UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Martin Pezdir

Variacijski problemi v ekonomiji

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Jasna Prezelj

Ljubljana, 2017

Kazalo

Slike

Variacijski problemi v ekonomiji

Povzetek

V delu diplomskega seminarja je opisana analitična metoda za reševanje optimizacijskih problemov - variacijski račun. Ta metoda se je začela razvijati že stoletja nazaj, vendar se je v zadnjem času izkazala za izjemno uporabno tudi na področju ekonomije. Predstavljen je osnovni problem variacijskega računa, podane so tudi posebne oblike variacijskega računa in ustrezne Euler-Lagrangeve enačbe. Opisana in dokazana je Euler-Lagrangeva enačba ter naveden zadosten pogoj za obstoj ekstrema variacijskega računa. Rešeni so tudi primeri iz ekonomije, pri katerih si lahko pomagamo z navedeno teorijo. Uporabljenih je več metod za prileganje na konkretnem primeru cene delnice podjetja Facebook za zadnjih 10 let. Analizirana je metoda, s pomočjo katere bi si lahko pomagali pri investiranju v delnice podjetja Facebook. Opisana je teorija hamiltonske mehanike in hamiltonskih sistemov, s katerimi si pomagamo pri reševanju zahtevnejših problemov.

Calculus of variations and its use in economics

Abstract

In the thesis we discuss an analytic method for solving optimisation problems, namely calculus of variations. This method began its development centuries ago but has proven itself useful also in the field of economics. We start with the simplest problem in calculus of variations and continue with specific cases of problems with their corresponding Euler-Lagrange equations. We proceed with Euler-Lagrange equations and with sufficient condition for existence of an extremum. In the second part we consider economic examples with the help of calculus of variations. Then we use different methods for fitting of price of Facebook stock for the last 10 years. We analyse method which could help with investing in Facebook stock. We describe the theory of hamiltonian mechanics and hamiltonian systems and list their propreties. We use this propreties to solve more complex examples.

Math. Subj. Class. (2010): 91G80, 49-XX, 65P10

Ključne besede: variacijski račun, funkcional, Euler-Lagrangeva enačba, Hessejeva matrika, izoperimetrični problem, investiranje, varčevanje, transverzalnost, linearna regresija, hamiltonski sistem, hamiltonska mehanika.

Keywords: calculus of variations, functional, Euler-Lagrange equation, Hesse matrix, isoperimetric problem, investing, saving, transversality, linear regression, Hamiltonian system, Hamiltonian mechanics.

1. Uvod

Že od zgodnjega otroštva nas učijo, kako pomembno je optimalno načrtovanje v prihodnosti in hitro se naučimo, da naša dejanja danes vplivajo na potek dogodkov v prihodnosti. Ljudje smo največkrat racionalna bitja, zato stremimo k sprejemanju odločitev, ki nas bodo vodile do najboljšega razvoja dogodkov. Če z našimi dejanji danes ne moremo spremeniti toka dogodkov v prihodnosti, je odločitev preprosta, optimalno se moramo odločiti samo za sedanjost. Toda tak primer se v življenju le redko zgodi in podjetja, finančne inštitucije ter vlagatelji iščejo optimalno pot svojih odločitev skozi čas. Temu se reče problem optimalne kontrole [1]. Razlika med kontrolo in optimalno kontrolo je ta, da se pri optimalni kontroli pojavlja optimizacija skozi čas, torej z večkratnimi popravki naših odločitev. Tak proces odločanja se velikokrat imenuje tudi dinamična optimizacija. Ena izmed analitičnih metod za reševanje takih problemov je tudi variacijski račun.

2. Zgodovina

Začetki variacijskega računa segajo že v daljno leto 1696, ko je Johann Bernoulli zastavil problem brahistokrone (po kakšni poti bo delec z maso najhitreje prišel od točke A do točke B, če nanj deluje gravitacija [2]). Istega leta je Johann Bernoulli tudi sam podal rešitev tega problema. Rešitev problema je podal tudi njegov brat Jacob in v delu Elementa Calculi Variationum dal te veji matematike tudi ime, variacijski račun oziroma « calculus of variatons». Poleg njega sta k variacijskemu računu veliko pripomogla tudi Euler in Lagrange. Največjo uporabnost je variacijski račun dosegel v teoretični fiziki, pa tudi v ekonomiji. V ekonomiji se je začel uporabljati že v začetku 30. let 19. stoletja pod avtorji kot so Roos, Evans, Hotelling in Ramsey [3]. Zares je variacijski račun v ekonomiji postal uporaben šele v 50. letih 19. stoletja, ko je Pontryagin v Rusiji razvil teorijo optimalne kontrole, ki je razširila uporabnost variacijskega računa v ekonomiji. V istem desetletju je Richard Bellman razvil dinamično programiranje kot alternativo variacijskemu računu, ki ima prav tako veliko uporabno vrednost v ekonomiji.

3. Funkcionali

Eden izmed bolj preprostih primerov variacijskega računa, je poiskati tako krivuljo skozi točki $A(x_0, y_0)$ in $B(x_1, y_1)$, da bo dolžina loka krivulje minimalna. V ravnini je rešitev očitna, iščemo daljico skozi točki A in B. Če pa točki ležita na neki ploskvi v prostoru, rešitev ni več tako zelo očitna in lahko se zgodi, da obstaja več možnih rešitev. Izkaže se, da so odgovor na zadnji problem geodetke, ki so v svojem prvotnem smislu bile najkrajše poti med dvema točkama na površini Zemlje. Izkaže se torej, da je osnovna naloga variacijskega računa poiskati neznano funkcijo, pri kateri druga funkcija doseže ekstrem. Variacijski račun je na nek način podoben iskanju ekstrema funkcije, ki ga, če je funkcija «lepa», lahko poiščemo kar z odvajanjem naše funkcije. Vendar pa je variacijski račun težak problem, saj moramo poiskati neko funkcijo iz prostora vseh možnih funkcij, ki pa je neskončnorazsežen. Variacijski račun se torej ukvarja s funkcionali in da bomo bolje razumeli pojem variacijskega računa, si najprej poglejmo kaj funkcionali so.

Funkcionali so funkcije, ki slikajo iz vektorskih prostorov v svoja polja skalarjev. Primer funkcionala je na primer linearni funkcional. Če je V nek vektorski prostor nad obsegom O, potem je linearna preslikava $L \to O$ linearni funkcional. Primer nelinearnega funkcionala je dolžina loka krivulje v prostoru, ki vrne skalar - dolžino loka krivulje. Za nas najbolj pomemben primer funkcionala pa je določeni integral, saj velja da integrali oblike

$$f \to I[f] = \int_\Omega H(f(x), f^{'}(x), \dots)dx$$

tvorijo poseben razred funkcionalov. Integrali take oblike slikajo funkcijo f v realno število, pod pogojem da H zavzame realne vrednosti. Nam najbolj znan primer je iskanje ploščine območja pod grafom funkcije f, $I(f) = \int_K f(x)dx$, kjer je $K \subset \mathbb{R}$.

4. Euler-Lagrangeva diferencialna enačba

Osnovni problem variacijskega računa je oblike:

$$\max_{\{x(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(x, x', t)dt,$$
$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

kjer je definicijsko območje funkcionala J:

$$D = \{x \in C^1([t_0, t_1]), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}.$$

Funkcije, ki pripadajo D imenujemo tudi dopustne funkcije [4].
Izkaže se, da za vsako funkcijo, ki maksimizira zgornji funkcional in ustreza robnim pogojem, velja t.i. Euler-Lagrangeva enačba:

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial I}{\partial x'} = 0.$$

Da pa bi bolje razumeli problem, bomo to enačbo sedaj dokazali.

Naš namen je najti potrebne pogoje, da bo neka funkcija res maksimum tega izraza in v ta namen naš sistem perturbiramo. Denimo, da rešitev obstaja, označimo jo z x. Če je torej x rešitev, se mora vrednost J zmanjšati, če x zamenjamo s katerokoli drugo dopustno funkcijo $z \in D$. Funkcija z je lahko določena kot članica enoparametrične družine funkcij:

$$z = x + \varepsilon\eta,$$

kjer je η vsaj dvakrat zvezno odvedljiva na intervalu $[t_0, t_1]$. Ker mora biti z dopustna, iz $z(t_0) - x(t_0) = z(t_1) - x(t_1) = 0$ sledi, da je $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. Funkcije η torej pripadajo množici:

$$D_0 = \{\eta \in C^1([t_0, t_1]), \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0\}.$$

Če torej η in rešitev x vzamemo za dani, potem naš parameter η meri razliko med rešitvijo x in funkcijo z in velja:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z(t, \varepsilon) = x.$$

V tem primeru velja:

$$F(\varepsilon) = J(x + \varepsilon\eta) = \int_{t_0}^{t_1} I(x + \varepsilon\eta, x' + \varepsilon\eta', t)dt.$$

Ker smo predpostavili, da je x rešitev našega osnovnega variacijskega računa velja, da ima $F(x)$ maksimum za $\varepsilon = 0$, torej:

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0$$

Sedaj smo prišli do ključnega koraka v našem izpeljevanju potrebnih pogojev za obstoj maksimuma našega funkcionala. Uvedemo oznaki za lepšo preglednost, $z = x + \varepsilon\eta$ in $z' = x' + \varepsilon\eta'$ in dobimo:

$$F(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} I(z, z', t)dt.$$

V naslednjem koraku odvajamo integral s parametrom in dobimo:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial I}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \varepsilon}\right)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\eta + \frac{\partial I}{\partial x'}\eta'\right)dt.$$

Nato za $\varepsilon = 0$ dobimo:

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\eta + \frac{\partial I}{\partial x'}\eta'\right)dt = 0$$

Izračunajmo $\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial I}{\partial x'}\eta'\right) dt$ s pomočjo integracije po delih:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial I}{\partial x'}\eta'\right) dt = \left[\frac{\partial I}{\partial x'}\eta\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial I}{\partial x'}\right) dt = -\int_{t_0}^{t_1} \eta \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial I}{\partial x'}\right) dt,$$

ker $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. Končno dobimo:

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \eta \left(\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial I}{\partial x'}\right) dt = 0.$$

Opomba 4.1. V primeru, ko v krajiščih nimamo fiksnih vrednosti, recimo zgornja meja je ∞, še vedno zahtevamo, da je $\left[\frac{\partial I}{\partial x'}\eta\right]_{t_0}^{t_1} = 0$, vendar to pomeni, da mora biti $\frac{\partial I}{\partial x'} = 0$ v krajišču, ki nima pogoja. Tak pogoj imenujemo transverzalnostni pogoj in pride v poštev pri problemih na neomejenih območjih. Primer uporabe bomo spoznali v nadaljevanju.

Sedaj si pomagamo z naslednjo lemo:

Lema 4.2. *Naj bo $g \in C([a, b])$, a, $b \in \mathbb{R}$, za katero velja, da je $\int_a^b g(x)h(x)dx = 0$ za $\forall h \in D$. Potem je $g \equiv 0$.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da $g \not\equiv 0$. Torej obstaja $c \in (a, b)$, da je $g(c) \neq 0$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $g(c) > 0$. Zaradi zveznosti je g pozitivna tudi na nekem intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.
Naš cilj je najti tako funkcijo h, da bo veljalo:

- $h > 0$ na (α, β),
- $h = 0$ izven (α, β).

