UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Lara Luckmann

Model za izračun premij pri avtomobilskih zavarovanjih

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir
Somentor: dr. Dejan Veluščček

Ljubljana, 2017

Kazalo

Model za izračun premij pri avtomobilskih zavarovanjih

POVZETEK

Imamo model tveganja v diskretnem času za izračun zavarovalnih premij v bonus-malus sistemu (BMS), ki upošteva korelacijo med premijami in izplačili. To je sistem, ki prilagodi višino premije glede na zavarovančeve škodne zahtevke v predhodnih zavarovalnih letih. V BMS je znanje o sedanjem premijskem razredu in število zahtevkov v trenutnem časovnem obdobju zadostno, da se določi naslednji razred. To je tesno povezano s pozabljivostjo Markovskih verig. Na BMS v avtomobilskem zavarovanju lahko gledamo kot na homogeno Markovsko verigo. V našem modelu predpostavimo, da imamo dva premijska razreda. Če v nekem časovnem obdobju do škode ne pride, zavarovalnica v naslednjem obdobju zaračuna diskontirano premijo, sicer pa zavarovanec plača celotno premijo. Predpostavimo, da se škodni dogodek zgodi z verjetnostjo p in ne zgodi z verjetnostjo $1 - p$. Zavarovateljev presežek v času n je vsota konstantnega začetnega presežka in pobranih premij do časa n, ki mu odštejemo vsoto vseh škodnih zahtevkov plačanih do časa n. Čas propada je prvi čas, ko zavarovateljev presežek pade pod ničlo. Zanima nas verjetnost, da je čas propada končen, in od česa je verjetnost propada odvisna. Ugotovimo, da je pod predpostavkami našega modela, verjetnost propada odvisna od varnostnega dodatka. To je pogoj, ki nam zagotavlja, da zavarovalnica v vsakem obdobju dobi več kot mora plačati za škodne zahtevke. Višji kot je varnostni dodatek, nižja je verjetnost propada.

Model for calculating premiums in car insurance

ABSTRACT

We obtain a discrete-time risk model for calculating premiums in bonus-malus system (BMS), which has a certain type of correlation between premiums and claim amounts. Such a system adjusts premiums according to policyholders' claim amounts in previous years. In BMS, the knowledge of current premium level and number of claims in current time period is the key to determine premium level in next time period. This is closely linked to the forgetting property of Markov chains. We can consider a BMS as homogenuos Markov chain. In our model we have only two premium levels. If there was no claim made in the previous period, the insurance charge lower premiums to its policyholders in next time period. Otherwise, they need to pay full premium at renewal. We asume that random variable X_i, denoting the total claim amount in period i has Bernoulli(p) distribution. The amount of insurers surplus in time n is the sum of constant initial surplus and amount of premiums the insurer recieves up to and including n, to which we deduct the total claim amount up to and including time n. Time of ruin is defined as first time, when insurers surplus falls under 0. We are observing the probability, that the time of ruin is finite. Through numerical exaples we find out, that ruin probability depends on safety loading. This is a condition, that makes sure, that in each period the income of the insurance is higher then its outcome for claim amounts. Ruin probability increases as the safety loading condition decreases.

Math. Subj. Class. (2010): 97M30, 91B30, 03C57

Ključne besede: bonus-malus, Markovske verige, verjetnost propada, primanjkljaj ob propadu, rekurzija

Keywords: bonus-malus, Markov chain, ruin probability, deficit at ruin, recursion

1. Uvod

Imamo model v diskretnem času za izračun zavarovalnih premij v bonus-malus sistemu, ki upošteva korelacijo med premijami in izplačili. Osnovan je na bonus-malus sistemu v avtomobilski zavarovalni industriji. Tak sistem kaznuje zavarovalca (sklenitelja zavarovanja), ki nosi krivdo v nesreči z doplačilom, in nagradi zavarovalce, ki škodnih primerov niso imeli.

V prvem delu diplomske naloge opišemo bonus-malus sistem, način kako deluje in njegov vpliv na cestne statistike. Pogledamo si še bonus-malus sistem v Sloveniji.

Ker je pojem bonus-malus sistem močno povezan s pojmom Markovske verige, v nadaljevanju na kratko opišemo, kaj Markovske verige sploh so, nato pa se malo podrobneje posvetimo povezavi med Markovskimi verigami in BMS sistemom. Za lažjo predstavo in razumevanje si to povezavo ogledamo tudi na primeru iz realnega življenja.

V nadaljevanju se posvetimo našemu modelu. Ogledamo si predpostavke, vpeljemo in definiramo nove spremenljivke, ki jih bomo preučevali. Tu je ključna verjetnost propada, ki povzroči bankrot firme. Tej bomo v nadaljevanju posvetili največ pozornosti.

Sledita poglavji izpeljav in računanja začetnih vrednosti, ki nam data algoritem za izračun končne verjetnosti propada, ki nas zanima.

Nato podrobno na dveh primerih preučimo vpliv opazovanih spremenljivk na verjetnost propada. Za lažjo predstavo si rezultate ogledamo tudi na grafih izdelanih s pomočjo programa R.

Na koncu se na kratko posvetimo še primanjkljaju ob propadu in podobno kot pri računanju verjetnosti propada izpeljemo formule za računanje primanjkljaja.

2. Bonus-malus

Bonus-malus (izhaja iz latinščine in pomeni dobro-slabo) se uporablja marsikje in temelji na nagrajevanju in kaznovanju. V zavarovalništvu je to sistem, ki prilagodi višino premije glede na zavarovančeve škodne zahtevke v predhodnih zavarovalnih letih. Bonus predstavlja popust na premijo ob obnovitvi police, če v predhodnem letu ni bilo škodnih zahtevkov, malus pa se odraža v povečanju premije, če je v predhodnem letu prišlo do zahtevkov. Sistem je zelo pogost pri avtomobilskih zavarovanjih. To je sistem nagrajevanja voznikov, ki v preteklih letih niso povzročili škode in kaznovanja voznikov, ki so povzročili škodo. Bonus pomeni določen odstotek znižanja izhodiščne premije, malus pa določen odstotek povišanja izhodiščne premije. Gre torej za sistem, ki deluje na podlagi ocene preteklih izkušenj voznika in ima direkten vpliv na voznika.

Običajen BMS razdeli zavarovance v več razredov, kjer ima vsak razred svoj popust oziroma pribitek na osnovno premijo. Leta brez škodnih zahtevkov se odražajo znižanju enega ali več premijskih razredov na bonus-malus lestvici ob vsakoletni obnovitvi pogodbe, posledica škodnih zahtevkov pa je povečanje stopnje na BMS lestvici. V praksi bonus-malus lestvica sestoji iz končnega števila premijskih razredov. Novi sklenitelj zavarovanja pade v določeno stopnjo. Po vsakem letu se polica premakne razred višje ali nižje, glede na prehodna pravila in število škodnih zahtevkov. Običajno je razlika med dvema stopnjama 5% popust oziroma pribitek. Začetni razred je lahko odvisen od voznikovih let, teže avtomobila, moči motorja, tipa uporabe avtomobila (privatno ali poslovno), ... Premija, ki pripada temu izhodiščnemu razredu, je torej premija, ki jo morajo plačati vozniki brez znane zgodovine o škodnih zahtevkih.

Tak sistem je v uporabi v veliko razvitih državah. Vsaka država pa ima svojo zakonodajo, ki diktira število stopenj po katerih se zavarovanec lahko vzpne ali pade, največji bonus ali malus dovoljen in statistike glede na katere se ocenjuje začetni razred voznika.

Višina plačane premije v BMS je torej odvisna od dejavnikov določanja premijske stopnje trenutnega obdobja in od zgodovine škodnih primerov. Bonus-malus sistem ima vpliv na statistike o varni vožnji na cestah, saj spodbudi voznike k bolj varni vožnji (prepreči moralni hazard), da bi se izognili nesrečam, ki bi vodile v izgubo bonusa. Prav tako zmanjša število manjših škodnih zahtevkov, saj zavarovanec raje nosi stroške škode sam in se tako izogne povišanju premije.

