UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Živa Dvoršak

Binomski model in zaščita

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2017

Kazalo

Tabele

Slike

Binomski model in zaščita

Povzetek

Trgovanje s finančnimi instrumenti je zapleten in zahteven proces. Cilj vsakega, ki se odloči za trgovanje, je čim boljša ocena oziroma izračun dogajanja na trgu, ki pripomore k pravilni izbiri investicije. Ker se investitorji pri trgovanju srečujejo z različnimi oblikami tveganja, jih poleg samega vrednotenja, kjer si pomagajo z več modeli, zanima tudi zaščita. Trgujemo lahko samo z osnovnimi instrumenti ali pa z izvedenimi finančnimi instrumenti, ki so vezani na ceno osnovnega instrumenta. Med izvedene finančne instrumente sodi tudi opcija. Za vrednotenje opcij so se v zadnjih letih razvile številne metode, ki pa nam, poleg same (teoretične) ocene vrednosti, dajo t.i. "grke". To so parametri, ki vsak zase izkazuje pomembne informacije glede tveganja, ko investiramo v opcije.

Namen diplomskega seminarja je predstaviti nekaj najbolj osnovnih zaščitnih parametrov in njihovo uporabo pri zaščiti finančnih portfeljev ter primerjati različne modele za izračun "grkov", ki so nastali kot poizkus izboljšanja že uveljavljenih modelov, kot sta Black-Scholesov model in binomski model.

Binomial Model and the Greeks

Abstract

Trading with financial instruments is a complex and demanding process. The main purpose of everyone who decides to trade is the best possible estimate or calculation of market trends, which contributes to the correct choice of investment. When trading, investors are faced with various forms of risk. Therefore, they are not only interested in the financial evaluation, but in hedging (risk management strategies) itself. We can trade either with basic financial instruments or with derivative instruments, which are tied to the price of the underlying instrument. One of the derivative instruments is also an option. Over the last few years, many different valuation models for evaluation of options have been developed. In addition to their own (theoretical) estimates of the option value, they also give us the parameters which are called the "Greeks". Each presents relevant information concerning risks when investing in options.

The purpose of this thesis is to present some of the most basic security parameters and their use in hedging of financial portfolios and, furthermore, to compare different models to calculate "Greeks", which arose as an attempt of improving already established models such as the Black-Scholes model and the binomial model.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20

Ključne besede: evropska nakupna opcija, zaščita, "grki", razširjeno binomsko drevo, Binomski Black-Scholesov model

Keywords: European call option, hedging, "Greeks", extended binomial tree, Binomial Black-Scholes model

1. Uvod

Trgovanje s finančnimi instrumenti je zapleten in zahteven proces. Cilj vsakega, ki se odloči za trgovanje, je čim boljša ocena oziroma izračun dogajanja na trgu, ki pripomore k pravilni izbiri investicije. Trgujemo lahko samo z osnovnimi instrumenti, kjer sta dobiček oziroma izguba popolnoma odvisna od gibanja cene osnovnega instrumenta, ali pa z izvedenimi finančnimi instrumenti, ki so vezani na ceno osnovnega instrumenta, vendar temeljijo na dogovoru oziroma pogodbi. Med izvedene finančne instrumente spada tudi opcija.

Izračuna vrednosti opcij se lahko lotimo z uporabo numeričnih metod ali pa si pomagamo z enim izmed številnih modelov za izračun vrednosti opcij, katerih uporaba se je v zadnjih desetletjih zelo razširila. Med najbolj poznanimi sta diskretni Cox-Ross-Rubinstein model[1] in zvezni Black-Scholesov model.

Ker se investitorji pri trgovanju srečujejo z različnimi oblikami tveganja, jih poleg samega vrednotenja, zanima tudi zaščita. Dogovor oziroma pogodba pri izvedenih finančnih instrumentih že pomeni zavarovanje pred tveganjem izgube zaradi morebitnega padca cene osnovnega instrumenta, a običajno to ni dovolj dobra zaščita, ki bi investitorja ubranila še pred ostalimi dejavniki tveganja. Iz modelov za vrednotenje opcij lahko, poleg same vrednosti opcij, izračunamo tudi parametre, t.i. "grke". Vsak izkazuje pomembne informacije glede tveganja, ko investiramo v opcije.

Hiter razvoj tehnologije nam omogoča lažje in hitrejše preverjanje že poznanih modelov. Ponuja pa tudi ogromno možnosti za medsebojno primerjavo in nato nastanek novih metod tako za izračun vrednosti finančnih instrumentov, kot tudi za določanje stopenj tveganja ter posledično zavarovanjem pred le-tem.

Tako so na podlagi CRR in Black-Scholesovega modela nastale različne izpeljave, tudi izboljšave. Nekatere izmed njih lahko najdemo v člankih *A. Pelsserja in T. Vorsta: The Binomial Model and the Greeks* [4] ter *S.L. Chunga in M. Shackletona: The Binomial Black-Scholes Model and the Greeks* [2]. Prva razširita binomski model in s tem pokažeta, da je le-ta pri izračunu zaščitnih parametrov hitrejši in tudi natančnejši od numeričnega odvajanja. Slednja pa združita zgoranj omenjena modela v t.i. Binomski Black-Scholesov model in se s tem znebita še nekaj pomankljivosti.

Namen diplomskega seminarja je tako pobližje predstaviti ugotovitve zgoraj omenjenih izpeljav in predstaviti nekaj najbolj osnovnih zaščitnih parametrov. Diplomski seminar je razdeljen po poglavjih. V drugem poglavju je predstavljena opcija kot izvedeni finančni instrument. V tretjem poglavju sta predstavljena modela za vrednotenje opcij; zvezni Black-Scholesov model ter njegova diskretna različica Cox-Ross-Rubinsteinov model. Kratka opisa služita kot osnova za izpeljavo zaščitnih parametrov. Ti so poznani tudi pod imenom "grki" in so predstavljeni v četrtem poglavju. V petem poglavju se navežemo na primerjavo ključnih ugotovitev, ki so nastale skozi razprave v zgoraj omenjenih člankih. Šesto poglavje se ponovno vrne k zaščitnim parametrom in predstavi, kako jih uporabiti pri zaščiti finančnih portfeljev. Poglavje se zaključi z ilustrativnim primerov, ki s konkretnimi številkami ponudi lažjo predstavo pred tem izpeljane zaščite.

[1] Najdemo ga tudi pod imenom binomski model.

2. Opcije

2.1. **Opcija kot izvedeni finančni instrument.**

Definicija 2.1. Opcija je pogodba med nosilcem in izdajateljem opcije, ki nosilcu daje pravico, ne pa tudi obveznosti, da na ali do določenega dneva v prihodnosti T, ki ga imenujemo *dan zapadlosti*, kupi oziroma proda določeno količino osnovnega premoženja po v naprej določeni ceni K, imenovani *izvršilna cena.*

Obstaja več načinov delitev opcij. Za nas bodo v nadaljevanju pomembne predvsem naslednje delitve:

2.1.1. *Delitev glede na vrsto pridobljene pravice.* Ob sklenitvi pogodbe daje **prodajna** opcija nosilcu opcije pravico prodaje osnovnega premoženja, medtem ko mu **nakupna** opcija daje pravico nakupa osnovnega premoženja.

