

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Urška Bobnar

**Določanje simetrij Bézierjevih krivulj**

Magistrsko delo

Mentor: izred. prof. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2017

## **Zahvala**

Za vse nasvete, pomoč, pripombe in spodbudne besede pri pisanju te magistrske naloge se najlepše zahvaljujem mentorju izred. prof. dr. Emilu Žagarju.

Prav posebna hvala Andreju in družini, ki mi vse čas stojijo ob strani.

## KAZALO

1. Uvod	6
2. Splošno o Bézierjevih krivuljah	6
2.1. Bernsteinovi bazni polinomi	7
2.2. De Casteljaouov algoritem	9
2.3. Lastnosti Bézierjevih krivulj	12
2.4. Odvod Bézierjeve krivulje	14
2.5. Razcvetna oblika Bézierjeve krivulje	15
2.6. Subdivizija	16
2.7. Spreminjanje stopnje krivulje	18
2.8. Racionalna Bézierjeva krivulja	20
3. Določanje simetrij polinomskih krivulj	21
3.1. Rotacijska in centralna simetrija	21
3.2. Zrcalna simetrija	26
4. Določanje simetrij Bézierjevih krivulj	31
4.1. Numerični argument	32
4.2. Pogoji za simetrijo Bézierjevih krivulj	35
4.3. Simetrični deli krivulje	39
5. Časovna zahtevnost algoritmov za ugotavljanje simetrije krivulj	45
6. Zaključek	47
Literatura	47

## **Program dela**

V magistrskem delu obravnavajte simetrije Bézierjevih krivulj. Določite potrebne in zadostne pogoje za simetrije in jih podprite z numeričnimi zgledi.

Osnovni vir: J. Sánchez-Reyes, *Detecting symmetries in polynomial Bézier curves*, J. Comput. Appl. Math. 288, (2015), 274-283.

Mentor: izred. prof. dr. Emil Žagar

## Določanje simetrij Bézierjevih krivulj

### POVZETEK

Simetrični objekti so na oko videti lepši in prijetnejši. Prav zaradi simetrije lahko veliko povemo tudi o ostalih lastnostih objekta, kar pa o nesimetričnih ne moremo sklepati. Zato želimo čim učinkoviteje ugotoviti, ali je nek objekt simetričen. S tem problemom se srečamo predvsem v računalniški grafiki, ko želimo npr. razpoznati vzorce, aproksimirati različne oblike, . . . Zaradi tega pridemo do posebnih oblik parametričnih polinomskih krivulj, Bézierjevih krivulj, ki so osnovno orodje za aproksimacijo najrazličnejših oblik v računalništvu. Postavlja se vprašanje, kako določiti simetrijo tej posebni obliki krivulje. Kot bomo videli v nadaljevanju, se določanje simetrije Bézierjevi krivulji enostavno prevede na določanje simetrije pripadajočih kontrolnih točk. Zaradi lastnosti krivulje in Bernsteinovih baznih polinomov, s katerimi je krivulja definirana, je delo z njimi enostavnejše, hitrejše, predvsem pa numerično bolj stabilno. Poleg tega lahko Bézierjevim krivuljam enostavno določimo le del krivulje, ki je simetričen.

## Detecting symmetries of polynomial Bézier curves

### ABSTRACT

Symmetrical objects look better. Due to the symmetry they have other properties which asymmetrical objects don't have. Detecting symmetry of a curve is useful in computer graphics applications such as pattern recognition or approximation. In computer graphics we use special polynomial parametric curves, Bézier curves, which are one of the main tools for approximation of different shapes. So we would like to know how to detect symmetry of such curves. We will see that detecting symmetry of Bézier curve is equivalent to detecting symmetry of control points. Due to the properties of Bézier curve and Bernstein basis, which defines the curve, working with that type of curve is easier and faster than detecting symmetry of polynomial curves written in monomial basis. Working with curves in Bernstein basis is also more numerical stable. We can also determinate just parts of the curve which are symmetric.

**Math. Subj. Class. (2010):** 65D17, 65D18, 65D10

**Ključne besede:** Bézierjeva krivulja, de Casteljaouov algoritem, subdivizija, centralna in zrcalna simetrija krivulj, simetrija Bézierjeve krivulje

**Keywords:** Bézier curve, De Casteljaou's algorithm, subdivision, central and mirror symmetry, symmetry of Bézier curve

## 1. UVOD

Simetrije srečamo in opazujemo vsak dan v naravi (simetričnost živih bitij), v arhitekturi, umetnosti in še bi lahko naštevali. Pomembno vlogo ima simetrija tudi na različnih področjih matematike, saj nam simetričnost objekta veliko pove o njegovih lastnostih in olajša delo. Lep primer so denimo simetrične matrike. Za njih velja, da imajo vse lastne vrednosti realne in ortogonalno bazo lastnih vektorjev. To še zdaleč ne velja za splošne kvadratne matrike.

Tukaj bo predstavljena simetrija krivulj, pogoji za simetrijo in način, kako jim simetrijo določimo. Poudarek bo na Bézierjevih krivuljah, te sodijo v poseben razred polinomskih parametričnih krivulj in imajo posebno vlogo v računalniški grafiki in računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju (ang. Computer Aided Geometric Design oz. krajše CAGD). Pri delu v računalniški grafiki in CAGD se hitro pojavi vprašanje simetrije. Ali je nek objekt simetričen glede na neko os (zrcalno simetričen), ali je mogoče simetričen glede na neko točko (centralno simetričen)? Pri opazovanju vzorcev ali pri računalniškem vidu uporabljamo aplikacije, ki zahtevajo odgovor na zastavljeno vprašanje. Značilen problem za CAGD je aproksimacija krožnega loka z Bézierjevo krivuljo. Vemo, da je krožni lok simetričen, torej bo tudi aproksimacijska krivulja taka. Kot bomo videli v nadaljevanju, nam to znanje pomaga pri določanju kontrolnih točk Bézierjeve krivulje. Znanih je že nekaj algoritmov za ugotavljanje simetrije polinomskih krivulj, ki so zapisane v monomski bazi. To bi radi prenesli še na Bernsteinovo bazo, ker ima lepe, tako numerične, kot geometrijske lastnosti. Lahko bi sicer prevedli Bernsteinovo bazo na polinomsko in računali z znanimi algoritmi, kar pa bi bilo, kot bomo videli v nadaljevanju, nesmiselno.

V magistrskem delu so na začetku predstavljene Bézierjeve krivulje, osnovne definicije in lastnosti povezane s to obliko krivulj, geometrijski algoritem, ki nas pripelje do njih ter različne oblike krivulj ([3, 8, 7, 2]). V tretjem delu je predstavljeno, kako določamo simetrije polinomskim krivuljam [1] ter nato v četrtem še kako določimo simetrijo Bézierjeve krivulje [6] in numerični argument, zakaj je delo v Bernsteinovi bazi boljše od dela v monomski ([4, 5]). Na koncu si bomo pogledali časovne zahtevnosti algoritmov in jih primerjali med seboj ([6, 1]).

## 2. SPLOŠNO O BÉZIERJEVIH KRIVULJAH

Bézierjeve krivulje so dobile ime po dr. Pierru Bézierju, inženirju v avtomobilski družbi Renault. Ta je leta 1962 objavil delo, v katerem je opisal posebno obliko krivulje, ki jo je uporabil za oblikovanje avtomobilskih karoserij. V istem času je neodvisno in na drug način do teh krivulj prišel tudi Paul de Casteljau, ki je bil matematik v Citroënovi avtomobilski družbi. Kasneje je bil odkrit njegov neobjavljen članek iz leta 1959. V tem članku je predstavil numerično stabilen algoritem za izračun točk na Bézierjevi krivulji, ki ga danes imenujemo de Casteljauov algoritem.

Oba avtorja sta želela s to krivuljo doseči čim enostavnejši način za oblikovanje karoserij avtomobilov, ki bi bil prijazen do oblikovalcev in od njih ne bi zahteval veliko matematičnega znanja. Kot bomo videli, so Bézierjeve krivulje definirane z Bernsteinovimi polinomi, ki so poznani pod tem imenom že od leta 1912. Ime so dobili po ruskemu matematiku Sergeiju Natanoviču Bernsteinu ter so bili v grafiko vpeljani 50 let kasneje. Zato si za začetek pogledajmo, kako so definirani in kakšne lastnosti imajo.

## 2.1. Bernsteinovi bazni polinomi

**Definicija 2.1.** *Bernsteinovi bazni polinomi* so definirani kot

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Za njih velja dogovor, da je  $B_0^0(t) \equiv 1$  in  $B_i^n(t) \equiv 0$  za  $i \notin \{0, \dots, n\}$ .

Bernsteinovi polinomi imajo kar nekaj uporabnih lastnosti in zvez. Pri Bézierejevi krivulji bomo videli, da je večina njenih lastnosti posledica lastnosti Bernsteinovih polinomov.

**Lema 2.2.** *Za Bernsteinove polinome velja rekurzivna zveza*

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \left( \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) (1-t)^{n-i} t^i \\ &= (1-t) \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-1-i} t^i + t \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^{i-1} \\ &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \end{aligned}$$

□

**Lema 2.3** (Particija enote). *Bernsteinovi polinomi se seštejejo v 1,*

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1.$$

*Dokaz.* Lemo enostavno dokažemo tako, da razvijemo 1 po binomskem izreku

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t). \quad \square$$

**Lema 2.4** (Simetrija). *Velja  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ .*

*Dokaz.* Po definiciji je

$$B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i} (1-t)^{n-i} (1-(1-t))^i = \binom{n}{i} (t)^i (1-t)^{n-i} = B_i^n(t),$$

ker velja tudi simetrija med binomskimi koeficienti  $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ . □

**Lema 2.5** (Nenegativnost). *Velja  $B_i^n(t) \geq 0$  za  $t \in [0, 1]$ , ne velja pa ta lastnost za vrednosti parametra  $t$  zunaj intervala.*

**Lema 2.6.** *Parameter  $t$  lahko izrazimo v Bernsteinovi bazi, saj velja naslednja zveza*

$$\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) = t.$$

*Dokaz.* Razpišemo člen v vsoti in z zamikom indeksa ter uporabo lastnosti particije enote, tako dobimo želeni rezultat

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} (1-t)^{n-i} t^i \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (1-t)^{n-1-j} t^{j+1} = t \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) = t. \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 2.7** (Povezava z monomsko bazo). *Monomska in Bernsteinova baza sta povezani na sledeč način*

$$t^k = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_j^n(t), \quad B_k^n(t) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \binom{n}{j} t^j,$$

za  $k = 0, \dots, n$ .

*Dokaz.* Za dokaz prve zveze uporabimo popolno indukcijo. Za  $k = 0$  uporabimo razčlenitev enote, za  $k = 1$  pa lemo 2.6. Predpostavimo, da velja zveza za  $k$  in dokažimo, da velja za  $k + 1$ . Izračunajmo

$$\begin{aligned} t^{k+1} = t(t^k) &= t \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_j^n(t) = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j \\ &= \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{j} \frac{\binom{j+1}{k+1}}{\binom{j+1}{k+1}} (1-t)^{n+1-j-1} t^{j+1} = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} \frac{j+1}{n+1} \frac{k+1}{k+1} B_{j+1}^{n+1}(t) \\ &= \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j+1}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} B_{j+1}^{n+1}(t) = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j+1}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} B_{j+1}^{n+1}(t) = \sum_{j=k+1}^n \frac{\binom{j}{k+1}}{\binom{n}{k+1}} B_j^n(t). \end{aligned}$$

Na zadnjem koraku smo premaknili indekse. Tako smo dokazali prvo zvezo med monomsko in Bernsteinovo bazo.

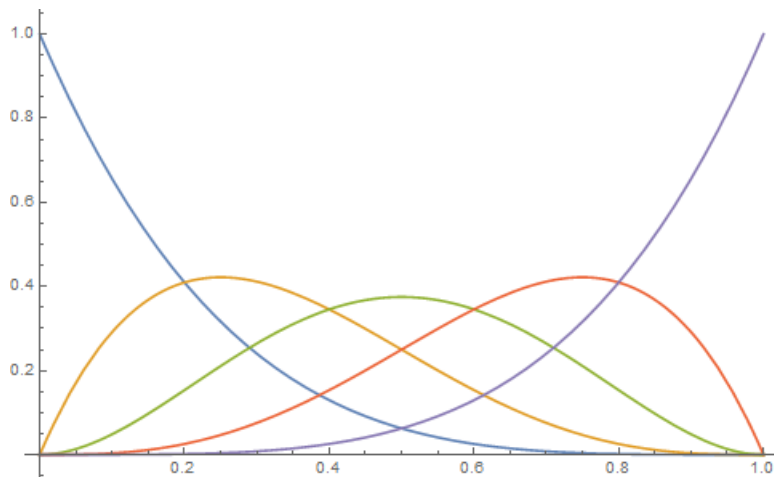
Za dokaz drugega dela leme razvijemo Bernsteinov bazni polinom po monomih ter tako dobimo

$$\begin{aligned} B_k^n(t) &= \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \binom{n}{k} t^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-j-k} t^{n-j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-j-k} t^{n-j} \\ &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-j} (-1)^{j-k} t^j \\ &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{k} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} t^j, \end{aligned}$$

kar dokazuje drugo zvezo med Bernsteinovo in monomsko bazo. □

Primer Bernsteinovih baznih polinomov četrte stopnje vidimo na sliki 1.





SLIKA 1. Bernsteinovi polinomi četrte stopnje.

## 2.2. De Casteljaouov algoritem

Zdaj pa si pogledjmo, kako sta do krivulje neodvisno prišla de Casteljaou in eden od raziskovalcev v Bézierjevi skupini ([9, 10, 11]). De Casteljaouov algoritem, s katerim geometrijsko definiramo Bézierjevo krivuljo, sodi med najosnovnejše algoritme pri delu s krivuljami in ploskvami. Preprosto ponavljanje linearne interpolacije nas pripelje do postopka, ki nam razkrije povezavo med geometrijsko in algebraično definicijo krivulje.

Najprej si pogledjmo konstrukcijo parabole, katero bomo potem posplošili do konstrukcije splošne Bézierjeve krivulje. Naj bodo  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  poljubne točke v ravnini  $\mathbb{R}^2$  in  $t \in [0, 1]$ . S konveksno interpolacijo konstruiramo točke

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1 - t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0^1 + t\mathbf{b}_1^1.$$

Vstavimo prvi dve zvezi v zadnjo in dobimo

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1 - t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1 - t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2,$$

kar predstavlja parametrično obliko parabole. Na sliki 2 je prikazana konstrukcija točke na paraboli pri parametru  $t = 3/4$ .

Posplošimo zdaj zgornji algoritem na splošnih  $n + 1$  točk  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  v  $\mathbb{R}^2$ . To nas bo pripeljalo do krivulje stopnje  $n$ . Algoritem na  $r$ -tem koraku konstruira  $i$ -to kontrolno točko po formuli

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1 - t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t),$$

za  $r = 1, \dots, n$  in  $i = 0, \dots, n - r$ . Pri tem so točke  $\mathbf{b}_i^0(t) \equiv \mathbf{b}_i$  in na zadnjem koraku dobimo  $\mathbf{b}_0^n(t)$ , ki predstavlja točko na Bézierjevi krivulji pri parametru  $t$ . Ko potujemo s parametrom  $t$  po celotnem definicijskem območju, nam  $\mathbf{b}_0^n(t)$  predstavlja množico točk, ki določajo pripadajočo Bézierjevo krivuljo.

Algoritem temelji na ponavljajoči se konveksni interpolaciji, zato je numerično stabilen, saj je  $\mathbf{b}^n(t)$  vedno konveksna kombinacija točk. Pri konstrukciji krivulje na ravninskih točkah vedno dobimo ravninsko krivuljo. Točke, dobljene na vsakem



Pri parametru  $t = 0.5$  dobimo

$$\begin{array}{cccc} (0, 0)^T & & & \\ (1, 1)^T & (0.5, 0.5)^T & & \\ (0, 1)^T & (0.5, 1)^T & (0.5, 0.75)^T & \\ (2, 0)^T & (1, 0.5)^T & (0.75, 0.75)^T & (0.625, 0.75)^T. \end{array}$$

Iz sheme preberemo, da je  $\mathbf{b}(0.5) = (0.625, 0.75)^T$ .

**Trditev 2.9.** Točke na  $r$ -tem koraku algoritma se izražajo v Bernsteinovi bazi kot

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{k=i}^{i+r} \mathbf{b}_k B_{k-i}^r(t),$$

za  $r = 1, \dots, n$  in  $i = 0, \dots, n - r$ .

*Dokaz.* Dokaz bomo naredili z indukcijo na  $r$ . Pri  $r = 0$  dobimo

$$\mathbf{b}_i^0(t) = \sum_{k=i}^i \mathbf{b}_k B_{k-i}^0(t) = \mathbf{b}_i B_0^0(t) = \mathbf{b}_i,$$

kar so ravno kontrolne točke. Predpostavimo sedaj, da formula velja za  $r < n$ . Poglejmo  $(r + 1)$ -vo točko, ki se po algoritmu izraža kot

$$\mathbf{b}_i^{r+1}(t) = (1 - t)\mathbf{b}_i^r(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^r(t).$$

Da bi lahko dokazali trditev za  $r + 1$ , si pomagamo z že znano rekurzivno zvezo Bernsteinovih polinomov, ki smo jo dokazali v lemi 2.2.

Z uporabo induksijske predpostavke in omenjene zveze dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^{r+1}(t) &= (1 - t) \sum_{k=i}^{i+r} \mathbf{b}_k B_{k-i}^r(t) + t \sum_{k=i+1}^{i+1+r} \mathbf{b}_k B_{k-i-1}^r(t) \\ &= \mathbf{b}_i (1 - t) B_0^r(t) + \sum_{k=i+1}^{i+r} \mathbf{b}_k ((1 - t) B_{k-i}^r(t) + t B_{k-i-1}^r(t)) + t \mathbf{b}_{i+1+r} B_r^r(t) \\ &= \mathbf{b}_i B_0^{r+1}(t) + \sum_{k=i+1}^{i+r} \mathbf{b}_k B_{k-i}^{r+1}(t) + \mathbf{b}_{i+1+r} B_{r+1}^{r+1}(t) \\ &= \sum_{k=i}^{i+1+r} \mathbf{b}_k B_{k-i}^{r+1}(t). \end{aligned} \quad \square$$

Če v trditvi 2.9 izberemo  $r = n$  in  $i = 0$ , dobimo

$$\mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t).$$

Vidimo, da lahko točko na zadnjem koraku de Casteljauovega algoritma zapišemo s pomočjo Bernsteinovih baznih polinomov. S tem smo tudi dokazali, da točka  $\mathbf{b}_0^n$  res leži na Bézierjevi krivulji in prišli do definicije splošne Bézierjeve krivulje. Krivuljo stopnje  $n$  definiramo z  $n + 1$  kontrolnimi točkami na sledeč način.