Če bomo našli tako funkcijo, bo veljalo: $\int_a^b g(x)h(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)h(x)dx > 0$ in prišli bomo do protislovja. Izkaže se, da je rešitev funkcija, ki dobi obliko "klobučka", definiramo pa jo na naslednji način:

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} e^{(x-\alpha)^2} - 1 & \text{, če } x \geq \alpha \\ 0 & \text{, sicer} \end{cases}$$

in

$$h_\beta(x) = \begin{cases} 0 & , \text{če } x \geq \beta \\ e^{(x-\beta)^2} - 1 & , \text{sicer} \end{cases}.$$

Naša funkcija h pa je:

$$h(x) = h_\alpha(x) h_\beta(x).$$

Iz definicij naših funkcij sledi, da je $h_\alpha(c) > 0$, $h_\beta(c) > 0$. Če definiramo še funkcijo $f(x) := h(x)g(x)$, je f zvezna, $f(x) \geq 0$ in $f(c) > 0$. Ker pa je $\int_a^b g(x)h(x)dx = \int_a^b f(x)dx > 0$, smo prišli do protislovja in dokazali lemo. $\square$

Vrnimo se na dokaz Euler-Lagrangeve enačbe. Želimo, da:

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta \left(\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial x'} \right) dt = 0.$$

Po zgornji lemi mora torej veljati:

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial x'} = 0.$$

To pa je ravno pogoj Euler-Lagrangeve enačbe. Vsaka funkcija, ki zadošča Eulerjevi enačbi in hkrati zadošča tudi robnim pogojem $x(t_0) = x_0$ in $x(t_1) = x_1$, se imenuje ekstremala.

5. Zadosten pogoj za obstoj ekstrema

Zadostni pogoj za obstoj ekstrema si bomo ogledali za primer, ko sta območje in funkcija konveksna. Velja še omeniti, da je funkcija dveh spremenljivk konveksna, če je njena Hessejeva matrika pozitivno oziroma nenegativno definitna.

Izrek 5.1. *Dan je funkcional:*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} I(x, x', t)dt$$
$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

Funkcija I naj bo vsaj dvakrat zvezno odvedljiva po x in x' (spremenljivke x' ne obravnavamo kot odvod ampak kot popolnoma novo spremenljivko). Naj bo definicijsko območje D_I tako, da je množica

$$M_t = \{(x, x'), (t, x, x') \in D_I\}$$

konveksna in funkcija $I(t, \cdot, \cdot)$ konveksna na M_t za vsak t, za katerega je $M_t \neq \emptyset$. Če je x rešitev Eulerjeve enačbe, ki zadošča robnim pogojem, ima I minimum pri x.

6. Različne oblike Euler-Lagrangevih enačb

Obstaja veliko različnih oblik Euler-Lagrangevih enačb, ki so odvisne od oblike funkcionala, ki ga opazujemo. Ogledali si bomo tri najpogostejše oblike Euler-Lagrangevih enačb, od katerih bomo eno tudi uporabili v nadaljevanju na primeru.

6.1. **Izoperimetrični problem.** Ta problem je podoben osnovnemu problemu:

$$F(x) = \int_{t_0}^{t_1} I(x, x', t)dt$$
$$x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1,$$

le da imamo dodano še integralsko vez:

$$G(x) = \int_{t_0}^{t_1} M(x, x', t)dt = C.$$

Naslednjega izreka ne bomo dokazali, vredno pa je omeniti, da si pri izpeljavi pomagamo s teorijo vezanih ekstremov in v ta namen definiramo:

$$F_\lambda = \int_{t_0}^{t_1} \left(I(x, x', t) + \lambda M(x, x', t)\right) dt, \qquad I_\lambda = I(x, x', t) + \lambda M(x, x', t).$$

Izrek 6.1. *Za vsako stacionarno točko x_0 izoperimetričnega problema mora veljati:*

$$(I_\lambda)_x = \frac{d}{dt}(I_\lambda)_{x'}, \qquad G(x_0) = C.$$

6.2. **Parametrični variacijski problem.** V tem primeru imamo variacijski problem oblike:

$$F(x, y) = \int_\alpha^\beta I(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})dt,$$
$$x(\alpha) = A_1, \quad y(\alpha) = A_2,$$
$$x(\beta) = B_1, \quad y(\beta) = B_2.$$

Euler-Lagrangevi enačbi sta v tem primeru dve:

$$I_x = \frac{d}{dt} I_{\dot{x}},$$
$$I_y = \frac{d}{dt} I_{\dot{y}}.$$

6.3. **Odvodi višjih redov.** V primeru, ko v funkcionalu nastopajo višji odvodi, dobimo kompleksnejšo Euler-Lagrangevo enačbo. Napišimo enačbo za primer, ko je najvišji odvod, ki v funkcionalu nastopa, druge stopnje:

$$F(x) = \int_{t_0}^{t_1} I(x, x', x'', t)dt$$
$$x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1,$$
$$x'(t_0) = x_2, \;\; x'(t_1) = x_3.$$

Euler-Lagrangeva enačba je tu:

$$I_x - \frac{d}{dt} I_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} I_{x''} = 0.$$

7. Problemi iz ekonomije

7.1. **Koliko naj država varčuje?** Recimo, da imamo neko državo, katere ekonomija se spreminja in razvija skozi čas [5], kjer je:

- $K = K(t)$ osnovni kapital ob času t,
- $Y = Y(t)$ neto domači proizvod ob času t,
- $C(t)$ funkcija potrošnje ob času t,
- ρ diskontni faktor.

Da bomo lahko obravnavali tak model, moramo predpostaviti določene stvari, ki nam omogočajo obstoj rešitve, obenem pa so v skladu z ekonomsko teorijo.
Naj bo:

- $Y = f(K)$,
- $f'(K) > 0$,
- $f''(K) \leq 0$.

To pomeni, da je neto domači proizvod strogo naraščajoča konkavna funkcija, ki je odvisna samo od osnovnega kapitala. Iz ekonomske teorije vemo, da bo smiselna funkcija potrošnje oblike $C(t) = f(K(t)) - \dot{K}(t)$, kar pomeni, da je proizvodnja $f(K(t))$ razdeljena med potrošnjo $C(t)$ in investiranje $\dot{K}(t)$. Naj bo še $K(0) = K_0$ dan kapital države ob času $t = 0$ in naj bo interval našega planiranja končen $[0, T]$.

Vprašanje tega problema je, kakšen načrt bodo ubrale oblasti glede investicijske funkcije. Lahko spodbudijo potrošnjo danes, kar je zaželjeno, vendar taka odločitev vodi k nizki stopnji investiranja, ki posledično privede do nižjega kapitala v prihodnosti in s tem zmanjša možnosti potrošnje v prihodnosti. (To je lepo vidno iz definicije funkcije potrošnje $C(t)$). Naloga oblasti je torej razrešiti konflikt med zagotavljanjem sredstev za sedanjost in skrbjo za prihodnost. Tu si pomagamo s koristnostno funkcijo celotne družbe, ki jo označimo z U. Predpostavke koristnostne funkcije so:

- $U = U(C)$ je korist, ki jo družba uživa, ko je celotna potrošnja enaka C,
- $U'(C) > 0$,
- $U''(C) < 0$.

Torej koristnostna funkcija U je strogo naraščajoča in strogo konkavna. Tudi te predpostavke so v skladu z ekonomsko teorijo, saj je iz empiričnih podatkov znano, da ljudje z visoko stopnjo potrošnje z vsako dodatno enoto potrošnje svoj nivo zadovoljstva zvišajo za manj, kot pa ljudje z nižjo stopnjo potrošnje.

Naša naloga je določiti $\dot{K}(t)$ za vsak $t \in [0, T]$, da bo skupna diskontirana korist maksimalna ali, prevedeno v jezik variacijskega računa, poiskati funkcijo kapitala $K = K(t)$, z robnim pogojem $K(0) = K_0$, ki maksimizira naslednji funkcional:

$$\int_0^T U(C(t))e^{-\rho t}dt = \int_0^T U(f(K(t)) - \dot{K}(t))e^{-\rho t}dt$$

Predpostavimo še, da imamo neko zahtevo za osnovni kapital ob času T ter da je ta vrednost dana, recimo $K(T) = K_T$.

Naj bo $F(t, K, \dot{K}) = U(C)e^{-\rho t} = U(f(K) - \dot{K})e^{-\rho t}$. Izračunajmo oba odvoda potrebna za Euler-Lagrangevo enačbo:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = U'(C)f'(K)e^{-\rho t}, \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{K}} = U'(C)(-1)e^{-\rho t}.$$

Euler-Lagrangeva enačba se torej glasi:

$$U'(C)f'(K)e^{-\rho t} = -\frac{d}{dt}(U'(C)e^{-\rho t}).$$

Velja še, da je:

$$\frac{d}{dt}(U'(C)e^{-\rho t}) = \left[\frac{d}{dt}U'(C)\right] e^{-\rho t} + U'(C)(-\rho)e^{-\rho t}$$

in

$$\frac{d}{dt}U'(C) = U''(C)\dot{C} = U''(C)(f'(K)\dot{K} - \ddot{K}).$$

Z nekaj truda lahko izrazimo:

$$\ddot{K} - f'(K)\dot{K} + \frac{U'(C)}{U''(C)}(\rho - f'(K)) = 0.$$

Dobili smo dokaj komplicirano diferencialno enačbo drugega reda, katere eksplicitne rešitve ne moremo najti, vendar pa kljub temu lahko povemo nekaj o rešitvi našega problema. Ker je $\dot{C} = f'(K)\dot{K} - \ddot{K}$, lahko iz zgornje enačbe izrazimo relativno rast potrošnje (za $C \neq 0$):

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{U'(C)}{CU''(C)}(\rho - f'(K)) = \frac{\rho - f'(K)}{\omega},$$

kjer je $\omega = El_C U'(C) = (\frac{C}{U'(C)})U''(C)$ elastičnost marginalne koristi potrošnje. To elastičnost lahko opišemo tudi kot kvocient med relativno spremembo v marginalni koristi potrošnje in relativni spremembi potrošnje, kjer je marginalna korist potrošnje dodatno zadovoljstvo, ki ga potrošnik pridobi, če potroši eno dodatno enoto surovine ali storitve.
Ker smo predpostavili, da je $U'(C) > 0$ in $U''(C) < 0$, je tudi $\omega < 0$. Iz tega sledi, da je relativna rast potrošnje pozitivna natanko tedaj ko je $f'(K) > \rho$, kjer je $f'(K)$ marginalna produktivnost kapitala.

Velja še, da je $\dot{K}(0)$ določena z začetnim kapitalom in posledično tudi $C(0) = f(K_0) - \dot{K}(0)$. V tem primeru smo torej postavljeni pred dilemo kako varčevati. Če smo se pripravljeni zadovoljiti z nizko potrošnjo v času 0, $C(0)$, potem lahko relativna rast stopnje potrošnje postane visoka. Nasprotno, visoka potrošnja v času 0, $C(0)$, nakazuje na nižjo stopnjo rasti potrošnje, $\frac{\dot{C}}{C}$.