2.1.2. *Delitev glede na pozicijo.* V pogodbi nosilec in izdajatelj opcije zavzameta vsak svojo stran. Nosilec zavzame **dolgo pozicijo**, izdajatelj zavzame **kratko pozicijo.**

2.1.3. *Delitev glede na možnost izvršitve opcije.* **Evropska** opcija dovoljuje nosilcu izvršitev le na dan zapadlosti, **ameriško** opcijo pa lahko nosilec izvrši kadarkoli do časa zapadlosti. Opcijo, ki jo lahko izrvšimo le ob točno določenih trenutkih do zapadlosti, imenujemo **bermudska** opcija. Preostale posebne primere opcij, katere se medseboj razlikujejo glede na predpise o možnosti izvršitve oziroma funkcijo izplačil, pod skupnim izrazom imenujemo **eksotične** opcije.

Glede na zgornje delitve so izplačila[2] evropske opcije ob času T naslednja:

- $\max\{S_T - K, 0\}$, za dolgo pozicijo nakupne opcije,
- $-\max\{S_T - K, 0\} = \min\{K - S_T, 0\}$, za kratko pozicijo nakupne opcije,
- $\max\{K - S_T, 0\}$, za dolgo pozicijo prodajne opcije,
- $-\max\{K - S_T, 0\} = \min\{S_T - K, 0\}$, za kratko pozicijo prodajne opcije.

pri čemer je K izvršilna cena opcije, S_T pa vrednost osnovnega premoženja v času T.

V nadaljevanju diplomskega seminarja se bomo ukvarjali z evropskimi nakupnimi opcijami.

Definicija 2.2. Evropska nakupna opcija je pogodbeno razmerje med kupcem in prodajalcem, ki daje, na dan zapadlosti opcije, lastniku (kupcu) opcije pravico *nakupa* osnovnega sredstva po v naprej določeni izvršilni ceni.

Opcijo je potrebno pravilno ovrednotiti, saj mora nosilec opcije za njeno pridobitev ob sklenitvi pogodbe izdajatelju plačati premijo, ki je enaka trenutni vrednosti opcije. Poštena vrednost opcije je tako na dan vrednotenja enaka prihodnjemu denarnemu toku, ki je diskontiran na trenutek vrednotenja. Pri tem seveda upoštevamo predpostavke o neobstoju arbitraže na finančnem trgu. V primeru evropske opcije denarni tok nastopi le ob zapadlosti.

[2]Pri tem izračunu začetno plačilo opcije ni vključeno.

2.1.4. *Dejavniki, ki vplivajo na ceno opcije.* Na ceno opcije vplivajo dejavniki kot so čas, vrsta opcije, trenutna cena osnovnega instrumenta, izvršilna cena, zapadlost, volatilnost osnovnega instrumenta, obrestna mera itd.. To tudi pomeni, da imamo veliko dejavnikov tveganja. Investitorji se tako zanimajo za različne metode za odpravo ali zmanjšanje le-teh.

Z modelom vrednotenja opcij dobimo parametre, t.i. "grke" (na primer delta, gama, theta, vega in ro). Vsak izkazuje pomembne informacije glede tveganja, ko investiramo v opcije. Za še natančnejšo opredelitev občutljivosti in še boljšim zavarovanjem pred tveganjem lahko te parametre med seboj tudi združujemo. Tako lahko na primer uporabimo metodo delta-gama ali metodo delta-vega.

3. Black-Scholesov model in CRR model

Značilnosti denarja je, da skozi čas izgublja svojo vrednost. Zato se finančni sistem pri vrednotenju opira na diskontirane denarne tokove. A potreba po vse večjem in vse natančnejšem vrednotenju je pripeljala do odkritij različnih metod in poti, ki pripeljejo do točnejših napovedi prihodnjih denarnih tokov.

Za vrednotenje večine izvedenih finančnih instrumentov ne poznamo analitične rešitve in moramo tako za izračun njihovih vrednosti uporabiti numerične metode. Vendar pri uporabi le-teh lahko napake povzročijo počasnejšo konvergenco ali celo večje oscilacije.

Modeli za izračun vrednosti finančnih instrumentov nam podajo teoretično ceno, ki nam da oceno ali je cena opcije (oziroma drugega izvedenega finančnega instrumenta) na trgu prava, podcenjena ali precenjena. Najbolj poznana modela sta Black-Scholesov model in njegova diskretna različica, poznana kot CRR model.

3.1. **Black-Scholesov model.** Black-Scholesov model za vrednotenje opcij sta leta 1973 razvila Fischer Black in Myron Scholes, kasneje pa ga je dopolnil Robert Merton.

Model predpostavlja, da trg sestoji iz tveganega sredstva (t.j. običajno delnica) in netveganega sredstva (npr. denar ali obveznica).

3.1.1. *Predpostavke Black-Scholesovega modela glede sredstev.*

- Stopnja donosa na netvegana sredstva je konstantna, imenovana netvegana obrestna mera.
- Cena osnovnega premoženja S_t zasleduje proces geometričnega Brownovega gibanja, t.j. izpolnjuje stohastično diferencialno enačbo

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{1}$$

  kjer je
  - μ pričakovana stopnja donosa osnovnega premoženja,
  - σ volatilnost cene osnovnega premoženja in
  - W_t Wienerjev proces (Brownovo gibanje).

  Pri tem privzamemo, da sta μ in σ konstantni v času.
- Delnica ne izplačuje dividend.

3.1.2. *Predpostavke Black-Scholesovega modela glede trga.*

- Na trgu ni arbitraže.
- Dovoljeno je neomejeno posojanje in izposojanje po konstantni netvegani obrestni meri.
- Dovoljeno je kupiti ali prodati neomejene količine delnic.
- Finančni trg je brez trenja (ni stroškov transakcij, davkov, ...).

3.1.3. *Black-Scholesova formula za vrednost evropske nakupne in prodajne opcije.* Naj bo S cena delnice, $V(S,t)$ vrednost izvedenega finančnega instrumenta izražena kot funkcija cene delnice in časa, $C(S,t)$ in $P(S,t)$ ceni evropske nakupne in prodajne opcije, K izvršilna cena opcije, r netvegana obrestna mera, σ volatilnost in t čas v letih (običajno z 0 označimo sedanjost in s T čas zapadlosti).

Ob upoštevanju predpostavkah Black-Scholesovega modela sta Black in Scholes izpeljala naslednjo formulo za izračun evropske nakupne opcije:

$$C(S,t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}, \tag{2}$$

kjer je $N(.)$ kumulativna porazdelitvena funckija standardne normalne porazdelitve, t.j.:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \tag{3}$$

in

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r + \frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-t) \right], \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{4}$$

Formula za izračun evropske prodajne opcije na podlagi nakupno-prodajne paritete pa je naslednja:

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)} - S + C(S,t) = N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S. \tag{5}$$

Cena izvedenega finančnega instrumenta je popolnoma določena v sedanjem času, čeprav ne poznamo prihodnjih poti cene delnice. Poleg tega je glavna ideja modela zaščita opcije na način, da najdemo ravno prave količne osnovnega premoženja za nakup in prodajo ter na ta način zmanjšamo tveganje. V nadaljevanju diplomskega seminarja si bomo pogledali, kako iz omenjene formule preberemo vrednosti, ki nam nudijo zaščito.