**Definicija 2.10.** *Ravninska Bézierjeva krivulja stopnje  $n$*  je parametrična krivulja  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definirana s predpisom

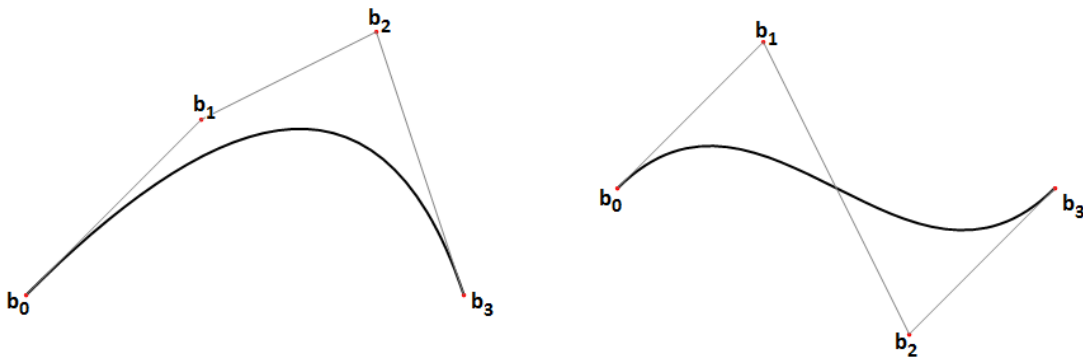
$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i,$$

kjer so  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^2$  kontrolne točke in  $B_i^n$  Bernsteinovi bazni polinomi definirani v definiciji 2.1.

**Definicija 2.11.** Poligon  $\mathbf{P}$ , sestavljen iz točk  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , imenujemo *Bézierjev poligon* oz. *kontrolni poligon* krivulje  $\mathbf{b}$ , točke  $\mathbf{b}_i$  pa imenujemo *kontrolne točke* krivulje  $\mathbf{b}$ . Zapišemo tudi  $\mathbf{b} = \mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n] = \mathcal{B}[\mathbf{P}]$ . Tak zapis definira  $\mathcal{B}$  kot linearni operator, ki povezuje Bézierjevo krivuljo z njenim kontrolnim poligonom. Rečemo tudi, da je kontrolni poligon *Bernstein-Bézierjeva aproksimacija* krivulje  $\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n]$ .

**Opomba 2.12.** Krivulja bo v delu označena kot  $\mathbf{b}$ , če pa bo poudarjena stopnja krivulje, bo ta označena kot  $\mathbf{b}^n$ .

Na sliki 4 sta prikazana primera dveh kubičnih Bézierjevih krivulj.



SLIKA 4. Dve kubični Bézierjevi krivulji.

### 2.3. Lastnosti Bézierjevih krivulj

Naslednje lastnosti Bézierjevih krivulj sledijo iz de Casteljauovega algoritma in iz lastnosti Bernsteinovih polinomov.

- *Afina invarianca.*

To pomeni, da dobimo enak rezultat, če najprej točke na krivulji  $\mathbf{b}$  izračunamo in jih nato preslikamo z afino preslikavo, ali pa najprej afino preslikamo kontrolne točke in potem na preslikanih kontrolnih točkah izračunamo točke na krivulji. Invarianca je posledica de Casteljauovega algoritma, ki uporablja konveksno interpolacijo, ta pa je afino invariantna. Ta lastnost je uporabna, ko želimo na primer rotirati krivuljo. Če izrišemo krivuljo na kontrolnih točkah in naredimo  $N \gg 1$  izračunov točk na krivulji ter jo želimo rotirati, moramo preslikati vseh  $N$  izračunanih točk. Lahko pa najprej rotiramo začetne kontrolne točke in na njih izrišemo krivuljo, kar je manj potratno.

- *Interpolacija kontrolnih točk.*

Bézierjeva krivulja se začne v točki  $\mathbf{b}_0$  pri  $t = 0$  in konča v točki  $\mathbf{b}_n$  pri  $t = 1$ . To je zelo pomembno pri oblikovanju, saj imamo kontrolo nad začetkom in koncem poti. Rečemo, da krivulja interpolira začetno in končno točko.

- *Invarianca glede na afino transformacijo parametra.*

Napačno je mišljenje, da je krivulja definirana samo na intervalu  $[0, 1]$ , čeprav je ta interval najpogosteje uporabljen. De Casteljauev algoritem namreč uporablja samo razmerja in zato interval, na katerem je krivulja definirana, ni pomemben. Krivulja  $\mathbf{b} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definirana s predpisom

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n \left( \frac{u-a}{b-a} \right) \mathbf{b}_i, \quad u \in [a, b],$$

predstavlja Bézierjevo krivuljo nad intervalu  $[a, b]$ .

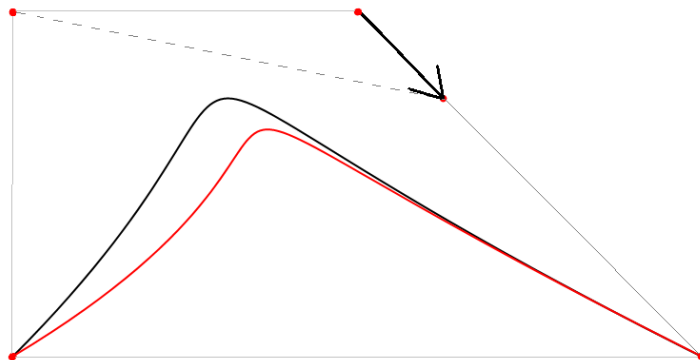
Pri de Casteljauevem algoritmu vzamemo  $t = \frac{u-a}{b-a}$  in računamo

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u),$$

za  $r = 0, 1, \dots, n$  in  $i = 0, 1, \dots, n-r$ . Prehod med intervaloma  $[0, 1]$  in  $[a, b]$  je linearna reparametrizacija intervala.

- *Reparametrizacija.* Reparametrizacija krivulje pomeni, da spremenimo domeno (sprememba vrednosti parametra je določena v vsaki točki na krivulji). To naredimo s substitucijo parametra. Imamo krivuljo  $\mathbf{b}(t)$  in naredimo zamenjavo  $t = f(s)$ , dobimo krivuljo  $\mathbf{c}(s) = \mathbf{b}(f(s)) = (\mathbf{b} \circ f)(s)$ . Krivulji sta geometrijsko enaki in imata isto zalogo vrednosti, vendar se vrednosti parametrov prvotne in reparametrizirane krivulje za iste točke razlikujeta.
- *Oblikovanje.*

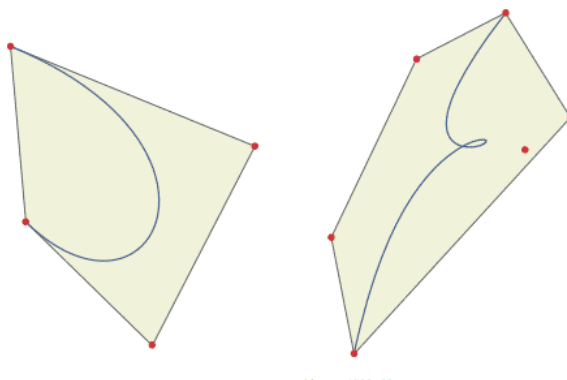
Bézierjeva krivulja v nekem smislu sledi svojim kontrolnim točkam, saj se s premikanjem kontrolnih točk premika tudi krivulja. S premikom ene same kontrolne točke se bo krivulja najbolj spremenila v okolici te točke. To nam je v veliko pomoč pri oblikovanju krivulje. Če želimo samo majhno spremembo oblike krivulje, to dosežemo že s premikom najbližje kontrolne točke. Primer vidimo na sliki 5.



SLIKA 5. Sprememba krivulje in kontrolnega poligona pri premiku ene kontrolne točke. Črna krivulja predstavlja prvotno krivuljo, rdeča pa krivuljo, ki nastane zaradi premika kontrolnih točk.

- *Konveksna ovojnica.*

Kot vemo, je konveksna ovojnica točk najmanjša konveksna množica, ki te točke vsebuje. Za  $t \in [0, 1]$  leži krivulja v konveksni ovojnici kontrolnih točk, saj je vsaka točka konveksna kombinacija kontrolnih točk. Ta lastnost sledi iz dejstva, da je vsota Bernsteinovih polinomov enaka 1 in da so ti nenegativni za  $t \in [0, 1]$ . Posledica tega je tudi dejstvo, da ravninske kontrolne točke vedno generirajo ravninsko krivuljo. Na sliki 6 je označeno območje konveksne ovojnice.



SLIKA 6. Senčno območje predstavlja konveksno ovojnico krivulje.

- *Simetrija.*

Ni pomemben vrstni red označevanja točk, ali začnemo točke označevati od prve kontrolne točke naprej, ali nazaj od zadnje kontrolne točke, saj sta krivulji s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  ali  $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0$  enaki, razlika je le v orientaciji (v katero smer potujemo po krivulji). Točk med seboj pa ne smemo poljubno premešati, saj pri tem dobimo drugo krivuljo.

## 2.4. Odvod Bézierjeve krivulje

**Lema 2.13.** *Odvod Bernsteinovega baznega polinoma je*

$$\frac{dB_i^n}{dt}(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

*Dokaz.* Odvajamo po pravilu za odvod produkta in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{dB_i^n}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \right) \\ &= i \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= n \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - n \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)). \end{aligned}$$

□

Iz zgornje leme sledi, da je odvod Bézierjeve krivulje enak

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt}(t) = n \sum_{j=1}^n B_{j-1}^{n-1}(t) \mathbf{b}_j - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \mathbf{b}_j = n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t).$$

Upoštevali smo premik indeksov in dejstvo, da so Bernsteinovi polinomi ničelni za  $i < 0$  ter  $i > n$ . Vpeljemo še oznako premih končnih diferenc  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$  ter tako dobimo

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t),$$

kar je spet Bézierjeva krivulja stopnje  $n - 1$ . Kontrolni poligon sestavljajo skalirane diference prvotnih kontrolnih točk.

S ponavljanjem odvajanja dobimo sledečo zvezo za  $k$ -ti odvod

$$\frac{d^k \mathbf{b}}{dt^k}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{b}_j B_j^{n-k}(t),$$

kjer je  $k$ -ta prema defirenca definirana kot  $\Delta^k \mathbf{b}_i = \Delta^{k-1} \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{b}_i$ ,  $\Delta^0 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i$ .

## 2.5. Razcvetna oblika Bézierjeve krivulje

Pri izvajanju de Casteljauovega algoritma za parameter  $t$  vzamemo vedno isto vrednost. Če pa posplošimo ta algoritem in na  $k$ -tem koraku namesto parametra  $t$  vzamemo parameter  $t_k$ , dobimo tako imenovani *razcvet krivulje*. Ta posplošitev nam pomaga pri nekaterih operacijah na Bézierjevih krivulja. Za začetek si pogledjmo primer razcveta.

**Primer 2.14.** Razcvet kubične krivulje, zapisan v de Casteljauovi shemi

$$\begin{array}{l} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^1[t_1] \\ \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1^1[t_1] \quad \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] \\ \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2^1[t_1] \quad \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] \quad \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3], \end{array}$$

in končna točka

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3] = & \mathbf{b}_0(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3) + \mathbf{b}_1(t_1+t_2+t_3-2t_1t_2-2t_1t_3-2t_2t_3+ \\ & + 3t_1t_2t_3) + \mathbf{b}_2(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3-3t_1t_2t_3) + \mathbf{b}_3t_1t_2t_3, \end{aligned}$$

ki je funkcija treh neodvisnih spremenljivk.

Posplošitev na krivuljo stopnje  $n$  imenujemo razcvetna oblika Bézierjeve krivulje  $\mathbf{b}$ . Originalno krivuljo dobimo tako, da za parametre  $t_1, \dots, t_n$  vzamemo parameter  $t$ . Razcvet je simetrična polinomska funkcija, saj ni odvisna od vrstnega reda argumentov. Pogledjmo si najprej primer za motivacijo, nato si bomo pogledali še splošno formulacijo izražave kontrolnih točk v razcvetni obliki.

**Primer 2.15.** V posebnem primeru iz razcveta Bézierjeve krivulje dobimo kontrolne točke

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[0, 0, 0] &= \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{b}[0, 0, 1] &= \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{b}[0, 1, 1] &= \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{b}[1, 1, 1] &= \mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Preverimo, da to res drži

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[0] = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[0] = \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^2[0, 0] = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[0] = \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1^2[0, 0] = \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^3[0, 0, 0] = \mathbf{b}_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[0] = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[0] = \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^2[0, 0] = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[0] = \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1^2[0, 0] = \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^3[0, 0, 1] = \mathbf{b}_1. \end{aligned}$$

Podobno naredimo za  $\mathbf{b}_2$  in  $\mathbf{b}_3$ .

V splošnem lahko katerokoli kontrolno točko krivulje izrazimo z razcvetom z enkami in ničlami. Natančneje,  $i$ -to kontrolno točko na Bézierjevi krivulji stopnje  $n$  izrazimo v razcvetni obliki kot

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b} [0^{(n-i)}, 1^{(i)}],$$

kjer zgornji indeks pove, kolikokrat se v zaporedju pojavi nič oz. ena.

De Casteljauov algoritem lahko definiramo tudi s pomočjo razcveta in tako dobimo naslednjo rekurzijo

$$\mathbf{b} [0^{(n-r-i)}, t^{(r)}, 1^{(i)}] = (1-t)\mathbf{b} [0^{(n-r-i+1)}, t^{(r-1)}, 1^{(i)}] + t\mathbf{b} [0^{(n-r-i)}, t^{(r-1)}, 1^{(i+1)}],$$

za  $r = 0, 1, \dots, n$  in  $i = 0, 1, \dots, n-r$ , točka na krivulji pa je podana kot  $\mathbf{b}[t^{(n)}]$  [3].

Videli smo, da je med lastnostmi krivulje tudi invarianca glede na afino transformacijo parametra, ki nam pove, da lahko krivuljo gledamo na poljubnem intervalu  $[a, b]$ . Prav tako lahko tudi razcvet naredimo nad istim intervalom in kontrolne točke se izražajo kot

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b} [a^{(n-i)}, b^{(i)}], \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

## 2.6. Subdivizija

Krivuljo običajno definiramo na enotskem intervalu  $[0, 1]$ . Včasih pa nas zanima, kako bi izrazili samo del osnovne Bézierjeve krivulje, recimo na intervalu  $[0, c]$ , za  $0 < c < 1$ , kot samostojno Bézierjevo krivuljo iste stopnje. Poiskati moramo ustrezne kontrolne točke, na katerih bomo definirali krivuljo. To naredimo s subdivizijo.

Naj bodo  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  kontrolne točke osnovne krivulje, kontrolne točke iskane krivulje pa označimo s  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ . Naša želja je, da je  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{c}_n = \mathbf{b}^n(c)$  in da je del krivulje  $\mathbf{b}^n$  nad intervalom  $[0, c]$  natanko krivulja  $\mathbf{c}^n$ . Da dobimo kontrolne točke  $\mathbf{c}_j$ , si pomagamo z razcvetno obliko krivulje. Nad intervalom  $[0, c]$  se  $j$ -ta kontrolna točka izraža s

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{b} [0^{(n-j)}, c^{(j)}], \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

S tem dobimo kontrolne točke za del krivulje. V nerazcvetni obliki pa jih zapišemo kot  $\mathbf{c}_j = \mathbf{b}_0^j(c)$  in so rezultat de Casteljaujevega algoritma pri parametru  $c$ . Zaradi lastnosti simetrije, ki jo ima Bézierjeva krivulja, velja, da so kontrolne točke, ki ustrezajo krivulji na intervalu  $[c, 1]$ , podane z

$$\mathbf{b}_j^{n-j}(c), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

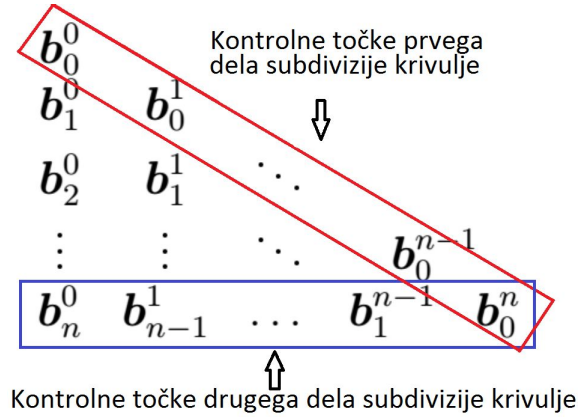
oziroma z

$$\mathbf{b} [c^{(n-j)}, 1^{(j)}], \quad j = 0, 1, \dots, n.$$



Tako dobljena formula se imenuje *subdivizijska formula* za Bézierjevo krivuljo.

**Opomba 2.16.** Če si točke sproti zapisujemo v de Castaljujevo shemo, potem del krivulje, definirane nad intervalom  $[0, c]$ , določajo točke na diagonali, del, definiran nad  $[c, 1]$ , pa določajo točke iz spodnje vrstice sheme.



SLIKA 7. Kontrolne točke, ki določajo dela krivulje (rdeče prvi del, modre drugi del).

Algoritem je pomemben in uporaben zato, ker nam opiše, kako Bézierjevo krivuljo  $\mathbf{b}$  razdelimo na dva dela, katerih unija je prvotna krivulja.

Subdivizijo lahko poljubno mnogokrat ponovimo. Vzemimo na primer parameter  $t = 1/2$ , na naslednjem koraku interval zopet razpolovimo in na  $k$ -tem koraku imamo že  $2^k$  kontrolnih poligonov. Ti skupaj opisujejo celotno prvotno Bézierjevo krivuljo, vsak od njih pa le majhen del. Z naraščajočim  $k$  poligon konvergira h krivulji. Z deljenjem parametra  $t$  in risanjem primernih kontrolnih točk dobimo način za risanje krivulje.

