_{hn}(t)$. Pogojno na $\pi(t)$ so spremembe tipov agentov med seboj paroma neodvisne. Likvidnostni šok neposredno ne vpliva na nenaklonjene agente, spremembe pa občutijo posredno, saj se s šokom spremeni struktura trga, na katerem operirajo. Takšen model je nekoliko poenostavljen, saj ne upošteva morebitnih učinkov preteklih šokov na kasnejše šoke. V nasprotnem primeru bi bila analiza modela dokaj neobvladljiva.

3.3.1 Reševanje modela

Za lažje reševanje modela z likvidnostnimi šoki bomo namesto koledarskega časa merili čas glede na zadnji šok. V času $t = 0$ se torej pojavi šok. Če vemo, v katerem trenutku se šok pojavi, lahko potem enostavno umestimo rešitev v koledarski čas.

Najprej pridobimo ravnovesne deleže $\mu(t) \in \mathbb{R}^4$ agentov vseh štirih tipov. Ob prihodu likvidnostnega šoka se ti deleži spremenijo in vrednosti takoj po šoku so enake $\mu(0) = \bar{\mu}$. Po šoku se vrednosti $\mu(t)$ gibljejo v skladu s sistemom diferencialnih enačb 3.4 in ob odsotnosti novih šokov s časom konvergirajo k stabilnemu stanju. Tako dobimo od časa odvisno ravnovesno rešitev za deleže agentov vseh štirih tipov. Kot v osnovnem modelu, imajo tudi tu agenti svoje vrednostne funkcije $V_\sigma(t)$. Vrednosti so odvisne od tipa agenta σ in pretečenega časa t od zadnjega šoka. Razvoj vrednosti agentov vseh tipov je podan z naslednjim sistemom diferencialnih enačb.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{lo}(t) =& rV_{lo}(t) - \lambda_u(V_{ho}(t) - V_{lo}(t)) - 2\lambda\mu_{hn}(P(t) + V_{ln}(t) - V_{lo}(t)) \\
& - \xi(V_{lo}(0) - V_{lo}(t)) - (1-\delta) \\
\dot{V}_{ln}(t) =& rV_{ln}(t) - \lambda_u(V_{hn}(t) - V_{ln}(t)) - \xi(V_{ln}(0) - V_{ln}(t)) \\
\dot{V}_{ho}(t) =& rV_{ho}(t) - \lambda_d(V_{lo}(t) - V_{ho}(t)) \\
& - \xi((1-\pi_{ho}(t))V_{ho}(0) + \pi_{ho}(t)V_{lo}(0) - V_{ho}(t)) - 1 \\
\dot{V}_{hn}(t) =& rV_{hn}(t) - \lambda_d(V_{ln}(t) - V_{hn}(t)) - 2\lambda\mu_{lo}(V_{ho}(t) - V_{hn}(t) - P) \\
& - \xi((1-\pi_{hn}(t))V_{hn}(0) + \pi_{hn}(t)V_{ln}(0) - V_{hn}(t)), \\
P(t) =& (1-q)(V_{lo}(t) - V_{ln}(t)) + q(V_{ho}(t) - V_{hn}(t)),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

kjer izrazi, ki vključujejo ξ, predstavljajo tveganje likvidnostnih šokov. Sistem diferencialnih enačb, linearen v $V(t)$, je odvisen od determinističnega razvoja deležev $\mu(t)$ in ima nenavadno lastnost, da vključuje začetne vrednosti $V(0)$. Za lažje reševanje zapišemo sistem v vektorski obliki

$$\dot{V}(t) = A_1(\mu(t))V(t) - A_2 - A_3(\mu(t))V(0), \tag{3.18}$$

kjer so $A_1, A_3 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ in $A_2 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ matrike keficientov. Če obravnavamo $V(0)$ kot vektor konstant, je rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb, ki ustreza ustreznemu pogoju transverzalnosti, enaka

$$V(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^s A_1(\mu(u))du}(A_2 + A_3(\mu(s))V(0))ds. \tag{3.19}$$

Za $t = 0$ dobimo

$$V(0) = \int_0^\infty e^{-\int_0^s A_1(\mu(u))du}(A_2 + A_3(\mu(s))V(0))ds,$$

iz česar dobimo fiksno vrednost za $V(0)$

$$\begin{aligned} V(0) =& (I_4 - \int_0^\infty e^{-\int_0^s A_1(\mu(u))du} A_3(\mu(s))ds)^{-1} \times \\ & (\int_0^\infty e^{-\int_0^s A_1(\mu(u))du} A_2 ds), \end{aligned} \tag{3.20}$$

kjer je $I_4 \in \mathbb{R}^{4\times4}$ identična matrika.

