UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Miha Šifrer

Optimizacija strategij super-varovanja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Mihael Perman

Ljubljana, 2017

Kazalo

Optimizacija strategij super-varovanja

Povzetek

V nalogi se ukvarjamo s problemom določanja cene eksotične nakupne opcije. Tega se lotimo tako, da poiščemo strategijo super-varovanja s pomočjo evropskih nakupnih opcij. Pri tem uporabljamo inverze porazdelitvenih funkcij slučajnih spremenljivk in komonotone modifikacije slučajnih vektorjev. Obravnavamo optimalnost takih strategij in rezultate uporabimo v Black-Scholesovem modelu in v primeru končnega trga.

Optimization of super-replicating strategies

Abstract

In this paper we investigate the problem of determining prices of exotic call options. This is done by finding a super-replicating strategy using European call options. Results are based on the inverses of cumulative distribution functions and comonotonic modifications. We examine the optimality of such strategies and use the results in the Black-Scholes model and in the finite market case.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20

Ključne besede: strategija super-varovanja, nakupna opcija, komonotonost

Keywords: super-replicating strategy, call option, comonotonicity

1. Uvod

1.1. **Predstavitev problema.** Imejmo finančni trg s končno množico časov $\{T_0, \ldots, T_n = T\}$, kjer je T_0 današnji trenutek. Na trgu obstaja množica vrednostnih papirjev in množica investitorjev, ki s temi papirji trgujejo. Postavimo se v vlogo investitorja. Privzemimo, da sta na voljo dva vrednostna papirja:

- netvegan vrednostni papir, ki ima danes vrednost 1, ob času T_i pa vrednost e^{rT_i}. Lahko si ga predstavljamo kot bančni račun, na katerega polagamo denar ali pa si ga izposojamo, oboje po fiksni obrestni meri r.
- tvegan vrednostni papir, ki je lahko delnica, obveznica, materialna dobrina itd. Bistveno je, da pri tveganem vrednostnem papirju poznamo samo današnjo vrednost, ne pa tudi vrednosti v prihodnosti. Vrednost tveganega vrednostnega papirja ob času T_i označimo z X_i.

Navedimo še nekaj splošnih lastnosti finančnega trga:

- trg je brez trenja (trgovanje ne povzroča nobenih stroškov)
- na trgu je na voljo poljubna količina vsakega vrednostnega papirja
- investitorji so racionalni
- investitorji so dobro informirani
- pri vsakem vrednostnem papirju lahko investitor zavzame dolgo ali kratko pozicijo. Dolga pozicija pomeni, da ima vrednostni papir v lasti, kratka pa, da si ga izposodi.
- vrednostni papirji so poljubno deljivi (količina, s katero se trguje, ni nujno celo število)
- trgovanje je možno ob časih $\{T_0, \ldots, T_n\}$. Ob času T_n mora vsak investitor zapreti svojo pozicijo (proda, kar ima v lasti, in vrne izposojeno).

Na trgu lahko »ustvarimo« nove vrednostne papirje, ki so vezani na tvegan vrednostni papir. Ukvarjali se bomo z evropskimi in eksotičnimi nakupnimi opcijami.

Definicija 1.1. *Evropska nakupna opcija* z izvršilno ceno K in zapadlostjo T_i imetniku omogoča, da ob času T_i od izdajatelja kupi eno enoto tveganega vrednostnega papirja po ceni K.

Pomembno je, da opcija imetniku daje pravico, ne pa tudi obveze, do nakupa. Ker je imetnik opcije racionalen, bo opcijo izvršil le, če bo ob času T_i veljalo $X_i > K$. Tedaj lahko kupi vrednostni papir po ceni K in ga takoj proda na trgu po ceni X_i. V tem primeru je torej vrednost opcije enaka $X_i - K$. V nasprotnem primeru opcija nima vrednosti. Če uvedemo oznako $x_+ = \max\{x, 0\}$, lahko rečemo, da ima evropska nakupna opcija ob zapadlosti vrednost $(X_i - K)_+$. Izplačilo eksotične nakupne opcije je malo bolj zapleteno:

Definicija 1.2. Naj bo $\mathbb{S} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i$, kjer so ω_i pozitivna realna števila. *Eksotična nakupna opcija* z izvršilno ceno K ob času T_n izplača $(\mathbb{S} - K)_+$.

Današnje vrednosti opcij ne poznamo, saj ne poznamo vrednosti tveganega vrednostnega papirja v prihodnosti. V finančni matematiki jih določamo tako, da količine X_i obravnavamo kot slučajne spremenljivke. Ta pristop zelo dobro deluje pri evropskih nakupnih opcijah, pri eksotičnih pa malo slabše. Zato bomo poskusili najti čim boljšo zgornjo mejo za ceno eksotične nakupne opcije. Prej bomo potrebovali nekaj dejstev iz finančne matematike.