2.1. **Bonus-malus sistem v Sloveniji.** Slovenske zavarovalnice uporabljajo enako bonus-malus lestvico, torej enake premijske razrede in stopnje izhodiščne zavarovalne premije. Boniteta zavarovanja je opredeljena s 17 premijskimi razredi od 4 do 20, ki predstavljajo stopnjo izhodiščne premije. Torej če je ob sklenitvi zavarovanja dogovorjeno, da se pri določanju zavarovalne premije upošteva pretekli čas trajanja zavarovanja brez prijavljene škode, oziroma število prijavljenih škod v preteklem zavarovalnem obdobju za vsako vozilo posebej, se le-ta določi na podlagi razvrstitve v ustrezni premijski razred, s katerim je določen odstotek izhodiščne zavarovalne premije, ki jo je potrebno upoštevati. Izhodiščna zavarovalna premija je zavarovalna premija, ki je s premijskim cenikom za zavarovanje avtomobilske odgovornosti določena za zavarovanje vozila določene vrste, tehničnih lastnosti ter višine kritnih obveznosti.

Premijski razredi in odstotki izhodiščne zavarovalne premije so:

Premijski razred	4	5	6	7	8	9	10	11	12
% izhodiščne zavarovalne premije	50	55	60	65	70	75	80	85	90

Premijski razred	13	14	15	16	17	18	19	20
% izhodiščne zavarovalne premije	95	100	110	120	135	150	170	200

Tabela 1. Premijski razredi in izhodišče zavarovalne premije v Sloveniji.

Za vsako novo zavarovanje se premija določi po 14. izhodiščnem premijskem razredu (100%). Za novo zavarovanje se šteje zavarovanje, ki ga je zavarovanec sklenil za vozilo prvič in zavarovanje, ki ga je zavarovanec sklenil po preteku več kot treh let, odkar mu je prenehalo veljati prejšnje zavarovanje. Najnižji premijski razred 4 predstavlja plačilo le 50 odstotkov izhodiščne premije, najvišji premijski razred pa predstavlja 200 odstotkov. Vsako zavarovalno leto brez prijavljene škode omogoča razvrstitev za en premijski razred nižje (bonus) v naslednjem letu in s tem 5 odstotno znižanje premije. Vsaka prijavljena škoda pa pomeni razvrstitev za 3 premijske razrede višje (malus) v naslednjem zavarovalnem letu, s tem da upošteva največ 4 prijavljene škode v istem zavarovalnem letu. S tem zavarovalec izgubi 15 odstotkov pridobljenega bonusa v primeru 1 prijavljene škode, če se v preteklem zavarovalnem obdobju giblje v premijskem razredu od 4 do 13 (premijski razredi z bonusom) in bistveno več, če se giblje v premijskem razredu od 14 do 20 (premijski razredi z malusom) oziroma bistveno več, če povzroči večje število škod.

Torej razvrščanje do sedaj že zavarovanih vozil v premijske razrede se opravi na podlagi ugotovljenega odstotka obračunane izhodiščne zavarovalne premije za zadnje zavarovalno obdobje in škodnega poteka v tem obdobju.

3. Markovske verige

V bonus-malus sistemu je znanje o sedanjem premijskem razredu in število zahtevkov v trenutnem časovnem obdobju zadostno, da se določi naslednji razred na lestvici. Torej prihodnost (premijski razred za leto $t+1$) je odvisna le od sedanjosti (premijskega razreda v letu t in števila nesreč prijavljenih v letu t) in ne od preteklosti. To je tesno povezano s pozabljivostjo Markovskih verig.

Definicija in osnovne lastnosti markovskih verig: Naj bo S števna množica stanj. Slučajni proces je vsako zaporedje slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, X_2, \ldots$, katerih zaloga leži v S. Najenostavnejši primer slučajnega procesa je zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Markovska lastnost pove, da je vsak člen odvisen le od zadnjega člena tik pred njim, nič pa od prejšnjih. Formuliramo jo tako:

$$P(X_n = s_n \mid X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n = s_n \mid X_{n-1} = s_{n-1})$$

Slučajni proces s to lastnostjo imenujemo markovska veriga.
Verjetnost

$$p_{ij}(n) = P(X_n = s_j \mid X_{n-1} = s_i)$$

se imenuje prehodna verjetnost enega koraka Markovske verige. Ta verjetnost je lahko odvisna od časa n, lahko pa bi privzelii, da je veriga homogena. To pomeni, da je ta verjetnost od časa neodvisna.

Matrika

$$P(n) = (p_{ij}(n))$$

je prehodna matrika oziroma matrika prehodnih vrednosti. Ta matrika ima lastnost, da so njeni koeficienti nenegativni, vsota vsake vrstice pa je enaka 1. Takim matrikam pravimo stohastične matrike.

Verjetnosti

$$p_{ij}^{(h)}(n) = P(X_n = s_j \mid X_{n-h} = s_i)$$

se imenujejo prehodne verjetnosti v h-korakih Markovske verige, torej $p_{ij}(n) = p_{ij}(n, 1)$.

Podobno, matriki

$$P^{(h)}(n) = (p_{ij}^{(h)}(n))$$

rečemo prehodna matrika v h-korakih.

Zgornja definicija je veljavna le za diskretne vrednosti slučajnih spremenljivk, torej če je S števna.

3.1. **Markovske verige in bonus-malus sistem.** Na bonus-malus sistem v avtomobilskem zavarovanju lahko gledamo kot na homogeno Markovsko verigo, kjer bonitetni razredi tvorijo Markovsko verigo s končnim številom stanj/razredov S.

Verjetnost p_{ij} je v tem primeru verjetnost, da polica, ki je v letu n v razredu i, v naslednjem letu preide v razred j. Verjetnost $p_{ij}^{(h)}(n)$ pa je verjetnost, da je zavarovanje v določenem letu v razredu i, po preteku h let pa v zavarovalnem razredu j. V vsakem časovnem obdobju (običajno je to eno leto) so vsi imetniki police razporejeni v enega od končno mnogo razredov, njihova premija pa je odvisna od tega v katerem razredu se nahajajo. Razred zavarovanca v danem obdobju je odvisen le od razreda, v katerem se je nahajal v predhodnem obdobju in števila prijavljenih škod v tem časovnem obdobju.

Poissonova porazdelitev. V verjetnosti je Poissonova porazdelitev diskretna verjetnostna porazdelitev, ki označuje verjetnost števila dogodkov v fiksnem časovnem obdobju, če se ti dogodki zgodijo z znano povprečno pogostostjo, neodvisno od časa, ko se je zgodil predhodni dogodek. Taka spremenljivka predstavlja število škod v času veljavnosti police. Naj bo $N \approx \text{Poiss}(\lambda)$, $\lambda > 0$, potem je

$$p_x = P(N = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x \in \mathbb{N}.$$

Poissonova porazdelitev se pogosto uporablja v realnem življenju, v primeru pogostosti škod. Pogosto je uporabljena za modeliranje prehodnih verjetnosti v bonus-malus sistemu. Bolj natančno, Poissonova porazdelitev opisuje število zahtevkov za posameznika in prehodne verjetnosti so določene iz te porazdelitve pogostosti zahtevkov. Torej, število škod vsako leto je Poiss(λ) porazdeljena spremenljivka in verjetnost, da se v letu zgodi ena ali več škod je enaka $p = 1 - e^{-\lambda}$

Klasičen bonus-malus sistem predstavlja končno homogeno Markovsko verigo z množico stanj $S = \{1, 2, \ldots, r\}$ in prehodno matriko

$$P(\lambda) = [p_{ij}(\lambda)] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k,$$

kjer je $p_k(\lambda)$ verjetnost, da zavarovanec s škodno pogostostjo λ, prijavi k škod v enem časovnem obdobju in T_k je matrika prehodnih pravil. Predpostavimo, da število škod zavarovanca označeno z λ ustreza Poissonovi porazdelitvi.