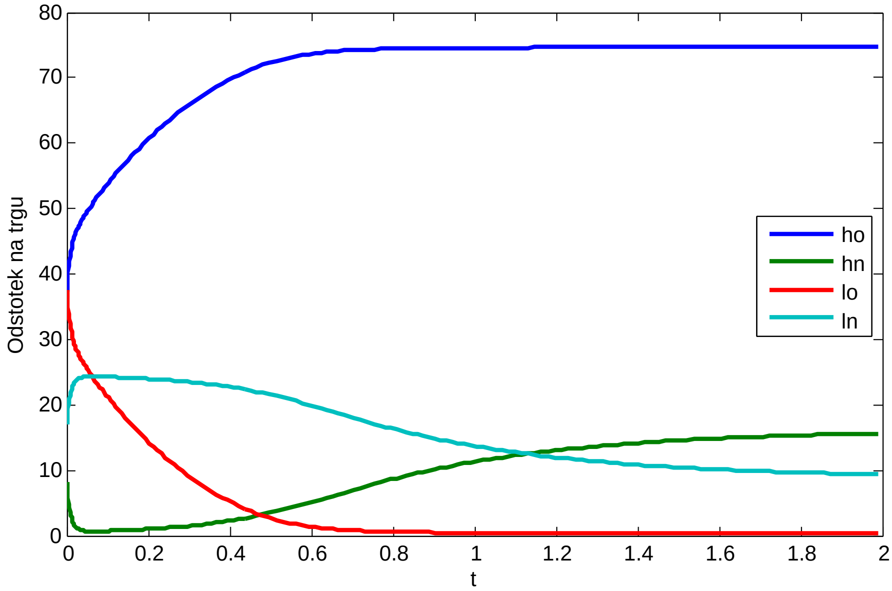
Enačbi 3.19 in 3.20 skupaj predstavljata rešitev sistema. Pri tem smo vzeli pogajalsko moč q kot eksogeno dano.

3.3.2 Primer

V tem delu bomo najprej poiskali vzporednico med modelom in realnim dogajanjem na trgu, potem pa si bomo s pomočjo numeričnega primera ogledali, kako likvidnostni šok vpliva na gibanje cene vrednostnega papirja.

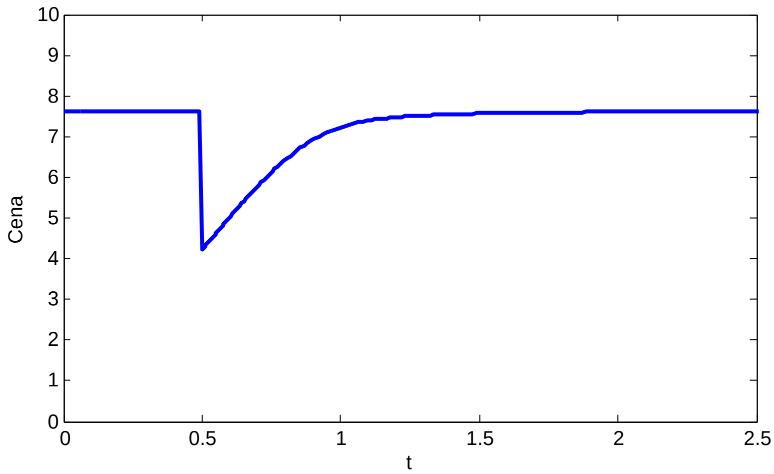
Likvidnostni šoki na trgu so relativno pogost pojav. Primer takšnega šoka je tudi nedavna finančna kriza, kjer so se velike ameriške pa tudi nekatere evropske banke znašle v nezavidljivem likvidnostnem položaju. Da bi banke izboljšale svoj likvidnostni položaj, so bile prisiljene prodajati svoje vrednostne papirje. Zaradi presežne ponudbe in nizkega povpraševanja (pa tudi zaradi vprašljive kvalitete) so cene vrednostnih papirjev na trgu močno padle. V našem modelu negativne posledice za posameznega agenta, ki nastanejo kot posledica likvidnostnega šoka, ponazarja parameter δ, posledice za trg kot celoto pa parameter π.