3.2. **Binomski model (Cox-Ross-Rubinstein model).** Binomski model za vrednotenje opcije so John C. Cox, Stephen Ross in Mark Rubinstein prvič predstavili leta 1979. Model temelji na diskretnem slučajnem sprehodu cene osnovnega instrumenta in ravno to omogoča lažjo obravanavo različnih pogojev v primerjavi z ostalimi modeli za vrednotenje opcij.

Za binomski model veljajo analogne predpostavke kot v Black-Scholesovem modelu. Binomski model predpostavi, da gibanje cene opišemo z binomsko porazdelitvijo. Velikokrat se ta porazdelitev približa lognormalni porazdelitvi, ki je značilna za gibanje cene v Black-Scholesovem modelu. Pri evropski nakupni opciji, ki ne izplačuje dividend, binomski model konvergira k Black-Scholesovem, ko povečujemo število korakov v danem časovnem intervalu. Zaradi te navezave, ki nam bo prav prišla v nadaljevanju, za konstrukcijo binomskega modela vzamemo evropsko nakupno opcijo in predpostavimo, da osnovni instrument do časa zapadlosti ne izplačuje dividend.

3.2.1. *Razvoj ekonomije v CRR modelu.* V vsaki opazovani točki se lahko cena delnice premakne v

(1) *dobro stanje ekonomije*; t.j. v eno smer z verjetnostjo p in stopnjo u ali v
(2) *slabo stanje ekonomije*; t.j. v drugo smer z verjetnostjo $1-p$ in stopnjo d.

Povedano drugače, če je cena delnice v času t_j enaka $S_{n,j}$, potem lahko v času t_{n+1} zavzame le vrednosti $u \cdot S_{n,j}$ in $d \cdot S_{n,j}$. Verjetnost p je pri tem neodvisna od n.

V času t_n lahko cena delnice S_n zavzame le $n+1$ možnih vrednosti. Če postavimo začetno vrednost v času t_0 na S_0, je v času t_n:

$$S_{n,j} = S_0 u^j d^{n-j}, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{6}$$

4. "Grki"

Upraviteljem premoženja so lahko dejavniki, ki vplivajo na ceno opcije, v pomoč ali v škodo, odvisno katero pozicijo zavzemajo v danem trenutku. Za uspešno trgovanje s finančnimi instrumenti (in s tem opcijami) se mora posameznik zavedati, kakšen vpliv imajo dejavniki na ceno opcije. To pomeni, da mora posameznik nameniti veliko pozornosti dejavnikom tveganja (lahko tudi dejavnikom za zaščito portfeljev), ki jih razumemo pod izrazom "grki".

Definicija 4.1. "Grki" so parcialni odvodi cene finančnega instrumenta glede na vrednost parametra. Z drugimi besedami, merijo občutljivost vrednosti finančnega instrumenta ali celotnega portfelja glede na spremembo vrednosti parametra pri tem, da ostali parametri ostanejo nespremenjeni.

"Grki" niso pomembni zgolj v teoriji finančne matematike, ampak tudi pri realnem trgovanju. Finančne institucije običajno postavijo mejne vrednosti za vsakega od "grkov", katere naj investitorji ne bi presegli. Še posebaj so uporabni za tiste finančnike, ki iščejo zaščito svojih porfeljev pred neugodnimi spremembami tržnih razmer.

4.0.1. *Delitev "grkov" glede na red odvoda.*

(1) Odvodi prvega reda: delta, vega, theta, ro.
(2) Odvodi drugega reda: gama, vanna, vomma, charm, veta, vera.
(3) Odvodi tretjega reda: color, speed, ultima, zomma.

V nadaljevanju se bomo posvetili predvsem delti, gami in theti ter tudi vegi in roju.

4.1. Delta.

Definicija 4.2. Delta je prvi odvod cene opcije glede na ceno delnice. Meri kako se spremeni cena opcije glede na ceno osnovnega instrumenta. Hkrati nam da tudi oceno verjetnosti, da se ob zapadlosti opcija splača[3].

4.1.1. *Različni vplivi na delto.*

- **Sprememba vrednosti delnice**: Z naraščanjem cene delnice premija nakupne opcije narašča, premija prodajne opcije pa pada.
- **Čas zapadlosti**: Daljši kot je čas do zapadlosti, manj verjetno je, da se opcija ob zapadlosti splača. Tako delta opcije, ki se splača, narašča, ko se približujemo datumu zapadlosti, medtem ko delta opcije, ki se ne splača, s približevanjem datumu zapadlosti, pada.
- **Volatilnost**: Ko povečujemo volatilnost, povečujemo verjetnost, da bo vrednost opcije končala izven intervala, kjer se opcija še splača. Tako torej z naraščanjem volatilnosti delta opcije, ki se ne splača, narašča, delta, opcije, ki se splača, pada. Ravno obratno velja, ko zmanjšujemo volatilnost.

S pomočjo delte lahko izračunamo novo premijo opcije.

Definicija 4.3. Če se cena opcije spremeni za M in predpostavimo, da vse ostalo ostane nespremenjeno, potem je dober približek za novo premijo opcije:

$$P_{nova} \approx P + delta \times M. \tag{7}$$

[3] V angleščini se uporablja izraze ITM - "in-the-money" za opcijo, ki se splača, ATM - "at-the-money" za opcijo na meji in OTM - "out-of-the-money" za opcijo, ki se ne splača.

4.2. **Gama.**

Definicija 4.4. **Gama** je drugi odvod cene opcije glede na ceno delnice. Meri spremembo delte na podlagi spremembe cene osnovnega instrumenta za eno enoto. Opcija, ki se splača, in opcija, ki se ne splača, imata nižjo gamo v primerjavi z opcijo na meji. To pa zato, ker je razlika v dejanski ceni opcije in izvršilni ceni višja in posledično je razlika v spremembi same delte manjša.

Če za delto pravimo, da je nekakšna hitrost spreminjanja vrednosti opcije, potem lahko za gamo rečemo, da je pospešek. Pozitivna gama dela v našo korist tako, da pridobivamo na vrednosti opcije s hitrejšo stopnjo in izgubljamo s počasnejšo stopnjo. Medtem ko negativna gama povzroči, da pospešeno izgubljamo na vrednosti opcije.

S pomočjo game lahko izračunamo novo delto.

Definicija 4.5. Če se cena opcije spremeni za M in predpostavimo, da vse ostalo ostane nespremenjeno, potem je dober približek za novo delto opcije:

$$delta_{nova} \approx delta + gama \times M. \tag{8}$$

4.3. **Izračun delte in game.** Delto in gamo bomo skonstruirali s pomočjo binomskega modela. Uporabili bomo evropsko nakupno opcijo, ki ne izplačuje dividend in osnovnim instrumentom delnico, kar nam kasneje omogoča primerjavo z Black-Scholesovo formulo. Da se pokazati, da cena opcije, izračunana s pomočjo binomskega modela, konvergira proti Black-Scholesovi formuli, ko povečujemo število korakov.