7.2. **Investiranje (uporaba transverzalnosti).** Predpostavimo, da se vsi v podjetju obnašajo racionalno ter da na trgu vlada konkurenca med podjetji. Sedanja vrednost prihodnjega denarnega toka je dana s formulo:

$$J = \int_0^\infty e^{-R(t)} \left(P(t)Q - \omega(t)L(t) - C(I)\right)dt$$

pri čemer smo označili:

- $P(t)$ je spreminjanje vrednosti izdelka podjetja skozi čas,
- $\omega(t)$ strošek dela,
- $L(t)$ vloženo delo,
- $R(t) = \int_0^t r(s)ds$ diskontni faktor, r pa obrestna mera,

- $C(I)$ stroški investicij, ki so odvisni od stopnje investicij $I = (\dot{K}) + D(K)$, $D(K)$ predstavlja amortizacijo v odvisnosti od osnovnega kapitala ,
- $Q = F(K, L)$ produkcijska funkcija, K predstavlja osnovni kapital, L pa količino dela na voljo.

Pred razvitjem variacijskega računa kot način modeliranja so zgornji problem ekonomisti reševali na drugačen način. Najprej so iz statičnega modela maksimiziranja dobička določili ravnovesni osnovni kapital , ki bo maksimiziral dobiček in ta kapital uporabili kar kot kapital, ki ga na dolgi rok želimo doseči [6]. Taka uporaba ima več pomanjkljivosti, in sicer se ne ozira na količino osnovnega kapitala, kar pomeni da v splošnem v nobenem trenutku razen v končnem stanju ne kaže optimalne količine kapitala. Poleg tega ne upoštevajo investiranja, ki seveda vpliva na dobiček in te težave se rešimo kar z našim nastavkom problema, saj se iz empiričnih podatkov izkaže, da v večini primerov investiranje ustreza našemu začetnemu problemu. Da bo nastavek smiseln, moramo določiti še nekaj osnovnih lastnosti stroškovne funkcije investiranja C, kot smo bili navajeni že do sedaj pri večini ekonomskih modelov.

Jasno je sicer, da bo stroškovna funkcija investiranja C odvisna od empiričnih podatkov, ki se razlikujejo med posameznimi panogami, kljub temu pa lahko privzamemo nekaj splošnih lastnosti:

- Če $I > 0$, potem $C(I) > 0$, $C'(I) > 0$ in $C(0) = 0$,
- $C''(I) > 0$.

Najpreprostejša funkcija s temi lastnostmi je kvadratna funkcija, zato vzamemo $C(I) = q_0 I + q_1 I^2$, kjer sta $q_0 > 0$ in $q_1 > 0$. Pri reševanju našega problema si bomo pomagali tudi s homogenimi funkcijami reda 1.

Definicija 7.1. Funkcija $f(x, y)$ je homogena reda α, če velja:

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$$

Za homogene funkcije reda 1 velja lepa lastnost njihovih parcialnih odvodov, saj so parcialni odvodi homogeni reda 0. Zaradi uporabnosti pri našem primeru maksimiziranju prihodnjega denarnega toka, zapišimo funkcijo f malo drugače:

$$f(x, y) = f\left(x, x\frac{y}{x}\right) = xf\left(1, \frac{y}{x}\right) = xg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ko naredimo parcialni odvod po x dobimo:

$$f_x(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) - g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} = G\left(\frac{y}{x}\right),$$

podobno velja tudi za $f_y(x, y)$.

Vrnimo se k našemu problemu in ga prevedimo v jezik variacijskega računa. Naš funkcional izgleda takole:

$$V = \int_0^{\infty} H(K, L, \dot{K}, \dot{L}) dt,$$
$$H(K, L, \dot{K}, \dot{L}) = e^{-R(t)}(PF(K, L) - \omega L - C(\dot{K} + \delta K)).$$

Tu smo predpostavili, da na amortizacijo vpliva le kapital in zapisali $D(K) = \delta K$. Predpostavimo tudi, da je produkcijska funkcija $Q = F(L, K)$ homogena reda 1. Velja še, da vrednosti za L in K za $t = \infty$ niso dane, zato bomo očitno potrebovali transverzalnostne pogoje. Pri $t = 0$ vrednosti že poznamo, saj se danes odločamo kaj storiti z razpoložljivimi sredstvi.

Začnimo reševati naš problem tako, kot smo se lotili dokaza Euler-Lagrangeve formule. Vzemimo poljubno dopustno funkcijo η in določimo prvo variacijo.

Tako dobimo pogoj, da sta naslednja integrala enaka 0 za poljubno dopustno funkcijo η :

$$\int_0^\infty H_K(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta + H_{\dot{K}}(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta' dt = 0$$

in

$$\int_0^\infty H_L(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta + H_{\dot{L}}(K, L, \dot{K}, \dot{L})\eta' dt = 0.$$

Sedaj spet naredimo per partes prvega integrala na drugi člen. Dobimo:

$$\int_0^\infty [H_K(K, L, \dot{K}, \dot{L}) - \frac{d}{dt}H_{\dot{K}}(K, L, \dot{K}, \dot{L})]\eta dt + H_{\dot{K}}(K, L, \dot{K}, \dot{L})]\eta\Big|_0^\infty.$$

To je kompleksnejši pogoj za Euler-Lagrangevo enačbo kot pri osnovnem problemu variacijskega računa, saj zadnji člen v enačbi ni nujno 0, to pa zato, ker med dopustnimi funkcijami niso vse funkcije enake 0 v neskončnosti. Ker pa kljub temu obstajajo dopustne funkcije, ki imajo 0 v neskončnosti dobimo Euler-Lagrangevo enačbo kot jo že poznamo.

Poleg tega pa dobimo še en pogoj. Ker so vrednosti v krajišču ∞ poljubne, bo zadnji člen enak 0 le, če:

$$H_{\dot{K}}(K(\infty), L(\infty), \dot{K}(\infty), \dot{L}(\infty)) = 0.$$

Podobno seveda velja tudi za odvode po L in $\dot{L}$. Takim pogojem pravimo transverzalnostni pogoji. Nadaljujemo z reševanjem našega problema ter poiščemo Euler-Lagrangeve enačbe. Iz:

$$H(K, L, \dot{K}, \dot{L}) = e^{-R(t)}(PF(K, L) - \omega L - C(\dot{K} + \delta K)),$$

dobimo, da je:

$$H_L = e^{-R(t)}\left[PF_L - \omega\right].$$

Opazimo še, da naša funkcija H ni odvisna od $\dot{L}$, zato je $H_{\dot{L}} = 0$. Euler-Lagrangeva enačba se v tem primeru glasi:

$$H_L = \frac{d}{dt}H_{\dot{L}}$$

in prvi pogoj je:

$$e^{-R(t)}\left[PF_L - \omega\right] = 0.$$

Drugi pogoj pa nam da:

$$H_K - \frac{d}{dt}H_{\dot{K}} = e^{-R(t)}\left(PF_K - C'(\dot{K} + \delta K)(\delta + r(t)) + C''(\dot{K} + \delta K)(\ddot{K} + \delta\dot{K})\right) = 0$$

Iz prvega pogoja dobimo:

$$F_L = F_L\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\omega}{P}$$

Tako smo dobili zvezo med K in L:

$$\frac{K}{L} = F_L^{-1}\left(\frac{\omega}{P}\right)$$

Kot smo že v definiciji homogenih funkcij reda α spoznali, bo tudi odvod na K odvisen le od kvocienta $\frac{K}{L}$, zato lahko pišemo:

$$F_K(K,L) = G\left(\frac{\omega}{P}\right)$$

Ker je $C'(I) = 2q_1 I + q_0$ in $C'' = 2q_0$, lahko poenostavimo drugi del drugega pogoja:

$$\begin{aligned}
&-C'(\dot{K}+\delta K)(\delta + r(t)) + C''(\dot{K}+\delta K)(\ddot{K}+\delta\dot{K}) = \\
&= -(2q_1(\dot{K}+\delta K)+q_0)(\delta + r(t)) + 2q_1(\ddot{K}+\delta\dot{K}) = \\
&= 2q_1\dot{I} - (\delta+r)2q_1 I - q_0(\delta + r(t)).
\end{aligned}$$

Vstavimo v drugi pogoj delimo z $2q_1$ ter dobimo:

$$\dot{I} = (r(t)+\delta)I - \frac{PG(\frac{\omega}{P}) - q_0(\delta + r(t))}{2q_1}$$

V primeru, ko je konstantna tudi obrestna mera r, lahko najdemo eksplicitno rešitev. I bo tu kar konstanta:

$$I^* = \frac{PG(\frac{\omega}{P}) - q_0(\delta + r)}{2q_1(r+\delta)}.$$

Količina kapitala bo v tem primeru ustrezala rešitvi diferencialne enačbe:

$$\dot{K} + \delta K = I^*,$$

katere rešitev je:

$$K(t) = K_0 e^{-\delta t} + \frac{I^*}{\delta}$$

in v ravnovesju:

$$K^* = \frac{I^*}{\delta}.$$

Rešitev za L pa se glasi:

$$L = \frac{K}{F_L^{-1}(\frac{\omega}{P})} = \frac{1}{F_L^{-1}(\frac{\omega}{P})}\left(K_0 e^{-\delta t} + \frac{I^*}{\delta}\right)$$

Sedaj zaradi preglednosti definiramo:

$$f(t) = \frac{PG(\frac{\omega}{P}) - q_0(\delta + r(t))}{2q_1}.$$

Kaj pa lahko povemo o rešitvi, če funkcije P, ω, r niso konstantne? Da lahko kaj povemo o rešitvi v tem primeru, moramo predpostaviti, da so te funkcije take, da je f zvezna, pozitivna in omejena. Splošna rešitev začetnega problema skozi (t_0, I_0) se tako glasi:

$$I(t) = I_0 e^{\int_{t_0}^{t}(r(s)+\delta)ds} - \int_{t_0}^{t} f(s) e^{\int_s^t (r(\sigma)+\delta)d\sigma} ds.$$

Problem pri tem primeru je, da nam manjka začetni pogoj, zato si pomagamo z ekonomsko intuicijo. Skušamo poiskati naravni pogoj za ta integral in izberemo začetno točko ∞. Ker pa je integral:

$$\int_{\infty}^{t}(r(s)+\delta)ds = -\infty,$$

prvi člen z I_0 odpade in naša funkcija investiranja je:

$$I(t) = \int_t^\infty f(s) e^{-\int_t^s (r(\sigma)+\delta)d\sigma} ds.$$

Preveriti moramo še, ali rešitev ustreza transverzalnostnim pogojem, torej če $H_{\dot{K}} \to 0$, ko $t \to \infty$.

$$H_{\dot{K}} = -e^{-R(t)}(2q_1(\dot{K} + \delta K) + q_0) = -e^{-R(t)}(2q_1 I + q_0).$$

Naravno je privzeti, da je $r \geq r_0 > 0$. Potem gre $R(t) \to \infty$ in zato:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-R(t)} = 0.$$

Preveriti moramo le še, da je:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-R(t)} I = 0$$

Po predpostavki je f omejena z neko konstanto M, $R(t)$ naraščajoča, $R(t)-R(s) \leq 0$ na integracijskem območju, zato:

$$I \leq M \int_t^\infty e^{R(t)-R(s)+\delta(t-s)} ds \leq \int_t^\infty e^{\delta(t-s)} ds \leq \frac{M}{\delta}.$$

Zato je:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-R(t)} I = 0$$

in ustreza transverzalnostnim pogojem.