Poglejmo si primer tabele prehodnih pravil iz realnega življenja:

Trenutni razred	Premijska stopnja %	Nov razred po številu škodnih zahtevkov							
		0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
0	250	1	0	0	0	0	0	0	0
1	170	2	0	0	0	0	0	0	0
2	130	3	1	1	0	0	0	0	0
3	110	5	2	2	1	0	0	0	0
4	100	5	3	2	1	0	0	0	0
5	95	6	4	3	2	1	0	0	0
6	90	7	5	4	2	1	0	0	0
7	80	8	6	5	4	2	1	0	0
8	70	8	8	6	5	4	2	1	0

TABELA 2. Primer tabele prehodnih pravil in premijskih stopenj.

Vemo

$$p_{ij}(n) = \{k\} = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

oziroma

$$p_{ij}(n) = \{k, k+1, \ldots\} = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$$

Na primer, za zgornji bonus-malus sistem, je verjetnost da iz razreda 5 pademo v razred 3 enaka

$$p_{53}(n) = \{2\} = p_2 = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda},$$

verjetnost, da iz razreda 5 pademo v razred 0, pa je enaka

$$p_{50}(n) = \{5, 6, 7, \ldots\} = \sum_{i=5}^{\infty} p_i$$

Prehodno matriko bi lahko predstavili tudi na drugačen način in sicer:

i / j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	{1,2,3, ...}	{0}	.	.	.	.	.	.	.
1	{1,2,3, ...}	.	{0}	.	.	.	.	.	.
2	{3,4,5, ...}	{1,2}	.	{0}	.	.	.	.	.
3	{4,5,6, ...}	.	{1,2}	.	.	{0}	.	.	.
4	{4,5,6, ...}	{3}	{2}	{1}	.	{0}	.	.	.
5	{5,6,7, ...}	{4}	{3}	{2}	{1}	.	{0}	.	.
6	{5,6,7, ...}	{4}	{3}	.	{2}	{1}	.	{0}	.
7	{6,7, ...}	{5}	{4}	.	{3}	{2}	{1}	.	{0}
8	{$\geq$ 7}	{6}	{5}	.	{4}	{3}	{2}	.	{0,1}

Tabela 3. Primer tabele prehodnih verjetnosti.

kjer je $. = 0$.

4. Model

Naj bo $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$. Z U_n označimo višino zavarovateljevega presežka ob času n, $n \in \mathbb{N}$, ki ima obliko

$$U_n = u + \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

Pri tem je:

- u konstanten začetni presežek in
- X_i tvori zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, kjer X_i označuje skupno višino zahtevkov v času $i \in \mathbb{N}^+$.
- C_i je vsota premij, ki jih zavarovatelj dobi na začetku časa i in zadošča naslednjim pogojem:

$$\begin{aligned} &P(C_{n+1} = c \mid X_n = 0) = 0; \quad P(C_{n+1} = \theta c \mid X_n = 0) = 1; \\ &P(C_{n+1} = c \mid X_n > 0) = 1; \quad P(C_{n+1} = \theta c \mid X_n > 0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

  kjer je θ konstanta, $\theta \in [0, 1)$ in c konstanta, ki določa celotno premijo (premijo v najvišjem razredu). V našem primeru lahko rečemo, da je c izhodiščna premija, θc pa diskontirana premija.

To pomeni, da če v času n ni bilo škodnega zahtevka, bo zavarovalnica zaračunala nižje premije zavarovancem v naslednjem časovnem obdobju. Vkolikor do škodnega zahtevka pride, pa morajo imetniki polic plačati celotno premijo ob obnovitvi.

Predpostavimo, da se škodni zahtevek zgodi z verjetnostjo p in ne zgodi z verjetnostjo $q = 1 - p$, kjer je $0 < p < 1$. Predpostavimo še, da ima škodni zahtevek, vkolikor se zgodi vedno višino 1. Torej:

$$X_i = \begin{cases} 0; 1-p \\ 1; p \end{cases} \tag{3}$$

Naš model bi lahko opisali s prehodno matriko

Trenutni razred	Premijska stopnja %	Nov razred po št. škodnih zahtevkov	
		0	≥ 1
0	100	1	0
1	θ	1	0

TABELA 4. Tabele prehodnih pravil in premijskih stopenj za naš model.

i / j	0	1
0	p	1-p
1	p	1-p

TABELA 5. Tabela prehodnih verjetnosti za naš model.

Vidimo lahko, da je naš model močno poenostavljen, vendar bo zadostoval za prikaz vpliva opazovanih spremenljivk (c, θ, p) na verjetnost propada.

Kot smo že videli ima višina presežka zavarovatelja, ki ima konstanten začetni presežek u obliko

$$U_n = u + \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4}$$

Zanima nas verjetnost, da ta zavarovateljev presežek sčasoma pade po ničlo (kar povzroči bankrot firme). To verjetnost končnega propada označimo z $\psi(u)$ in jo definiramo

$$\psi(u) = P(T < \infty), \tag{5}$$

kjer je T čas propada.

Verjetnost končnega propada je torej verjetnost, da je čas propada končen.

Čas propada definiramo na sledeč način:

$$T = min\{n \in \mathbb{N}^+ : u + c + \sum_{i=2}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} X_i < 0\} \tag{6}$$

V formuli smo upoštevali, da se za nov zavarovalni portfelj v prvem obdobju zaračuna celotna premija ($C_1 = c$). Čas propada je torej prvi čas n, ko zavarovateljev presežek pade pod 0.

Pomembno je, da zavarovalnica v vsakem obdobju dobi več kot da. Pogoju, ki zagotavlja varnost rečemo varnostni dodatek in ima obliko:

$$p < \frac{\theta c}{1 - (1 - \theta)c} \tag{7}$$

Zavarovalnica mora torej višino izhodiščne in diskontirane premije izbrati tako, da bo zgornji pogoj izpolnjen.

V realnem življenju je seveda težko najti vejretnost p, torej verjetnost, da se škodni dogodek zgodi. Naš model je močno poenostavljen tudi zaradi predpostavke, da imajo vsi škodni zahtevki višino 1.

Izpeljava varnostnega dodatka:

- prihodek zavarovalnice je z verjetnostjo p enak c in z verjetnostjo $1-p$ je enak θc, torej zavarovalnica dobi $pc + (1-p)\theta c$.
- Odhodek/ strošek zavarovalnice je z verjetnostjo p enak 1 in z verjetnostjo $1-p$ enak 0, torej zavarovalnica plača p.

Pogoj, ki zagotavlja, da zavarovalnica dobi več kot da, je tako ena enak:

$$p < pc + (1-p)\theta c \implies p < \frac{\theta c}{1-(1-\theta)c}$$

Če se propad zgodi, potem z $|U_T| = y$ označimo primanjkljaj ob propadu. Vidimo, da je $0 < y \leq 1$, saj je odhodek zavarovalnice v enem časovnem obdobju največ 1. Definiramo

$$\varphi(u,y) = \begin{cases} P(T < \infty, |U_T| = y | U(0) = u), & u \geq 0 \\ \delta_{-u,y}, & u < 0 \end{cases} \tag{8}$$

ki opiše verjetnost, da se propad zgodi in da je primanjkljaj ob propadu enak y, pri čemer je $\delta_{-u,y}$ indikatorska funkcija od $\{-u = y\}$.