Naj bo S trenutna cena delnice, u in d pa stopnji rasti vrednosti delnice v primeru dobrega in slabega razvoja ekonomije. Z r označimo od časa neodvisno obrestno mero in s K izvršilno ceno opcije.

$S_{n,j}$ je vrednost opcije v času n in stanju j, t.j., ko se je delnica premaknila za j korakov gor, velikosti u in $n-j$ korakov dol, velikosti d in je podana s formulo:

$$S_{n,j} = Su^j d^{j-n}. \tag{9}$$

$C_{n,j}$ pa označuje ceno nakupne opcije v času n in stanju j. Cena opcije se lahko izračuna s pomčjo obratne rekurzije:

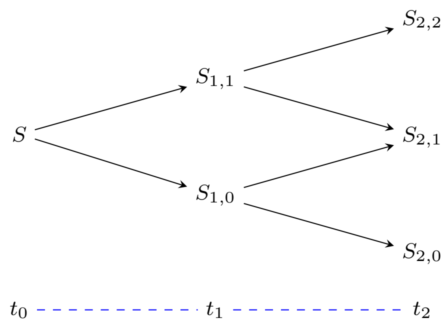
$$C_{n,j} = \frac{qC_{n+1,j+1} + (1-q)C_{n+1,j}}{r}, \tag{10}$$

kjer pod q razumemo do tveganja nevtralno verjetnost, definirano kot $q = \frac{r-d}{u-d}$.

Rekurzija vodi do teoretične cene opcije $C_{0,0}$ na začetni dan in začetno ceno delnice. Označimo jo s $C(S)$. Njena binomska vrednost je podana z izrazom:

$$C(S) = r^{-N} \sum_j \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} max(u^j d^{N-j} S - K, 0). \tag{11}$$

Pri uporabi binomskega modela si pomagamo z binomskim drevesom. Le-ta nam grafično prikaže razvoj vrednosti osnovnega premoženja, kar nam prikazuje tudi Slika 1.



Slika 1. Cena delnice v dvoobdobnem binomskem drevesu

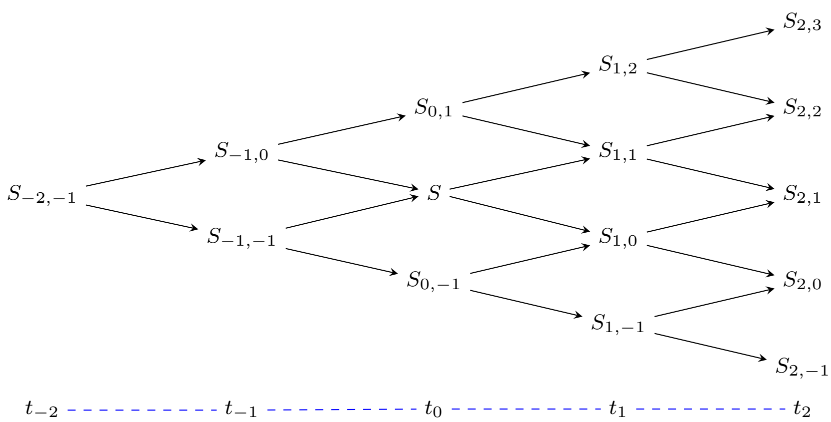
Pelsser in Vorst sta se v svojem članku [4] izračuna delte in game lotila na dva načina:

(1) V prvem koraku sta uporabila *numerično odvajanje*, kjer vzamemo majhni pozitivni števili h, k. Konstruiramo novo drevo in za delto vzamemo $S_{0,0} = S \pm h$ in $C(S \pm h)$ kot začetno vrednost opcije. Za gamo vzamemo S, $S + h$ in $S - k$ ter $C(S + h)$ in $C(S - k)$. Delto in gamo ocenimo z naslednjima formulama:

$$delta = \frac{C(S+h) - C(S-h)}{2h} \tag{12}$$

$$gama = 2\frac{\frac{C(S+h)-C(S)}{h} - \frac{C(S)-C(S-k)}{k}}{h+k} \tag{13}$$

(2) V nadaljevanju sta uporabila t.i. *razširjeno binomsko drevo*. Na tem mestu za izračun vrednosti opcije še vedno uporabimo formulo (9), le da pri tem dovolimo negativen čas n in negativna stanja j za čase pred časom 0. Grafični prikaz je ponazorjen na Sliki 2.



Slika 2. Razširjeno binomsko drevo

Ko poračunamo vrednosti opcij v vseh vozliščih, za delto in gamo dobimo:

$$delta = \frac{C(S_{0,1}) - C(S_{0,-1})}{S_{0,1} - S_{0,-1}} \tag{14}$$

$$gama = 2\frac{\frac{C(S_{0,1})-C(S)}{S_{0,1}-S} - \frac{C(S)-C(S_{0,-1})}{S-S_{0,-1}}}{S_{0,1} - S_{0,-1}} \tag{15}$$

4.4. **Theta.**

Definicija 4.6. Theta meri občutljivost cene opcije glede na spremembo časa.

4.4.1. *Analiza vrednosti opcije.* Vrednost opcije se lahko analizira skozi notranjo vrednost ali skozi vrednost časa.

- *Notranja vrednost* je količina denarja, ki bi ga pridobili, če bi opcijo takoj izvršili.
- *Vrednost časa* pomeni vrednost pri daljšem čakanju pred izvršitvijo.

Theta je večinoma negativna, saj je skozi čas (oziroma, ko se čas približuje zapadlosti) vedno manj možnosti, da bo na primer pri prodajni opciji, ki se ne splača, cena delnice padla pod izvršilno ceno. Drugače povedano, manj časa, ko ima opcija do zapadlosti, hitreje bo izgubljala svojo vrednost.

4.4.2. *Izračun.* Theto lahko, ravno tako kot delto in gamo, skonstuiramo s pomočjo numeričnega odvajanja ali z razširjenim binomskim drevesom. Dobimo formuli:

$$theta = \frac{C(T-\tau) - C(T+\tau)}{2\tau}, \tag{16}$$

s pomočjo numeričnega odvajanja in

$$theta = \frac{C(S_{-2,-1}) - C(S_{2,1})}{4\tau}, \tag{17}$$

s pomočjo razširjenega binomskega drevesa.

4.5. **Vega in Ro.**

Definicija 4.7. Vega meri spremembo vrednosti opcije glede na volatilnost osnovnega instrumenta.

Definicija 4.8. Volatilnost označuje dovzetnost delnice za tečajna nihanja. Je mera, po kateri se pričakuje nihanje cene osnovnega instrumenta (v našem primeru delnice) v določenem časovnem obdobju. Bolj kot se cena delnice spreminja, bolj je opcija volatilna.

Volatilnost v splošnem delimo na statistično (zgodovinsko) in implicirano.

- *Statistična volatilnost* je mera minulega gibanja.
- *Implicirana volatilnost* napoveduje prihodnje volatilnosti osnovnega instumenta.