8. Uporaba teorije v praksi

Naredimo zgornji postopek, za podjetje, katerega produkcijska funkcija je Cobb-Douglasova produkcijska funkcija, $F(K, L) = aK^\alpha L^\beta$, kjer je $\alpha + \beta = 1$, da je ta funkcija homogena reda 1. Najprej napišimo prvo Euler-Lagrangevo enačbo:

$$F_L = F_L\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\omega}{P}$$

Ker obliko funkcije F poznamo, lahko izračunamo:

$$F_L = a\beta K^\alpha L^{\beta-1} = \frac{\omega}{P},$$

od koder dobimo, da je:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{\omega}{a\beta P}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Oglejmo si sedaj drugo Euler-Lagrangevo enačbo, ki pravi, da je tudi F_K odvisen od $\frac{\omega}{P}$:

$$F_K = a\alpha K^{\alpha-1} L^\beta = \alpha a \left(\frac{\omega}{P}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} = G\left(\frac{\omega}{P}\right)$$

Torej:

$$G\left(\frac{\omega}{P}\right) = \alpha a^{1+\frac{\beta}{\alpha}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{\omega}{P}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

Spomnimo, da je:

$$f(t) = \frac{PG(\frac{\omega}{P}) - q_0(\delta + r(t))}{2q_1}.$$

Ko vstavimo funkcijo $G(\frac{\omega}{P})$ v zgornji izraz, dobimo:

$$f(t) = \frac{\alpha(aP)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} - q_0(\delta + r(t))}{2q_1}.$$

V tem primeru obrestno mero r vzamemo za konstantno, zato je:

$$e^{-\int_t^s (r+\delta)dx} = e^{-(r+\delta)(s-t)}$$

Končno dobimo, da je:

$$I(t) = \int_t^\infty \frac{\alpha(aP(s))^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} - q_0(\delta + r(t))}{2q_1} e^{-(r+\delta)(s-t)}ds.$$

To lahko zapišemo tudi kot:

$$I(t) = \int_t^\infty (CP(s)^{\frac{1}{\alpha}} + D)e^{-(r+\delta)(s-t)}ds,$$

kjer je $C = \frac{\alpha a\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{2q_1}$ in $D = \frac{-q_0(\delta+r(t))}{2q_1}$.
Ker pa velja, da je:

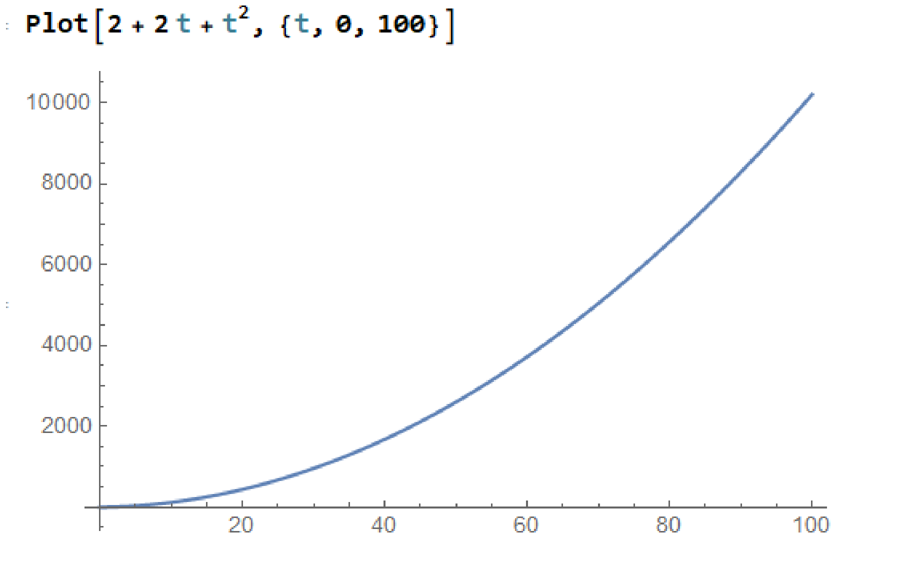
$$\int_t^\infty De^{-(r+\delta)(s-t)}ds = \frac{D}{r+\delta}e^{-(r+\delta)},$$

torej konstanta, lahko predpostavimo, da je $D = 0$ in $C = 1$. V naslednjih primerih smo risali grafe investicijskih funkcij za različne funkcije spreminjanja vrednosti izdelka (ali delnice) podjetja skozi čas.

Če je $P(s) = s$ in $\alpha = \frac{1}{2}$, lahko izračunamo integral:

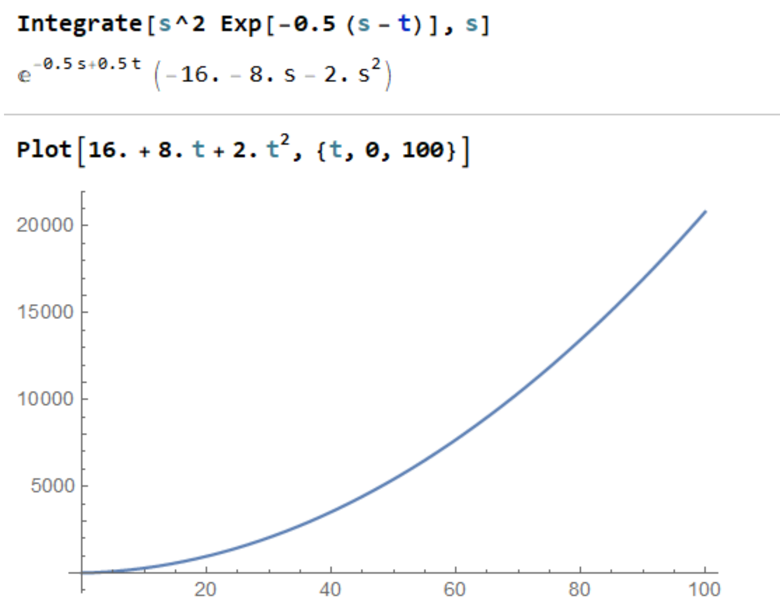
$$I(t) = \int_t^\infty e^{-(s-t)}s^2 ds = t^2 + 2t + 2$$

in graf zadnje funkcije izgleda:



SLIKA 1. Linearna rast za $\alpha = \frac{1}{2}$ pri $r + \delta = 1$

Če v zgornjem primeru spremenimo $r + \delta = \frac{1}{2}$, ostale podatke pa pustimo enake, dobimo podoben graf kot prej. Mathematica lahko izračuna integral, ki ga potrebujemo in nariše graf, kar je razvidno iz spodnjih ukazov in grafov:

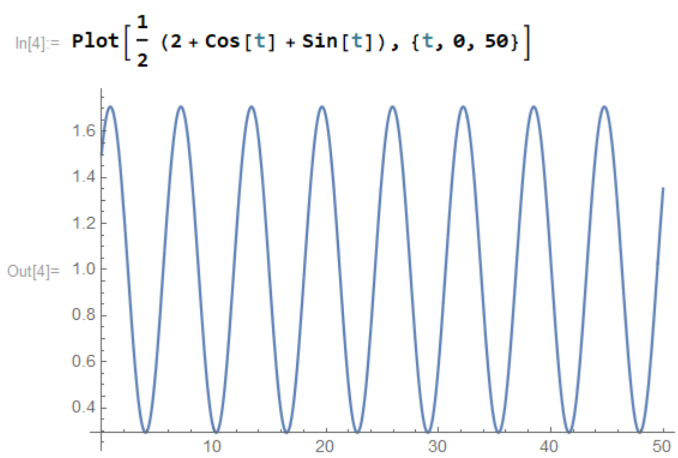


Slika 2. Linearna rast za $\alpha = \frac{1}{2}$ pri $r + \delta = \frac{1}{2}$

Če je $P(s) = \sin(s) + 1$, $\alpha = 1$ in $r + \delta = 1$, lahko izračunamo integral:

$$I(t) = \int_t^{\infty} e^{-(s-t)}(\sin(s) + 1)ds = \frac{1}{2}(2 + \cos(t) + \sin(t))$$

in graf funkcije izgleda:



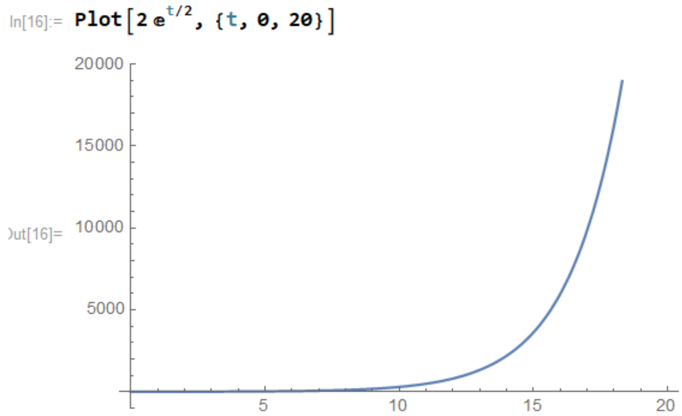
Slika 3. Sinusno spreminjanje cene

Zgornji primer je narisan samo za $r + \delta = 1$, ker se izkaže, da je graf zelo podoben tudi pri $r + \delta = \frac{1}{2}$.

Če je $P(s) = e^{\frac{s}{2}}$, $\alpha = 1$ in $r + \delta = 1$, lahko izračunamo integral:

$$I(t) = \int_t^\infty e^{-(s-t)} e^{\frac{s}{2}} ds = 2e^{\frac{t}{2}}$$

V primeru, ko je $r + \delta = \frac{1}{2}$ pa integral divergira. Graf zgornje funkcije izgleda:

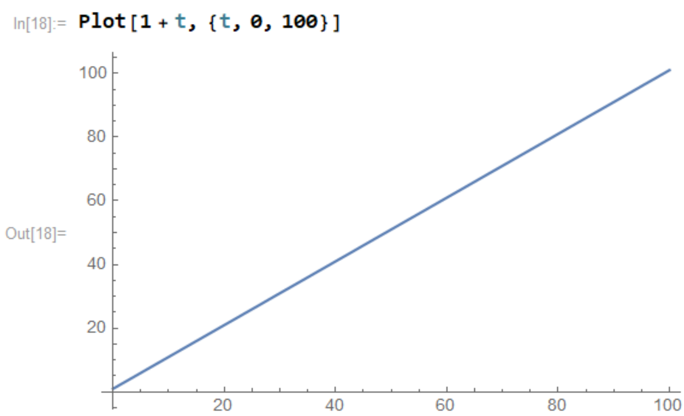


Slika 4. Eksponentna rast

Če se vrednost izdelka podjetja povečuje linearno, torej $P(s) = s$, $\alpha = 1$ ter $r + \delta = 1$ lahko izračunamo integral:

$$I(t) = \int_t^\infty e^{-(s-t)} s ds = 1 + t$$

in graf zadnje funkcije izgleda: Podobno linearno funkcijo dobimo tudi za $r + \delta = \frac{1}{2}$.