Zgornja enačba nam torej pove, da je v primeru, da je konstanten začetni presežek manjši od 0, verjetnost propada enaka 1, primanjkljaj ob propadu pa je enak $|u|$. V primeru, da je u nenegativen, pa je verjetnost propada enaka verjetnosti, da je čas propada končen, primanjkljaj ob propadu pa je po definiciji enak y, $y \in (0,1]$.

5. Izpeljave

Izpeljali bomo rekurzivne formule za verjetnost propada. Uporabimo Markov model tveganja kjer stanje homogene markovske verige v kateremkoli danem času določi pripadajočo višino zahtevka. V našem modelu imamo prav tako 2 stanji glede na višino premije, zato lahko uporabimo isti model.

Upoštevajoč prvo časovno obdobje dobimo rekurzivno formulo

$$\psi(u) = q\psi(u+\theta c) + p\psi(u+c-1) \tag{9}$$

Razlaga formule:

- Če v prvem časovnem obdobju ni škodnega zahtevka (to se zgodi z verjetnostjo $q = 1-p$), potem je zavarovateljev dobiček enak $U_1 = u + c$, višina premij, ki jih zavarovatelj dobi v 2. obdobju pa je enaka $C_2 = \theta c$, kar je enako, kot če bi bili spet v prvem obdobju, začetni presežek pa bi bil enak $u + \theta c$.
- Če je v prvem časovnem obdobju prišlo do škode (to se zgodi z verjetnostjo p), potem je $U_1 = u + c$, $X_1 = 1$ in $C_2 = c$. To je enako, kot če bi v prvem obdobju imeli začetni presežek enak $u + c - 1$.

Uporabimo rekurzijo, torej
$\psi(u)$= q*(nov začetni presežek če ni škode) + p*(začetni presežek če je škoda 1) $\implies$
$\psi(u) = q\psi(u+\theta c) + p\psi(u+c-1)$

Opazujemo 2 vrednosti za u:

- Če $0 \leq u < 1-c$: potem je $\psi(u+c-1)=1$, saj je $u+c-1<0$ $\Longrightarrow \psi(u)-q\psi(u+\theta c)=p$.
- Če $u \geq 1-c$: potem je $\psi(u)-q\psi(u+\theta c)=p\psi(u+c-1)$.

Če ti dve enačbi združimo in naredimo substitucijo $u+\theta c \to u$ dobimo

$$\psi(u)=\begin{cases}\frac{1}{q}[\psi(u-\theta c)-p], & \theta c \leq u < 1-(1-\theta)c \\ \frac{1}{q}[\psi(u-\theta c)-p\psi(u+(1-\theta)c-1)], & u \geq 1-(1-\theta)c\end{cases} \tag{10}$$

Da bi se izognili računanju z necelimi števili predpostavimo, da je $c=\frac{K_1}{N}$ in $\theta c=\frac{K_2}{N}$, kjer so K_1, K_2 in N pozitivna cela števila in $N \gg K_1 \geq K_2$, $N>1$ in njihov največji skupni delitelj je 1.

Ko vstavimo nove spremenjivke, varnostni dodatek postane $p<\frac{K_2}{N+K_2-K_1}$.
Predpostavimo še, da je u večkratnik $\frac{1}{N}$.
Nato vpeljemo novo spremenljivko $\xi(k)$, za katero velja $\xi(k)=\psi(\frac{k}{N})$. To vstavimo v enačbo 10 (uporabimo $\psi(\frac{k}{N}) \to \xi(k)$) in dobimo enačbo:

$$\xi(k)=\begin{cases}\frac{1}{q}[\xi(k-K_2)-p], & K_2 \leq k < K_2+N-K_1 \\ \frac{1}{q}[\xi(k-K_2)-p\xi(k-K_2-N+K_1)], & k \geq K_2+N-K_1\end{cases} \tag{11}$$

Iz zgornje enačbe za $K_2 \leq k \leq K_2+N-K_1-1$ z uporabo rekurzije in formule za vsoto končne geometrijske vrste, za $\xi(i), i=0,1,\ldots,K_2-1$ dobimo enačbo:

$$\xi(k)=\frac{\xi(i)+q^j-1}{q^j}=1-\frac{1}{q^j}[1-\xi(i)]. \tag{12}$$

Pri tem sta i in j ostanek in kvocient pri deljenju k s K_2, t.j. $k=i+jK_2, 0 \leq i \leq K_2-1, j \geq 1$.
Za $k \geq K_2+N-K_1$ izračunamo $\xi(k)$ rekurzivno z uporabo prvega dela formule 11.

6. Začetne vrednosti $\psi(u)$

Za končne izračune moramo določiti še začetne vrednosti $\xi(i), i=0,1,\ldots,K_2-1$. Brez začetnih vrednosti namreč ne moremo priti do končnih rezultatov.

Predpostavimo, da je $nK_2 > K_2+N-K_1$.
Naj bosta J_1 in I_1 kvocient in ostanek pri deljenju K_2+N-K_1-1 s K_2.
Dodati moramo še en pogoj: $N-K_1$ je večkratnik K_2. Torej $N-K_1=J_1K_2$. Iz tega sledi, da je $I_1=K_2-1$.

Sedaj računamo:

$$\begin{aligned}
&\xi(nK_2) - \xi(0) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} [\xi(jK_2) - \xi((j-1)K_2)] = \\
&= \sum_{j=1}^{J_1} p[\xi(jK_2) - p] + \sum_{j=J_1+1}^{n} [p\xi(jK_2) - p\xi((j-1)K_2 + K_1 - N)] = \\
&= p\sum_{j=1}^{n} \xi(jK_2) - p\sum_{j=0}^{n-J_1-1} \xi(jK_2) - pJ_1 = \\
&= p\sum_{j=n-J_1}^{n} \xi(jK_2) - p\xi(0) - pJ_1.
\end{aligned}$$

Ko gre $u \to \infty$, torej konstantni začetni presežek neomejeno raste, gre verjetnost propada $\xi(u)$ proti 0.
Če v enačbi 13 pošljemo $n \to \infty$, gresta $\xi(nK_2)$ in $\sum_{j=n-J_1}^{n} \xi(jK_2)$ proti 0.

Ko gre $n \to \infty$ zgornja enačba tako postane

$$-\xi(0) = -p\xi(0) - pJ_1$$

in dobimo

$$\xi(0) = \frac{pJ_1}{1-p}.$$

Zaradi varnostnega dodatka vemo, da je pJ_1 manjši od $1-p$, zato vemo, da je $\xi(0)$ manj kot 1.

Podobno za $i = 1, 2, \ldots, K_2 - 1$ vemo, da drži $J_1K_2 + i \leq K_2 + N - K_1 - 1$.

Sedaj računamo:

$$\begin{aligned}
&\xi(nK_2 + i) - \xi(i) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} [\xi(jK_2 + i) - \xi((j-1)K_2) + i] = \\
&= \sum_{j=1}^{J_1} p[\xi(jK_2) - p] + \sum_{j=J_1+1}^{n} [p\xi(jK_2) - p\xi((j-1)K_2 + K_1 - N)] = \\
&= p\sum_{j=n-J_1}^{n} \xi(jK_2 + i) - p\xi(i) - pJ_1.
\end{aligned}$$

Ko gre $n \to \infty$ dobimo

$$\xi(i) = \frac{pJ_1}{1-p},$$

kar je isto kot $\xi(0)$.
Torej vidimo, da je, za $j \in \mathbb{N}$

$$\xi(jK_2) = \xi(1 + jK_2) = \cdots = \xi(K_2 - 1 + jK_2)$$

Ker je $\xi(k)$ ekvivalenten $\psi(\frac{k}{N})$ smo izračunali vse vrednosti, ki jih potrebujemo za izračun verjetnosti propada $\psi(u)$.