**Primer 2.17.** Poglejmo si primer kubične krivulje, ki jo vidimo na sliki 8. Krivulja je definirana z naslednjimi kontrolnimi točkami

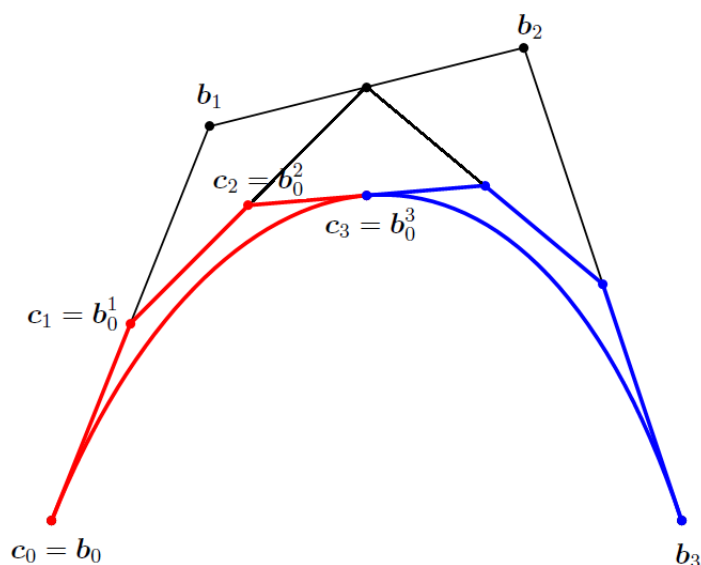
$$\mathbf{b}_0 = (-1, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (1, 5)^T, \mathbf{b}_2 = (5, 6)^T, \mathbf{b}_3 = (7, 0)^T.$$

Krivuljo želimo "deliti na pol" in zato vzamemo za parameter  $t = 1/2$ . De Castaljuova shema pri  $t = 1/2$  je enaka

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= (-1, 0)^T \\ \mathbf{b}_1 &= (1, 5)^T & \mathbf{b}_0^1 &= (0, 2.5)^T \\ \mathbf{b}_2 &= (5, 6)^T & \mathbf{b}_1^1 &= (3, 5.5)^T & \mathbf{b}_0^2 &= (1.5, 4)^T \\ \mathbf{b}_3 &= (7, 0)^T & \mathbf{b}_2^1 &= (6, 3)^T & \mathbf{b}_1^2 &= (4.5, 4.25)^T & \mathbf{b}_0^3 &= (3, 4.125)^T. \end{aligned}$$

Zgornji postopek nam pove, da so iskane kontrolne točke prvega dela krivulje enake

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{b}_0 = (-1, 0)^T, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_0^1(0.5) = (0, 2.5)^T, \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{b}_0^2(0.5) = (1.5, 4)^T, \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_0^3(0.5) = (3, 4.125)^T, \end{aligned}$$



SLIKA 8. Primer subdivizije kubične krivulje za  $c = 1/2$ .

in so na sliki 8 označene z rdečo barvo. Kontrolne točke drugega dela krivulje pa so enake

$$\mathbf{b}_0^3(0.5) = (3, 4.125)^T, \quad \mathbf{b}_1^2(0.5) = (4.5, 4.25)^T, \quad \mathbf{b}_2^1(0.5) = (6, 3)^T, \quad \mathbf{b}_3^0 = (7, 0)^T,$$

na sliki so modre barve.

## 2.7. Spreminjanje stopnje krivulje

Bézierjevo krivuljo stopnje  $n$  lahko predstavimo kot Bézierjevo krivuljo višje stopnje. Začetnim kontrolnim točkam s pravilnim postopkom dodamo novo kontrolno točko in s tem zvišamo stopnjo krivulje, oblika pa pri tem ostane nespremenjena. Natančneje, stare kontrolne točke premaknemo in pravilno dodamo novo točko, samo začetna in končna kontrolna točka ostaneta na istem mestu. To dejstvo se uporablja predvsem pri oblikovanju s krivuljami. Recimo, da na nekem koraku ugotovimo, da s premikanjem danih kontrolnih točk ne dosežemo želene oblike krivulje. S postopkom višanja stopnje dodamo novo kontrolno točko in ustrezno spremenimo stare kontrolne točke. Nato pa nadaljujemo oblikovanje s premikanjem na novo izračunanih točk. Druga pomembna uporaba je naslednja. Če imamo dve krivulji različnih stopenj in želimo delati s krivuljama enakih stopenj, potem zvišamo stopnjo krivulji z nižjo stopnjo. Poglejmo si sedaj omenjeni postopek natančneje. Dana je Bézierjeva krivulja

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Poiskati želimo take kontrolne točke  $\mathbf{b}_i^{(1)}$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ , za krivuljo

$$\mathbf{b}^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{b}_i^{(1)} B_i^{n+1}(t)$$

stopnje  $n + 1$ , da bosta prvotna krivulja in krivulja z dodano točko enaki. Prvotni predpis krivulje  $\mathbf{b}$  pomnožimo s koeficientom  $1 = (t + (1 - t))$  in dobimo

$$(t + (1 - t))\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{i} ((1 - t)^{n-i+1}t^i + (1 - t)^{n-i}t^{i+1}).$$

Primerjamo desno stran te enačbe s parametrizacijo krivulje  $\mathbf{b}^{(1)}$  in dobimo

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{i} ((1 - t)^{n-i+1}t^i + (1 - t)^{n-i}t^{i+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{b}_i^{(1)} \binom{n+1}{i} (1 - t)^{n-i+1}t^i.$$

Iz primerjave koeficientov na obeh straneh sledi

$$\mathbf{b}_i^{(1)} \binom{n+1}{i} = \mathbf{b}_i \binom{n}{i} + \mathbf{b}_{i-1} \binom{n}{i-1} \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Kontrolne točke krivulje  $\mathbf{b}^{(1)}$  so torej enake

$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{b}_i, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

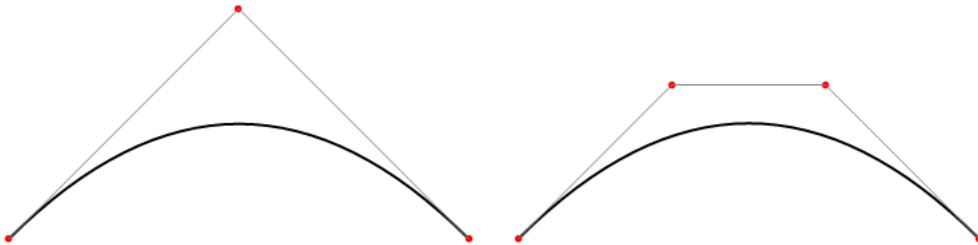
Iz zgornje zveze vidimo, da nov kontrolni poligon leži v konveksni ovojnici prejšnjega kontrolnega poligona in zato bližje krivulji. Če ta postopek ponavljamo, se kontrolni poligon vedno bolj približuje krivulji. Z zaporednim višanjem stopnje krivulje bo kontrolni poligon počasi konvergirala h krivulji (vendar je red konvergence počasen in zato neuporaben v praksi).

**Primer 2.18.** Pogledjmo si primer, kako zvišamo stopnjo Bézierjevi krivulji stopnje 2. Naj bo krivulja definirana s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (3, 3)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (5, 1)^T.$$

Izračunamo nove kontrolne točke z zgornjim postopkom in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^{(1)} &= (1, 1)^T, \\ \mathbf{b}_1^{(1)} &= \frac{1}{3} \mathbf{b}_0 + \frac{2}{3} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} (1, 1)^T + \frac{2}{3} (3, 3)^T = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)^T \\ \mathbf{b}_2^{(1)} &= \frac{2}{3} \mathbf{b}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{b}_2 = \frac{2}{3} (3, 3)^T + \frac{1}{3} (5, 1)^T = \left(\frac{11}{3}, \frac{7}{3}\right)^T \\ \mathbf{b}_3^{(1)} &= (5, 1)^T. \end{aligned}$$



SLIKA 9. Enaki krivulji, ki ju dobimo pri višanju stopnje: levo krivulja stopnje 2 in desno krivulja stopnje 3.

Krivuljo pred višanjem stopnje in po tem postopku s pripadajočimi kontrolnimi točkami vidimo na sliki 9.

Podobno lahko izpeljemo nižanje stopnje in z odvzemom kakšne točke kontrolnega poligona aproksimiramo dano Bézierjevo krivuljo  $\mathbf{b}^n$  stopnje  $n$  z Bézierjevo krivuljo, ki je nižje stopnje. Pri tem seveda ni nujno, da dobimo isto krivuljo, ampak le aproksimacijo prvotne krivulje s krivuljo nižje stopnje. Označimo kontrolne točke Bézierjeve krivulje  $\mathbf{b}^n$  z  $\mathbf{b}_i, i = 0, 1, \dots, n$  in iskano krivuljo  $\mathbf{c}^{n-1}$  s kontrolnimi točkami  $\mathbf{c}_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ . Predstavljajmo si, da smo krivuljo  $\mathbf{b}^n$  in njene kontrolne točke dobili po postopku višanja stopnje krivulje  $\mathbf{c}^{n-1}$ . Potem po zgornjem postopku vemo, da so točke določene z

$$\mathbf{b}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{c}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\mathbf{c}_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Iz te enačbe izrazimo rekurzivni formuli za kontrolne točke prvotne krivulje kot

$$\mathbf{c}_i = \frac{n\mathbf{b}_i - i\mathbf{c}_{i-1}}{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

in

$$\mathbf{c}_{i-1} = \frac{n\mathbf{b}_i - (n-i)\mathbf{c}_i}{i}, \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Ta postopek je, z razliko od postopka višanja stopnje, numerično nestabilen in vedno ne ohranja oblike originalne krivulje. Prva enačba je dobra aproksimacija v okolici točke  $\mathbf{b}_0$ , druga pa v okolici točke  $\mathbf{b}_n$ . Za boljše rezultate tako združimo postopka in izračun prvega dela kontrolnega poligona izračunamo po prvi zvezi in drugega z drugo.

## 2.8. Racionalna Bézierjeva krivulja

Do sedaj so bile vse kontrolne točke enako pomembne. Lahko pa jih razlikujemo in vsaki pripišemo skalar uteži in s tem dobimo racionalno Bézierjevo krivuljo, ki jo opisuje naslednja definicija.

**Definicija 2.19.** Naj bodo  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  kontrolne točke,  $w_i$  utež  $i$ -te kontrolne točke in  $B_i^n$  Bernsteinovi polinomi. Potem je *racionalna Bézierjeva krivulja* podana s predpisom

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t)\mathbf{b}_i w_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t)w_i}.$$

Če so vse uteži enake 1, oz. so enake med seboj, preide racionalna krivulja v polinomsko Bézierjevo krivuljo. Prednosti racionalne oblike krivulje pred polinomsko so sledeče:

- Večja kontrola oblike krivulje, saj že sprememba uteži vpliva na spremembo oblike krivulje.
- Pri projekciji prostorske polinomske Bézierjeve krivulje dobimo ravninsko racionalno krivuljo.
- Potrebne so pri natančnem opisu stožnic (polinomska Bézierjeva krivulja stopnje 2 predstavlja samo parabolo). Pri natančni predstavitvi krožnice potrebujemo racionalno obliko.

Racionalno Bézierjevo krivuljo si lahko predstavljamo tudi kot projekcijo prostorske krivulje na ravnino (prostorsko krivuljo projeciramo na ravnino  $z = 1$ ).

Če želimo razširiti de Casteljaouov algoritem na racionalno krivuljo, najprej racionalno Bézierjevo krivuljo prevedemo na ustrezno prostorsko polinomsko krivuljo. Nato izvedemo želeno »operacijo« na prostorski polinomski krivulji in na koncu preslikamo prostorsko krivuljo nazaj na ravninsko.

### 3. DOLOČANJE SIMETRIJ POLINOMSKIH KRIVULJ

Simetrija v preprostem pomenu besede pomeni, da ima objekt dve skladni polovici. Matematična definicija simetrije je bolj kompleksna. Simetrija je lastnost objekta, ki ostane nespremenjena glede na nek razred transformacij (kot so zrcaljenje, vrtenje, translacija ali različne kombinacije le teh).

Določanje simetrije je pomembno denimo pri razpoznavanju vzorcev ali v kakšnih drugih aplikacijah, ki uporabljajo računalniški vid. Vprašanje je, kako določiti krivuljo, da bo predstavljala nek objekt in ga najbolje posnemala. Če želimo odgovoriti na to vprašanje, moramo vedeti, ali je krivulja mogoče dobljena z afino transformacijo neke osnovne krivulje. Zato moramo krivuljo najprej postaviti v nek splošen položaj, tako imenovani kanonični položaj, in jo pravilno parametrizirati.

Algoritmi, ki določajo simetrijo, so numerične narave, zato je rezultat približen. Pri krivuljah nizke stopnje to ni težava. Nenatančen rezultat je lahko problem, kadar je vhodni podatek natančen, medtem ko pri podatkih, ki niso natančni, oziroma pomanjkljivi, nenatančen rezultat ni kritičen. Poznani so že algoritmi, ki vrnejo natančne rezultate za krivulje v implicitni obliki. Nas zanima simetrija Bézierjeve krivulje, ki je posebna oblika polinomske parametrične krivulje. Ker imamo parametrično krivuljo, je ne želimo spreminjati v implicitno, saj bi bila prevedba med oblikama lahko zahtevna.

Ideja v algoritmih za določanje simetrije polinomskih parametričnih krivulj, ki si jih bomo pogledali, izhaja iz algebraične geometrije in uporabi lastnost "dobre" parametrizacije polinomskih krivulj. Sledeči algoritmi so učinkoviti in lahko hitro določijo simetrijo tudi za krivulje visokih stopenj. Pri računanju dobimo trikotni sistem enačb, za katerega vemo, da je zelo enostavno in hitro rešljiv. Simetrija krivulje bo tako določena z enoličnostjo rešitve tega sistema.

#### 3.1. Rotacijska in centralna simetrija

Naj bo  $\mathcal{C}$  algebraična krivulja, ki ima polinomsko parametrizacijo  $\phi(t) = (x(t), y(t))$ .

**Definicija 3.1.** Krivulja je regularno parametrizirana, če je injektivna in če je odvod različen od 0 za vse vrednosti parametra iz definicijskega območja.

Tukaj bomo pri opazovanju simetrije krivulje predpostavili, da je krivulja regularno parametrizirana.

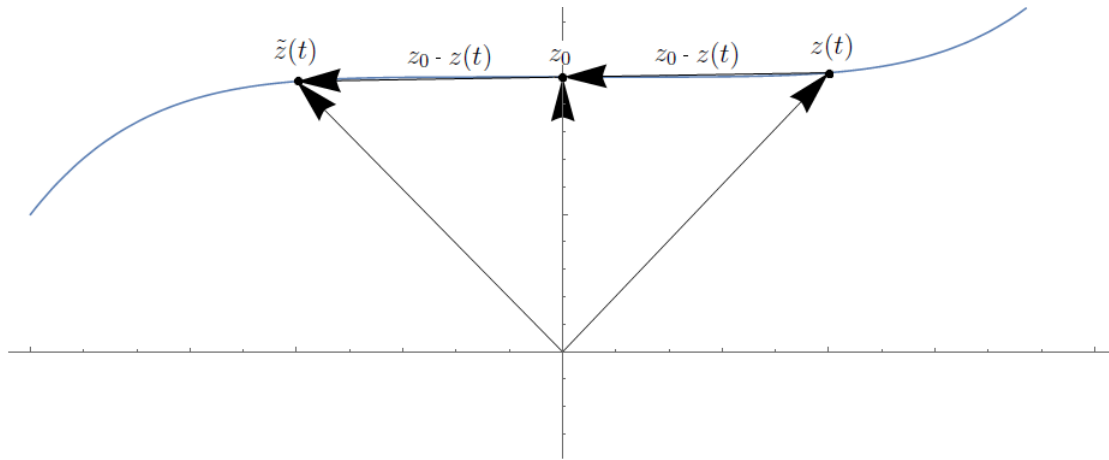
**Definicija 3.2.** Krivulja je simetrična glede na neko rotacijo natanko tedaj, ko obstaja točka  $\mathbf{T}_0$  in tak kot  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , da rotacija krivulje okoli točke  $\mathbf{T}_0$  za kot  $\alpha$  ne spremeni krivulje. Poseben primer velja za kot  $\alpha = \pi$ , takrat rečemo, da je krivulja centralno simetrična.

**Izrek 3.3.** *Realna polinomska krivulja je lahko rotacijsko simetrična samo za kot  $\alpha = \pi$  (centralno simetrična).*

**Izrek 3.4.** *Naj bo  $\mathcal{C}$  realna polinomska krivulja z regularno parametrizacijo  $\phi(t) = (x(t), y(t))$ . Če je krivulja centralno simetrična, potem morata biti stopnji  $x$  in  $y$  obeh lihi.*

Pojasnimo oba izreka. Pri centralni simetriji krivulje potrebujemo dve neskončni veji, ki gresta v neskončnost v nasprotnih kvadrantih koordinatnega sistema. To nastopi v primeru krivulj, ki so lihe stopnje. Za tako krivuljo se pri centralni simetriji ta dva dela preslikata en v drugega in ne dobimo novih vej. Če bi bili ti neskončni deli v istem kvadrantu (pri krivulji sode stopnje), se bi pri centralni simetriji preslikali v nasproten kvadrant in bi dobili več vej, ki gredo v neskončnost, kar pa ni več polinomska krivulja. Prav takšen problem bi nastopil v primeru, ko je kot  $\alpha$  različen od kota  $\pi$ , zato za polinomske krivulje pride v poštev samo rotacijska simetrija pri kotu  $\alpha = \pi$  (centralna simetrija).

**Izrek 3.5.** Naj bosta  $\phi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , in  $\phi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  ustrezni parametrizaciji polinomske krivulje. Potem obstaja linearna funkcija  $L : I \rightarrow J$  s predpisom  $L(t) = at + b$ , kjer sta  $a$  in  $b$  realni števili, da velja  $\phi_2 = \phi_1 \circ L$ .



SLIKA 10. Izpeljava centralne simetrije s pomočjo vektorjev.

Pišimo parametrizacijo krivulje  $\phi$  v kompleksni obliki kot  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . Izberimo si center simetrije  $z_0$  in točko na krivulji  $z(t)$ . Do njiju pridemo s pomočjo krajevnih vektorjev ter vektorjem med njima, torej  $z_0 - z(t)$ . Prezrcalimo točko  $z(t)$  čez center simetrije na neko drugo točko  $\tilde{z}$ , pot do nje opišemo s pomočjo vektorjev kot vidimo na sliki 10. Dobimo  $\tilde{z} = z_0 + z_0 - z(t)$ . Tako se določanje simetrije preoblikuje v določanje simetrije glede na  $z_0$  (torej glede na  $\mathbf{T}_0(x_0, y_0)$  v  $\mathbb{R}^2$ ). Krivulja je centralno simetrična natanko tedaj, ko je  $\tilde{z}(t) = -z(t) + 2z_0$  tudi točka na krivulji za vse vrednosti parametra  $t$  iz domene. Drugače povedano, če je  $\tilde{z}$  druga parametrizacija iste krivulje, potem je ta krivulja simetrična. Očitno se vidi, da je  $\tilde{z}$  tudi parametrizacija, ki je različna od  $z$ . Ker je  $\tilde{z}$  kompozitum  $\Phi$  in bijektivne transformacije, je tudi regularna parametrizacija. Sledi, da ima krivulja centralno simetrijo natanko tedaj, ko sta  $z$  in  $\tilde{z}$  obe parametrizaciji iste krivulje. S tem smo dokazali spodnji izrek.

**Izrek 3.6.** Krivulja je centralno simetrična natanko tedaj, ko obstaja  $z_0$  in linearna transformacija  $L(t) = at + b$ , kjer sta  $a \neq 0$  in  $b$  realni števili, da velja  $\tilde{z}(t) = -z(t) + 2z_0 = z(L(t))$ .