1.2. **Nekaj dejstev iz finančne matematike.** Dejstva povzemamo iz vira [5] (str. 65-75). Naj bo na trgu na voljo k različnih vrednostnih papirjev, med katerimi je tudi netvegan vrednostni papir. Naj bo Ω množica vseh možnih razvojev trga. Zaradi enostavnosti privzemimo, da je končna, torej $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$. Z $\mathbb{F} = (F_i)_{i=0}^n$ označimo zaporedje σ-algeber na Ω, za katere velja:

- $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $F_n = 2^\Omega$
- $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$

Tako zaporedje imenujemo *filtracija*. Intuitivno je F_i vsa informacija o trgu, ki je na voljo ob času T_i. Izberimo še verjetnostno mero Q, da za vsak $\omega_i \in \Omega$ velja $Q(\omega_i) > 0$. Dobili smo filtriran verjetnostni prostor $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$. Označimo ceno j-tega vrednostnega papirja ob času T_i z S_i^j. Zahtevamo, da so S_i^j slučajne spremenljivke glede na $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$. Smiselno je tudi zahtevati, da ob času T_i natanko poznamo vrednost S_i^j. V jeziku teorije mere rečemo, da so S_i^j *merljive* glede na σ-algebro F_i (in posledično tudi glede na $F_{i+1}, F_{i+2}, \dots, F_n$).

Definicija 1.3. *Strategija trgovanja* ϕ je $(n+1) \times k$-razsežna matrika, ki na mestu (i,j) vsebuje količino j-tega vrednostnega papirja, ki ga bomo imeli v lasti ob času T_i. Element matrike na mestu (i,j) označimo s ϕ_i^j.

Opomba 1.4. Po tej definiciji je strategija trgovanja natanko določena že danes. Seveda bi lahko strategijo sproti prilagajali v skladu z razvojem trga, torej bi matrika vsebovala slučajne spremenljivke. V tem primeru govorimo o dinamični strategiji trgovanja, v našem primeru pa o statični.

Opomba 1.5. Iz predpostavk o trgu sledi, da so elementi ϕ poljubna realna števila.

Definicija 1.6. Vrednost strategije ϕ ob času T_i definiramo kot

$$V_i(\phi) = \sum_{j=1}^{k} \phi_i^j S_i^j$$

Definicija 1.7. Strategija ϕ je *strategija samofinanciranja*, če za vsak i iz $\{0, \dots, n-1\}$ velja

$$\sum_{j=1}^{k} \phi_i^j S_{i+1}^j = V_{i+1}(\phi)$$

Če je ϕ strategija samofinanciranja, bomo z investicijo ob času T_0 ravno pokrili stroške preoblikovanja strategije ob času T_1 in tako dalje. Taka strategija torej do časa T_n ne zahteva dodatnih sredstev niti ne prinaša dobička. Sedaj lahko definiramo strategije varovanja in strategije super-varovanja za nakupne opcije. Definirali jih bomo splošneje za poljubno pogojno terjatev Y z zapadlostjo T_i. To je slučajna spremenljivka, ki je merljiva glede na F_i, kar neformalno pomeni, da ob času T_i točno poznamo njeno vrednost. Kot že rečeno, sta evropska in eksotična nakupna opcija dva primera pogojnih terjatev.

Definicija 1.8. *Strategija varovanja* za pogojno terjatev Y z zapadlostjo T_i je strategija samofinanciranja ϕ, za katero velja

$$V_i(\phi) = Y$$

Definicija 1.9. *Strategija super-varovanja* za pogojno terjatev Y z zapadlostjo T_i je strategija samofinanciranja ϕ, za katero velja

$$V_i(\phi) \geq Y$$

Če se postavimo v vlogo izdajatelja opcije, nam obstoj strategije varovanja ϕ omogoča, da danes investiramo $V_0(\phi)$ v strategijo ϕ in imamo ob zapadlosti v vsakem primeru ravno dovolj sredstev za poplačilo obveznosti imetniku opcije. Podobno imamo pri strategiji super-varovanja na voljo vsaj toliko sredstev, kot jih potrebujemo. Seveda se je treba najprej vprašati, ali taka strategija sploh obstaja.

Definicija 1.10. Pogojna terjatev Y je *dosegljiva*, če zanjo obstaja strategija varovanja.

Definicija 1.11. Trg je *poln*, če je vsaka pogojna terjatev dosegljiva.

Recimo, da je pogojna terjatev (recimo opcija) dosegljiva. Postavimo se v vlogo izdajatelja opcije. Smiselno bi bilo, da je današnja cena opcije enaka strošku, ki ga imamo z vzpostavitvijo strategije varovanja. To bo držalo, če trg ne dopušča arbitraže.