Za izračun implicirane volatilnosti se uporabi dejansko tržno vrednost opcije in enega izmed modelov za vrednostenje (npr. Black-Scholesov model). Trgovci z opcijami uporabljajo primerjavo implicirane in statistične volatilnosti.

Z naraščanjem volatilnosti narašča tudi vega. Vega je ponavadi višja za opcije na meji in se zmanjšuje, ko se opcija približuje zapadlosti.

Vega je zelo uporabna ravno pri trgovanju z opcijami, predvsem na zelo volatilnih trgih, saj so vrednosti nekaterih opcij zelo občutljive ravno na ta nihanja.

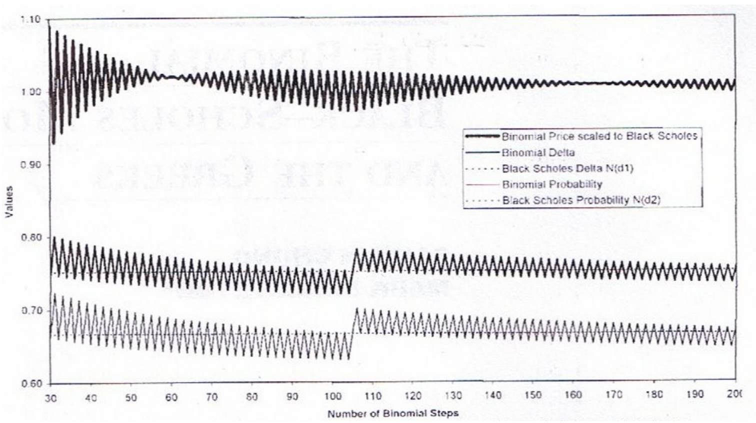
Definicija 4.9. Ro meri spremembo vrednosti opcije glede na spremembo netvegane obrestne mere.

Razen v določenih ekstremnih primerih je vrednost opcije manj občutljiva na spremembe obrestne mere, zato se ro v praksi redko kdaj uporablja.

4.5.1. *Izračun.* Konstrukciji vege in roja sta nekoliko bolj zapleteni. Volatilnost in obrestna mera v binomskem modelu vplivata na stopnjo rasti vrednosti delnice in na do tveganja nevtralno verjetnost, ki pa sta po predpostavki modela konstantni. To pomeni, da sta v binomskem modelu tudi vega in ro konstantni. V tem primeru bi tako morali preračunavati ceno opcije glede na različne volatilnosti in različne obrestne mere in za samo ceno vzeti povprečje teh izračunov.

Kot smo to naredili za delto, gamo in theto, tudi za izračun preostalih "grkov" uporabimo različne modele. Za izračun zaščitnih parametrov lahko uporabimo modele za vrednotenje opcij (npr. diskretni binomski model, zvezni Black-Scholesov model, idr.) ali se izračuna lotimo z uporabo numeričnih metod.

Binomski model je zelo hiter in prilagodljiv za izračun vrednosti opcij, vendar je pri samem izračunu "grkov" lahko pri vrednotenju parcialnih odvodov pomanjkljiv. Poleg diskretnosti časa se lahko problem pojavi tudi v konvergenci. Konvergenca k dejanski vrednosti ni monotona, vendar oscilira in je odvisna od velikosti korakov med različnimi stanji. Na Sliki 3[4] je podana primerjava delte izračunane s pomočjo binomskega in Black-Scholesovega modela.



Slika 3. Primerjava binomskega in Black-Scholesovega modela, kjer je $S = 105$, $K = 100$, $r = 9\%$, $\sigma = 25\%$, $t = 1$ leto

Naš cilj je torej poiskati oceno za "grke", ki ne oscilira glede na število in velikost korakov.

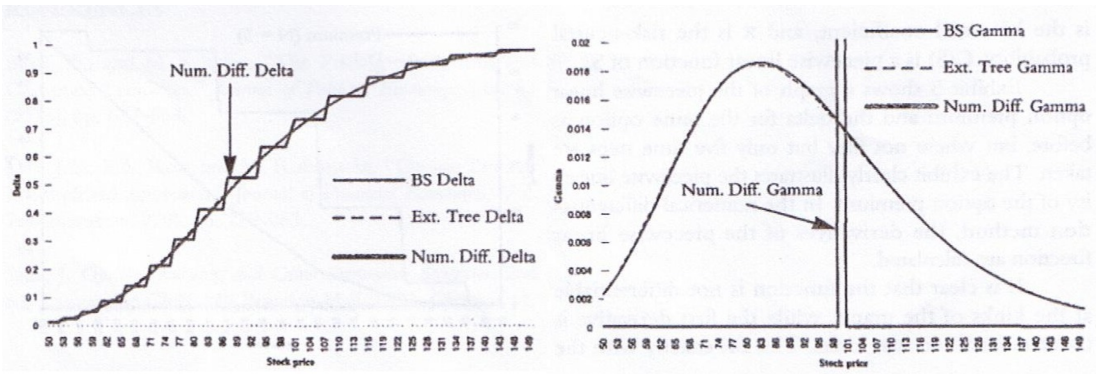
Razvoj modelov, ki temeljijo na uporabi binomskega in Black-Scholesovega modela, je pripeljal do različnih izpeljav in kombinacij ter s tem do različnih zaključkov glede zanesljivosti in hitrosti modelov.

Pelsser in Vorst [4] sta predstavila dva različna izračuna in sicer izračun s pomočjo numeričnega odvajanja ter metodo z razširjenim binomskim drevesom. Pokazala sta, da je uporaba numeričnega odvajanja počasnejša in manj zanesljiva. Poudarita, da je pri metodi numeričnega odvajanja zelo pomembno, kako izberemo števili h in k[5]. Že manjša napaka pri izbiri lahko vodi do napačnih rezultatov, kar pomeni, da je metoda manj natančna. To lahko vidimo tudi na grafih[6] (prikazana sta na Sliki 4), ki ni konveksen in iz tega sledi, da je delta lokalno konstantna. Sama cena opcije je lokalno linearna funkcija cene delnice. Iz tega potem sledi, da je drugi odvod, torej gama, enak nič.

[4]Graf je vzet iz članka [2].

[5]Skozi primerjave sta ugotovila, da je večja težava, če sta števili h in k premajhni. S postopnim povečevanjem sta tako prišla na velikost celotnega koraka in na ta način razvila razširjeno binomsko drevo.

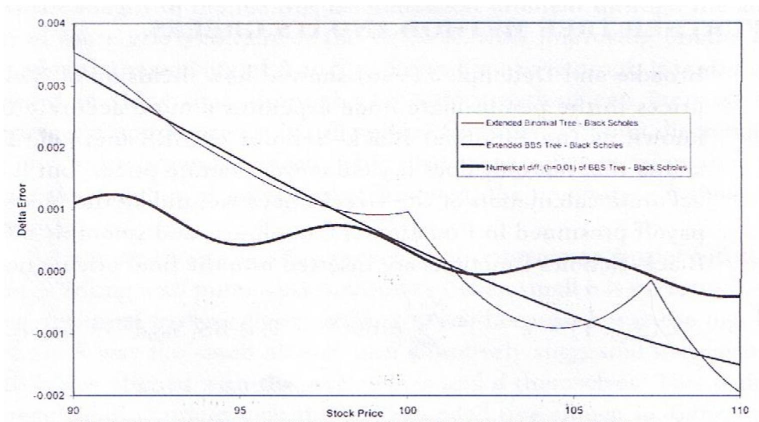
[6]Grafa sta vzeta iz članka [4].