Pišimo parametrizacijo krivulje v kompleksni parametrični obliki

$$z(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n, \quad \text{kjer so } c_i \in \mathbb{C} \text{ za vse } i.$$

Naj bo  $L(t) = at + b$ , kjer sta  $a$  in  $b \in \mathbb{R}$ . Z upoštevanjem zgornjega izreka vemo, da velja  $\tilde{z}(t) = z(L(t))$ , iz tega sledi  $\tilde{z}(t) = z(at + b)$ . Če še upoštevamo, da je  $\tilde{z}(t) = -z(t) + 2z_0$ , dobimo

$$-c_0 - c_1t - \cdots - c_nt^n + 2z_0 = c_0 + c_1(at + b) + \cdots + c_n(at + b)^n,$$

kjer elemente na desni strani razpišemo po binomskem izreku

$$(at + b)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} b^k (at)^{j-k}.$$

Poiskati moramo take  $a, b, z_0$ , da bodo zadostovali enačbi. Vemo, da sta dva polinoma identična, kadar imata istoležeče koeficiente enake. Zato si olajšajmo delo in sestavimo sistem enačb glede na koeficiente po stopnjah spremenljivke  $t$ . To nas pripelje do spodnjega sistema  $n + 1$  linearnih enačb za 3 neznanke:

$$(1) \quad \begin{aligned} -c_0 + 2z_0 &= c_0 + c_1b + c_2b^2 + \cdots + c_{n-1}b^{n-1} + c_nb^n \\ -c_1 &= c_1a + c_22ab + \cdots + c_{n-1}(n-1)ab^{n-2} + c_n nab^{n-1} \\ -c_2 &= c_2a^2 + \cdots + c_{n-1} \frac{(n-1)(n-2)}{2} a^2 b^{n-3} + c_n \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-1} \\ &\vdots \\ -c_{n-1} &= c_{n-1}a^{n-1} + c_n na^{n-1}b \\ -c_n &= c_n a^n. \end{aligned}$$

Opazimo, da je sistem trikotne oblike. Če je rešljiv, ga lahko enostavno rešimo. Iz zgornjega izreka sledi, da iz obstoja oziroma neobstoja rešitve tega sistema lahko sklepamo na to, da krivulja je, oziroma ni centralno simetrična. Po izreku 3.4 velja, da je  $n$  liho število in ker je primer  $n = 1$  trivialen, predpostavimo, da je  $n > 2$ . Iz zadnje enačbe hitro vidimo, da je  $a^n = -1$ , in tako sledi  $a = -1$ . Iz predzadnje enačbe sistema pa sledi, da je  $b = \frac{-2c_{n-1}}{nc_n}$  in mora biti realno število. Center simetrije  $z_0$  izrazimo iz prve enačbe in dobimo  $z_0 = \frac{1}{2}(2c_0 + c_1b + c_2b^2 + \cdots + c_{n-1}b^{n-1} + c_nb^n)$ . S tem smo dokazali še en izrek, po katerem lahko določimo centralno simetrijo krivulje.

**Izrek 3.7.** *Krivulja ima centralno simetrijo natanko tedaj, ko je  $b = \frac{-2c_{n-1}}{nc_n}$  realno število in  $a = -1$  ter  $a$  in  $b$  zadoščata sistemu enačb (1) z izjemo prve. Center simetrije določimo kot*

$$z_0 = \frac{1}{2}(2c_0 + c_1b + c_2b^2 + \cdots + c_{n-1}b^{n-1} + c_nb^n).$$

Poseben primer izreka imamo takrat, ko je  $c_{n-1} = 0$ . Tedaj lahko več povemo o potrebnih parametrih za simetrijo, kar nam pove naslednja posledica izreka.

**Posledica 3.8.** *Naj bo  $\mathcal{C}$  realna polinomska krivulja in  $z(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_nt^n$  njena regularna parametrizacija v kompleksni obliki. Če je  $c_{n-1} = 0$ , potem velja*

- kubična krivulja ( $n = 3$ ) je simetrična glede na center simetrije  $c_0$ ,
- krivulja stopnje  $n > 3$  je centralno simetrična, s centrom simetrije  $c_0$ , natanko tedaj, ko so  $c_k = 0$  za sode  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ .

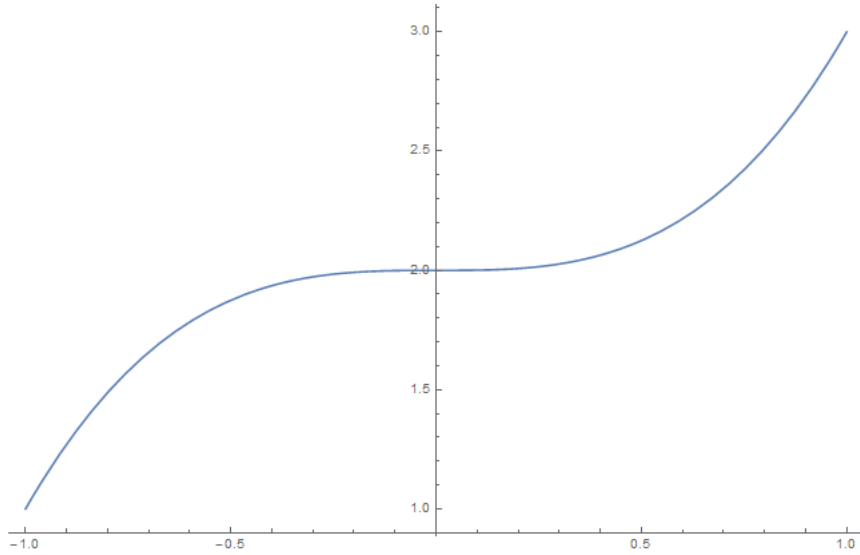
*Dokaz.* V primeru, ko je  $c_{n-1} = 0$ , dobimo poseben primer sistema enačb (1). Poenostavi se

$$\begin{aligned}
-c_0 + 2z_0 &= c_0 + c_1b + c_2b^2 + \cdots + c_{n-2}b^{n-2} + c_nb^n \\
-c_1 &= c_1a + c_22ab + \cdots + c_{n-2}(n-2)ab^{n-3} + c_n nab^{n-1} \\
-c_2 &= c_2a^2 + \cdots + c_{n-1} \frac{(n-2)(n-3)}{2} a^2 b^{n-4} + c_n \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-1} \\
&\vdots \\
-c_{n-2} &= c_{n-2}a^{n-2} + c_{n-1}(n-1)ba^{n-2} + c_n \frac{n(n-1)}{2} b^2 a^{n-2} \\
0 &= c_n na^{n-1}b \\
-c_n &= c_n a^n.
\end{aligned}$$

Iz predzadnje enačbe dobimo, da je parameter  $b$  lahko samo nič, ker je  $c_n$  različen od 0, drugače nimamo krivulje stopnje  $n$ . Takoj nato sledi iz prve enačbe sistema enačb, da je center simetrije  $z_0 = c_0$ . Vemo že, da je  $a = -1$ . Potrebujemo samo še, da dobljena parametra  $a = -1$  in  $b = 0$  zadoščata sistemu enačb z upoštevanjema parametroma

$$\begin{aligned}
-c_1 &= -c_1 \\
-c_2 &= c_2 \\
&\vdots \\
-c_{n-2} &= c_{n-2}(-1)^{n-2} \\
0 &= 0 \\
-c_n &= -c_n.
\end{aligned}$$

Vidimo, da so enačbe pri lihah stopnjah spremenljivke  $t$  izpolnjene. Pri sodih pa bodo izpolnjene natanko tedaj, ko bodo vsi  $c_k = 0$  za sode  $k$ . Pri kubičnih krivuljah pa je posledica očitna.  $\square$



SLIKA 11. Centralno simetrična krivulja iz primera 3.9.

**Primer 3.9.** Poglejmo si primer centralno simetrične krivulje s predpisom  $y = x^3 + 2$ . V parametrični obliki jo zapišemo kot  $x = t$ , ter  $y = t^3 + 2$ . V kompleksni obliki je torej

$$z(t) = x(t) + iy(t) = t + i(t^3 + 2) \text{ in } \tilde{z}(t) = -z(t) + 2z_0 = -t - i(t^3 + 2) + 2z_0.$$



Z upoštevanjem izreka sledi, da mora biti

$$\tilde{z}(t) = z(at + b),$$

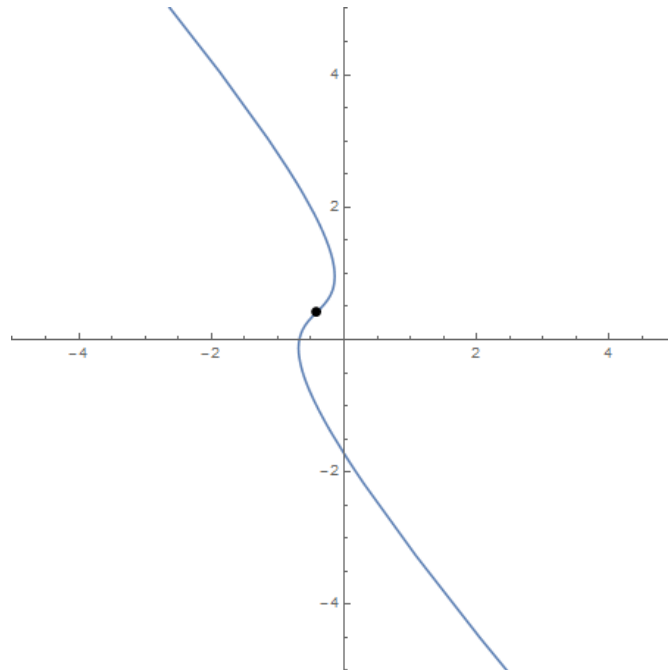
Kar nas pripelje do naslednjega sistema enačb

$$\begin{aligned} -2i + 2z_0 &= b + ib^3 + 2i \\ -1 &= a + 3abi \\ 0 &= i3a^2b \\ -i &= ia^3 \end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe dobimo, da je  $a = -1$ , kar smo pričakovali in iz predzadnje sledi  $b = 0$ . Druga enačba je izpolnjena, rešitev prve nam da  $z_0 = 2i$ , oziroma  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$ . Rezultat lahko tudi grafično preverimo na sliki 11. Vidimo, da ta primer krivulje zadošča tudi posledici 3.8.

**Primer 3.10.** Poglejmo, si še primer, ki ni funkcijski in je predstavljen na sliki 12. Naj bo krivulja parametrizirna kot

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}(t^3 - 2) + 1, \quad y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}(t^3 - 2) - 1.$$



SLIKA 12. Centralno simetrična krivulja z označenim centrom simetrije.

Ker po izreku želimo

$$\tilde{z}(t) = z(at + b),$$

dobimo

$$\begin{aligned} \frac{a^3it^3}{\sqrt{2}} - \frac{a^3t^3}{\sqrt{2}} + \frac{3a^2bit^2}{\sqrt{2}} - \frac{3a^2bt^2}{\sqrt{2}} + \frac{3ab^2it}{\sqrt{2}} - \frac{3ab^2t}{\sqrt{2}} + \frac{ait}{\sqrt{2}} + \frac{at}{\sqrt{2}} + \frac{b^3i}{\sqrt{2}} - \frac{b^3}{\sqrt{2}} + \frac{bi}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \\ -\sqrt{2}i + i + \sqrt{2} - 1 - \left( \frac{it^3}{\sqrt{2}} + \frac{it}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}i - i - \frac{t^3}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1 \right) + 2z_0 \end{aligned}$$

Tako dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}i + i + \sqrt{2} - 1 + 2z_0 &= \sqrt{2}i - i - \sqrt{2} + 1 + \frac{b^3}{\sqrt{2}}i - \frac{b^3}{\sqrt{2}} + \frac{bi}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a + \frac{3ab^2i - 3ab}{\sqrt{2}} \\ 0 &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^3 \end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe dobimo  $a = -1$ , iz predzadnje sledi  $b = 0$ . Dobljena parametra zadoščata drugi enačbi. Ter na koncu iz prve dobimo, da je  $z_0 = \sqrt{2}i - i - \sqrt{2} + 1$ , oziroma v realni obliko  $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ ,  $y_0 = -1 + \sqrt{2}$ .

### 3.2. Zrcalna simetrija

**Definicija 3.11.** Krivulja je zrcalno simetrična, če obstaja premica  $p$  (simetrična os), tako da je krivulja simetrična glede na  $p$ . To je ekvivalentno dejstvu, da obstaja kompozitum translacije in rotacije tako, da je premaknjena krivulja simetrična glede na abscisno os.

Podobno kot pri centralni simetriji, bomo zrcalno simetrijo gledali za parametrične krivulje, katerim parametrizacijo postavimo v kompleksno obliko. Rotacije čez realno premico lahko geometrijsko predstavimo tudi kot konjugacijo kompleksnih števil. Krivulja je zrcalno simetrična natanko tedaj, ko obstajata  $z_0 \in \mathbb{C}$  in  $\Phi \in [0, 2\pi]$ , tako da velja  $\tilde{z} = (z(t) - z_0)e^{i\Phi}$  in ta enakost predstavlja parametrizacijo krivulje v kompleksni obliki. Oziroma, krivulja ima os simetrije glede na katero je zrcalno simetrična natanko tedaj, ko  $w(t) = (z(t) - z_0)e^{i\Phi}$  in  $\bar{w}(t) = \overline{(z(t) - z_0)e^{i\Phi}}$  predstavljata isto krivuljo. Ker je že prvotna krivulja regularno parametrizirana, sta tudi  $w$  in  $\bar{w}$  regularno parametrizirani in ta ugotovitev je tako posledice iste leme kot pri centralni simetriji.

**Izrek 3.12.** *Krivulja ima zrcalno simetrijo natanko tedaj, ko obstaja taka premica  $L(t) = at + b$ , kjer sta  $a \neq 0$  in  $b$  realni števili, da velja  $w(t) = w(L(t))$ .*

**Lema 3.13.** *Če velja  $\overline{w(t)} = w(at + b)$  za  $a, b \in \mathbb{R}$ , potem je  $a = -1$ .*

*Dokaz.* Pišimo parametrizacijo  $w$  kot

$$w(t) = (m_p t^p + m_{p-1} t^{p-1} + \dots + m_0, n_q t^q + n_{q-1} t^{q-1} + \dots + n_0).$$

Po izreku vemo, da je krivulja simetrična glede na neko simetrično os. Če pogledamo premaknjeno krivuljo, je ta simetrična glede na abscisno os in zaradi tega je stopnja  $q$  parametrizacije  $y$  liha. V lemi smo predpostavili, da velja  $\overline{w(t)} = w(at + b)$ , če to zdaj razpišemo kot

$$\begin{aligned} \bar{w}(t) &= (\bar{m}_p t^p + \bar{m}_{p-1} t^{p-1} + \dots + \bar{m}_0, \bar{n}_q t^q + \bar{n}_{q-1} t^{q-1} + \dots + \bar{n}_0) \\ &= (m_p t^p + m_{p-1} t^{p-1} + \dots + m_0, -n_q t^q - n_{q-1} t^{q-1} - \dots - n_0) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} w(at + b) &= \\ &= (m_p (at + b)^p + \dots + m_0, n_q (at + b)^q + \dots + n_0) \\ &= (m_p (at)^p + m_p (at)^{p-1} b + \dots + m_0, n_q (at)^q + q n_q (at)^{q-1} b + \dots + n_0), \end{aligned}$$

iz predpostavke leme sledi

$$-n_q t^q - n_{q-1} t^{q-1} - \dots = n_q (at)^q + q n_q (at)^{q-1} b + n_{q-1} (at)^{q-1} b + \dots$$

Dobimo, da je  $-n_q t^q = n_q (at)^q$  oz.  $-1 = a^q$ . Ker je  $q$  lih,  $n_q \neq 0$  in  $a \in \mathbb{R}$ , je  $a = -1$ .  $\square$

Tako kot pri centralni simetriji zapišemo parametrizacijo krivulje

$$z(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n, \quad \text{kjer } c_i \in \mathbb{C} \text{ za vse } i.$$

Tako dobimo  $w(t) = (c_0 - z_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n) e^{i\Phi}$ . Če upoštevamo izrek, ki določa simetrijo, potem mora veljati  $\bar{w}(t) = w(at + b)$  oz.

$$(\bar{c}_0 - \bar{z}_0 + \bar{c}_1 t + \cdots + \bar{c}_n t^n) e^{-i\Phi} = (c_0 - z_0 + c_1 (at + b) + \cdots + c_n (at + b)^n) e^{i\Phi}.$$

Elemente na desni strani tako kot pri centralni simetriji razpišemo po binomskem izreku in enakost delimo z  $e^{i\Phi}$ . Sestavimo spodnji sistem  $n + 1$  enačb glede na koeficiente po stopnjah spremenljivke  $t$ .

Podobno kot pri centralni simetriji pridemo do sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} (\bar{c}_0 - \bar{z}_0) e^{-i2\Phi} &= c_0 - z_0 + c_1 b + \cdots + c_{n-1} b^{n-1} + c_n b^n \\ \bar{c}_1 e^{-i2\Phi} &= c_1 a + c_2 2ab + \cdots + c_{n-1} (n-1) ab^{n-2} + c_n n a b^{n-1} \\ \bar{c}_2 e^{-i2\Phi} &= c_2 a^2 + \cdots + c_{n-1} \frac{(n-1)(n-2)}{2} a^2 b^{n-3} + c_n \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-1} \\ &\vdots \\ \bar{c}_{n-1} e^{-i2\Phi} &= c_{n-1} a^{n-1} + c_n n a^{n-1} b \\ \bar{c}_n e^{-i2\Phi} &= c_n a^n. \end{aligned}$$

Za zrcalno simetrijo krivulje moramo piskati take  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi \in [0, 2\pi)$ , da bo prva enačba definirala realno premico, ki bo simetrična os, in bodo parametri zadoščali sistemu enačb.

Iz zadnje enačbe dobimo

$$e^{-i2\Phi} = \frac{c_n}{\bar{c}_n} a^n,$$

zamenjamo v preostalih enačbah ter okrajšamo in dobimo nov sistem enačb

$$(2) \quad \begin{aligned} (\bar{c}_0 - \bar{z}_0) c_n a^n &= \bar{c}_n (c_0 - z_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_{n-1} b^{n-1} + c_n b^n) \\ \bar{c}_1 c_n a^{n-1} &= \bar{c}_n (c_1 + c_2 2b + \cdots + c_{n-1} (n-1) b^{n-2} + c_n n b^{n-1}) \\ \bar{c}_2 c_n a^{n-2} &= \bar{c}_n (c_2 + \cdots + c_{n-1} \frac{(n-1)(n-2)}{2} b^{n-3} + c_n \frac{n(n-1)}{2} b^{n-1}) \\ &\vdots \\ \bar{c}_{n-1} c_n a &= \bar{c}_n (c_{n-1} + c_n n b). \end{aligned}$$

Zdaj iz zadnje enačbe lahko dobimo parameter  $b$  kot

$$b = \frac{\bar{c}_{n-1} c_n a - \bar{c}_n c_{n-1}}{n |c_n|^2}.$$

Po lemi vemo, da je  $a = -1$  in sledi, da je

$$b = \frac{-\bar{c}_{n-1} c_n - \bar{c}_n c_{n-1}}{n |c_n|^2} = \frac{-2 \operatorname{Re}(c_n \bar{c}_{n-1})}{n |c_n|^2}.$$

Opazimo, da je  $b$  torej realno število. Preveriti moramo še, da prva enačba, ki določa premico oz. simetrično os, predstavlja realno premico. Pri tem si pomagajmo s spodnjo lemo.