Opombe

- Da smo določili začetne vednosti $\xi(i), i = 0, 1, \dots, K_2 - 1$, smo predpostavili, da je $N - K_1$ večkratnik K_2. Ta predpostavka nekaj omejitev pri izbiri N, K_1 in K_2. Ker pa je običajno N veliko večji od K_1 in K_2 imamo nekaj svobode pri izbiri primernih N, K_1 in K_2 za realni problem. Običajno lahko uporabimo števila, ki so čim bližja našim pričakovanjem. To bo sicer povzročilo nekaj netočnosti pri končnih rezultatih, ampak formule bodo vseeno priskrbele pravilne informacije o tem kako diskontirane premije vplivajo na splošno verjetnost propada.
- Preprost primer kako izberemo N, K_1 in K_2:
  - Če vemo, da je največja višina škode (v našem modelu je ta vedno enaka 1) okoli 100- krat večja od celotne premije in da zavarovatelj razmišlja o 10% popustu (θ=0,9), potem je $N = 1000, K_1 = 10$ in $K_2 = 9$ in smo zadostili pogoju.
  - Za 15% popust (θ=0,85), lahko uporabimo $N = 2009, K_1 = 20$ in $K_2 = 17$. Velikost škode je približno 100 krat (100,45) večja od polne premije.
- Poseben primer je, ko je $K_2 = 1$, kar pomeni, da je diskontirana premija θc enaka $\frac{1}{N}$ in celotna premija je večkratnik diskontirane. To lahko močno poenostavi vse prejšnje rezultate, po drugi strani pa pokrije le nekaj možnih popustov na premijo torej $\theta = 1, 0.5, 0.33, 0.25, \dots$. V realnem življenju je do 20% popust na premijo pod določenimi pogoji dokaj običajen, vendar pa je popust nad 60% zelo redek, zato temu primeru ne bomo posvečali posebne pozornosti.

7. Vpliv spremenljivih premij na $\psi(u)$

7.1. **Algoritem za izračun verjetnosti propada.** V prejšnjih poglavjih smo razvili algoritem za izračun $\xi(k), k \in \mathbb{N}$, ki je sledeč:

(1) Izračunamo J_1, j_k, i_k, kjer je $J_1 = \frac{N-K_1}{K_2}$ in j_k, i_k sta kvocient in ostanek pri deljenju k s K_2 ($k = j_k K_2 + i_k$).

(2) Izračunamo $\xi(k)$ po sledeči formuli:

$$\xi(k) = \begin{cases} 1 - \frac{q-J_1 p}{q^{j_k+1}}, & 0 \le j_k \le J_1 \\ \frac{1}{q}\xi(k-K_2) - \frac{p}{q}\xi(k-(J_1+1)K_2), & j_k \ge J_1 + 1 \end{cases} \tag{13}$$

(3) V zgornji enačbi drugi del izračunamo rekurzivno.

Z zgornjim algoritmom, lahko verjetnost propada $\psi(\frac{k}{N})$ izračunamo za katerikoli dani $k \in \mathbb{N}$.

Opomba Vemo, da je za vsak $i = 0, 1, \dots, K_2 - 1$ in $j \in \mathbb{N}$

$$\xi(i + jK_2) = \xi(jK_2)$$

in

$$\xi(jK_2) = \begin{cases} 1 - \frac{q-J_1 p}{g^{j+1}}, & 0 \le j \le J_1 \\ \frac{1}{q}\xi((j-1)K_2) - \frac{p}{q}\xi((j-J_1-1)K_2), & j \ge J_1 + 1 \end{cases} \tag{14}$$

7.2. **Uporaba izračunov na primerih.** Sedaj bomo preučili vpliv premijskega popusta na končno verjetnost propada $\psi(u)$ skozi dva numerična primera. Videli bomo kako se verjetnost propada spremeni z različno višino popusta na premije pod predpostavkami našega modela.

Primer 1 Imamo naslednjih 5 primerov:

(1) $N = 4000, K_1 = 40, K_2 = 33, p = 0,008$;
(2) $N = 2009, K_1 = 20, K_2 = 17, p = 0,008$;
(3) $N = 1000, K_1 = 10, K_2 = 9, p = 0,008$;
(4) $N = 1996, K_1 = 20, K_2 = 19, p = 0,008$;
(5) $N = 100, K_1 = 1, K_2 = 1, p = 0,008$.

Vsi te primeri imajo enako škodno porazdelitev (p) in enako celotno premijo ($c = 0,01$). Nekatere vrednosti, ki nas zanimajo so povzete v tabeli 6.

Primer	c	θ	$E[X_1]$	$E[C_n]$	$\frac{E[C_n]}{E[X_n]} - 1$	J_1
1	$0,01$	$0,825$	$0,008$	$0,008264$	$3,30\%$	120
2	$0,01$	$0,85$	$0,008$	$0,008474$	$5,93\%$	117
3	$0,01$	$0,90$	$0,008$	$0,009008$	$12,60\%$	110
4	$0,01$	$0,95$	$0,008$	$0,009523$	$19,04\%$	104
5	$0,01$	1	$0,008$	$0,01$	$25,00\%$	99

Tabela 6. Nekaj vrednosti za Primer 1.

Razlaga parametrov tabele:

- Celotna premija c je enaka $\frac{K_1}{N}$.
- Popust na premijo θ izračunamo kot $\frac{K_2}{K_1}$.
- X_1 je Bernoullijevo s parametrom p porazdeljena slučajna spremenljivka, zato je $E[X_1]$ kar enako p.
- Pričakovana premija $E[C_n]$ je enaka $pc + (1 - p)\theta c$.
- Varnostni dodatek $\frac{E[C_n]}{E[X_n]} - 1$, nam pove za kakšen delež bi lahko povečali odhodke, da bi še vedno zadostili varnostnemu pogoju.
- J_1 je kvocient pri deljenju $K_2 + N - 1$ s K_2, ki je zaradi predpostavke, da je $N - K_1$ večkratnik K_2, enak $J_1 = \frac{N-K_1}{K_2}$

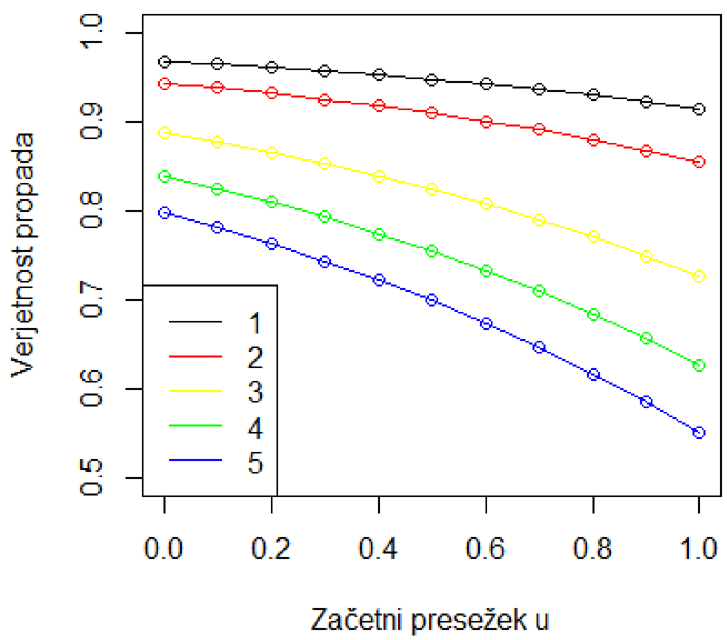
Očitna razlika med zgornjimi petimi primeri je varnostni dodatek (v stolpcu označen z $\frac{E[C_n]}{E[X_n]} - 1$). Vidimo da ta močno narašča od primera 1 do primera 5.

V spodnji tabeli so verjetnosti propada $\psi(u)$, za izbrane vrednosti u. Število i pri $\psi^{(i)}$ nam pove, za katerega od zgornjih primerov računamo verjetnost propada. Kljub temu, da večina vrednosti u ni velikih, je število korakov, ki jih potrebujeo za izračun verjetnosti propada ogromno. Na primer za izračun $\psi^{(1)}(10)$ potrebujemo več kot 1200 korakov.