SLIKA 4. Ocene za delto in gamo evropske nakupne opcije, kjer je $K = 100$, $r = 9\%$, $\sigma = 25\%$, $t = 1$ leto

Pelsser in Vorst sta v nadaljevanju [4] pokazala tudi, da do bolj natančnih rezultatov pridemo z uporabo razširjenega binomskega drevesa. Čeprav je ta metoda bolj zanesljiva, je njena napaka predvsem v tem, da je še vedno odvisna od izbire intervala glede na čas in ceno delnice.

Da bi izboljšali tudi to pomankljivost, naš model razširimo na t.i. Binomski Black-Scholesov (v nadaljevanju BBS) model. Metodo sta sicer prvotno predstavila Broadie in Detemple v navezavi z vrednotenjem ameriških opcij[7]. BBS metoda je identitčna klasičnemu binomskemu modelu, le da, v zadnjem časovnem trenutku pred zapadlostjo, vrednost držanja opcije običajno zamenja Black-Scholesova formula. Metodo sta kasneje Chung in Shackleton [2] uporabila pri vrednotenju evropske nakupne opcije in s tem omogočila direktno primerjavo z ugotovitvami Pelsserja in Vorsta [4]. Dokazala sta, da so rezultati po BBS metodi natančnejši, poleg tega pa sta izpostavila, da je glavna prednost metode ponovna uporaba numeričnih metod, ki so po [4] pomanjkljive za navaden binomski model[8].



SLIKA 5. Primerjava delte za izračun s pomočjo numeričnega odvajanja, binomskega modela in BBS modela

[7]Več podrobnosti v članku [1].

[8]BBS metoda namreč temelji na gladkih, nediskretnih funkcijah cene osnovnega premoženja ter vzame čas blizu zapadlosti, posledica tega pa so gladki "grki". To je razavidno tudi na Sliki 5, katere graf je vzet iz članka [2].

6. Zaščita

Definicija 6.1. **Zaščita** je izraz za delno ali popolno zavarovanje pred različnimi oblikami tveganja. Uporablja se za zmanjšanje morebitnih velikih izgub (in tudi dobičkov), ki bi jih posamezniki ali podjetja lahko utrpeli. Je strategija upravljanja s tveganji pri omejevanju ali izravnavi verjetnosti izgube zaradi nihanj cen surovin, valut ali vrednostnih papirjev.

Pri zaščiti uporabljamo različne tehnike, povsod je vključeno zavzemanje enakih ali nasprotnih pozicij na dveh različnih trgih (npr. gotovinskem in terminskem trgu). Uporablja se za zaščito posameznikovega kapitala proti učinkom inflacije pri investiranju v visoko donosne finančne instrumente (npr. obveznice, terjatve, delnice), nepremičnine ali surovine.

Zaščita v bistvu pomeni prenos tveganja, ne da bi kupili zavarovalno polico.

6.1. **Delta zaščita.**

Vrednost evropske nakupne (ali prodajne) opcije je v Black-Scholesovi formuli odvisna od cene osnovnega instrumenta. Vrednost portfelja, ki je odvisna od trenutne cene delnice $S(0) = S$ označimo z $V(S)$. Tako lahko odvisnost od cene S izmerimo z odvodom $\frac{d}{dS}V(S)$, ki jo imenujemo *delta portfelja.* Za majhne spremembe cene $S + \Delta S$ se vrednost portfelja spremeni za

$$\Delta V(S) \cong \frac{d}{dS}V(S) \times \Delta S. \tag{18}$$

Portfelj, je delta zaščitni, če je $\Delta V(S) = 0$.

Položaj delte lahko razumemo kot zaščito pred tveganjem, saj nam pove, koliko opcij je potrebih za zaščito dolge ali kratke pozicije v osnovnem instrumentu. Princip delta zaščite je v tem, da v naš portfelj vgradimo zaščitni izvedeni finančni instrument (v našem primeru je to opcija z osnovnim instrumentom delnico), katerega vrednost se ne spreminja preveč, ko sama cena delnice niha. Bolj natančno, opisuje portfelj sorodnih vrednostnih papirjev, pri katerih vrednost portfelja ostaja nespremenjena, ko pride do majhnih sprememb vrednosti osnovnega instrumenta. Tak portfelj običajno vsebuje opcije in njihove ustrezne osnovne instrumente tako, da se pozitivne in negativne komponente delte izravnajo in kot rezultat dobimo vrednost portfelja, ki je razmeroma neobčutljiv na spremembe v vrednosti osnovnega instrumenta.

Konkretno, vzamemo portfelj sestavljen iz delnice, obveznice in opcije (z osnovnim instrumentom delnico), katerega vrednost je podana z:

$$V(S) = xS + y + zD(S), \tag{19}$$

kjer D(S) označuje ceno opcije.

Za eno tako izdano opcijo, torej $z = -1$, dobimo:

$$\frac{d}{dS}V(S) = x - \frac{d}{dS}D(S). \tag{20}$$

Dobimo linearno enačbo, kjer $\frac{d}{dS}D(S)$ označuje delto. Iz tega lahko izračunamo pozicijo x:

$$x = \frac{d}{dS}D(S). \tag{21}$$

Zaradi problema diskretnosti časa, se navežemo na zvezen model v času, tj. Black-Scholesov model. Delto opcije izračunamo z odvodom cene nakupne opcije $C(S)$ glede na ceno delnice S:

$$\frac{d}{dS}C(S) = N(d_1). \tag{22}$$

Tako ima naš portfelj $(x, y, z) = (N(d_1), y, -1)$ vrednost: $V(S) = N(d_1)S + y - C(S)$.

Za izračun delta nevtralne zaščite izberemo tak y, da bo vrednost portfelja enaka nič. Po Black-Scholesovi formuli dobimo:

$$y = -Ke^{Tr}N(d_2). \tag{23}$$

6.2. **Preostale zaščite.** Ker cena osnovnega instrumenta ni edino kar se lahko spreminja, sama delta tako dostikrat ni najbolj stabilna zaščita. Na ceno opcije lahko vplivajo še čas, vrsta opcije, izvršilna cena, zapadlost, volatilnost in obrestna mera.

Ob izdaji opcije sta izvršilna cena K in čas zapadlosti T natančno določena, torej lahko na ceno vplivajo ostali parametri. Ustvarimo portfelj kot funckijo le-teh: $V(S, t, \sigma, r)$. Za majhne spremembe posameznih parametrov dobimo približek s Taylorjevo formulo.

$$\Delta V \cong \frac{\partial V}{\partial S} \times \Delta S + \frac{\partial V}{\partial t} \times \Delta t + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \times \Delta\sigma + \frac{\partial V}{\partial r} \times \Delta r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \times (\Delta S)^2. \tag{24}$$

Iz nje lahko preberemo vrednosti "grkov":

$$delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \tag{25}$$

$$gama = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \tag{26}$$

$$theta = \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{27}$$

$$vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \tag{28}$$

$$ro = \frac{\partial V}{\partial r}. \tag{29}$$

Ti nam dajo podatek, kako sestaviti naš zaščitni portfelj. Tako kot smo prej pokazali za delto, moramo za zaščito pred spremembo določenega parametra, vrednost pripadajočega "grka" postaviti na nič.