**Lema 3.14.** *Premico v realni obliki (z realnimi koeficienti),  $Ax + By + C = 0$  prevedemo s srednjo vrednostjo kompleksnih števil  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  in  $x = \frac{z-\bar{z}}{2i}$  v  $\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z} + C = 0$ , kjer je  $\gamma = A/2 + iB/2$ . Če je  $C \in \mathbb{R}$ , potem enačba  $\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z} + C = 0$  predstavlja realno premico.[1]*

Označimo sedaj

$$Q(b) = c_1b + c_2b^2 + \dots + c_{n-1}b^{n-1} + c_nb^n$$

in

$$Q^*(b) = Q(b) \frac{\bar{c}_n}{|c_n|} \sqrt{(-1)^{n+1}}.$$

**Trditev 3.15.** *Prva enačba sistema*

$$(\bar{c}_0 - \bar{z}_0)e^{-i2\Phi} = c_0 - z_0 + Q(b)$$

*predstavlja realno simetrično os natanko tedaj, ko je  $Q^*(b)$  realno število.*

*Dokaz.* Enačbo moramo preoblikovati v obliko, ki je zapisana v lemi. Spremenimo v implicitno obliko

$$-\bar{z}_0e^{-i2\Phi} + z_0 + \bar{c}_0e^{-i2\Phi} - c_0 - Q(b) = 0.$$

Vemo, da velja enakost  $-e^{-i2\Phi} = e^{i(\pi-2\Phi)} = e^{i2(\pi/2-\Phi)}$ , zato lahko pišemo

$$\bar{z}_0e^{i2(\pi/2-\Phi)} + z_0 - \bar{c}_0e^{i2(\pi/2-\Phi)} - c_0 - Q(b) = 0.$$

Zdaj delimo celotno enačbo z  $e^{i(\pi/2-\Phi)}$  in dobimo

$$\bar{z}_0e^{i(\pi/2-\Phi)} + z_0e^{-i(\pi/2-\Phi)} - \bar{c}_0e^{i(\pi/2-\Phi)} - c_0e^{-i(\pi/2-\Phi)} - Q(b)e^{-i(\pi/2-\Phi)} = 0.$$

Vemo, da sta si  $e^{i(\pi/2-\Phi)}$  in  $e^{-i(\pi/2-\Phi)}$  konjugirani vrednosti in tako prva dva člena predstavljata prva dva člena premice v kompleksni obliki iz leme. Dokazati je potrebno še, da je preostanek realno število, saj natanko takrat enačba predstavlja realno premico. Vidimo, da je

$$-(\bar{c}_0e^{i(\pi/2-\Phi)} + c_0e^{-i(\pi/2-\Phi)})$$

že realno število, ker je vsota kompleksnega števila in njegove konjugirane vrednosti. Preveriti moramo še, da je zadnji člen  $Q(b)e^{-i(\pi/2-\Phi)}$  realno število. Upoštevamo zvezo kot na začetku dokaza  $-e^{-i2\Phi} = e^{i(\pi-2\Phi)} = e^{i2(\pi/2-\Phi)}$ . Ker vemo, da velja  $e^{-i2\Phi} = \frac{c_n}{\bar{c}_n}a^n$  ter je  $a = -1$ , dobimo

$$e^{-i(\pi/2-\Phi)} = \frac{1}{e^{i(\pi/2-\Phi)}} = \frac{1}{\sqrt{-e^{-i2\Phi}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{-c_n(-1)^n}{\bar{c}_n}}} = \sqrt{\frac{-\bar{c}_n}{c_n(-1)^n}}.$$

Izraz pod korenem delimo in množimo z  $\bar{c}_n$  in dobimo

$$\sqrt{\frac{-\bar{c}_n\bar{c}_n}{c_n(-1)^n\bar{c}_n}} = \frac{\bar{c}_n}{|c_n|} \sqrt{(-1)^{n+1}},$$

kar je ravno tisto kar smo hoteli pokazati.  $\square$

Vse skupaj lahko zdaj zaključimo z naslednjim izrekom.

**Izrek 3.16.** *Parametrična polinomska krivulja ima zrcalno simetrijo natanko tedaj, ko parametra  $a = -1$ ,  $b = \frac{-2\operatorname{Re}(c_n\bar{c}_{n-1})}{n|c_n|^2}$  zadoščata sistemu enačb (2) z izjemo prve in je  $Q^*(b)$  realno število. Simetrična os krivulje je premica, ki jo definira prva enačba sistema (2)*

$$\bar{c}_nz - c_n(-1)^n\bar{z} + \bar{c}_0c_n(-1)^n - \bar{c}_nc_0 - Q(b) = 0.$$

O simetričnih oseh pa lahko povemo še naslednje.

**Posledica 3.17.** *Naj krivulja ima simetrično os. Če velja  $(-1)^nc_n - \bar{c}_n = 0$ , potem je simetrična os vzporedna abscisni osi. Če velja  $(-1)^nc_n + \bar{c}_n = 0$ , potem je simetrična os vzporedna ordinatni osi.*

*Dokaz.* Predpostavimo, da imamo simetrično os za neko parametrično krivuljo. Presečišče te osi z abscisno os najdemo tako, da v enačbi za premico iz izreka zamenjamo  $\bar{z}_0$  z  $z_0$ . S tem dobimo

$$(\bar{c}_n - c_n(-1)^n)z_0 + \bar{c}_0c_n(-1)^n - c_nc_0 - Q(b) = 0.$$

Presečišč med abscisno osjo in simetrično osjo ne bo, kadar je

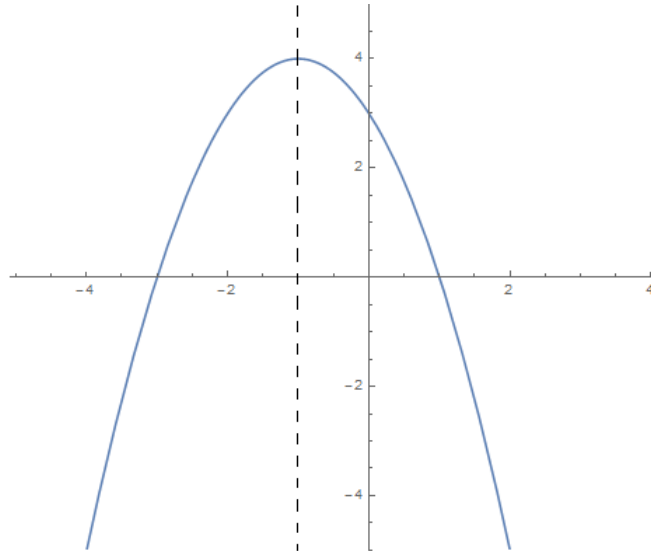
$$\bar{c}_n - c_n(-1)^n = 0$$

in s tem smo dokazali posledico. Za dokaz drugega dela, kjer je simetrična os vzporedna ordinatni os, naredimo isti premislek, kjer zamenjamo  $\bar{z}_0$  z  $-z_0$ .  $\square$

**Primer 3.18.** Poglejmo si primer krivulje za katero bomo preverili, da je zrcalno simetrična. Podana je s parametričnim predpisom  $x(t) = t$  in  $y(t) = -t^2 - 2t + 3$ , katerega prevedemo v kompleksno obliko in dobimo

$$z(t) = x(t) + iy(t) = -it^2 + (1 - 2i)t + 3i.$$

Graf krivulje vidimo na sliki 13.



SLIKA 13. Zrcalno simetrična krivulja iz primera 3.16.

Iz predpisa preberemo koeficiente, ki so

$$c_2 = -i, c_1 = 1 - 2i, c_0 = 3i.$$

Po izreku 3.16 moramo preveriti, da sta parametra  $a, b$  realni števili in zadoščata sistemu enačb

$$\begin{aligned} \bar{c}_1c_na^{n-1} &= \bar{c}_n(c_1 + c_22b + \dots + c_{n-1}(n-1)b^{n-2} + c_nb^{n-1}) \\ \bar{c}_2c_na^{n-2} &= \bar{c}_n(c_2 + \dots + c_{n-1}\frac{(n-1)(n-2)}{2}b^{n-3} + c_n\frac{n(n-1)}{2}b^{n-1}) \\ &\vdots \\ \bar{c}_{n-1}c_na &= \bar{c}_n(c_{n-1} + c_nb). \end{aligned}$$

Po izreku sta parametra  $a = -1, b = \frac{-2\text{Re}(c_n\bar{c}_{n-1})}{n|c_n|^2} = \frac{-2\text{Re}(-i(2i+1))}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$  in sta res realni števili. Sistem enačb za ta primer se poenostavi v samo eno enačbo

$$(2i + 1)(-i)(-1)^1 = i(1 - 2i + 2(-2)(-i)),$$

za katero se preprosto preveri, da sta leva in desna stran enaki.

Preostane nam preveriti še drugi del izreka in sicer, da je tudi  $Q^*(b)$  realno število.

$$\begin{aligned} Q^*(b) &= (c_1b + c_2b^2 + \dots + c_{n-1}b^{n-1} + c_nb^n) \frac{\bar{c}_n}{|c_n|} \sqrt{(-1)^{n+1}} \\ &= ((1-2i)(-2) - i(-2)^2) \frac{i}{1} \sqrt{(-1)^3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Določimo še predpis za simetrično os, kot smo zapisali v izreku in dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{c}_nz - c_n(-1)^n\bar{z} + \bar{c}_0c_n(-1)^n - \bar{c}_nc_0 - Q(b) \\ &= iz - (-i)(-1)^2\bar{z} - 3i(-i)(-1)^2 - i(3i) + 2 \\ &= iz + i\bar{z} + 2, \end{aligned}$$

ali v realni obliki  $x = -1$ . Rezultat lahko preverimo na sliki 13.

**Opomba 3.19.** Z lahkoto preverimo tudi, kar smo videli v posledici, saj velja  $(-1)^nc_n + \bar{c}_n = (-1)^2(-i) + i = 0$  in simetrična os je vzporedna ordinatni osi.

**Primer 3.20.** Pogledjmo si še en primer zrcalno simetrične krivulje, ki je parametrisirana kot  $x(t) = -\frac{t^2}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$  in  $y(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2}} + \frac{3t}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}$ . S prevedbo v kompleksno obliko dobimo

$$z(t) = x(t) + iy(t) = \frac{it^2}{\sqrt{2}} + \frac{3it}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Iz predpisa preberemo koeficiente

$$c_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, c_1 = \frac{3i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, c_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}.$$

Po izreku 3.16 moramo preveriti, da sta parametra  $a, b$  realni števili in zadoščata sistemu enačb (2). Po izreku sta parametra  $a = -1$ ,

$$b = \frac{-2\operatorname{Re}(c_n\bar{c}_{n-1})}{n|c_n|^2} = \frac{-2\operatorname{Re}\left(\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{3i}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}\right)\right)}{2 \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{-4}{2} = -2$$

in sta res realni števili. Sistem enačb za ta primer se poenostavi v samo eno enačbo

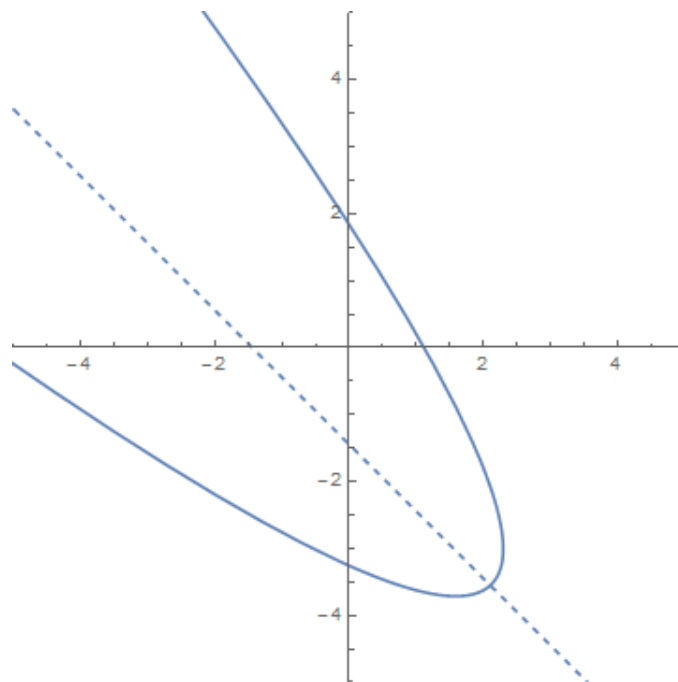
$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1) &= \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2(-2)\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3i}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}) \\ -2 - i &= \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ -2 - i &= -2 - i. \end{aligned}$$

Preostane nam preveriti še drugi del izreka in sicer, da je tudi  $Q^*(b)$  realno število.

$$\begin{aligned} Q^*(b) &= (c_1b + c_2b^2 + \dots + c_{n-1}b^{n-1} + c_nb^n) \frac{\bar{c}_n}{|c_n|} \sqrt{(-1)^{n+1}} \\ &= \left((-2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3i}{\sqrt{2}}\right) + (-2)^2\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \frac{-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \sqrt{(-1)^3} \\ &= \left(-\frac{2i}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Določimo še predpis za simetrično os v kompleksni obliki, kot smo zapisali v izreku in dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{c}_nz - c_n(-1)^n\bar{z} + \bar{c}_0c_n(-1)^n - \bar{c}_nc_0 - Q(b) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)z - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)(-1)^2\bar{z} + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)(-1)^2 \\ &\quad - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{2i}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)z - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\bar{z} - 3 - 3i + \frac{2i}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



SLIKA 14. Zrcalno simetrična krivulja.

Primer si lahko ogledamo tudi grafično na sliki 14. Preverimo lahko tudi, da posledica 3.17 ne velja in simetrična os ni vzporedna nobeni od koordinatnih osi.

**Izrek 3.21.** *Polinomska krivulja ima lahko največ eno os, glede na katero je zrcalno simetrična.*

**Izrek 3.22.** *Polinomska krivulja, ki ni premica, ne more biti hkrati centralno in zrcalno simetrična.*

Oba izreka in dokaza zanj se nahajata v [1].

#### 4. DOLOČANJE SIMETRIJ BÉZIERJEVIH KRIVULJ

Poznamo torej že nekaj metod s katerimi določimo simetrijo polinomskim krivuljam, zapisanim v monomski bazi. Pri delu v CAGD in računalniški grafiki pa se srečamo s polinomskimi krivuljami, ki so zapisane v Bernsteinovi bazi. Poznamo transformacijo med Bernsteinovo bazo in standardno bazo, ki je predstavljena med lastnostmi Bézierjevih krivulj (lema 2.7). Ena od možnosti bi bila, da naredimo transformacijo med bazama in nato pogledamo simetrijo Bézierjevih krivulj v monomski bazi. Vendar zaradi slabe pogojenosti transformacije za visoke stopnje, lahko pride do velikih numeričnih težav. Zato upoštevamo stabilnost Bernsteinove baze in bomo določanje simetrije prevedli na ta poseben primer. Prav tako smo zgoraj videli, da ima Bézierjeva krivulja kar nekaj lastnosti, ki jih bomo s pridom uporabili pri problemu ugotavljanja simetrije.

#### 4.1. Numerični argument

Ena od ključnih lastnosti, da je Bernsteinova baza tako uporabna, je njena numerična stabilnost, saj ima veliko lepše lastnosti kot monomska baza. Poglejmo si, kaj lahko povemo o numerični stabilnosti. Imamo  $n + 1$  linearno neodvisnih polinomov  $\Phi_0, \dots, \Phi_n$ , ki so stopnje  $\leq n$ . Označimo jih s  $\Phi$  in predstavljajo bazo polinomov prostora  $\mathbb{P}_n$  (polinomov stopnje  $\leq n$ ). Vsak polinom torej lahko enolično zapišemo kot linearno kombinacijo

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(t).$$

Pri izbiri baze za numerične izračune upoštevamo občutljivost polinoma na spremembe koeficientov. Kaj se dogaja s polinomom pri spremembi koeficientov, pove pogojenostno število. Imamo koeficiente, ki so definirani kot zgoraj, in vsakega zmotimo za neko naključno motnjo  $\delta c_k$ . Tako je zmoten tudi začetni polinom  $p$  z  $\delta p$ , katerega red je odvisen od vrednosti neodvisne spremenljivke  $t$ , porazdelitve motnje koeficientov ter baznih polinomov. Predpostavimo, da neodvisna spremenljivka leži na intervalu  $t \in [0, 1]$  in so spremembe koeficientov omejene s konstantnim relativnim redom  $e$ , takim, da za vse  $k$  velja

$$-e \leq \left| \frac{\delta c_k}{c_k} \right| \leq e.$$

Osredotočili se bomo na vpliv izbire baze na spremembo prvotnega polinoma. Sprememba prvotnega polinoma se tako izraža kot

$$p(t) + \delta p(t) = \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(t) + \sum_{k=0}^n \delta c_k \Phi_k(t)$$

in je omejena z

$$-\sum_{k=0}^n |\delta c_k \Phi_k(t)| \leq |\delta p(t)| \leq \sum_{k=0}^n |\delta c_k \Phi_k(t)|.$$

Zapišimo

$$|\delta p(t)| \leq C_{\Phi}(p(t))e, \quad \text{kjer je } C_{\Phi}(p(t)) = \sum_{k=0}^n |\delta c_k \Phi_k(t)|.$$

Tako definirani vrednosti rečemo pogojenostno število

**Definicija 4.1.** Vrednost  $C_{\Phi}(p(t))$  je *pogojenostno število polinoma  $p$* , za vsako vrednost parametra  $t$  ter zapis polinoma v bazi  $\Phi$ .

**Opomba 4.2.** Poudariti je potrebno, da je  $C_{\Phi}(p(t))$  odvisen od izbire baze  $\Phi$ , s katero predstavimo polinom  $p$ .

Baza  $\Phi$  je nenegativna na intervalu  $t \in [a, b]$ , če za vsak  $k$  velja

$$\Phi_k(t) \geq 0, \quad \text{za } t \in [a, b].$$

Baza Bernsteinovih baznih polinomov je očitno nenegativna po lemi 2.5.