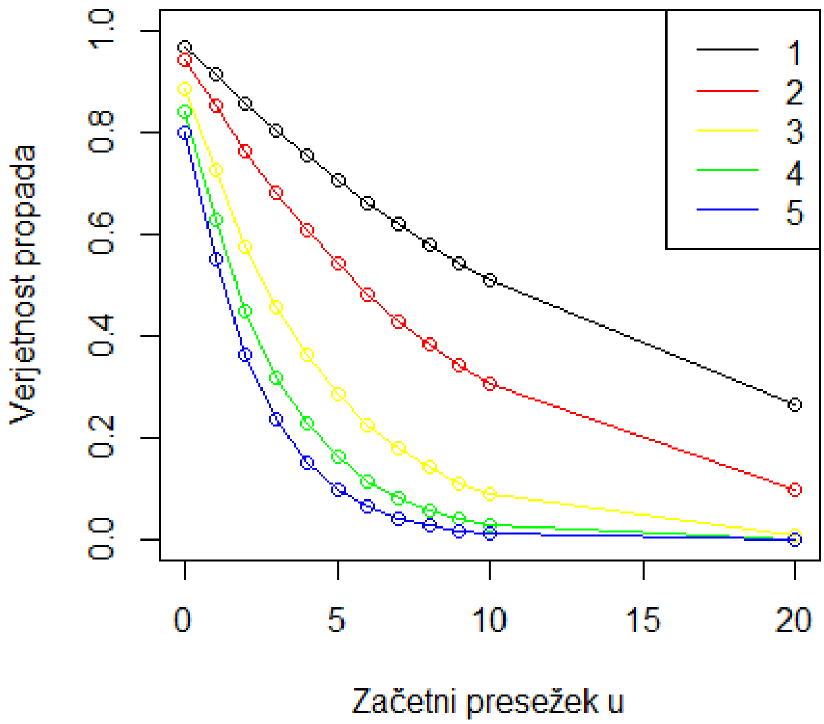
u	$\psi^{(1)}(u)$	$\psi^{(2)}(u)$	$\psi^{(3)}(u)$	$\psi^{(4)}(u)$	$\psi^{(5)}(u)$
0.0	0.9677	0.9435	0.8871	0.8387	0.7984
0.1	0.9645	0.9383	0.8767	0.8252	0.7815
0.2	0.9609	0.9321	0.8653	0.8091	0.7633
0.3	0.9569	0.9252	0.8528	0.7931	0.7435

0.4	0.9526	0.9177	0.8392	0.7740	0.7220
0.5	0.9478	0.9101	0.8244	0.7551	0.6987
0.6	0.9425	0.9009	0.8082	0.7325	0.6735
0.7	0.9367	0.8909	0.7904	0.7101	0.6462
0.8	0.9303	0.8799	0.7711	0.6833	0.6167
0.9	0.9232	0.8677	0.7499	0.6568	0.5846
1	0.9150	0.8548	0.7255	0.6264	0.5515
1.5	0.88706	0.8099	0.6510	0.5355	0.4513
2	0.8586	0.7640	0.5771	0.4492	0.3616
2.5	0.8313	0.7215	0.5140	0.3795	0.2913
3	0.8044	0.6811	0.4565	0.3193	0.2344
3.5	0.7784	0.6430	0.4063	0.2695	0.1885
4	0.7536	0.6070	0.3608	0.2267	0.1517
4.5	0.7293	0.5731	0.3211	0.1914	0.1221
5	0.7060	0.5410	0.2852	0.1610	0.0982
6	0.6611	0.4822	0.2255	0.1144	0.0636
7	0.6194	0.4293	0.1782	0.0812	0.0412
8	0.5802	0.3826	0.1409	0.0577	0.0266
9	0.5436	0.3410	0.1114	0.0410	0.0172
10	0.5093	0.3039	0.0879	0.0291	0.0112
20	0.2648	0.0959	0.0084	0.0010	0.0001

Tabela 7: Nekaj vrednosti $\psi(u)$za Primer 1.



SLIKA 1. Graf verjetnosti propada za Primer 1 za $u \in [0, 1]$



SLIKA 2. Graf verjetnosti propada za Primer 1 za $u \in [0, 20]$

Ugotovitve na podlagi zgornjih tabel in grafov:

- Opazimo, da se verjetnosti propada, kljub temu, da so škodne porazdelitve v vseh petih primerih enake, močno razlikujejo. To je opazno že pri manjših vrednostih konstantnega začetnega presežka u, pri večjih pa se verjetnosti propada med temi petimi primeru razlikujejo celo za skoraj 0.5.
- Vidimo, da ima prvi primer pri vseh vrednostih u največjo verjetnost propada, zadnji pa najmanjšo. Vemo, da ima primer 5 tudi najnižjii popust na premijo, primer 1 pa najvišjega.
- Opazimo, da je verjetnost propada konsistentna s trendom varnostnega dodatka teh petih primerov, kar je če opravimo kratek razmislek povsem logično. Manjši kot je dodatek, bližje smo meji za katero varnostni pogoj še zagotavlja pozitivne prihodke zavarovalnice v vsakem časovnem obdobju. Večji kot je varnostni dodatek, bolj smo od te meje oddaljeni, kar pomeni, da si zavarovalnica lahko privošči večje izgube, pa njen presežek v danem obdobju vseeno ostane nenegativen.
- Iz zgornjih grafov je razvidno tudi, da z rastjo vrednosti konstantnega začetnega presežka u, razlika med verjetnostmi propada za posamezen primer narašča. Vidimo tudi, da ta razlika verjetnosti propada med zgornjimi petimi primeri raste hitreje kot razlika med popusti na premijo (θ).

Na podlagi zgornjega primera, bi lahko sklepali, da je verjetnost propada odvisna od varnostnega dodatka in da le ta močno vpliva na razliko med verjetnostmi propada za različne primere. Prav tako bi na podlagi zgornjih rezultatov lahko sklepali, da je razlika verjetnosti propada med primeri konsistenta z razliko med popusti na premijo. Naša predvidevanja bomo preverili na še enem primeru, podobneu zgornjemu, z nekaj spremenjenimi vrednostmi, ki so prilagojene tako, da je varnostni dodatek pri vseh petih primerih približno enako visok.

Primer 2 Imamo enake primere kot prej, spremenjene so verjetnosti za škode:
(1) $N = 4000, K_1 = 40, K_2 = 33, p = 0,0075;$
(2) $N = 2009, K_1 = 20, K_2 = 17, p = 0,0077;$
(3) $N = 1000, K_1 = 10, K_2 = 9, p = 0,0082;$
(4) $N = 1996, K_1 = 20, K_2 = 19, p = 0,00887;$
(5) $N = 100, K_1 = 1, K_2 = 1, p = 0,0091.$

Opazimo, da celotna premija in popust ostajajo isti, razlikujejo se škodne porazdelitve, tako da je varnostni dodatek približno enak (pri vsem primerih je okoli 10%). V naslednji tabeli so, kot v prvem primeru, prikazane nekatere pomembne vrednosti:

Primer	c	θ	$E[X_1]$	$E[C_n]$	$\frac{E[C_n]}{E[X_n]} - 1$	J_1
1	$0,01$	$0,825$	$0,0075$	$0,008264$	$10,19\%$	120
2	$0,01$	$0,85$	$0,0077$	$0,008474$	$10,05\%$	117
3	$0,01$	$0,90$	$0,0082$	$0,009008$	$9,85\%$	110
4	$0,01$	$0,95$	$0,0087$	$0,009523$	$9,46\%$	104
5	$0,01$	1	$0,0091$	$0,01$	$0,89\%$	99