Ker se v praksi spreminja več parametrov hkrati, moramo vse te, za katere želimo zaščito, izenačiti z nič. Izkaže se, da za dosego dveh nevtralnih zaščit, potrebujemo portfelj, ki ga sestavljata dva zaščitna instrumenta (v našem primeru dve opciji z osnovnim instrumentom delnico). Na primer, za zaščito pred volatilnostjo, moramo sestaviti vega nevtralni portfelj, kjer vego postavimo na nič. Da bi pri tem ohranili še prejšnjo delta zaščito, moramo na nič postaviti tako delto kot vego (pri tem dobimo delta-vega nevtralni portfelj). Drug primer bi bil pri delta-gama nevtralnem portfelju, kjer bi bili zaščiteni še pred večjimi nihanji cene delnice, kot pri sami delta zaščiti.

Za izračun preostalih "grkov" ponovno uporabimo zvezni Black-Scholesov model. Za evropsko nakupno opcijo dobimo:

$$delta = N(d_1), \tag{30}$$

$$gama = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{{d_1}^2}{2}}, \tag{31}$$

$$theta = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{{d_1}^2}{2}} - rKe^{-rT}N(d_2), \tag{32}$$

$$vega = \frac{S\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{d_1}^2}{2}}, \tag{33}$$

$$ro = TKe^{-rT}N(d_2). \tag{34}$$

Pri izračunu grških parametrov, smo upoštevali $t = 0$. Hitro se da pokazati, da velja:

$$theta + rS * delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 * gama = rC(S) \tag{35}$$

oziroma

$$\frac{\partial D}{\partial t} + rS\frac{\partial D}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = rD, \tag{36}$$

kjer je $D = C(S)$.

6.3. **Ilustrativni primer.** Za boljšo predstavo zgoraj napisanega je najenostavneje obrazložiti s pomočjo konkretnega primera[9].

Vzemimo evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo $T = 90$dni, pisano na delnico z začetno vrednostjo $S_0 = \$60$ in izvršilno ceno $K = \$60$. Netvegana obrestna mera je $r = 8\%$ in volatilnost $\sigma = 30\%$. Za izračun vrednosti evropske nakupne opcije uporabimo Black-Scholesovo formulo (2) iz tretjega poglavja ter izpeljave odvodov za izračun zaščitnih parametrov, ki so navedeni na prejšnji strani.
Vrednost evropske nakupne opcije je enaka $C(S) = \$4.14452$ in $delta = 0.581957$.

6.3.1. *Delta zaščita.* Naš portfelj sestavimo iz delnice, denarja in opcije ter se navežemo na predstavitev izračuna iz razdelka 6.1. Na podlagi naših pričakovanj o prihodnjem gibanju cene delnice, se odločimo ali želimo naš portfelj zaščititi proti tovrstnemu gibanju, kar pomeni, da bomo izračunali delta zaščito.

V našem primeru za delta nevtralno zaščito izdamo 1000 nakupnih opcij, torej $z = -1,000$. Da skonstruiramo zaščito, kupimo 581.96 delnic za $\$34,917.39$ (od tega si sposodimo $\$30,772.88$).

Naš portfelj je tako $(x, y, z) = (581.96, -30,772.88, -1000)$ s skupno vrednostjo $V(S) = 0$.

Iz spodnje tabele je razvidno kako se, ob spreminjanju cene delnice, spreminja vrednost porfelja[10]. Stolpec *delta* prikazuje vrednosti ob uporabi delta zaščite, stolpec N pa vrednosti, če našega portfelja ne zaščitimo.

Tabela 1. Spreminjanje vrednosti porfelja ob nihanju cene osnovnega premoženja

S	*delta*	N
58.00	-71.35	$1,100.22$
58.50	-31.56	849.03
59.00	-3.26	586.35
59.50	13.69	312.32
60.00	19.45	27.10
60.50	14.22	-269.11
61.00	-1.77	-576.07
61.50	-28.24	-893.53
62.00	-64.93	$-1,221.19$

Na prvi pogled se morda zdi, da bi bilo bolje, če našega protfelja sploh ne zaščitimo, saj je v tem primeru verjetnost za dosego večjih dobičkov večja. A po drugi strani so kaj hitro lahko izgube zelo hitro zelo visoke. Iz tega lahko zaključimo, da se, ne glede na premik cene delnice, izgube pri delta nevtralni zaščiti občutno manjše kot pri nezaščiteni poziciji. Torej, če si želimo mirnejšega spanca, je vsekakor bolje izbrati strategijo delta zaščite.

Vprašanje, ki sledi, je kaj se zgodi, če se hkrati spremeni še kateri drug parameter?

[9]Primer je bolj obširno predstavljen v [5].
[10]Pri tem ostali parametri ostanejo nespremenjeni.

TABELA 2. Spreminjanje vrednosti porfelja ob nihanju cene osnovnega premoženja ter povečanju netvegane obrestne mere oziroma povečani volatilnosti

S	$r = 9\%$	$\sigma = 32\%$
58.00	-133.72	-299.83
58.50	-97.22	-261.87
59.00	-72.19	-234.69
59.50	-58.50	-218.14
60.00	-55.96	-212.08
60.50	-64.38	-216.33
61.00	-83.51	-230.68
61.50	-113.07	-254.90
62.00	-152.78	-288.74

Hitro se pokaže, da je delta zaščita daleč od zadovoljivosti. Ravno zaradi spreminjanja več parametrov hkrati, morajo v praksi investitorji sproti korigirati delta zaščito oziroma za izboljšanje stabilnosti zaščite se morajo navezati tudi na zaščito ostalih spreminjajočih se parametrov.

6.3.2. *Delta-gama zaščita.* Če se odločimo za delta-gama zaščito, moramo narediti tak portfelj, kjer bomo lahko delto in gamo postavili na nič. Naš osnovni portfelj (x, y, z) za to ni primeren, saj nam dovoljuje, da lahko za zaščito zavzamemo le eno pozicijo in se tako zaščitimo le proti enemu spreminjajočemu se parametru. Za dosego dvojne zaščite tako potrebujemo še eno nakupno opcijo. Naj ima le-ta čas zapadlosti $T' = 60$dni in izvršilno ceno $K' = \$65$. Konstruiramo nov portfelj (x, y, z, z'), kjer je z' pozicija v dodatni opciji. Ostali parametri ostanejo nespremenjeni, tj. $r = 8\%$, $\sigma = 30\%$ in $S_0 = \$60$.

TABELA 3. Spreminjanje vrednosti porfelja ob nihanju cene osnovnega premoženja pri delta-gama zaščiti in delta zaščiti

S	$delta - gama$	$delta$
58.00	-2.04	-71.35
58.50	0.30	-31.56
59.00	1.07	-3.26
59.50	0.81	13.69
60.00	0.02	19.45
60.50	-0.79	14.22
61.00	-1.11	-1.77
61.50	-0.49	-28.24
62.00	1.52	-64.93

Več kot razvidno je, da nam delta-gama nevtralni portfelj ponudi veliko boljšo zaščito kot samo delta zaščita.