**Izrek 4.3.** Naj bosta  $\Psi = \{\Psi_0, \dots, \Psi_n\}$  in  $\Phi = \{\Phi_0, \dots, \Phi_n\}$  nenegativni bazi za polinome stopnje  $n$  na definicijskem območju  $t \in [a, b]$ . Naj še velja, da lahko eno bazo izrazimo z nenegativno kombinacijo druge

$$\Psi_j(t) = \sum_{k=0}^n M_{jk} \Phi_k(t), \quad \text{za vse } j=0, \dots, n,$$



kjer so  $M_{jk} \geq 0$  pri  $0 \leq j, k \leq n$ . Potem lahko za pogojenostno število povemo, da za vse vrednosti  $t$  in vsak polinom  $p$  v vsaki točki intervala  $t \in [a, b]$  velja

$$C_{\Phi}(p(t)) \leq C_{\Psi}(p(t)).$$

*Dokaz.* Polinom  $p$  zapišemo v obeh bazah kot

$$p(t) = \sum_{j=0}^n a_j \Psi_j(t) = \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(t).$$

Po predpostavki izreka med bazama velja sledeča povezava

$$c_k = \sum_{j=0}^n M_{jk} a_j(t), \quad \text{za vse } k = 0, \dots, n.$$

Velja tudi, da morata biti obe nenegativni na intervalu  $t \in [a, b]$ . Za pogojenostno število polinoma  $p$  obeh baz lahko povemo

$$C_{\Phi}(p(t)) = \sum_{k=0}^n |c_k| \Phi_k(t) \quad \text{in} \quad C_{\Psi}(p(t)) = \sum_{j=0}^n |a_j| \Psi_j(t).$$

V prvo pogojenostno število vstavimo zvezo med bazama ter upoštevamo trikotniško neenakost in dobimo

$$C_{\Phi}(p(t)) = \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=0}^n a_j M_{jk} \right| \Phi_k(t) \leq \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^n |a_j M_{jk}| \right) \Phi_k(t).$$

Absolutno vrednost  $a_j M_{jk}$  lahko poenostavimo, saj za  $M_{jk}$  velja, da so nenegativni. Zamenjamo še vrstni red vsot in dobimo

$$C_{\Phi}(p(t)) \leq \sum_{j=0}^n |a_j| \sum_{k=0}^n M_{jk} \Phi_k(t) = \sum_{j=0}^n |a_j| \Psi_j(t) = C_{\Psi}(p(t)).$$

Tako smo dokazali zgornji izrek. □

Kot posledico zgornjega izreka z upoštevanjem, da sta Bernsteinova in monomska baza obe nenegativni na intervalu  $[0, 1]$  in povezave med bazama, ki smo jo videli med lastnostmi Bernsteinove baze (lema 2.7), dobimo spodnji izrek.

**Izrek 4.4.** Naj  $C_B(p(t))$  in  $C_M(p(t))$  označujeta pogojenostni števili za Bernsteinovo in monomsko bazo. Za njiju velja

$$C_B(p(t)) \leq C_M(p(t)),$$

za vse polinome  $p$  in vse vrednosti  $t \in [0, 1]$ .

Tako vidimo, da je sprememba koeficientov polinoma v Bernsteinovi bazi povzroči manjšo spremembo polinoma kot sprememba koeficientov polinoma v monomski bazi, za isti red napake. Zato je Bernsteinova baza stabilnejša od monomske.

Podkrepimo izrek še s spodnjim numeričnim zgledom.

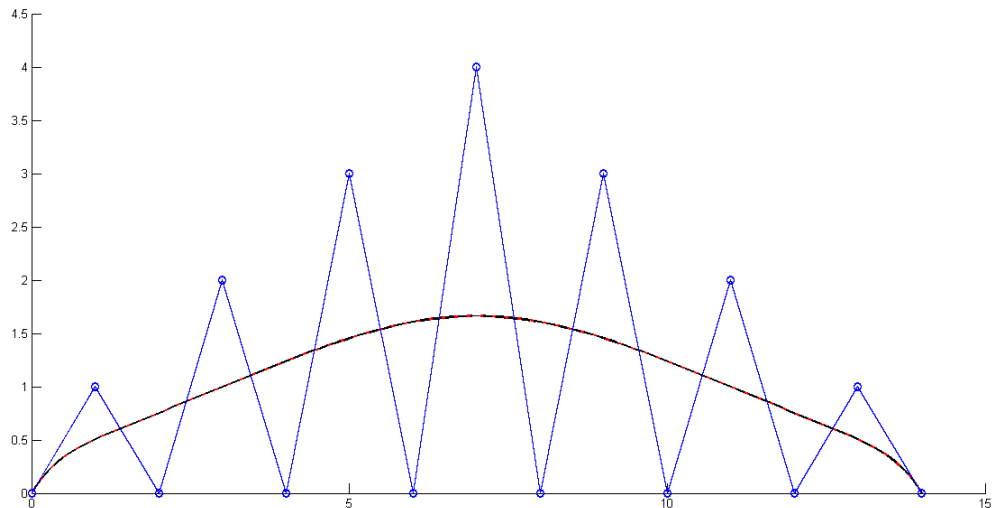
**Primer 4.5.** Bézierjevo krivuljo stopnje 14 definirajo naslednje kontrolne točke  $\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 1)^T$ ,  $\mathbf{b}_2 = (2, 0)^T$ ,  $\mathbf{b}_3 = (3, 2)^T$ ,  $\mathbf{b}_4 = (4, 0)^T$ ,  $\mathbf{b}_5 = (5, 3)^T$ ,  $\mathbf{b}_6 = (6, 0)^T$ ,  $\mathbf{b}_7 = (7, 4)^T$ ,  $\mathbf{b}_8 = (8, 0)^T$ ,  $\mathbf{b}_9 = (9, 3)^T$ ,  $\mathbf{b}_{10} = (10, 0)^T$ ,  $\mathbf{b}_{11} = (11, 2)^T$ ,  $\mathbf{b}_{12} = (12, 0)^T$ ,  $\mathbf{b}_{13} = (13, 1)^T$ ,  $\mathbf{b}_{14} = (14, 0)^T$ . Predpis krivulje je

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{14} B_i^{14}(t) \mathbf{b}_i,$$

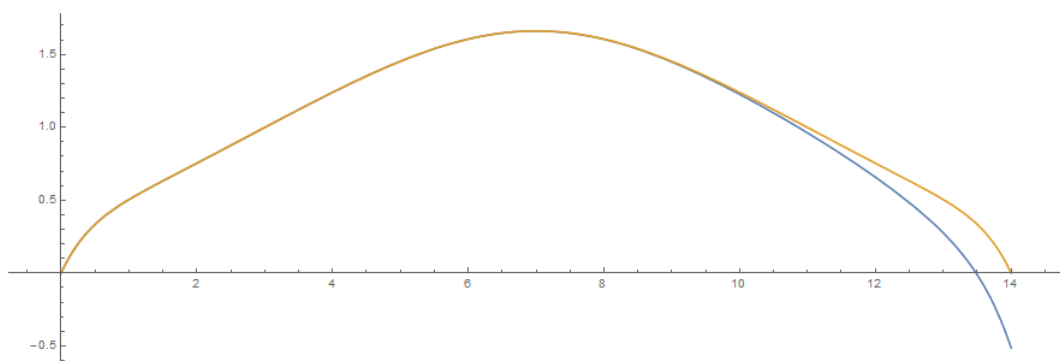
v monomski bazi pa

$$x(t) = 14t,$$

$$y(t) = -27224t^{14} + 190568t^{13} - 607880t^{12} + 1169896t^{11} - 1517516t^{10} + 1405404t^9 - 960960t^8 + 494208t^7 - 192192t^6 + 56056t^5 - 12012t^4 + 1820t^3 - 182t^2 + 14t.$$



SLIKA 15. Bézierjeva krivulja v Bernsteinovi bazi (rdeča) in krivulja, kateri zmotimo koeficiente z napako relativnega reda  $10^{-5}$  (črna).



SLIKA 16. Prvotna krivulja v monomskii bazi (oranžna) in krivulja z zmotenimi koeficienti relativne napake  $10^{-5}$  (modra).

Oba predpisa zmotimo z motnjo relativne napake  $10^{-5}$ . Krivulji v Bernsteinovi bazi zmotimo kontrolne točke tako, da vsem prištejemo 0.00005, krivulja v monomski

bazi po spremembi koeficientov pa dobi nov predpis

$$\begin{aligned} x(t) &= 13.9999t, \\ y(t) &= -27224.3t^{14} + 190570.t^{13} - 607886t^{12} + 1169907t^{11} - 1517531t^{10} + \\ &+ 1405418t^9 - 960970.t^8 + 494213.t^7 - 192194.t^6 + 56056.6t^5 - 12012.1t^4 + \\ &+ 1820.02t^3 - 182.002t^2 + 14.0001t. \end{aligned}$$

Primer prikazuje, kako se spremeni oblika krivulje v Bernsteinovi in monomski bazi, ko le za malo zmotimo koeficiente. Krivulja je simetrična, definirana s simetričnimi kontrolnimi točkami. Kot vidimo na sliki 15 se krivulja v Bernsteinovi bazi neopazno malo razlikuje od prvotne krivulje, medtem ko je sprememba krivulje v monomski bazi močno opazna (slika 16). Bézierjeva krivulja je lep primer krivulje zapisane v Bernsteinovi bazi. V tem primeru je sprememba koeficientov polinoma v bistvu sprememba kontrolnih točk, ki pa je pri tako majhni motnji neopazna.

#### 4.2. Pogoj za simetrijo Bézierjevih krivulj

**Definicija 4.6.** Naj bo  $\Phi$  afina preslikava (rotacija, zrcaljenje, translacija). Ravninska Bézierjeva krivulja  $\mathbf{b}$  je simetrična, če  $\mathbf{b}$  in  $\Phi \circ \mathbf{b}$  definirata isto množico točk za  $t \in [0, 1]$ .

Polinomska Bézierjeva krivulja je lahko pri določenih pogojih zrcalno simetrična (glede na neko izbrano os simetrije) ali pa centralno simetrična (glede na osrednjo točko). Nikakor pa ne more biti rotacijsko simetrična za poljuben kot rotacije različen od  $\pi$ . Saj je Bézierjeva krivulja le poseben primer realne polinomske krivulje, za katere pa smo že videli, da to ne velja. Za primere afinih transformacij, ki določajo simetrično krivuljo velja, da so izometrične, kar pomeni, da ohranjajo razdaljo, ter imajo lastnost involucije, torej so sama sebi inverzne.

**Izrek 4.7.** Naj bo Bézierjeva krivulja regularno parametrizirana in stopnje  $n > 1$ . Potem je potreben in zadosten pogoj za netrivialno simetrijo Bézierjeve krivulje simetrija parov kontrolnih točk. Definirajmo  $p_i$  kot

$$\mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{b}_{n-i} + \mathbf{b}_i}{2} \quad \text{za } i = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor.$$

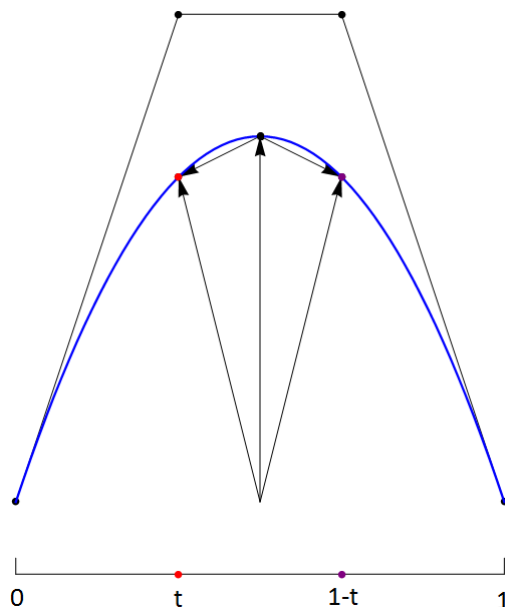
Centralna simetrija nastopi, če so vse točke  $p_i$  enake, zrcalna simetrija pa nastopi, če so  $p_i$  kolinearne. Takrat je premica skozi  $p_i$  os simetrije.

*Dokaz.* Uporabimo znanje, ki smo ga pridobili pri polinomskih krivuljah. Za simetrijo krivulje mora veljati

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}(1-t),$$

ker se točka na krivulji pri parametru  $t$ , ko jo zrcalimo čez center simetrije ali simetrično os, preslika v točko pri parametru  $1-t$ , kar vidimo tudi na spodnji sliki 17. To mora veljati za vse vrednosti parametra  $t$ . Z upoštevanjem definicije krivulje in z zamenjavo indeksov dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \mathbf{b}(1-t) \\ \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i &= \sum_{i=0}^n B_i^n(1-t) \mathbf{b}_i \\ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{b}_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^i t^{n-i} \mathbf{b}_i \\ \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} (1-t)^i t^{n-i} \mathbf{b}_{n-i} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^i t^{n-i} \mathbf{b}_i \\ \mathbf{b}_{n-i} &= \mathbf{b}_i \end{aligned}$$



SLIKA 17. Določanje simetrije Bézijerjevi krivulji.

Upoštevali smo še simetričnost binomskega simbola. Vidimo, da pogoj za simetrijo krivulje določajo paroma simetrične kontrolne točke.

□

**Opomba 4.8.** Bézijerjeva krivulja je definirana na enotskem intervalu in zato morajo vse  $\mathbf{p}_i$  biti tudi enake sredinski točki na krivulji,  $\mathbf{b}(0.5)$ , pri centralni simetriji. Sredinska točka mora hkrati tudi ležati na osi zrcalne simetrije, če želimo, da je krivulja simetrična.

**Primer 4.9.** Pogledjmo si primer kubične Bézijerjeve krivulje s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1)^T, \mathbf{b}_1 = (2, 1)^T, \mathbf{b}_2 = (2, 0)^T, \mathbf{b}_3 = (1, 0)^T.$$

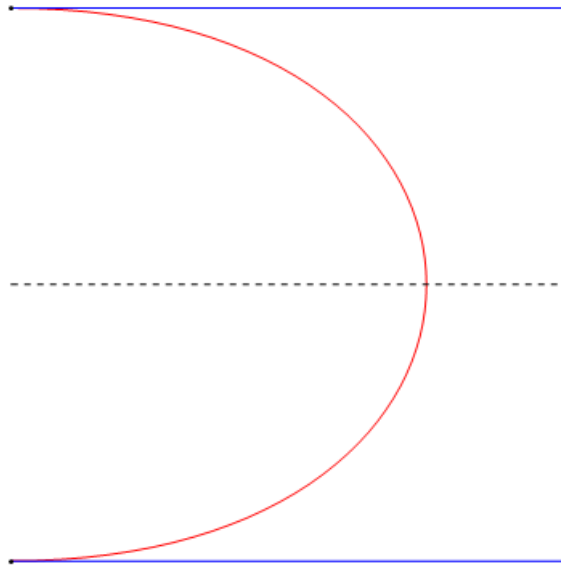
Kaj lahko povemo o simetriji? Izračunamo točke  $\mathbf{p}_i$  iz izreka 4.7 in dobimo  $\mathbf{p}_0 = \frac{\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_0}{2} = \frac{(2, 1)^T}{2} = (1, 1/2)^T$  in  $\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1}{2} = \frac{(4, 1)^T}{2} = (2, 1/2)^T$ . Točki določata premico, na kateri je tudi točka  $\mathbf{b}(0.5)$ , zato vse tri točke določajo os simetrije. O tem se lahko prepričamo tudi na sliki 18.

**Primer 4.10.** Zrcalno simetrično Bézijerjevo krivuljo smo tudi že srečali v primeru 4.5. Preverimo, da je to res in izračunajmo  $\mathbf{p}_0 = (7, 0)^T, \mathbf{p}_1 = (7, 1)^T, \mathbf{p}_2 = (7, 0)^T, \mathbf{p}_3 = (7, 2)^T, \mathbf{p}_4 = (7, 0)^T, \mathbf{p}_5 = (7, 3)^T, \mathbf{p}_6 = (7, 0)^T$  in  $\mathbf{p}_8 = (7, 4)^T$ . Točke so res kolinerane in določajo os simetrije.

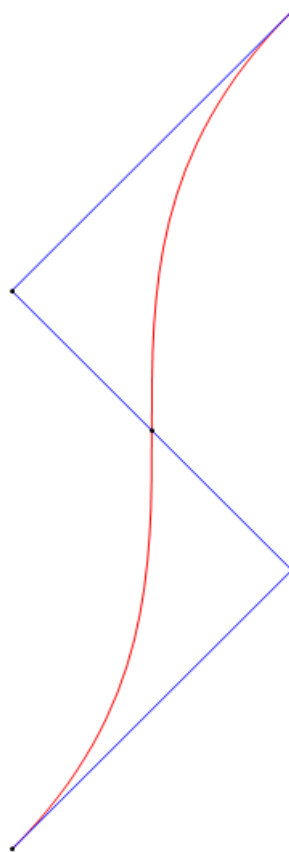
**Primer 4.11.** Ta primer kubične Bézijerjeve krivulje s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1)^T, \mathbf{b}_1 = (2, 2)^T, \mathbf{b}_2 = (1, 3)^T, \mathbf{b}_3 = (2, 4)^T$$

predstavlja centralno simetrično krivuljo, o čemer se bomo še prepričali. Izračunamo točke  $\mathbf{p}_i$  kot smo izračunali v izreku in za ta primer dobimo  $\mathbf{p}_0 = \frac{\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_0}{2} = \frac{(3, 5)^T}{2} = (3/2, 5/2)^T$  in  $\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1}{2} = \frac{(3, 5)^T}{2} = (3/2, 5/2)^T$ . Točki sovpadata ter določata center simetrije, o tem se lahko prepričamo tudi na sliki 19.



SLIKA 18. Zrcalno simetrična Bézijerjeva krivulja.



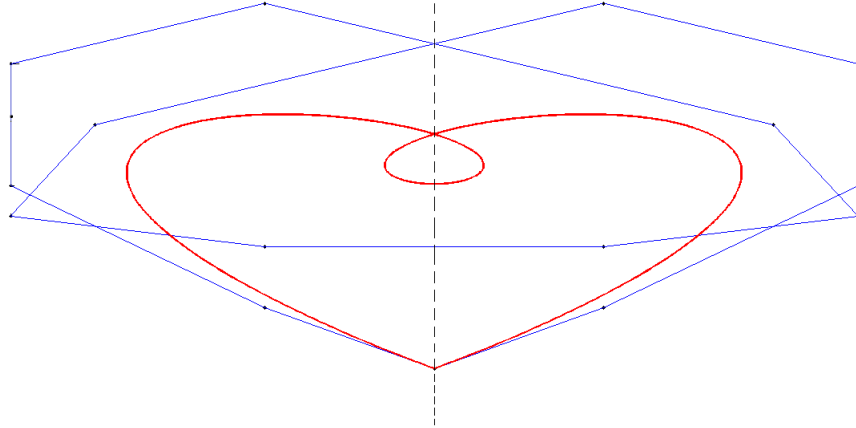
SLIKA 19. Centralno simetrična Bézijerjeva krivulja.