Definirajmo sedaj vhodne parametre modela. Naj bo intenzivnost iskanja λ enaka 150 in naj agenti prehajajo iz nenaklonjenega stanja v naklonjeno z intenzivnostjo $\lambda_u = 2$ ter v obratno smer z intenzivnostjo $\lambda_d = 0.2$. Delež agentov, ki posedujejo vrednostni papir, naj bo $s = 0.75$, netvegan donos $r = 10\%$ in naj imajo agenti, ki kupujejo in prodajajo vrednostni papir, enako pogajalsko moč $q = 0.5$. Nenaklonjeni agenti za posedovanje vrednostnega papirja utrpijo strošek $\delta = 2.5$, intenzivnost likvidnostnih šokov na trgu pa naj bo $\xi = 0.05$. Deleži agentov tik po likvidnostnem šoku so enaki $\bar{\mu}_{ho} = 0.3735$, $\bar{\mu}_{hn} = 0.0810$, $\bar{\mu}_{lo} = 0.3765$ in $\bar{\mu}_{ln} = 0.1690$, kar je konsistentno s šokom, ki se pojavi v stabilnem stanju, med katerim naklonjeni agenti postanejo nenaklonjeni z verjetnostjo 0.5.



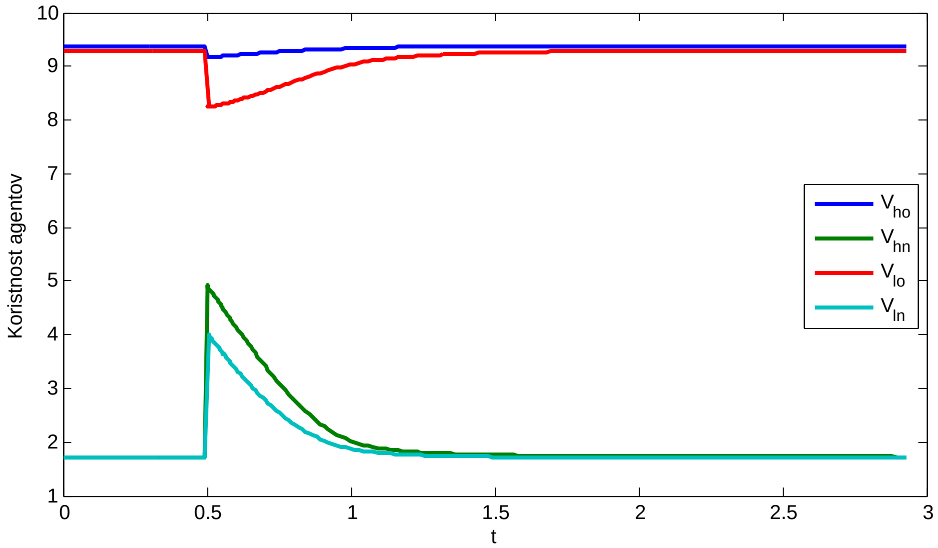
Slika 3.4: Razvoj deležev vseh štirih tipov agentov tik po šoku.

Graf prikazuje gibanje deležev takoj po šoku. Opazimo lahko, da prodaja vrednostnih papirjev nenaklonjenih agentov naklonjenim poteka zelo hitro in po približno devetih mesecih skoraj vse vrednostne papirje že posedujejo naklonjeni agenti. Normalizacija razmer na trgu sicer traja še nekoliko dlje. Po približno dveh letih so posledice šoka v veliki meri odpravljene in trg se vrne v ravnovesno stanje. Razvoj sicer predpostavlja odsotnost novih šokov.