6.3.3. *Delta-vega zaščita.* Iz tabele 2 je razvidno, da če se spremeni volatilnost, vrednost delta zaščite hitro izgubi smisel. V praksi investitorjem ravno volatilnost povzroča največ sivih las, saj jo je zelo težko napovedati. Poleg tega so pa mnenja, katere ocene za samo volatilnost izbrati, zelo različna. Ravno zato veliko investitorjev posega po zaščiti pred samo spremembo volatilnosti, kar nam lepo osmisli tudi naslednja tabela:

Tabela 4. Spreminjanje vrednosti porfelja ob nihanju cene osnovnega premoženja pri delta-vega zaščiti in delta zaščiti, če se volatilnost spremeni na $\sigma = 32\%$

S	$delta - vega$	$delta$
58.00	-5.90	-299.83
58.50	-12.81	-261.87
59.00	-16.05	-234.69
59.50	-14.99	-218.14
60.00	-9.06	-212.08
60.50	2.27	-216.33
61.00	19.52	-230.68
61.50	43.17	-254.90
62.00	73.62	-288.74

7. Zaključek

Ilustrativni primer nazorno pokaže, da zaščitni parametri ne predstavljajo popolne zaščite in vsekakor njihova uporaba ne pomeni, da bomo z našim trgovanjem posegli le po pozitivnih rezultatih. Je pa res, da nam "grki" ne glede na gibanje cene osnovnega instrumenta občutno omejijo naše izgube.

V diplomskem seminarju lahko večkrat zasledimo poudarke o hkratnem spreminjanju različnih parametrov, ki lahko posežejo v vrednost našega finančnega portfelja. Ker se te vrednosti spreminjajo dnevno (oziroma celo hitreje), je navada, da morajo v praksi investitorji neprestano in predvsem čimbolj natančno preračunavati vrednosti zaščitnih parametrov, ki jih uporabljajo ter pri tem ustrezno popravljati razmerja v portfeljih, s katerimi upravljajo.

V delu sem opisala nekaj načinov izračuna zaščitnih parametrov. Osnovna sta zagotovo binomski (CRR) model in Black-Scholesov model, ki pa ponujata veliko razlčnih izpeljank in poskusov izboljšanja natančnosti. Tega sta se v svojem članku lotila Pelsser in Vorst [4], ki sta osnovno drevo binomskega modela razširila v t.i. razširjeno binomsko drevo. Ta razširi osnovno mrežo in s tem dovoljuje negativen čas. Prišla sta do zaključka, da je ta metoda hitrejša in predvsem bolj natančna od numeričnega odvajanja.

Kasneje sta to, kot osnovo za svoj članek, vzela Chung in Shackleton [2] in opozorila na veliko pomankljivost zaradi prevelike odvisnosti od izbire intervala, kar pa je posledica diskretnosti modela. Tako sta združila diskretnega z zveznim Black-Scholesovim modelom in se na ta način izognila problemu odsekoma linearne funkcije, katera je pri [4] privedla do nekaj nesmiselnih rezultatov.

Razvoj računalniške tehnologije je prinesel velik napredek pri ugotavljanju tovrstnih pomankljivosti in prispeval velik delež pri razvoju natančenjših algoritmov. A s tem, ko na eni strani lažje preverimo določene parametre, nas lahko poplava informacij hitro privede do zmede in skakanja med različnimi pristopi. Članki, na katere sem se navezala v diplomskem seminarju, so bili v zadnjih letih deležni veliko razprav in predvsem nadgradenj. Odpirajo se nova vprašanja, katerih odgovori bodo nedvomno prispevali k še natančnejšim vrednotenjem.

Za konec bi še omenila vprašanje, na katerega sem si skozi prebiranje gradiva in pisanje diplomskega seminarja na vsak način želela odgovoriti. Kako pa vse to deluje v praksi? Večina zgoraj opisanih izračunov je že sestavni del vgrajenih funkcij v programskih jezikih. Seveda sem naivno mislila in upala, da bom naletela na metodo, ki vedno deluje. A zavedati se je potrebno, da v praksi na dolgi rok nikoli ne bomo posegali le po dobičkih in ravno tako ne bomo samo izgubljali. Obstaja več poti, ki vodijo do istega cilja in hkrati te ravno te lahko odpeljejo daleč stran od željenega. Izbira metode je stvar posameznika in njegovih preferenc, predvsem pa načina s katerim upravlja premoženje.

Slovar strokovnih izrazov

asset sredstvo

bond obveznica

financial derivative izvedeni finančni instrument

hedging zaščita, ščitenje (pred različnimi tržnimi tveganji)

hedging portfolio zaščitni portfelj

interest rate obrestna mera

lattice mreža

maturity date čas zapadlosti

option opcija

risk free rate netvegana obrestna mera

share delnica

strike price (also exercise price) izvršilna cena

trader upravitelj premoženja

underlying instrument osnovno premoženje

volatility volatilnost

Literatura

[1] M. Broadie in J. Detemple, *American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods*, JSTOR, **9** (1996) 1211–1250.

[2] S.L. Chung in M. Shackleton, *The Binomial Black-Scholes Model and the Greeks*, J Futures Markets, **22** (2002) 143–153.

[3] F. Diener in M. Diener, *Asymptotics of the Price Oscillations of a European Call Option in a Tree Model*, Math Financ, **14** (2004) 271–293.

[4] A. Pelsser in T. Vorst, *The Binomial Model and the Greeks*, J Derivatives, **1** (1994) 45–49.

[5] M. Capinski in T. Zastawniak, *Mathematics for Finance*, Springer Undergraduate Mathematics Series, New York, 2005.

[6] J. Downes, J.E. Goodman, *Dictionary of Finance and Investment Terms*, **9**, Barron's Educational Series, Inc., New York, 2014.

[7] E.G. Haug, *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, **2**, McGraw-Hill, New York, 2007.

[8] J.C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, **6**, Prentice Hall, New Jersey, 2006.

[9] D.M. Chance, *Calculating the Greeks in the Binomial Model*, junij 2010, [ogled 6.11.2013], dostopno na `http://www.bus.lsu.edu/academics/finance/faculty/dchance/Instructional/TN05-02.pdf`.

[10] *Black-Scholes*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 14. 4. 2017], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Black-Scholes_model`.

[11] *Greeks (finance)*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 14. 4. 2017], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Greeks_(finance)`.

[12] *Hedge (finance)*, v: Wiipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 14. 4. 2017], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Hedge_(finance)`.

[13] *Options Pricing: The Greeks*, v: Investopedia, [ogled 14. 4. 2017], dostopno na `http://www.investopedia.com/university/options-pricing/greeks.asp`.

[14] *Option Pricing Models and the "Greeks"*, v: Hoadley Trading & Investment Tools, [ogled 15. 4. 2017], dostopno na `http://www.hoadley.net/options/bs.htm`.