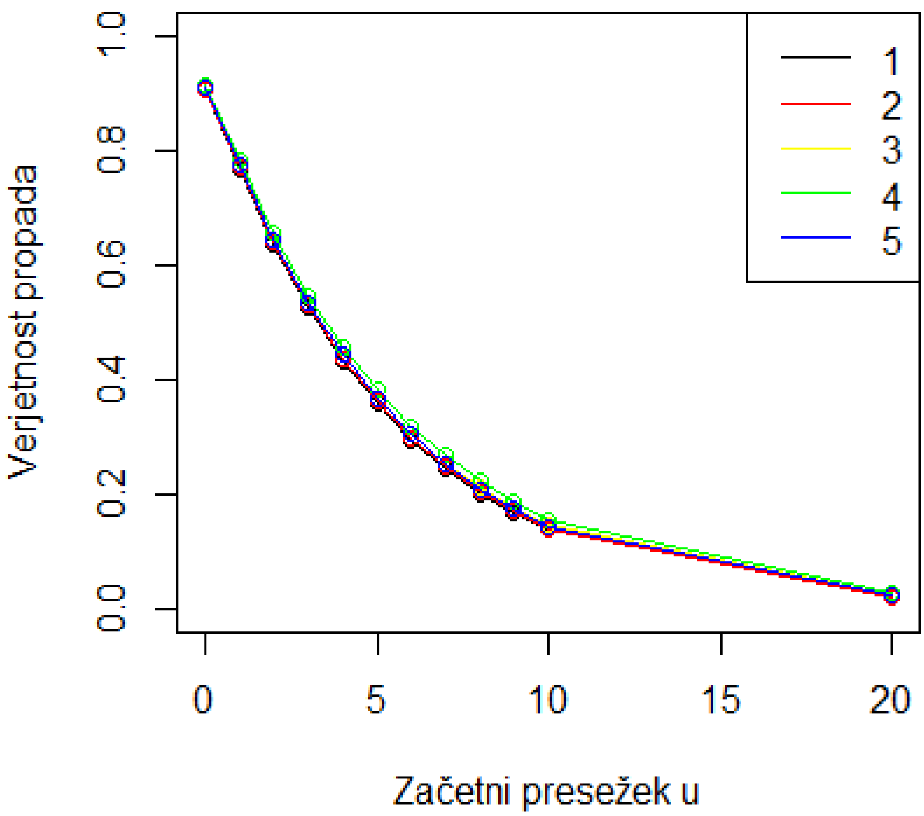
Tabela 8. Nekaj vrednosti za Primer 2.

Poglejmo si še tabelo verjetnosti propada, za posamezen primer pri različnih vrednosti konstantnega začetnega presežka u.

u	$\psi^{(1)}(u)$	$\psi^{(2)}(u)$	$\psi^{(3)}(u)$	$\psi^{(4)}(u)$	$\psi^{(5)}(u)$
0	0.9068	0.9079	0.9095	0.9127	0.9092
0.1	0.8980	0.8997	0.9009	0.9048	0.9005
0.2	0.8883	0.8900	0.8915	0.8952	0.8910
0.3	0.8778	0.8793	0.8812	0.8856	0.8805
0.4	0.8662	0.8675	0.8699	0.8741	0.8691
0.5	0.8536	0.8547	0.8576	0.8625	0.8565
0.6	0.8397	0.8418	0.8441	0.8487	0.8428
0.7	0.8246	0.8264	0.8293	0.8349	0.8278
0.8	0.8080	0.8095	0.8131	0.8182	0.8113
0.9	0.7883	0.7910	0.7937	0.8016	0.7932
1	0.7690	0.7714	0.7749	0.7824	0.7742
1.5	0.7034	0.7058	0.7108	0.7199	0.7093
2	0.6374	0.6408	0.6459	0.6565	0.6449
2.5	0.5787	0.5830	0.5890	0.6008	0.5874
3	0.5259	0.5300	0.5360	0.5486	0.5348
3.5	0.4772	0.4819	0.4885	0.5018	0.4869
4	0.4338	0.4382	0.4446	0.4582	0.4434

4.5	0.3936	0.3984	0.4045	0.4192	0.4037
5	0.3572	0.3622	0.3688	0.3828	0.3675
6	0.2946	0.2990	0.3059	0.3197	0.3047
7	0.2430	0.2472	0.2537	0.2671	0.2526
8	0.2004	0.2043	0.2105	0.2231	0.2094
9	0.1653	0.1689	0.1743	0.1863	0.1736
10	0.1361	0.1397	0.1446	0.1557	0.1439
20	0.0198	0.0208	0.0223	0.0257	0.0220

Tabela 9: Nekaj vrednosti $\psi(u)$za Primer 2.



Slika 3. Graf verjetnosti propada za Primer 1 za $u \in [0, 20]$

Ugotovitve na podlagi tabel in grafov:

- Ko primerjamo tabele in grafe za primer 1 in 2, brez težav opazimo da so rezultati popolnoma različni.
- V primeru 2, se verjetnosti propada med našimi petimi primeri za posamezen konstanten začetni presežek u ne razlikujejo močno. Pravzaprav so si zelo

podobne, kar je zelo lepo vidno iz grafa 3, kjer se verjenosti propada za posamezen primer skoraj popolnoma prekrivajo.

- Vidimo, da pod našimi predpostavkami, razlika verjetnosti propada med našimi petimi primeri, ne pada oziroma raste konsistentno z razliko diskontnih stopenj. Vendar vidimo, da je trend med verjetnostmi propada, podobno kot v prvem primeru, konsistenten z varnostnimi dodatki za posamezen primer. Opazimo, da verjetnost propada narašča, ko varnostni dodatek pada.

8. Primanjkljaj ob propadu

Za konec si poglejmo še nekaj izpeljav, s katerimi bi lahkoi izračunali primanjkljaj ob propadu. Zanima nas funkcija $\varphi(u, y)$, verjetnost, da se propad zgodi in da je primanjkljaj ob propadu enak $y, y > 0$. Pod istimi predpostavkami kot prej, torej $c = \frac{K_1}{N}, \theta c = \frac{K_2}{N}$, u je večkratnik $\frac{1}{N}$ in $N - K_1 = J_1 K_2$, vemo, da je za vsak možni primanjkljaj y tudi večkratnik $\frac{1}{N}$ in $y = \frac{z}{N}, z = 1, 2, \ldots, N - K_2$. Vidimo, da za $u \geq 0$ velja:

$$\psi(u) = \sum_{z=1}^{N-K_2} \varphi(u, \frac{z}{N}) \tag{15}$$

Vemo, da je $y > 0$. Upoštevajoč prvo časovno obdobje dobimo sledečo formulo za $\psi(u, y)$:

$$\varphi(u, y) = q\varphi(u + \theta c, y) + p\varphi(u + c - 1, y). \tag{16}$$

Zgornjo enačbo smo izpeljali na enak način kot enačbo 9.

V primeru, da je $0 \leq u < 1 - c$ je primanjkljaj ob propadu enak kar $u + c - 1$. Podobno kot pri izpeljavi za $\psi(u)$ tako izpeljemo naslednjo enačbo:

$$\varphi(u, y) - q\varphi(u + \theta c, y) = \begin{cases} p\delta_{u+c-1,-y}, & 0 \leq u < 1 - c \\ p\varphi(u + c - 1, y), & u \geq 1 - c, \end{cases} \tag{17}$$

pri čemer še vedno velja, da je $\delta_{-u,y}$ indikatorska funkcija od $\{-u = y\}$.

Naj bo $y = \frac{z}{N}$. Vpeljimo $\eta(k|z) = \varphi(\frac{k}{N}, \frac{z}{N})$. Potem je:

$$\eta(k|z) - q\eta(k + K_2|z) = \begin{cases} p\delta_{N-K_1-k,z}, & 0 \leq k < N - K_1 \\ p\eta(k + K_1 - N|z), & k \geq N - K_1 \end{cases} \tag{18}$$

Zgornjo formulo lahko uporabimo za izračun $\varphi(u, y)$, če so za vsak z, znane začetne vrednosti $\eta(0|z), \ldots, \eta(K_2 - 1|z)$. Začetne vrednosti poskusimo izračunati kot v poglavju 6.