**Primer 4.12.** Bézijerjevo krivuljo stopnje 17 s samopresečiščem določajo kontrolne točke

$$\mathbf{b}_0 = (0, -1)^T, \mathbf{b}_1 = (-1, 0)^T, \mathbf{b}_2 = (-2.5, 2)^T, \mathbf{b}_3 = (-2.5, 3)^T, \mathbf{b}_4 = (-2.5, 4)^T,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_5 &= (-1, 5)^T, \mathbf{b}_6 = (2, 3)^T, \mathbf{b}_7 = (2.5, 1.5)^T, \mathbf{b}_8 = (1, 1)^T, \mathbf{b}_9 = (-1, 1)^T, \\ \mathbf{b}_{10} &= (-2.5, 1.5)^T, \mathbf{b}_{11} = (-2, 3)^T, \mathbf{b}_{12} = (1, 5)^T, \mathbf{b}_{13} = (2.5, 4)^T, \mathbf{b}_{14} = (2.5, 3)^T, \\ \mathbf{b}_{15} &= (2.5, 2)^T, \mathbf{b}_{16} = (1, 0)^T, \mathbf{b}_{17} = (0, -1)^T. \end{aligned}$$

Po izreku 4.7 izračunamo  $\mathbf{p}_i$  za vse  $i$  in te določajo os simetrije, o vsem tem se prepričamo na sliki 20.



SLIKA 20. Zrcalno simetrična Bézierjeva krivulja.

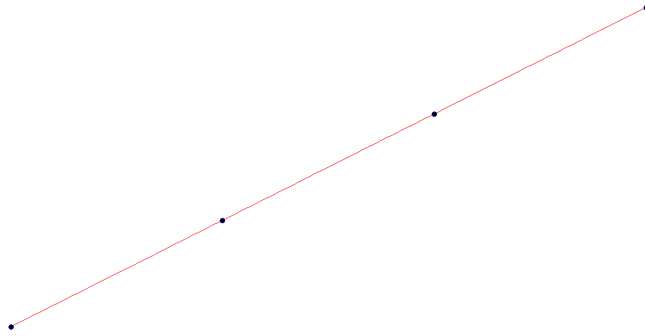
Simetrija parov kontrolnih točk kot pogoj za simetrijo krivulje ni nobeno presečenje, saj oblika krivulja sledi svojemu kontrolnemu poligonu.

Izračunane točke  $\mathbf{p}_i$  v izreku 4.7 so nam tudi dobra mera za določanje, kako blizu simetrije je krivulja. Pri centralni simetriji nam razdalja med  $\mathbf{p}_i$  pove, kako blizu centralne simetrije je krivulja. Medtem ko pri zrcalni simetriji premica po metodi najmanjših kvadratov določa najboljši približek simetrične osi.

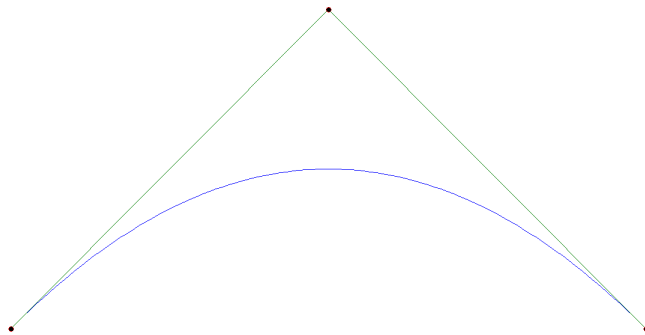
#### 4.2.1. Posebni primer simetrije

Če pri izreku 4.7 ni izpolnjena predpostavka, potem imamo lahko simetrično krivuljo, kontrolne točke pa ni nujno, da so paroma simetrične.

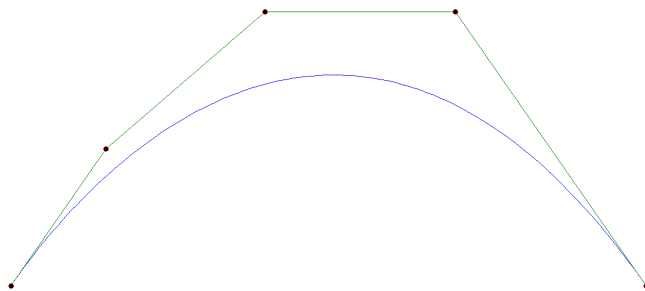
- Prvi primer je premica, ki je poseben primer Bézierjeve krivulje, ker so kontrolne točke kolinearne. Prav tako je poseben primer simetrične krivulje, saj je edina krivulja, kjer nastopita tako centrala kot tudi zrcalna simetrija hkrati. Simetrijo določimo kar direktno in sicer točka centra simetrije je kar točka na sredini premice. Medtem ko simetrično os zrcalne simetrije dobimo kot pravokotnico na premico čez sredinsko točko.
- Drugi primer je krivulja, ki ni regularno parametrizirana. Pri Bézierjevih krivuljah lahko dobimo neregularno parametrizacijo krivulje pri višanju stopnje krivulje. Pred uporabo izreka moramo tako vedno preveriti, da je krivulja regularno parametrizirana. Če temu ni tako, krivuljo reparametriziramo.



SLIKA 21. Poseben primer Bézierjeve krivulje-premica.



SLIKA 22. Simetrična krivulja.

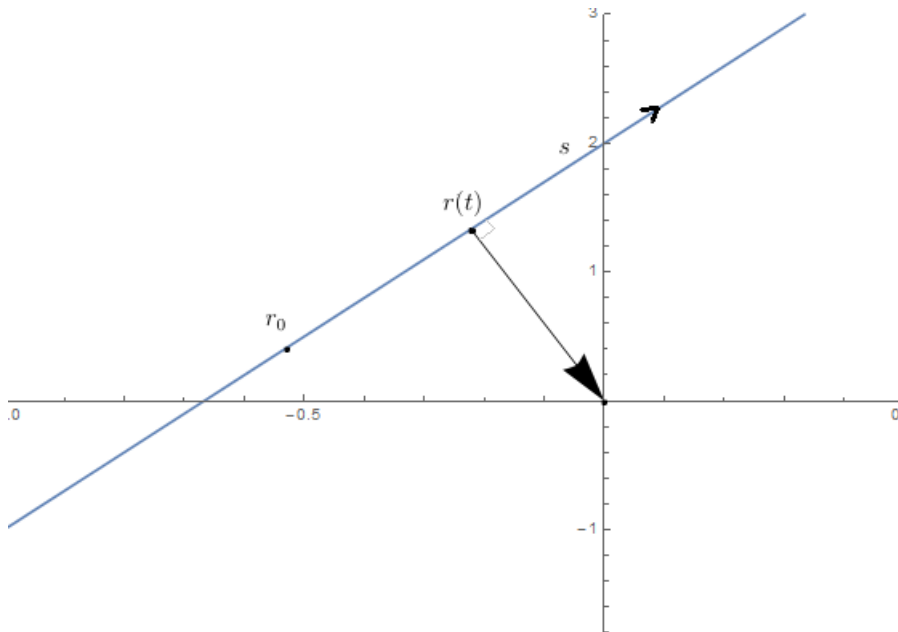


SLIKA 23. Krivulja kot na prejšnji sliki, kateri povišamo stopnjo in ne zadosti več pogojem za simetrijo iz izreka.

#### 4.3. Simetrični deli krivulje

Pri krivuljah, katerih je definicijsko območje omejeno, lahko pogledamo, ali je mogoče del krivulje simetričen. Tak primer krivulje je tudi Bézierjeva krivulja in v nadaljevanju si bomo ogledali metodo, s katero lahko iščemo simetričen del krivulje. V splošnem imamo Bézierjevo krivuljo definirano na zaprtem enotskem intervalu  $[0, 1]$ . Recimo, da smo pri preverjanju simetrije po izreku 4.7 ugotovili, da le ta ni

simetrična, zdaj nas pa zanima ali obstaja tak del krivulje, ki pa je simetričen. Med lastnostmi smo že videli, da lahko Bézierjevo krivuljo enostavno delimo s pomočjo subdivizije. Potrebujemo samo ustrezen parameter, pri katerem bomo krivuljo delili.



SLIKA 24. Razdalja premice do koordinatnega izhodišča.

Naj bo  $\mathbf{b}$  Bézierjeva krivulja definirana na intervalu  $u \in [0, 1]$ . Iščemo simetričen del krivulje  $\mathbf{c}$ , definiran nad intervalom  $[0, v]$ , tako da je  $v < u$ . Pri določanju simetrije smo videli, da je srednja točka na krivulji bodisi center simetrije, bodisi leži na simetrični osi. Zato želimo poiskati tako vrednost parametra  $u_c$ , ki bo definirala center dela krivulje  $\mathbf{C} = \mathbf{b}(u_c) = \mathbf{c}(1/2)$ . Pomagajmo si s spodnjo lemo.

**Lema 4.13.** Če je Bézierjeva krivulja  $\mathbf{b}$ , ki je regularno parametrizirana in stopnje  $n > 1$ , simetrična, potem je njen  $n - 1$  odvod premica, ki je v točki  $\mathbf{b}(1/2)$  najbližja koordinatnemu izhodišču, pri centralni simetriji pa gre skozi koordinatno izhodišče [6].

Najprej si pogledjmo splošen izračun točke na premici, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču. Pomagali si bomo z znanjem iz algebre. Vemo, da lahko vsako premico definiramo s smernim vektorjem  $\mathbf{s}$  in začetno točko  $\mathbf{r}_0$ , v tem kontekstu zapišemo predpis za vse točke na premici kot  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}$ . Vektor točke, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču, in smerni vektor premice, morata biti pravokotna, ker je takrat razdalja točke do izhodišča najmanjša. Torej mora biti skalarni produkt med njima enak nič. Razpišemo te ugotovitve in tako lahko izrazimo parameter na premici pri katerem je točka najbližja izhodišču

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}(t) \\ 0 &= \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}) \\ 0 &= \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \\ t &= \frac{-\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}. \end{aligned}$$



Za lažjo predstavo si pogledjmo to tudi grafično na sliki 24.

Vrnimo se k našemu primeru z Bézierjevimi krivuljami. Bézierjevo krivuljo  $n - 1$  odvajajmo in skalirajmo,

$$\frac{\frac{d^{n-1}\mathbf{b}}{du^{n-1}}(u)}{n!} = \sum_{j=0}^1 \Delta^{n-1}\mathbf{b}_j B_j^1(u) = (1-u) \Delta^{n-1}\mathbf{b}_0 + u \Delta^{n-1}\mathbf{b}_1.$$

Ta premica ima smerni vektor  $\Delta^{n-1}\mathbf{b}_1 - \Delta^{n-1}\mathbf{b}_0 = \Delta^n\mathbf{b}_0$ , ki je različen od 0, saj je  $n$  stopnja krivulje. Tako ne pride do izrojenega primera, kjer bi bil odvod samo točka. Skaliran  $n - 1$  odvod si lahko predstavljamo kot afino preslikavo definicijskega območja  $u \in [0, 1]$ . Parametra cele krivulje  $u$  in dela krivulje  $v$  sta povezana z linearno transformacijo, zato sledi, da tudi  $\mathbf{b}^{n-1}/n!$  predstavlja reparametrizirano in skalirano različico  $\mathbf{c}^{n-1}$ . Poiskati moramo tak parameter  $u_c$ , da bo ustrezal  $v = 1/2$ . Pomagamo si z zgornjo lemo in znanjem o izračunu parametra točke splošne krivulje. Primerno nadomestimo količine in dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^n\mathbf{b}_0((1-u) \Delta^{n-1}\mathbf{b}_0 + u \Delta^{n-1}\mathbf{b}_1) \\ 0 &= \Delta^n\mathbf{b}_0 \Delta^{n-1}\mathbf{b}_0 + u \Delta^n\mathbf{b}_0(\Delta^{n-1}\mathbf{b}_1 - \Delta^{n-1}\mathbf{b}_0) \\ 0 &= \Delta^n\mathbf{b}_0 \Delta^{n-1}\mathbf{b}_0 + u \Delta^n\mathbf{b}_0 \Delta^n\mathbf{b}_0 \end{aligned}$$

Tako smo dobili, da je parameter točke, ki je najbližja izhodišču

$$u_c = -\frac{(\Delta^{n-1}\mathbf{b}_0)(\Delta^n\mathbf{b}_0)}{(1 + (\Delta^n\mathbf{b}_0)^2)}.$$

Sedaj preverimo, da je  $u_c \in [0, 1]$  in največji podinterval  $V$ , ki vsebuje  $u_c$  kot točko na sredini, dobimo kot

- če je  $u_c < 1/2$ , potem sledi, da je  $V = [0, 2u_c]$ .
- če je  $u_c > 1/2$ , potem sledi, da je  $V = [2u_c - 1, 1]$ .

S pomočjo subdivizije, ki temelji na de Casteljaujevem algoritmu, določimo kontrolne točke dela krivulje, na katerem izračunamo simetrijo parov teh kontrolnih točk in preverimo, če je krivulja res simetrična. Vse skupaj lahko zapišemo kot sledeči izrek

**Izrek 4.14.** *Naj bo  $\mathbf{b}$  regularno parametrizirana Bézierjeva krivulja, ki ni premica. Pogoji za simetrijo dela krivulje je, da parameter  $u_c$  leži v enotskem intervalu ter da za kontrolne točke na podintervalu  $V$  velja simetrija parov kontrolnih točk. Pri tem sta  $u_c$  in  $V$  definirana zgoraj.*

Če je parameter  $u_c < 0$  ali  $u_c > 1$ , potem krivulja nima nobenih simetričnih delov nad enotskim intervalom  $[0, 1]$ . To v CAGD ni zanimivo, ker so krivulje tu definirane nad omejenim intervalom. Ustrezen interval za simetričen del krivulje lahko izračunamo tudi v primeru, ko izračunan parameter pade iz enotskega intervala, za krivulje definirane nad intervalom, ki ni enotski.

**Opomba 4.15.** Parameter  $u_c$ , ki ga izračunamo za simetrični del Bézierjeve krivulje, je enolično določen, saj po izrekih za polinomske krivulje velja, da ima krivulja lahko le en center simetrije ter samo zrcalno ali centralno simetrijo.

Za konec pa si pogledjmo še primera nesimetričnih Bézierjevih krivulj, ki imata simetričen del.

**Primer 4.16.** Vzemimo kontrolne točke

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 2.5)^T, \mathbf{b}_1 = (1.1, 3.1)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_3 = (3.7, 2.4)^T$$

in ustrezno Bézierjevo krivuljo. Poglejmo najprej, ali je ta krivulja simetrična. Po izreku 4.7 izračunamo  $p_i$ . Dobimo  $\mathbf{p}_0 = (\frac{2.7}{2}, \frac{4.9}{2})^T$ ,  $\mathbf{p}_1 = (\frac{1.1}{2}, \frac{3.1}{2})^T$ ,  $\mathbf{b}(0.5) = (0.75, 1.775)^T$ , enostavno vidimo, da točke niso enake ali kolinearne. Krivulja zato ni simetrična. Poglejmo ali pa ima mogoče simetrični del. Izračunamo potreben parameter za subdivizijo. Zato potrebujemo prve, druge in tretjo deljeno diferenco teh točk in tako dobimo

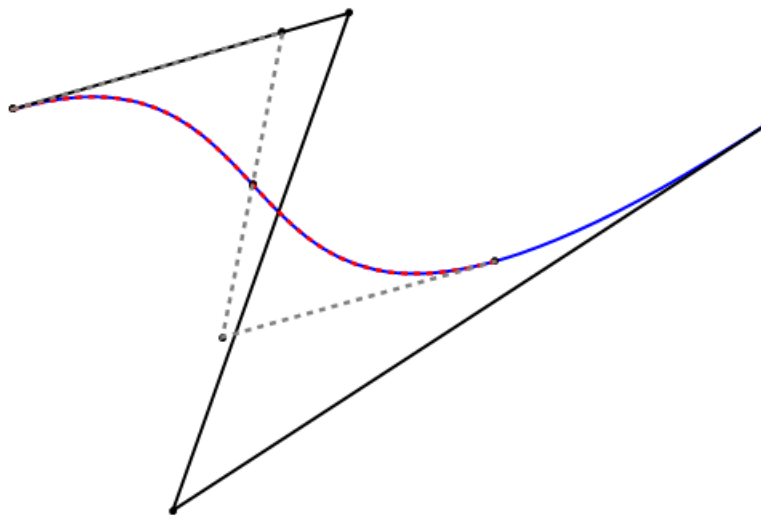
$$\Delta \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 = (2.1, 0.6)^T, \Delta \mathbf{b}_1 = (-1.1, -3.1)^T, \Delta \mathbf{b}_2 = (3.7, 2.4)^T,$$

$$\Delta^2 \mathbf{b}_0 = (-3.2, -3.7)^T, \Delta^2 \mathbf{b}_1 = (4.8, 5.5)^T, \Delta^3 \mathbf{b}_0 = (8, 9.2)^T.$$

Parameter, kjer je središče simetričnega dela, izračunamo kot smo videli zgoraj in dobimo

$$t_c = -\frac{(\Delta^2 \mathbf{b}_0) \cdot (\Delta^3 \mathbf{b}_0)}{(1 + (\Delta^3 \mathbf{b}_0)^2)} = -\frac{-25.6 - 34.04}{1 + 64 + 84.64} = \frac{59.64}{149.64} \doteq 0.399.$$

Ker je  $t_c < 0.5$ , je interval, na katerem je simetričen del,  $[0, 2t_c] = [0, 0.798]$ . Na-



SLIKA 25. Bézierjeva krivulja z centralno simetričnim delom.

redimo subdivizijo pri parametru  $2t_c = 0.798$  in si točke zapišemo v spodnjo de Casteljaujevo shemo

$$\begin{array}{llll} \mathbf{b}_0 = (-1, 2.5)^T & & & \\ \mathbf{b}_1 = (1.1, 3.1)^T & \mathbf{b}_0^1 = (0.676, 2.979)^T & & \\ \mathbf{b}_2 = (0, 0)^T & \mathbf{b}_1^1 = (0.222, 0.623)^T & \mathbf{b}_0^2 = (0.314, 1.101)^T & \\ \mathbf{b}_3 = (3.7, 2.4)^T & \mathbf{b}_2^1 = (2.953, 1.915)^T & \mathbf{b}_1^2 = (2.401, 1.655)^T & \mathbf{b}_0^3 = (1.979, 1.543)^T. \end{array}$$

Za kontrolne točke simetričnega dela, ki ga iščemo, vzamemo diagonalo v shemi, ker te predstavljajo krivuljo nad intervalom  $[0, 2t_c]$ . Za te točke moramo preveriti še, da res določajo simetrično krivuljo. Zato nas zanima simetrija parov kontrolnih točk po izreku za določanje simetrije Bézierjeve krivulje. Izračunamo

$$\mathbf{p}_0 = (0.4895, 2.0215)^T, \mathbf{p}_1 = (0.495, 2.04)^T$$

in točko na krivulji pri parametru  $t_c$

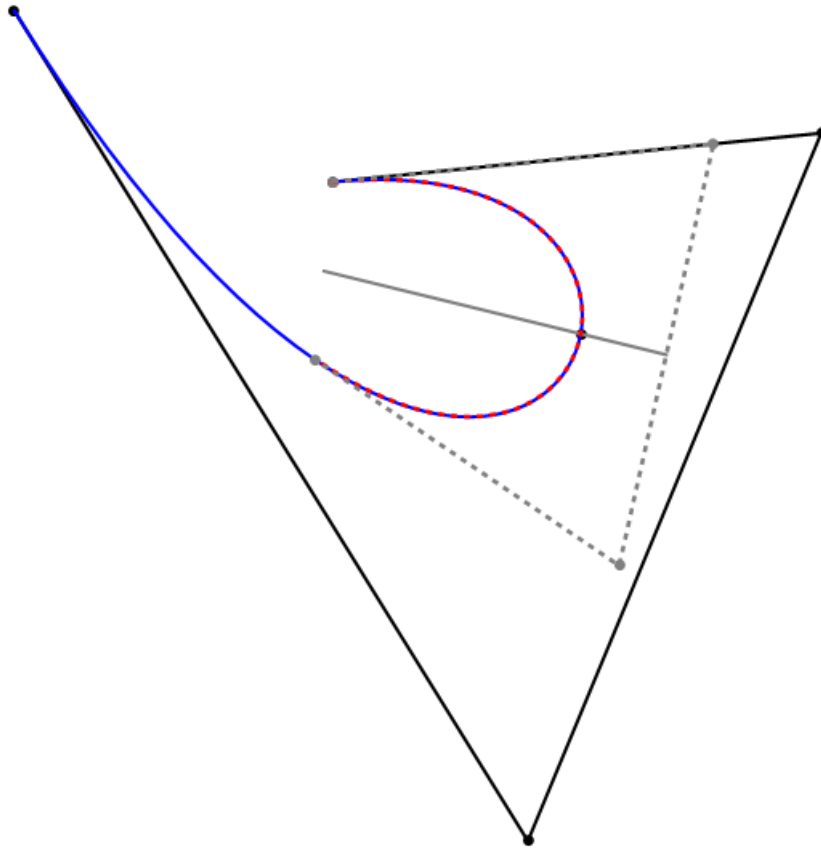
$$\mathbf{b}(t_c) = (0.4935, 2.0355)^T.$$

Vidimo, da so te točke približno enake in krivulja je centralno simetrična. Na sliki 25 vidimo nesimetrično Bézierjevo krivuljo (modra) s pripadajočimi kontrolnimi točkami (črne). Simetričen del (črtkana rdeča krivulja), kateri ima pripadajoče kontrolne točke določene s subdivizijo (črtkano sive).