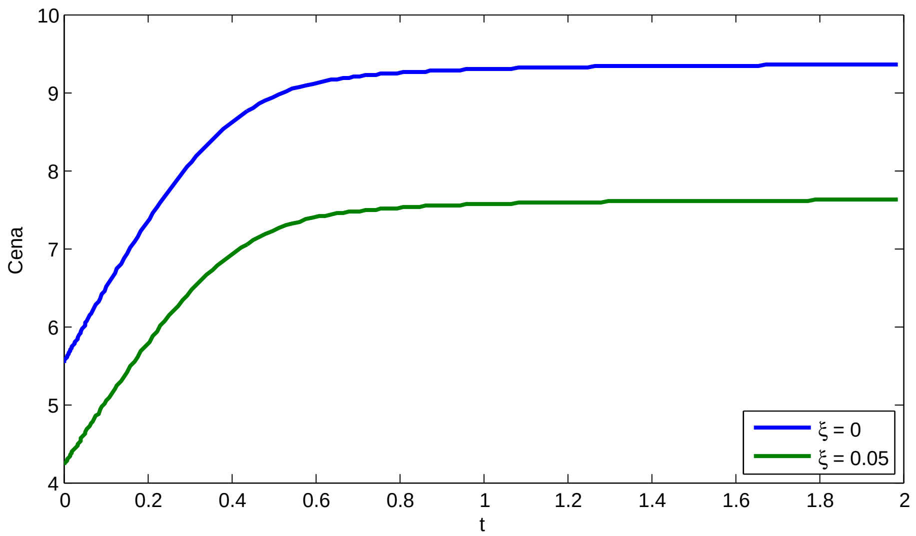
Slika 3.5: Gibanje cene ob šoku v času 0.5.

Graf prikazuje padec in ponovni dvig cene po šoku, ki nastopi v času 0.5. Vidimo, da je padec cene precejšen, kar je posledica povečanega števila prodajalcev in relativno majhnega števila potencialnih kupcev. Pred šokom prodajalec potrebuje dobrih pet dni, da sreča potencialnega kupca, po šoku pa se število dni podvoji na dobrih deset. Tudi ko pride do srečanja, je prodajalec v slabšem položaju za pogajanje, saj ve, da bo moral ponovno dolgo čakati na novega potencialnega kupca, če se pogajanja končajo brez dogovora.



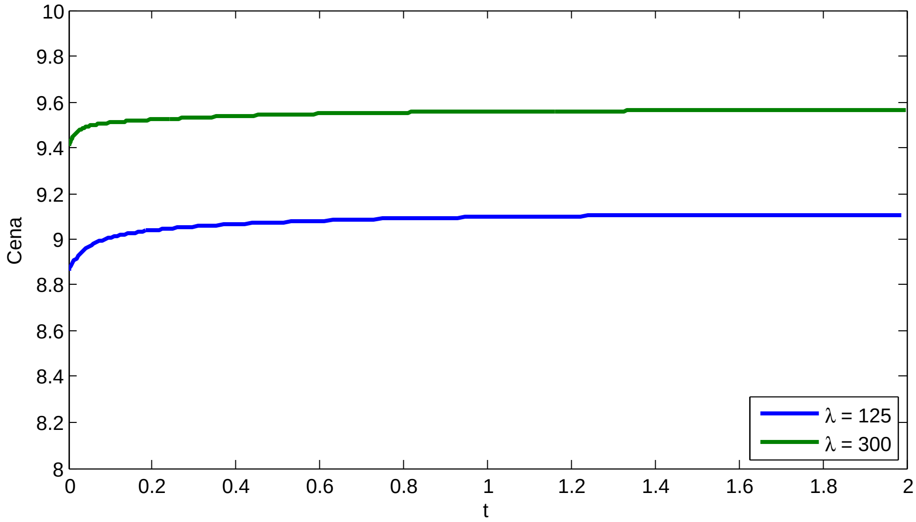
Slika 3.6: Gibanje koristnosti agentov ob šoku v času 0.5.

Graf prikazuje koristnosti agentov pred in po šoku, ki nastopi v času 0.5. Vidimo, da se za naklonjene lastnike stanje bistveno ne spremeni, med tem ko koristnost nenaklonjenih lastnikov znatno pade. Hkrati se občutno izboljša stanje za agente brez vrednostnih papirjev, saj jim stanje po šoku zelo ustreza - cene močno padejo, poveča pa se tudi število prodajalcev.