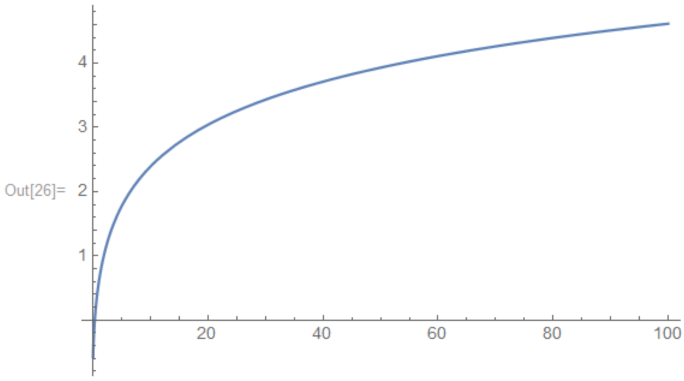
Slika 5. Linearna rast za $\alpha = 1$

Če se vrednost izdelka podjetja povečuje logaritemsko, torej $P(s) = \log(s)$, $\alpha = 1$ ter $r + \delta = 1$, lahko izračunamo integral:

$$I(t) = \int_t^\infty e^{-(s-t)} \log(s) ds = e^t \Gamma[0, t] + \log(t)$$

in graf zadnje funkcije izgleda:

```
In[26]:= Plot[ⅇ^t Gamma[0, t] + Log[t], {t, 0, 100}]
```



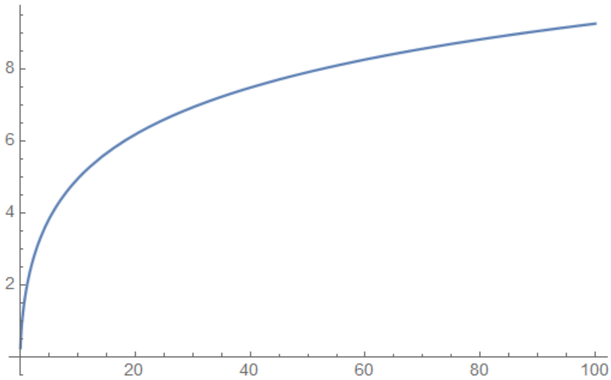
SLIKA 6. Logaritemska rast

Za $r + \delta = \frac{1}{2}$ dobimo integral, ki ga lahko izračuna Mathematica in željeni graf tudi nariše. Izkaže se, da je graf podoben prejšnjemu:

```
m = Integrate[Log[s] E^(-1/2 (s - t)), {s, t, Infinity}]
```

$$2\left(e^{t/2}\,\mathrm{Gamma}\left[0, \frac{t}{2}\right] + \mathrm{Log}[t]\right)$$

```
Plot[m, {t, 0, 100}]
```



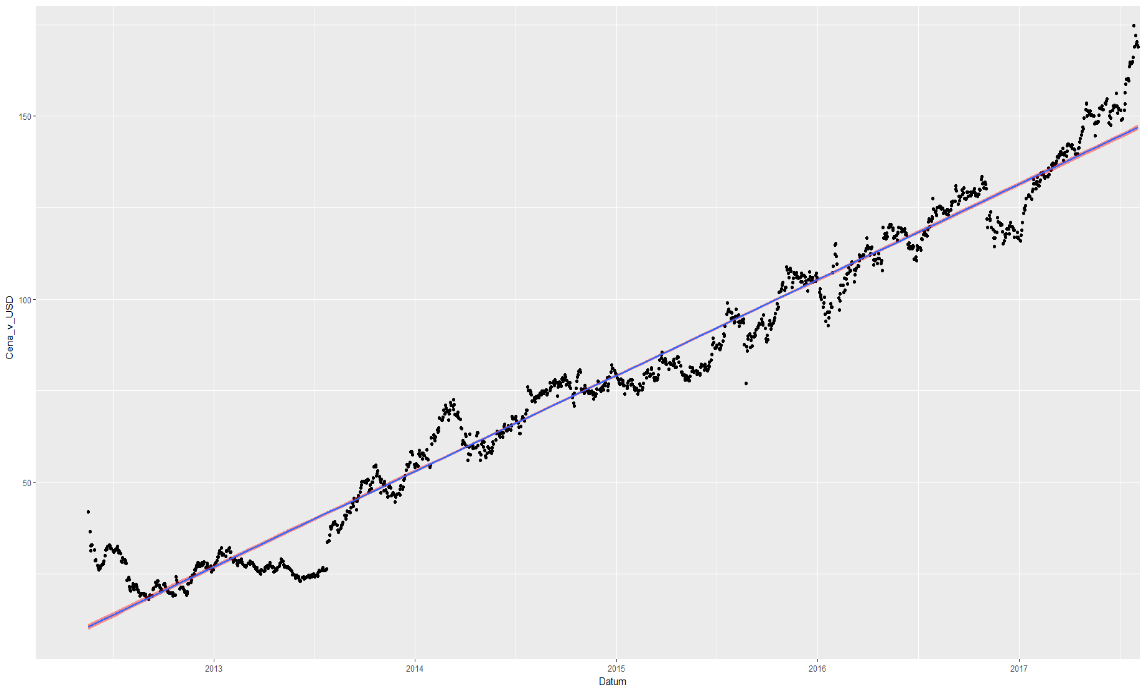
SLIKA 7. Logaritemska rast za $r + \delta = \frac{1}{2}$

Nato smo primerjali dobljene rezulatate z realnostjo. Rast cen delnic obeh podjetij je lepo vidna iz naslednjih dveh grafov vrednosti delnic, za podjetji Facebook [7] in Google [8].

SLIKA 8. Rast cene delnice za Facebook

SLIKA 9. Rast cene delnice za Google

8.1. **Prileganje za ceno delnice podjetja Facebook.** Zanimalo nas je tudi, kateri model in metoda se bo najbolje prilegala našim podatkom, zato smo pridobili podatke o ceni delnice podjetja Facebook v csv datoteki, uvozili podatke v program R Studio in s pomočjo vgrajenih funkcij narisali točkasti graf, nato pa s pomočjo različnih modelov opazovali prileganje podatkom.
Najprej smo preizkusili linearni model, ki za prileganje uporablja metodo najmanjših kvadratov, s pomočjo metode «lm» in dobili naslednji graf:

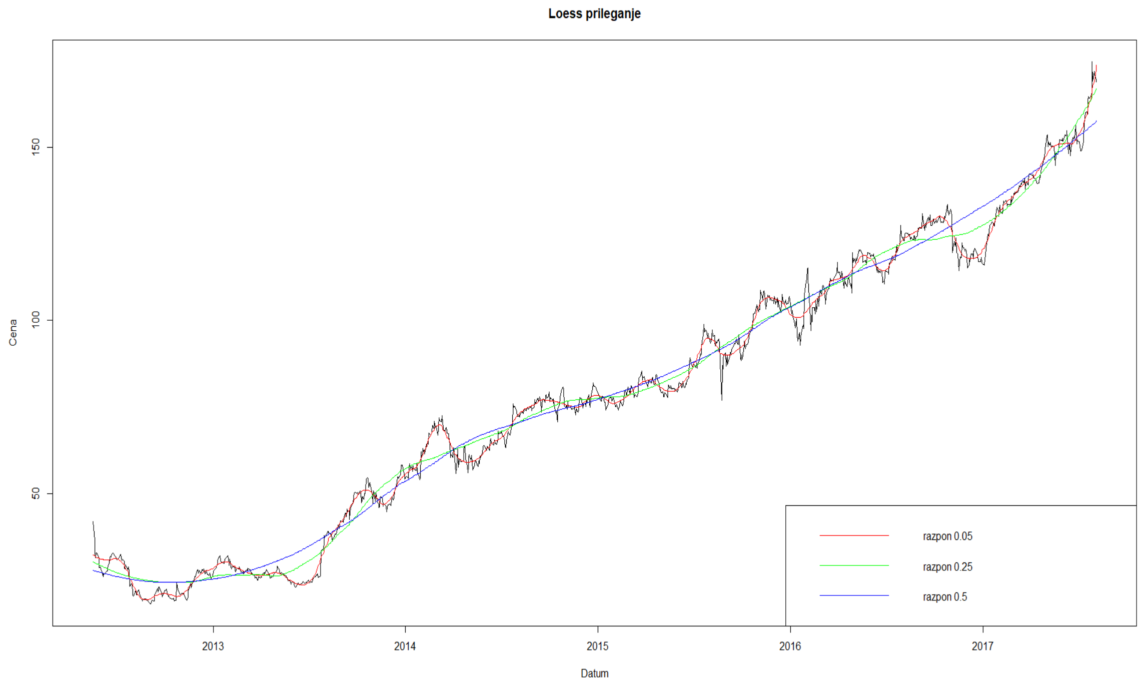


SLIKA 10. Prileganje z metodo lm

Opazimo, da linearni model ne ustreza najbolje, zato poskusimo z drugo metodo, ki se imenuje metoda «gam», t.j. «generalized additive model», kateri predpostavlja, da je linearna funkcija, katero uporabimo za prileganje linearno odvisna od neznane gladke krivulje, ki jo iščemo in od katere lastnosti nas zanimajo. Ta model združuje lastnosti posplošenega linearnega modela z aditivnim modelom. Tudi ta model se ne prilega našim podatkom najbolje, vendar dobro povzame trend gibanja cene delnice podjetja Facebook, kar je razvidno iz naslednje slike:

SLIKA 11. Prileganje z metodo gam

Na koncu pa smo uporabili LOESS ali local polynomial regression-lokalna polinomska regresija, ki je vgrajena v R Studio [9]. Ta model združuje dva neparametrična regresijska modela, kjer je predpostavka o linearnosti, ki jo imajo običajne regresijske metode, sproščena. Ta model deluje na principu uporabe preprostih modelov, na nekih majhnih, «lokalnih» podmnožicah naših podatkov. Imenuje se lokalna regresija, saj je prileganje v bližini točke x uteženo s polinomi nizkih stopenj in sicer s trikubično otežitvijo. To kateri podatki so «blizu», lahko v R Studiu kontroliramo s pomočjo nastavitve «span» ali po slovensko razpon [10]. Pri analizi je pomembno, da sami presodimo kakšen razpon bomo vzeli. Seveda moramo biti pri izbiri teh vrednosti previdni, saj se v primeru, da razpon vzamemo premajhen lahko zgodi, da bomo imeli premalo podatkov blizu točke x, zaradi česar bomo imeli veliko varianco. V primeru, da razpon vzamemo prevelik pa se zgodi, da se regresijska krivulja ne bo prilegala dobro. Naslednji grafi so narisani za več različnih razponov, 0.05, 0.25 in 0.5. Ugotovili smo, da se od vseh metod, najbolje prilega regresijska krivulja, ki jo dobimo iz LOESS metode, za razpon 0.05. Koda z ukazi je dodana v prilogah.