Naj bo $nK_2 > K_2 + N - K_1$. Računamo:

$$
\begin{aligned}
&\eta(nK_2|z) - \eta(0|z) = \\
&= \sum_{j=1}^{n}[\eta(jK_2|z) - \eta((j-1)K_2|z)] = \\
&= p\sum_{j=1}^{J_1}[\eta(jK_2)|z) - \delta_{z,(J_1-j+1)K_2}] + p\sum_{j=J_1+1}^{n}[\eta(jK_2|z) - \eta((j-1-j_1)K_2|z)] = \\
&= p\sum_{j=1}^{n}[\eta(jK_2)|z) - p\sum_{j=0}^{n-J_1-1}[\eta(jK_2)|z) - p\sum_{j=1}^{J_1}\delta_{z,(J_1-j+1)K_2} = \\
&= p\sum_{j=n-J_1}^{n}\eta(jK_2|z) - p\eta(0|z) - p\sum_{j=1}^{n}\delta_{z,(J_1-j+1)K_2}.
\end{aligned}
$$

S podobnim razmislekom kot pri računanju začetnih vrednosti za verjetnost propada vidimo, da ko gre $u \to \infty$, gre $\varphi(u, y)$ proti 0. Torej, ko gre $n \to \infty$, zgornja enačba postane

$$
\eta(0|z) = p\eta(0|z) + p\sum_{j=1}^{J_1}\delta_{z,(J_1-j+1)K_2}. \tag{19}
$$

Naj bosta i_z in j_z ostanek in kvocient pri deljenju z s K_2. Vidimo, da samo ko je $i_z = 0$ in ko $j_z \leq J_1$, je $\sum_{j=1}^{J_1}\delta_{z,(J_1-j+1)K_2} = 1$. Sicer je $\sum_{j=1}^{J_1}\delta_{z,(J_1-j+1)K_2} = 0$. Lahko pokažemo, da če velja $K_1 < 2K_2$ (t.j. $\theta > 0,5$), potem je $N - K_2 = N - K_1 + K_1 - K_2 = J_1K_2 + K_1 - K_2$, iz česar sledi, da je $j_z \leq J_1$. Če je $\theta \leq J_1$, potem ni vedno res, da je $J_z \leq J_1$.

Iz teh ugotovitev sledi:

$$
\eta(0|z) = \begin{cases} \frac{p}{1-p}, & i_z = 0, j_z \leq J_1 \\ 0, & sicer \end{cases} \tag{20}
$$

Podobno za $i = 1, 2, \ldots, K_2 - 1$ izpeljemo,

$$
\begin{aligned}
&\eta(nK_2 + i|z) - \eta(i|z) = \\
&= \sum_{j=1}^{n}[\eta(jK_2 + i|z) - \eta((j-1)K_2 + i|z)] = \\
&= p\sum_{j=1}^{J_1}[\eta(jK_2 + i)|z) - \delta_{z,(J_1-j+1)K_2+i}] + p\sum_{j=J_1+1}^{n}[\eta(jK_2 + i|z) - \eta((j-1-j_1)K_2 + i|z)] = \\
&= p\sum_{j=1}^{n}[\eta(jK_2 + i)|z) - p\sum_{j=1}^{n-J_1-1}[\eta(jK_2 + i)|z) - p\sum_{j=1}^{J_1}\delta_{z,(J_1-j+1)K_2+i} = \\
&= p\sum_{j=n-J_1}^{n}\eta(jK_2 + i|z) - p\eta(0|z) - p\sum_{j=1}^{J_1}\delta_{z,(J_1-j+1)K_2+i}.
\end{aligned}
$$

Ko gre $u \to \infty$, gre $\varphi(u, y)$ proti 0. Torej, ko spustimo $n \to \infty$, zgornja enačba postane

(21) $$\eta(i|z) = p\eta(i|z) + p\sum_{j=1}^{J_1} \delta_{z,(J_1-j+1)K_2+i}.$$

Podobno kot zgoraj, upoštevajoč vse možnosti i_z in j_z, za $i = 1, 2, \ldots, K_2 - 1$ dobimo

(22) $$\eta(i|z) = \begin{cases} \frac{p}{1-p}, & i_z = 0, j_z \leq J_1 \\ 0, & sicer \end{cases}$$

Vidimo torej, da je, za $j \in \mathbb{N}$:

$$\eta(jK_2|z) = \eta(1 + jK_2|z) = \cdots = \eta(K_2 - 1 + jK_2|z)$$

Z zgornjimi formulami lahko izračunamo $\eta(k|z)$ in posledično še $\varphi(u, y)$.

9. Zaključek

V aktuarstvu se uporabljajo matematični modeli za opis zavarovateljeve ranljivosti do nesolventnosti (plačilne nesposobnosti) oziroma propada. V takih modelih so ključne verjetnosti propada, porazdelitve presežka tik pred propadom in deficit ob propadu. V našem modelu smo podrobneje preučili verjetnost propada in ugotovili, da je ta odvisna predvsem od varnostnega dodatka. Verjetnost propada narašča, ko varnostni dodatek pada.

Kljub temu, da smo v našem modelu stvari precej poenostavili in uporabili nekatere predpostavke, zaradi katerih bi model težko uporabili na podatkih iz realnega življenja, nam dajo naše ugotovitve vseeno neko idejo o tem od česa je verjetnost propada odvisna. V našem modelu smo predpostavili, da je slučajna spremenljivka, ki nam pove ali se škoda zgodi ali ne, Bernoullijevo porazdeljena, kar nam je močno olajšalo izpeljave in računanje. V realnem življenju je te verjetnosti veliko težje določiti, pa tudi škodni zahtevki niso vedno enako visoki, kot smo predpostavili v našem modelu.

Prav tako je računanje verjetnosti propada z našim algoritmom zelo zamudno, saj za večje vrednosti začetnega presežka potrebuje ogromno število korakov za izračun končne verjetnosti propada.

Slovar strokovnih izrazov

insurer zavarovatelj

policyholder zavarovalec, sklenitelj zavarovanja

surplus of the insurer zavarovateljev presežek

initial surplus začetni presežek

surcharge doplačilo

claim amount višina zahtevka

time of ruin čas propada

ruin probability verjetnost propada

deficit at ruin primanjkljaj ob propadu

Literatura

[1] X. Wu, M. Chen, J. Guo, C. Jin, *On a discrete-time risk model with claim correlated premiums* Annals of Actuarial Science **9** (2015), 322-342.

[2] C. Wagner, *A Note on Ruin in a Two State Markov Model* Astin Bull **31** (2001), 349-358.

[3] M. Denuit, X. Marchal, S. Pitrebois, J.F. Walhin, *Actuarial modelling of claim counts: Risk classification, credibility and bonus-malus systems*, John Wiley & Sons Ltd., Anglija, 2007

[4] S. Teodorescu, *The bonus-malus system modelling using the transition matrix* Challenges of the Knowledge Society **2** (2012), 1502-1507.

[5] H. Krašovec, *Angleško-slovenski in slovensko-angleški slovar zavarovalništva*, Pegaz International, Ljubljana, 2006

[6] M. Skernišak, *Bonus - malus sistemi avtoobilskih zavarovanj*, diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru, 2011.

[7] Zavarovalnica Triglav, *Splošni pogoji za zavarovanje avtomobilske odgovornosti,* [20.4.2017], dostopno na `http://www.triglav.si/wps/wcm/connect/1d4d925b-f808-4bf7-8cea-aa1f7f022305/PG-aod-11-7.pdf?`