Slika 3.7: Gibanje cene tik po šoku, z in brez nevarnosti novih šokov.

Graf prikazuje razliko v gibanju cene tik po šoku v primeru, ko je na trgu nevarnost novih šokov ($\xi = 0.05$) in v primeru, ko te nevarnosti ni ($\xi = 0$). Opazimo, da se razlika s časom veča, nakar se v stabilnem stanju ustali. Nevarnost šokov tako v tem primeru za približno 18.5% zniža ceno vrednostnega papirja.



Slika 3.8: Gibanje cene tik po "mini" šoku, pri majhni ($\lambda = 125$) in veliki ($\lambda = 300$) intenzivnosti iskanja partnerjev.

Graf prikazuje razliko v gibanju cene tik po "mini" šoku (le pet odstotkov naklonjenih agentov postane nenaklonjenih) v primeru visoke in nizke intenzivnosti iskanja partnerjev. Po pričakovanju so na trgu cene višje v primeru visoke intenzivnosti. Pri nizki intenzivnosti je hitrost iskanja novih parterjev nižja, kar se odraža tudi v nekoliko nižji ceni.

Poglejmo si glavne lastnosti modela s pomočjo grafičnih prikazov različnih parametrov. Predpostavimo odsotnost novih šokov po prvem. Na sliki 3.4 je prikazan razvoj deležev posameznih tipov agentov na trgu ob pojavu šoka v času 0, slika 3.5 pa prikazuje vpliv šoka na gibanje cene vrednostnega papirja. Šok se tu pojavi v času 0.5. Slika 3.6 prikazuje gibanje koristnosti posameznih tipov agentov, ob pojavi šoka v času 0.5. Slika 3.7 prikazuje gibanje cene tik po šoku, v primeru nevarnosti novih šokov in v primeru, ko te nevarnosti ni, slika 3.8 pa prikazuje razliko v gibanju cene tik po "mini" šoku v primeru visoke in nizke intenzivnosti iskanja partnerjev.

Iz primerov in njihovih grafičnih prikazov ugotovimo, da je po šoku iskanje potencialnih kupcev precej oteženo, saj se pričakovani čas iskanja podvoji, močno pa pade tudi cena vrednostnega papirja. Da se stanje ponovno normalizira, traja približno eno leto. Koristnost udeležbe na trgu se nekoliko zniža za lastnike vrednostnih papirjev in kar precej zviša za nelastnike, saj jim stanje po šoku zelo ustreza - cene močno padejo, poveča pa se tudi število prodajalcev. Znatno na ceno negativno vpliva tudi sama prisotnost agregatnih šokov (parameter ξ). V prikazanem primeru se cena zniža kar za 18.5%. Tako kot pri ostalih modelih ima tudi tu višja intenzivnost iskanja λ pozitiven učinek na ceno, saj je trg bolj likviden.

Zaključek

V delu sta bila predstavljena model vzpostavitve ravnovesja na trgu z zaporednimi pogajanji med agenti, ki temelji na teoriji iger in bolj napreden model vrednotenja instrumentov na OTC trgih, ki temelji na rezultatih prvega modela, diferencialnih enačbah in teoriji optimalnega upravljanja. Pogledali smo tudi dve razširitvi modela na tveganju nenaklonjene agente in prisotnost agregatnih likvidnostih šokov na trgu.

Pri modelu z zaporednimi pogajanji smo ugotovili, da sta ključna parametra pri izoblikovanju ravnovesja agentova sposobnost iskanja partnerjev (v modelu ponazorjena z verjetnostnima parametroma α in β) in diskontni faktor (v modelu parameter δ), ki predstavlja časovni pritisk in spodbuja čim hitrejšo sklenitev dogovora. Hitro srečevanje novih partnerjev agentu zagotavlja boljše pogajalsko izhodišče, ki se udejani v ugodnejšem končnem dogovoru, medtem ko si v primeru dolgotrajnega čakanja na nove partnerje, agent želi dogovor skleniti čim prej, tudi na račun nekoliko slabšega izkupička. Pri visokem vrednotenju časa je zelo pomembno tudi, kdo je predlagatelj in kdo se mora na ponudbo odzvati. Bolj ko je pomembna hitra sklenitev dogovora zaradi časovnega pritiska, v večji prednosti je predlagatelj.