Slika 12. Prileganje z LOESS metodo

Za konec analize pa smo poskusili najti strategijo investiranja za naše konkretne podatke. Ker smo potrebovali ceno delnice za vsak dan, podatkov pa za vikende in praznike ni bilo, smo v teh dnevih za ceno delnice vzeli kar ceno zadnjega trgovalnega dne. Datoteko s temi podatki smo nato uvozili v program Mathematica. Naš cilj je bil poiskati diskretni približek investicijske funkcije

$$I(t) = \int_t^\infty P(s)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-(r+\delta)(s-t)} ds.$$

Glavna razlika tu pa je, da smo sedaj to počeli na naših konkretnih podatkih, torej bomo dobili investicijsko strategijo za našo delnico podjetja Facebook. Opazimo, da čas t v mejah integrala teče do neskončno. V primeru, ko bi bila naša investicijska funkcija gladka funkcija, npr. linearna funkcija, bi lahko ta približek iskali z vsoto. Ker pa je iz grafa razvidno, da to ne bo linearna funkcija, bomo v neskončnosti imeli problem, saj imamo na voljo samo končno podatkov. To pomeni, da od zadnjega podatka, v vseh prihodnjih časih, za ceno delnice vzamemo vrednost 0, zato bo ocena z vsoto dobra samo za majhne čase. Spodaj si lahko ogledamo ukaze, ki smo jih uporabili za analizo v Mathematici. Najprej smo v seznam a zapisali podatke o ceni delnice iz datoteke «podatki.csv». Nato smo naredili seznam b, v katerem smo izračunali integrande $b[n] = a[n]e^{-n}$, kjer smo predpostavili, da je $r + \delta = 1$ in $\alpha = 1$.

```
In[2]:= a = Import["C:\\Users\\pirot\\Desktop\\diploma\\lin_regresija\\podatki.csv"];

In[3]:= Length[a];

In[5]:= b = List[];

In[7]:= For[i = 1, i < Length[a] + 1, i++, b = Append[b, a[[i]] * Exp[-i]]];

In[10]:= b;

In[29]:= L = List[];

In[34]:= For[n = 1, n < length[b] + 1, n++, L = Append[L, Exp[n] * Sum[b[[j]], {j, n, length[b]}]]]

In[36]:= L;
```

SLIKA 13. Ukazi v Mathematici

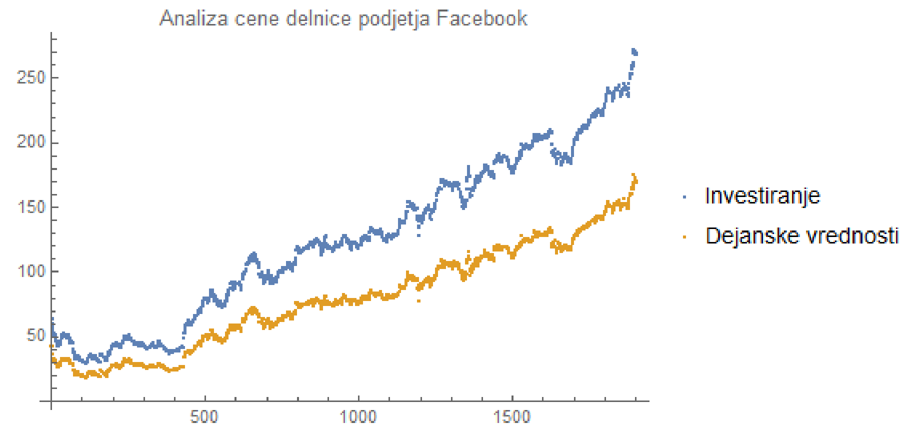
Potrebna je bila še ena zanka, da smo dobili diskretni ekvivalent investicijske funkcije $I(t)$. Ta ekvivalent smo shranili v seznam L, to pa je tudi naša investicijska strategija v diskretnem času. Začeli smo z 18.5.2012, končali pa z 4.8.2017. V seznam L smo elemente dodajali od poznejšega datuma k novejšemu. To pomeni, da je zadnji element v seznamu L strategija za datum 18.5.2012, prvi element pa za 4.8.2017. Za občutek je na spodnji sliki prikazanih nekaj elementov seznama L.

```
In[37]:= L

Out[37]= {{267.708}, {268.398}, {269.376}, {269.317}, {270.461}, {267.644},
  {267.951}, {268.786}, {271.056}, {261.924}, {260.721}, {260.168},
  {259.673}, {259.63}, {259.516}, {259.203}, {256.614}, {252.867},
  {253.362}, {253.104}, {252.729}, {251.711}, {248.943}, {245.196},
  {241.129}, {238.554}, {236.121}, {236.14}, {236.192}, {236.332},
  {237.313}, {240.059}, {240.129}, {240.322}, {240.355}, {240.445},
  {240.689}, {240.321}, {243.018}, {245.13}, {241.601}, {241.605},
  {241.613}, {241.637}, {240.912}, {240.71}, {238.747}, {236.591},
  {236.492}, {236.224}, {235.496}, {238.736}, {237.784}, {238.214},
  {244.765}, {244.631}, {244.266}, {243.276}, {242.46}, {242.443},
  {242.018}, {240.236}, {240.258}, {240.317}, {240.478}, {241.188},
  {240.537}, {240.749}, {240.619}, {240.267}, {239.309}, {236.704},
  {234.871}, {234.754}, {234.407}, {234.661}, {234.36}, {233.541},
  {231.316}, {235.392}, {237.555}, {237.7}, {237.931}, {237.935},
  {237.944}, {237.97}, {238.284}, {239.356}, {238.845}, {239.576},
```

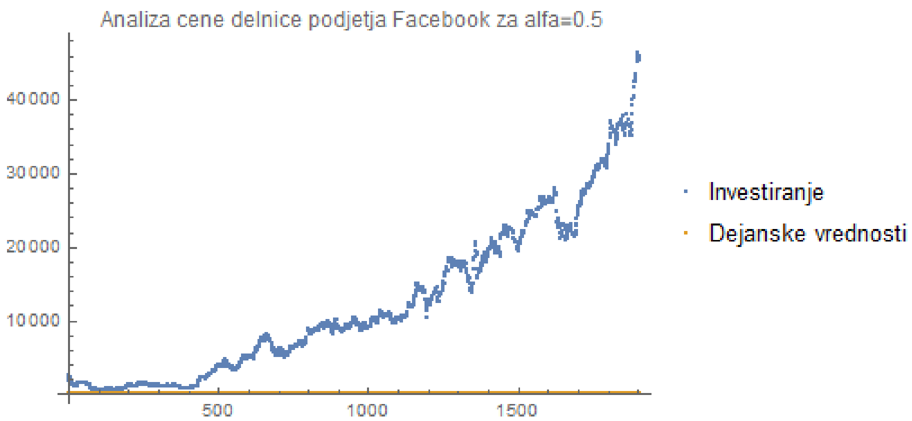
SLIKA 14. Izpis seznama L

Za konec smo rezultate narisali tudi na graf, pri čemer smo zamenjali vrstni red podatkov, da je datum spet tekel od 18.5.2012 do 4.8.2017. Rezultati nam povejo, koliko bi investirali v delnice v posameznem dnevu. Ko smo narisali graf, smo opazili, da dinamika investiranja sledi dinamiki cen, pri čemer je investiranje proti koncu obdobja krepko nad ceno delnice podjetja Facebook. Na spodnji sliki so prikazani rezultati investicijske strategije, ki smo jih dobili iz zgornjega postopka (modro) in pa dejanske cene delnice podjetja Facebook (oranžno).



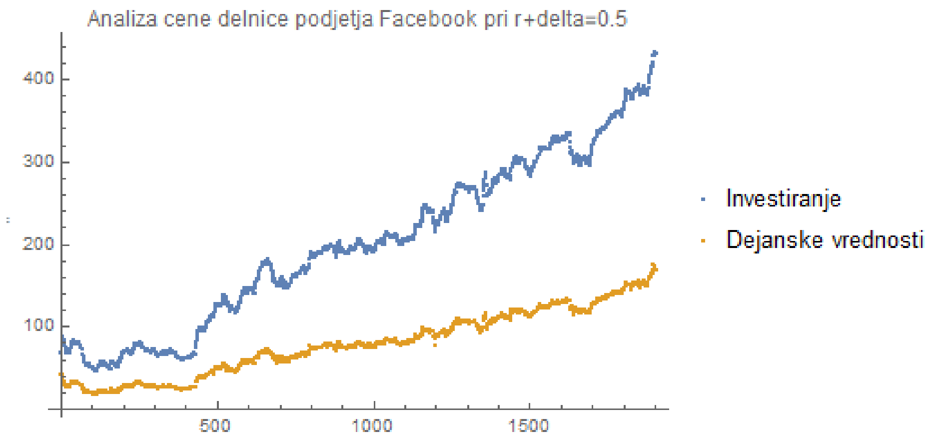
SLIKA 15. Primerjava investiranja in dejanskih cen delnic

Celoten postopek smo ponovili za $\alpha = \frac{1}{2}$, tako da smo oblikovali integrande $b[n] = a[n]^2 e^{-n}$ in po končanem postopku dobili graf, v katerem je bilo investiranje še večje kot pri prejšnjem primeru, čeprav je dinamika investiranja še vedno sledila cenam (tega se iz grafa ne vidi najbolje, vendar smo oba grafa podrobneje primerjali in ugotovili, da se dinamiki ujemata).



SLIKA 16. Primerjava investiranja in dejanskih cen delnic pri $\alpha = \frac{1}{2}$

Za konec smo zgornji postopek ponovili za $r+\delta = 0.5$, pri čemer se je dinamika investiranja ohranjala, čeprav je bil nivo investiranja krepko nad ceno delnice podjetja Facebook.



SLIKA 17. Primerjava investiranja in dejanskih cen delnic pri $r + \delta = 0.5$

9. Povezava s fiziko

Klasična in kvantna mehanika v fiziki predstavljata dve glavni področji mehanike. Ena izmed delitev klasične mehanike je razdelitev na Newtonovo, Lagrangevo in Hamiltonovo mehaniko. S slednjo si bomo pomagali pri obravnavi naših problemov, saj ima zanimive ter uporabne povezave z variacijskim računom.

Hamiltonski sistem je matematični opis dinamičnega sistema, ki ga je podal William Rowan Hamilton. Prednost njegovega opisa je v tem, da kljub temu da nekega začetnega problema dinamičnega sistema ni možno analitično rešiti, nam tak opis poda pomemben vpogled v dinamiko našega sistema. Recimo problem planetarnega gibanja treh teles nima enostavne rešitve, se pa da pokazati, da je rešitev lahko deterministični kaos. Da bomo bolje razumeli Hamiltonovo mehaniko, si najprej poglejmo teorijo s strani fizike [11]. Prostostne stopnje so število neodvisnih možnosti gibanja telesa. S pomočjo hamiltonskih sistemov lahko opišemo veliko sistemov kot so na primer:

- nihalo,
- poskakujoča žoga,
- planetarno gibanje,
- nabiti delci v magnetnih tekočinah,
- toki tekočin.