**Primer 4.17.** Vzemimo še en primer kontrolnih točk

$$\mathbf{b}_0 = (-2.1, 3.4)^T, \mathbf{b}_1 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_2 = (1.2, 2.9)^T, \mathbf{b}_3 = (-0.8, 2.7)^T$$

in pripadajočo Bézierjevo krivuljo. Prav tako izračunamo  $\mathbf{p}_0 = (\frac{-2.9}{2}, \frac{6.1}{2})^T$ ,  $\mathbf{p}_1 = (\frac{1.2}{2}, \frac{2.9}{2})^T$  ter  $\mathbf{b}(0.5) = (0.0875, 1.85)^T$ . Te točke niso kolinerane in še zdaleč ne enake, zato krivulja ni simetrična. Preverimo še, če ima mogoče kak simetričen del. Po-



SLIKA 26. Bézierjeva krivulja z zrcalno simetričnim delom.

novno izračunamo potreben parameter za subdivizijo. Zato potrebujemo prve, drugi in tretjo deljeno diferenco teh točk in tako dobimo

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b}_0 &= \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 = (2.1, -3.4)^T, \Delta \mathbf{b}_1 = (1.2, 2.9)^T, \Delta \mathbf{b}_2 = (-2, -0.2)^T, \\ \Delta^2 \mathbf{b}_0 &= (-0.9, 6.3)^T, \Delta^2 \mathbf{b}_1 = (-3.2, -3.1)^T, \Delta^3 \mathbf{b}_0 = (-2.3, -9.4)^T. \end{aligned}$$

Parameter, kjer je središče simetričnega dela, izračunamo kot smo videli zgoraj in tako je

$$t_c = -\frac{(\Delta^2 \mathbf{b}_0) \cdot (\Delta^3 \mathbf{b}_0)}{(1 + (\Delta^3 \mathbf{b}_0)^2)} = -\frac{2.07 - 59.22}{1 + 5.29 + 88.36} = \frac{57.15}{94.63} \doteq 0.604.$$

Ker je  $t_c > 0.5$ , je interval na katerem je simetričen del  $[2t_c - 1, 1] = [0.208, 1]$ .

Naredimo subdivizijo pri parametru  $2t_c - 1 = 0.208$  in si točke zapišemo v spodnjo de Castaljauevo shemo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= (-2.1, 3.4)^T \\ \mathbf{b}_1 &= (-0, 0)^T & \mathbf{b}_0^1 &= (-1.66, 2.69)^T \\ \mathbf{b}_2 &= (1.2, 2.9)^T & \mathbf{b}_1^1 &= (0.25, 0.60)^T & \mathbf{b}_0^2 &= (-1.27, 2.26)^T \\ \mathbf{b}_3 &= (-0.8, 2.7)^T & \mathbf{b}_2^1 &= (0.78, 2.86)^T & \mathbf{b}_1^2 &= (0.36, 1.07)^T & \mathbf{b}_0^3 &= (-0.93, 2.01)^T. \end{aligned}$$

Za kontrolne točke simetričnega dela, ki ga iščemo, vzamemo spodnjo vrsto sheme, saj te točke določajo krivuljo nad intervalom  $[2t_c - 1, 1]$ . Za te točke moramo preveriti še, da res določajo simetrično krivuljo. Zato nas zanima simetrija parov kontrolnih točk po izreku za določanje simetrije Bézierjeve krivulje. Izračunamo

$$\mathbf{p}_0 = (-0.865, 2.355)^T, \mathbf{p}_1 = (0.57, 1.965)^T$$

ter točko na krivulji pri parametru  $t_c$

$$\mathbf{b}(t_c) = (0.2134, 2.0629)^T.$$

Točke so kolinearne in tako določajo simetrično os.

Na sliki 26 vidimo nesimetrično Bézierjevo krivuljo (modra) s pripadajočimi kontrolnimi točkami (črne). Simetričen del (črtkana rdeča krivulja), kateri ima pripadajoče kontrolne točke določene s subdivizijo (črtkano sive).

**Primer 4.18.** Poglejmo si primer nesimetrične krivulj, ki tudi nima simetričnega dela. Vzemimo kontrolne točke

$$\mathbf{b}_0 = (-3, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (2, 4)^T, \mathbf{b}_2 = (-2, 0)^T, \mathbf{b}_3 = (-21, -6)^T,$$

ki Bézierjevo krivuljo. Izračunamo  $\mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{p}_1$  ter točko na sredini krivulje in dobimo, da so te nekolinearne. Torej krivulja ni simetrična. Preverimo še ali ima simetričen del. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b}_0 &= \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 = (5, 4)^T, \Delta \mathbf{b}_1 = (-4, -4)^T, \Delta \mathbf{b}_2 = (-19, -6)^T, \\ \Delta^2 \mathbf{b}_0 &= (-9, -8)^T, \Delta^2 \mathbf{b}_1 = (-15, -2)^T, \Delta^3 \mathbf{b}_0 = (-6, 6)^T. \end{aligned}$$

Parameter, kjer je središče simetričnega dela, izračunamo kot smo videli zgoraj in dobimo

$$t_c = -\frac{(\Delta^2 \mathbf{b}_0) \cdot (\Delta^3 \mathbf{b}_0)}{(1 + (\Delta^3 \mathbf{b}_0)^2)} = -\frac{54 - 48}{1 + 36 + 36} = -\frac{6}{73} \doteq -0.0822.$$

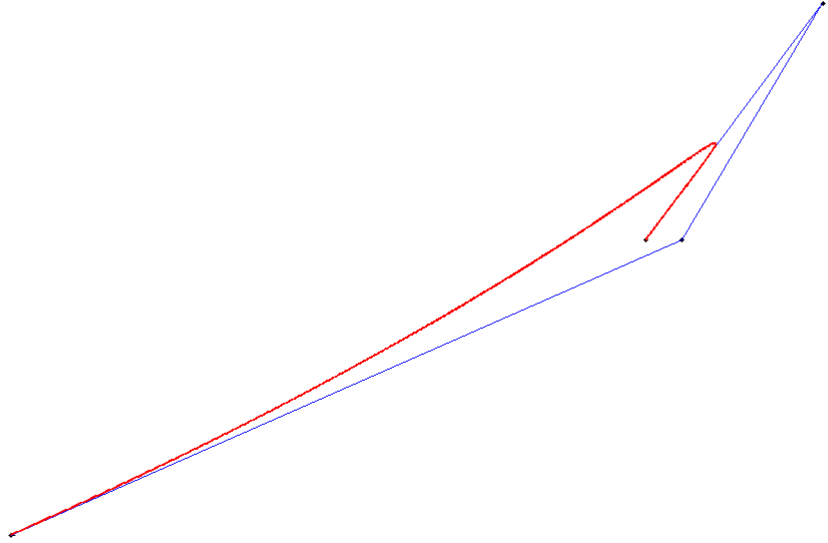
Ker je  $t_c < 0$ , krivulja nima simetričnih delov. Primer vidimo tudi na sliki 27.

**Primer 4.19.** Za konec si pogledajmo še primer, ko imamo simetričen del in tega želimo kot del nesimetrične krivulje pri nekem izbranem intervalu. Postopek reševanja bo ravno obraten, ko v prejšnjih primerih.

Vzemimo kontrolne točke

$$\mathbf{b}_0^* = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1^* = (1, 1)^T, \mathbf{b}_2^* = (2, 1)^T, \mathbf{b}_3^* = (3, 0)^T,$$

ki definirajo simetrično Bézierjevo krivuljo. Recimo, da želimo, da je parameter  $t_c = 0.75$ . Interval nad katerim bomo imeli simetrični del je tako  $[2t_c - 1, 1] = [0.5, 1]$ . Točke, ki definirajo simetričen del, dobimo z de Castaljauevim algoritmom in so zapisane v spodnji vrstici. Za krivuljo, ki jo iščemo moramo izračunati kontrolne točke, ki se nahajajo v prvem stolpcu in zato obrnemo de Castaljauev algoritem, ki



SLIKA 27. Nesimetrična Bézierjeva krivulja z nesimetričnim delom.

ga izvajamo pri  $t = 0.5$ . Na začetku imamo de Castaljujevo shemo samo s spodnjo vrstico

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{b}_0 & & & & & \\ & \mathbf{b}_1 & & \mathbf{b}_0^1 & & & \\ & \mathbf{b}_2 & & \mathbf{b}_1^1 & & \mathbf{b}_0^2 & \\ \mathbf{b}_3 = (0, 0)^T & \mathbf{b}_2^1 = (1, 1)^T & \mathbf{b}_1^2 = (2, 1)^T & \mathbf{b}_0^3 = (3, 0)^T & & & \end{array}$$

Točke računamo z leve proti desni in od spodaj navzgor po formuli

$$\mathbf{b}_i^{r-1}(t) = \frac{\mathbf{b}_i^r(t) - t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}}{1-t}.$$

Tako dobimo celotno de Castaljujevo shemo

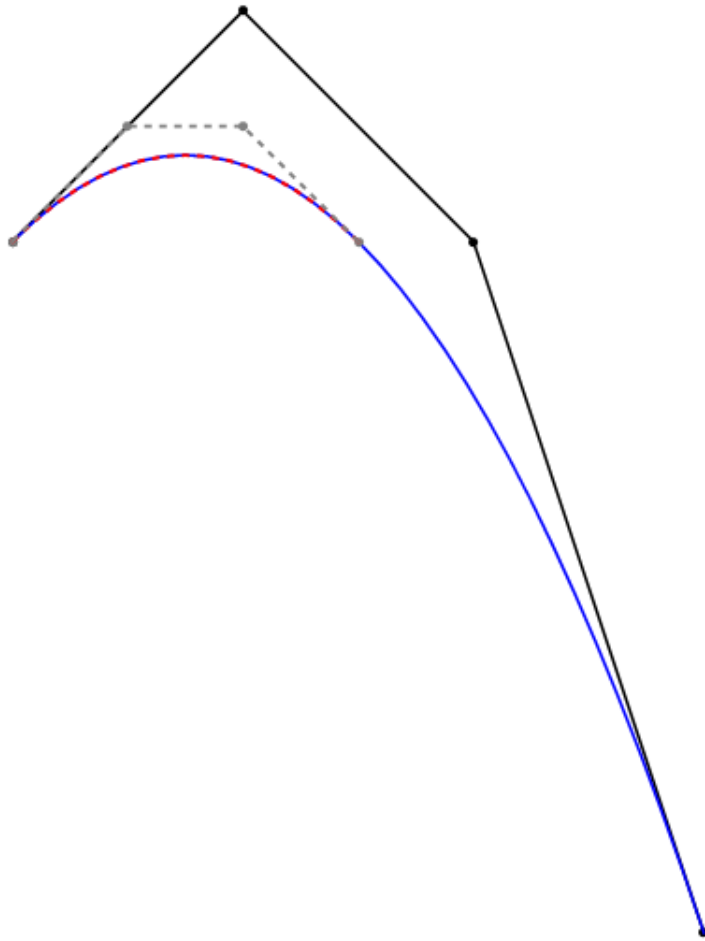
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_0 = (8, 6)^T & & & & & & \\ \mathbf{b}_1 = (2, 0)^T & \mathbf{b}_0^1 = (5, -3)^T & & & & & \\ \mathbf{b}_2 = (2, 2)^T & \mathbf{b}_1^1 = (3, 1)^T & \mathbf{b}_0^2 = (4, -1)^T & & & & \\ \mathbf{b}_3 = (0, 0)^T & \mathbf{b}_2^1 = (1, 1)^T & \mathbf{b}_1^2 = (2, 1)^T & \mathbf{b}_0^3 = (3, 0)^T & & & \end{array}$$

Prvi stolpec tako predstavlja kontrolne točke nesimetrične Bézierjeve krivulje, ki ima simetičen del nad intervalom  $[0.5, 1]$ . To vidimo tudi predstavljeno na sliki 28.

## 5. ČASOVNA ZAHTEVNOST ALGORITMOV ZA UGOTAVLJANA SIMETRIJE KRIVULJ

Čisto za konec pa še pogledjmo, kako je s časovno zahtevnostjo algoritmov za izračun simetrije polinomskih krivulj in Bézierjevih krivulj. Časovna zahtevnost algoritmov za določanje simetrij polinomskih parametričnih krivulj nam karakterizira naslednji izrek.

**Izrek 5.1.** *Zrcalno in centralno simetrijo parametrični polinomski krivulji določimo v  $O(n^3)$  časovni zahtevnosti, kjer  $n$  predstavlja stopnjo parametrizacije.*



SLIKA 28. Nesimetrična Bézierjeva krivulja določena s simetričnim delom.

*Dokaz.* Za parametra  $a, b$ , ki ju izračunamo po formuli, moramo preveriti, da zadoščata sistemu enačb. Za preveritev, da ustreza eni enačbi, potrebujemo  $O(n^2)$  množenj in  $O(n)$  seštevanj. To moramo ponoviti za  $n$  enačb in iz tega sledi časovna zahtevnost  $O(n^3)$ .  $\square$

Pri ugotavljanju simetrije Bézierjeve krivulje stopnje  $n$ , ki je zapisana v Bernsteinovi bazi, moramo preveriti simetrijo parov kontrolnih točk, za kar potrebujemo  $O(n)$  operacij. Za določanje simetričnega dela krivulje pa potrebujemo  $n$ -to deljeno diferenco in subdivizijo z de Casteljaujevim algoritmom. Za oba koraka potrebujemo  $O(n^2)$  operacij.

V primerjavi z algoritmi v monomski bazi, kjer potrebujemo  $O(n^3)$  operacij, je določanje simetrije Bézierjevih krivulj hitrejše. Poleg tega smo videli, da je Bernsteinova baza tudi stabilnejša.

## 6. ZAKLJUČEK

V magistrskem delu je predstavljeno določanje simetrij ravninskih Bézierjevih krivulj. Rezultati so podkrepjeni z numeričnimi zgledi. Kot smo videli, je določanje simetrij zanimivo področje, ki se uporablja predvsem v računalniški grafiki in CAGD. Prav zaradi tega pridemo do krivulj, zapisanih v Bernsteinovi bazi in simetrij Bézierjevih krivulj. Določanje simetrije za to posebno obliko parametrične polinomske krivulje se prevede na določanje simetrije kontrolnih točk, ki morajo biti paroma simetrične za regularno parametrizirane krivulje. Takšen pogoj ni presenečenje, saj krivulja sledi svojemu kontrolnemu poligonu in ga posnema. Kot smo videli, je delo v Bernsteinovi bazi hitrejše in stabilnejše kot določanje simetrij krivulj zapisanih v monomski bazi. Pri splošnih polinomskih krivuljah za določitev simetrije dobimo trikotni sistem enačb, ki mora biti rešljiv, če želimo simetrijo krivulje. To ni tako enostavno in intuitivno kot pri opazovanju kontrolnih točk in njihove simetrije.

V nadaljevanju bi lahko določanje simetrij ravninskih krivulj posplošili še za prostorske krivulje. Izkazalo bi se, da določanje simetrije prostorskih Bézierjevih krivulj zopet izkoristi kontrolne točke in njihovo simetrijo. Za prostorske krivulje v monomski bazi pa ta posplošitev ni tako enostavna. Prav tako zanimivo vprašanje se pojavi, kako določiti simetrije pri racionalnih krivuljah in racionalnih Bézierjevih krivuljah.

## LITERATURA

- [1] J.G. Alcázar, *Efficient detection of symmetries of polynomially parametrized curves*, J. Comput. Appl. Math. 255, (2014), 715-724.
- [2] U. Bobnar, *Računanje presečišč ravninskih Bézierovih krivulj*, delo diplomskega seminarja, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2014.
- [3] G. Farin, *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*, 3rd. ed., Computer Science and Scientific Computing **XVII**, Academic Press, Boston, (1993).
- [4] R.T. Farouki, *The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective*, Comput. Aided Geom. Design 29, (2012), 379-419.
- [5] R.T. Farouki, V.T. Rajan, *On the numerical condition of polynomials in Bernstein form*, Comput. Aided Geom. Design 4 (3), (1987), 191-216.
- [6] J. Sánchez-Reyes, *Detecting symmetries in polynomial Bézier curves*, J. Comput. Appl. Math. 288, (2015), 274-283.
- [7] G. Jaklič, *Krivulje in ploskve v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju*, verzija 21. 5. 2013, [ogled 16. 4. 2016], dostopno na <https://ucilnica1415.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=101>.
- [8] E. Žagar, *Interpolacija s parametričnimi polinomskimi krivuljami*, verzija 6. 12. 2010, [ogled 16. 5. 2016], dostopno na <http://ucilnica1213.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=24>.
- [9] *Bézier curve*, [ogled 6. 11. 2015], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Bezier\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Bezier_curve).
- [10] *Pierre Bézier*, [ogled 16. 1. 2016], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_Bézier](http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Bézier).
- [11] *Paul de Casteljau*, [ogled 16. 1. 2016], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Paul\\_de\\_Casteljau](http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_de_Casteljau).