Pri obravnavi osnovnega modela vrednotenja na OTC trgih z do tveganja nevtralnimi agenti smo prišli do naslednjih zakonitosti. Dobljena cena predstavlja sedanjo vrednost dividend $\frac{1}{r}$, znižano za likvidnostno premijo. V stabilnem stanju je ravnovesna cena nižja, če: (I) so možnosti, da nenaklonjen agent v naslednjem obdobju postane naklonjen posedovanju manjše (nižji λ_u); (II) so možnosti, da naklonjen agent postane nenaklonjen posedovanju večje (višji λ_d); (III) je na trgu veliko število vrednostnih papirjev (višji s), (IV) je strošek posedovanja vrednostnega papirja za nenaklonjene agente (δ) višji in (V) ima prodajalec višjo pogajalsko moč (q). Pod določenimi pogoji pa se cena zvišuje z intenzivnostjo iskanja partnerjev (λ) in v primeru popolno likvidnega trga ($\lambda \to \infty$) cena doseže sedanjo vrednost dividend $\frac{1}{r}$.

Pri razširitvi modela na tveganju nenaklonjene agente smo ugotovili, da je diskont cene pri nizkih intenzivnostih iskanja novih partnerjev (λ) precej večji, ko so agenti nenaklonjeni tveganju. Diskont cene se povečuje z višjo nenaklonjenostjo tveganju in povečano volatilnostjo dividend in drugih denarnih prilivov. Diskont cene se za izbrane parametre giblje v razponu od 1% do 40%, odvisno od nenaklonjenosti tveganju in samega tveganja (volatilnosti).

Za konec smo pri vključitvi agregatnih likvidnostnih šokov v model ugotovili, da je po šoku iskanje potencialnih kupcev precej oteženo, močno pa pade tudi cena vrednostnega papirja. Koristnost udeležbe na trgu se nekoliko zniža za lastnike vrednostnih papirjev in kar precej zviša za nelastnike. Znatno na ceno negativno vpliva tudi sama prisotnost agregatnih šokov (parameter ξ), kot pri ostalih modelih pa ima tudi tu višja intenzivnost iskanja λ pozitiven učinek na ceno.

Literatura

[1] C. Derman, *Finite State Markovian Decision Processes,*Academic Press, New York (1970).

[2] D. Duffie, N. Garleanu, L.H. Pedersen, *Over-the-Counter Markets*, Econometrica **73,18** (2005) 15–47.

[3] D. Duffie, N. Garleanu, L.H. Pedersen, *Valuation in Over-the-Counter Markets*, The Review of Financial Studies **20,5** (2007) 1865–1900.

[4] W.H. Fleming, H.M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1995).

[5] R. Lagos, G Rocheteau, P.O. Weill, *Crisis and liquidity in over-the-counter markets*, NBER Working Paper Series, Working Paper 15414, Cambridge (2009).

[6] *Over-The-Counter Market*, [ogled 5.5.2017], dostopno na `http://www.investopedia.com/terms/o/over-the-countermarket.asp`

[7] J. Prezelj, *Diferencialne enačbe za finančno matematiko*, samozaložba Jasna Prezelj, Ljubljana (2011), elektronsko gradivo dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~prezelj/analiza4/difenacbe_Book.pdf`

[8] A. Rubinstein, *Perfect equilibrium in a Bargaining Model*, Econometrica **50** (1982) 97–109.

[9] A. Rubinstein, A. Wolinsky, *Equilibrium in a market with sequential bargaing*, Econometrica **53,5** (1985) 1133–1150.

[10] H.M. Soner, *Stochastic Optimal Control in Finance*, Oxford (2004) 1–22.

[11] H.M. Soner, N. Touzi, *Dynamic programming for stochastic target problems and geometric flows*, Journal of the European Mathematic Society **8** (2002) 201–236.

[12] *Risk aversion*, [ogled 5.5.2017], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Risk_aversion