Atom ima naprimer 3 prostostne stopnje, ki ustrezajo premiku v treh neodvisnih smereh(gor-dol, naprej-nazaj, levo-desno) . Lagrangeva funkcija za sistem atoma v običajnem evklidskem prostoru je:

$$L(v, q), \quad v = \dot{q},$$

kjer funkcija L predstavlja razliko med kinetično in potencialno energijo [12]. Zanima nas, kako se bo ta razlika spreminjala skozi čas vzdolž neke poti. Iz fizike vemo, da se bo sistem gibal po taki poti, da bo razlika med kinetično in potencialno razliko lokalno najmanjša. Temu pravimo princip najmanjše akcije. Ta problem lahko zapišemo v jeziku variacijskega računa, torej sistem bo ubral pot oziroma funkcijo, pri kateri bo naslednji funkcional imel minimum:

$$I(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}(t), q(t))dt.$$

Za robne pogoje vzemimo $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$. Izkazalo se bo, da bodo Euler-Lagrangeve enačbe ravno ustrezale Newtonovim zakonom. Če je L diferenciabilna, lahko ekstremale iščemo tako, kot smo jih iskali do sedaj, s pomočjo Euler-Lagrangeve enačbe, ki je v tem primeru enaka:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}$$

V zgornjem primeru, ko imamo delec pod vplivom sil, je naš Lagrangian oblike:

$$L(v, q) = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - U(q),$$

kjer je T kinetična, V pa potencialna energija. Velja še, da je m masa delca, U potencial v skladu s silami in $\dot{q} = v$ hitrost. Tu je p gibalna količina in q 'pozicija' v prostoru. V tem primeru je Euler-Lagrangeva enačba enaka:

$$m\ddot{q} = -\nabla U(q)$$

Sedaj pridemo do ključnega koraka naše izpeljave, v katerem si bomo pomagali z **Legendrovo transformacijo** [13]:
Vzemimo funkcijo dveh spremenljivk $f(x, y)$. Potem je njen diferencial enak:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Če vpeljemo novi spremenljivki $u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ in $w \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$, lahko zgornjo enakost zapišemo kot:

$$df = udx + wdy$$

Spremenljivkam u in x pravimo konjugiran par spremenljivk [14], enako velja za spremenljivki w in y. V naslednjem koraku s pomočjo pravila produkta izračunamo diferencial:

$$d(wy) = ydw + wdy,$$

ki ga lahko uporabimo, da iz prvega diferenciala izrazimo:

$$dg = udx - ydw,$$

kjer je $g = f - wy$ Legendrova transformiranka funkcije f.

Vrnimo se na naš primer in naredimo Legendrovo transformacijo funkcije L, kjer smo predpostavili, da je gibalna količina $p(v, q) = \frac{\partial L}{\partial v}(v, q)$, difeomorfizem. Ker smo že izpeljali teorijo Legendrove transformacije, lahko dokaj preprosto izračunamo Legendrovo transformiranko funkcije L, tako da vpeljemo naslednje ekvivalence:

$$f \equiv L$$
$$x \equiv q$$
$$y \equiv \dot{q}$$
$$w \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv p$$

Ko ekvivalence vstavimo v zgonje enačbe za Legandrovo transformacijo L, dobimo:

$$g = L - p\dot{q}.$$

Opazimo, da je $-g$ ravno vsota kinetične in potencialne energije in končno lahko definiramo hamiltonsko funkcijo [15]:

$$H(p,q) = T + V = pv - L(v,q), \quad v = v(p,q).$$

Tako smo težak problem zapisali ne kot minimiziranje funkcionala, ampak kot zakon o ohranitvi energije, ki je podan kot sistem diferencialnih enačb, kateri ima en prvi integral, ki je hamiltonska funkcija. Torej se naš variacijski problem zapiše kot:

$$I(p,q) = \int_{t_0}^{t_1} (p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)))dt, \quad q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$$

Hamiltonske enačbe so:

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q}.$$

V tem primeru je $\dot{p}$ sila in iz druge hamiltonske enačbe sledi, da je sila enaka negativnemu gradientu potencialne energije, $\dot{q}$ pa je hitrost, torej iz prve enačbe sledi, da je hitrost delca enaka odvodu kinetične energije glede na gibalno količino.

10. Hamiltonski sistemi v ravnini

Za nas bodo najbolj pomembni hamiltonski sistemi v ravnini, ki imajo obliko:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y, \\ \dot{y} &= -H_x, \end{aligned}$$

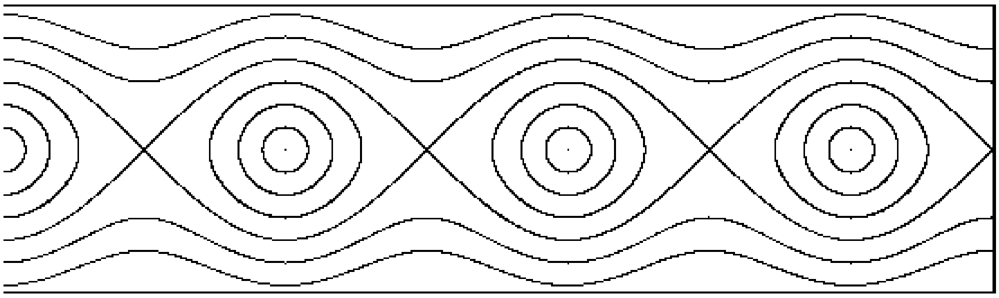
kjer je $H \in C^2(E), H = H(x,y)$. Funkcija H v fiziki največkrat predstavlja neko ohranjajočo količino, npr. energijo. Očitno je, da so stacionarne točke sistema natanko stacionarne točke funkcije H. Izkaže pa se, da ima tak sistem določene lepe lastnosti.

Lema 10.1. *Če je izhodišče v $\mathbb{R}^2$ vrtinec hamiltonskega sistema, potem ni strogi lokalni ekstrem funkcije H. Enako velja tudi za izvor ali ponor.*

Dokaz. V primeru, ko je izhodišče stabilni vrtinec za vsako rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju, velja, da v dovolj majhni okolici izhodišča konvergira proti 0, ko gre $t \to \infty$. Vemo tudi, da je na rešitvi H konstanta in zaradi teh dveh lastnosti enaka 0 na celotni tokovnici, zato nimamo lokalnega ekstrema. Enako lahko dokažemo tudi za nestabilni vrtinec in s tem je naša trditev dokazana. □

Izrek 10.2. *Nedegenerirana stacionarna točka analitičnega hamiltonskega sistema je lahko samo sedlo ali center. Sedlo je natanko tedaj, ko je sedelna točka funkcije H. Če je strogi lokalni ekstrem za H, je točka center sistema* [16].

Včasih se zgodi, da imamo težak variacijski problem, ki se na prvi pogled zdi nerešljiv. Zaradi zgornje leme in izreka nam teorija hamiltonskih sistemov včasih pomaga, da lahko tudi v takem primeru povemo kaj o našem problemu in njegovih stacionarnih točkah.



Slika 18. Sistem nihala je hamiltonski sistem

11. Uporabnost Newtonove, Lagrangeeve in Hamiltonove mehanike v ekonomiji

V zadnjih desetletjih je v ekonomiji prevladovala neoklasična ekonomska teorija, ki izhaja iz klasične mehanike, dandanes pa se vse bolj uporabljajo v prejšnjih dveh razdelkih navedena dognanja za modeliranje makroekonomskih modelov, saj neoklasična teorija ne more v celoti pojasniti in modelirati dinamičnih sistemov. Na splošno velja, da so ekonomisti dobri v prepoznavanju ali je sistem v ravnovesju, ampak slabši pri napovedovanju, kako točno se bo ekonomija do stanja ravnovesja razvijala. Seveda nam v tem primeru lahko pomaga intuicija: če je povpraševanje večje od zaloge, se bo cena dvignila, če je cena višja od mejnih stroškov se bo proizvodnja širila, itd. Problem pa je prenesti te principe v točne dinamične zakone. Tu nam pride prav fizika. Že v preteklosti so bili poskusi uporabe fizike v ekonomske namene, saj so mnogi začetniki neoklasične ekonomske teorije uporabljali koncept energije za raziskave ekonomskega področja. Ekonomisti kot so Nicholas-Francois Canard, William Stanley in Irwing Fisher, [17] so za ekonomski ekvivalent potencialni energiji imeli koristnost, ekvivalnet kinetični energiji pa celotno potrošnjo potrošnikov. Izkazalo se je, da se ta koncept ni izkazal za uporabnega pri modeliranju v ekonomiji. Fisher si je povezavo med ekonomijo in fiziko predstavljal na naslednji način: delec = posameznik, prostor = proizvod, sila = mejna koristnost, delo = škoda (nasprotje koristnosti), energija = koristnost. Izkazalo se je, da tudi taka analogija ni pretirano uporabna v ekonomiji, vendar se izkaže, da se jo s pomočjo Lagrangevega in Hamiltonovega formalizma da prilagoditi za modeliranje številnih problemov v ekonomiji, katerih v neoklasični ekonomski teoriji nismo mogli. Uporaba tega pristopa se sicer še razvija, vendar je vse več raziskovalnih del na temo uporabe omenjenih formalizmov v namene modeliranja v ekonomiji (econophysics) [18].

Problem neoklasične ekonomske teorije lahko razložimo s preprostim primerom. Recimo, da imamo skledo in na njeni klančini zadržujemo kroglico, če jo spustimo bo ta po določenem času seveda končala na dnu sklede. Pot, ki jo bo kroglica ubrala, lahko določimo s pomočjo hamiltonskega ali lagrangevega sistema. Ko smo to storili, vemo, kje točno je kroglica v vsakem trenutku v času gibanja. Če pa bi za reševanje uporabili neoklasično teorijo, bi lahko povedali samo, da bo kroglica po nekaj časa končala na dnu sklede. Podobno je tudi z ekonomskimi modeli. Neoklasična teorija je neučinkovita v razlaganju in napovedovanju procesa spreminjanja bivših držav Sovjetske zveze, ki so iz planskega gospodarstva prešle v tržno gospodarstvo.

Kar nam lahko ta teorija pove je, da so po približno 40 letih te države prešle iz planskega na tržno gospodarstvo. Zato je uporaba zgoraj naštetih mehanik v ekonomske namene boljša in učinkovitejša kot do sedanja ogrodja neoklasične teorije.

V članku [17], ki je izšel pred kratkim, na Finskem leta 2016, zagovarjajo, da lahko teorija zgoraj naštetih mehanik postane uporabna, če za ekonomski ekvivalent energiji vzamemo denar, ekonomsko energijo pa merimo v recimo evrih. Prišli so do spoznanja, da kinetična energija proizvodnje surovine i ustreza:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (Q_i'(t))^2,$$

kjer je Q_i' tok kumulativne proizvodnje surovine i in m_i masa proizvodnje.

Potencialna energija podjetja, ki proizvaja surovino i pa je njena sposobnost, da dvigne svojo profitabilnost.

Preden bo tak način izdelave makroekonomskih modelov prišel v splošno uporabo, bo minilo še veliko časa, očitno pa je, da je tako napovedovanje natančnejše in vsebuje več informacij o prihodnosti, kot pa neoklasična teorija in bi lahko tak način temeljito spremenil makroekonomsko teorijo kot jo poznamo danes.

12. Primer uporabe hamiltonske funkcije

Hamiltonske funkcije so zaradi lepih lastnosti uporabne pri modelih rasti, pri katerih lahko statično tehnologijo opišemo z množico T in proizvodnjo, ki zadošča:

$$(c, z, -k, -l) \in T \subset \{(c, z, -k, -l) : (c, k, l) \geq 0\},$$

kjer je c vektor potrošnje, z vektor neto investicij, k vektor kapitala in l vektor primarnih potrošnih dobrin. Naj bo p vektor cen dobrin, ki so namenjene potrošnji in q vektor cen dobrin, ki so namenjene investicijam. Potem lahko definiramo hamiltonsko funkcijo:

$$H(p, q, k, l) = sup_{\{c', z'\}}\{pc' + qz' : (c', z', -k, l) \in T\}.$$

H je v tem primeru definirana na množici $\{(p, q, k, l) : (p, q, k, l) \geq 0\}$ in ustreza maksimirani vrednosti neto domačega proizvoda pri cenah produktov (p, q), pri imetju (k, l).

Sedaj potrebujemo naslednjo definicijo:

Definicija 12.1. Subderivativ konveksne funkcije $f : I \to \mathbb{R}$, v točki x_0 na odprtem intervalu I, je realno število c, za katerega velja:

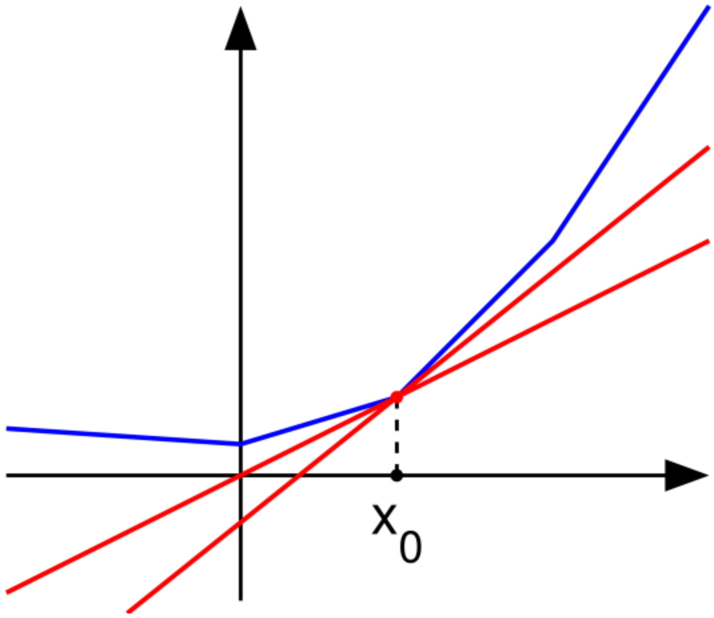
$$f(x) - f(x_0) \geq c(x - x_0),$$

za vsak $x \in I$. Izkaže se, da je množica subderivativov konveksne funkcije pri točki x_0 neprazen zaprt interval $[a, b]$, kjer:

$$a = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad b = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pri čemer a in b obstajata in zadoščata pogoju $a \leq b$. Množica $[a, b]$ vseh subderivativov se imenuje subdiferencial funkcije f, v točki x_0. V primeru, da je funkcija gladka je subderivativ običajen odvod funkcije.

Subderivativ zgornje funkcije f lahko z drugimi besedami opišemo na naslednji način. V poljubni točki x_0 iz definicijskega območja funkcije f, lahko narišemo premico skozi $(x_0, f(x_0))$, ki se povsod dotika grafa funkcije f, ali pa je pod grafom funkcije f. Naklon take premice se imenuje subderivativ [19]. To se lepo vidi iz spodnje slike, kjer je z modro narisana konveksna funkcija, z rdečo pa subtangentne premice.



SLIKA 19. konveksna funkcija in subtangentne premice

Če se vrnemo nazaj na primer, lahko povemo, da v zveznem času $t \in [0, \infty)$ sistem sledi zakonom gibanja:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) \in \partial_q H(p(t), q(t), k(t), l(t)), \\ \dot{q}(t) \in -\partial_k H(p(t), q(t), k(t), l(t)), \end{cases}$$

kjer sta $\dot{k}(t)$ in $\dot{q}(t)$ časovna odvoda od $k(t)$ in $q(t)$ in $\partial_q H$, $\partial_k H$ subdiferenciala glede na q in k.

Prvi zakon gibanja ustreza definiciji neto investiranja, saj je ekvivalenten enačbi $\dot{k}(t) = z(t)$. Drugi zakon gibanja pa lahko zapišemo kot $\dot{q} + r(t) = 0$, kjer je $r(t)$ vektor stopenj najemnin za opredmetena sredstva, ki jih uporabljamo za izdelavo potrošnjih dobrin. Torej drugi zakon gibanja pomeni, da so donosnosti za lastnike sredstev enake v sklopu dobrin, ki jih uporabljajo za izdelavo potrošnjih dobrin. Zaradi potrebnih pogojev funkcije H in pogojev pri modelih rasti, sledi da cene $p(t), q(t)$, ki zadoščajo obema zakonoma gibanja res obstajajo [20].

13. Zaključek

V uvodu tega dela diplomskega seminarja smo se seznanili z zgodovino variacijskega računa ter se spomnili osnov, ki so potrebne za razumevanje osnovnega problema variacijskega računa. Zelo pomembna se nam je zdel potreben pogoj za obstoj ekstrema variacijskega računa, ki nam ga da Euler-Lagrangeva enačba, zato smo jo dokazali. V nadaljevanju smo si podrobneje ogledali več različnih oblik variacijskih računov ter zapisali zadosten pogoj za obstoj ekstrema variacijskega računa.

Sedaj smo imeli dovolj teoretičnega znanja, da smo lahko teorijo uporabili na različnih primerih iz ekonomije ter s tem pokazali kakšno moč ima in kako uporaben je variacijski račun v praksi. V zadnjem delu pa smo si ogledali, kako sta fizika in variacijski račun povezana. Spet smo najprej razvili teorijo, nato pa na zakonu ohranitve energije pokazali uporabnost te teorije. Nazadnje smo se dotaknili področja, ki se trenutno še razvija, ekonofizika in pokazali, kako si lahko s teorijo hamiltonskih sistemov pomagamo pri reševanju zapletenih variacijskih računov s področja ekonomije. Predvidevamo, da se bo to področje še razvijalo in se v naslednjih letih utrlo svojo pot tudi v vsesplošno uporabo v ekonomiji. Osebno sem se največ naučil iz praktičnih primerov, ki so mi bili še posebej zanimivi, saj so bili iz področja ekonomije ter programiranja v programu R Studio, v katerem sem imel dejansko možnost uporabiti teoretično znanje, ki sem ga lahko skozi študijsko leto uporabil tudi pri ostalih predmetih ter ga tako še nadgradil. Zelo veliko sem se naučil tudi iz prebiranja zanimivih člankov, ki mi jih je posredovala mentorica, brez katere tega dela ne bi bilo. Ob tem bi se ji rad zahvalil za vso strokovno pomoč in vzpodbudo, ki mi jo je nudila ob pisanju tega dela.

Slovar strokovnih izrazov

functional funkcional - funkcija, ki slika iz vektorskih prostorov v svoje polje skalarjev

calculus of variations variacijski račun - področje matematične analize, ki se ukvarja z minimiziranjem ali maksimiziranjem funkcionalov

Euler-Lagrange equation Euler-Lagrangeva enačba - potreben pogoj za obstoj ekstrema osnovnega problema

Hesse matrix Hessejeva matrika - kvadratna matrika, ki jo sestavljajo drugi parcialni odvodi neke funkcije

isoperimetric problem izoperimetrični problem - ena izmed oblik osnovnega problema

investing investiranje

saving varčevanje

transversality condition transverzalnostni pogoj - pogoj na prostem krajišču

linear regression linearna regresija - metoda za ugotavljanje medsebojne odvisnosti med dvema spremenljivkama

Hamiltonian system hamiltonski sistem - dinamični sistem, katerega določajo Hamiltonove enačbe

Hamiltonian mechanics hamiltonske mehanike - fizikalna teorija, ki je nastala kot alternativa klasični mehaniki

Literatura

[1] M. I. Kamien, N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization, Second Edition: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier Science, Amsterdam, 4. izd., 1991.

[2] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 2. izd., 1963.

[3] G. Gandolfo, *Economic Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4. izd., 2009.

[4] P. Pyrih, *Calculus of Variations solved problems*, [ogled 10.5.2017], dostopano na `http://matematika.cuni.cz/dl/pyrih/variationProblems/variationProblems.pdf`.

[5] A. Seierstad, K. Sydsæter, *Optimal control theory with economic applications*, [ogled 20.4.2017], dostopano na `http://virgo.unive.it/paolop/papers/Optimal_control_theory.pdf`.

[6] R. Dorfman, *An Economic Interpretation of Optimal Control Theory* , v: The American Economic Review, Vol. 59, No. 5, American Economic Association, 1969, 817-831.

[7] *Cena Facebook delnice*, [ogled 25.4.2017], dostopano na https://finance.yahoo.com/quote/FB/history/

[8] *Cena Google delnice*, [ogled 25.4.2017], dostopano na https://finance.yahoo.com/quote/GOOGL/

[9] *Loess model*, [ogled 2.9.2017], dostopano na https://en.wikipedia.org/wiki/Local_regression.

[10] *Loess model podrobneje*, [ogled 2.9.2017], dostopano na http://www.statsdirect.com/help/nonparametric_methods/loess.htm.

[11] *Hamiltonian system*, [ogled 25.5.2017], dostopano na https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_system.

[12] *Hamiltonian mechanics*, [ogled 25.5.2017], dostopano na https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_mechanics.

[13] *Motivating the Legendre Transform Mathematically*, [ogled 23.4.2017], dostopano na https://math.stackexchange.com/questions/476627/motivating-the-legendre-transform-mathematically.

[14] C. E. Mungan, *Legendre Transforms for Dummies* , [ogled 24.8.2017], dostopano na https://www.aapt.org/docdirectory/meetingpresentations/SM14/Mungan-Poster.pdf.

[15] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, [ogled 25.5.2017], dostopano na https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/ode.pdf.

[16] J. Prezelj, *Dinamični sistemi za drugo bolonjsko stopnjo*, [ogled 25.5.2017], dostopano na http://studentski.net/gradivo/ulj_fmf_ma3_dis_sno_skripta_01?r=1.

[17] M. Estola, A. A. Dannenberg, *Newtonian and Lagrangian Mechanics of a Production System* , [ogled 25.5.2017], dostopano na https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=CEF2015&paper_id=84.

[18] *Ekonofizika*, [ogled 2.9.2017], dostopano na https://en.wikipedia.org/wiki/Econophysics.

[19] *Subderivativ*, [ogled 2.9.2017], dostopano na https://en.wikipedia.org/wiki/Subderivative.

[20] D. Cass, K. Shell, *Introduction to Hamiltonian dynamics in economics*, v: Journal of Economic Theory, Volume 12, Issue 1, Elsevier Inc., 1976, 1-10.