Definicija 1.12. Strategiji samofinanciranja ϕ rečemo *arbitražna priložnost* za zapadlost T_i, če veljajo relacije

$$\begin{aligned} V_0(\phi) &= 0 \\ Q(V_i(\phi) \geq 0) &= 1 \\ Q(V_i(\phi) > 0) &> 0 \end{aligned}$$

Definicija 1.13. Trg ne dopušča arbitraže, če ne obstaja arbitražna priložnost za nobeno zapadlost T_i.

Obstoj arbitražne priložnosti pomeni, da lahko najdemo strategijo trgovanja, ki je danes zastonj, v prihodnosti pa z njo skoraj gotovo nimamo izgube, imamo pa možnost dobička. Predpostavimo, da trg ne dopušča arbitraže (posledično je ne smejo dopuščati naši modeli). Izkaže se, da tedaj lahko pogojne terjatve vrednotimo s pomočjo pričakovanih vrednosti. Najprej definirajmo diskontirane cene.

Definicija 1.14. *Diskontirana vrednost* j-tega vrednostnega papirja ob času i je enaka

$$\tilde{S}_i^j = e^{-rT_i} S_i^j$$

Za vrednotenje pogojnih terjatev je treba izbrati drugo verjetnostno mero.

Definicija 1.15. Verjetnost P je *ekvivalentna martingalska mera* glede na verjetnostni prostor $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$, če velja:

- za vsak dogodek $A \in \mathbb{F}$ velja
$$P(A) = 0 \iff Q(A) = 0$$
- za vse indekse $l \in \{1, \ldots, k\}$, $i \in \{0, \ldots, n\}$ in $j \in \{0, \ldots, n-i\}$ velja
$$E_P[\tilde{S}_{i+j}^l | F_i] = \tilde{S}_i^l$$

Sedaj lahko brez dokaza nanizamo štiri trditve:

Izrek 1.16 (Prvi osnovni izrek vrednotenja premoženja)**.** *Trg ne dopušča arbitraže natanko tedaj, ko obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost P.*

Trditev 1.17. *Naj trg ne dopušča arbitraže in naj bo Y dosegljiva pogojna terjatev z zapadlostjo T_i. Potem je današnja cena terjatve Y enaka*

$$e^{-rT_i}E[Y]$$

Pričakovano vrednost računamo glede na (neko) ekvivalentno martingalsko verjetnost P.

Izrek 1.18 (Drugi osnovni izrek vrednotenja premoženja)**.** *Naj trg ne dopušča arbitraže. Potem je trg poln natanko tedaj, ko je ekvivalentna martingalska verjetnost samo ena.*

Trditev 1.19. *Naj trg ne dopušča arbitraže. Potem za vsako dosegljivo pogojno terjatev obstaja natanko ena strategija varovanja.*

V nadaljevanju bomo predpostavili, da trg ne dopušča arbitraže in da je vsaka pogojna terjatev, na katero naletimo, dosegljiva. Vse verjetnosti dogodkov, porazdelitve in pričakovane vrednosti bomo računali glede na ekvivalentno martingalsko verjetnost P. Vedno bomo predpostavljali, da pričakovane vrednosti obstajajo.

Opomba 1.20. V tem podpoglavju smo predpostavili, da obstaja le končno mnogo možnih razvojev trga, zato so cene vrednostnih papirjev diskretno porazdeljene slučajne spremenljivke. V nalogi bomo obravnavali splošne slučajne spremenljivke.

Označimo današnjo ceno evropske nakupne opcije z zapadlostjo T_i s $C_i[K]$. Zaradi trditve 1.17 velja

$$C_i[K] = e^{-rT_i}E[(X_i - K)_+]$$

Predpostavimo, da za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ in vsak $K \geq 0$ poznamo $C_i[K]$. Zanimala nas bo cena eksotične nakupne opcije, ki jo označimo s $C[K]$. Spet velja

$$C[K] = e^{-rT_i}E[(\mathbb{S} - K)_+]$$

V nalogi bomo pokazali: če za vsak i in K poznamo $C_i[K]$, potem poznamo porazdelitev slučajne spremenljivke X_i. To nam še vedno ne omogoča izračuna $C[K]$ – morali bi namreč poznati porazdelitev slučajne spremenljivke $\mathbb{S}$, to je, poznati bi morali porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$. Obstaja še bolj praktičen pomislek: na trgu ne morejo biti na voljo opcije za neskončno mnogo izvršilnimi cenami K. Zato bomo namesto izračuna $C[K]$ raje poiskali strategijo super-varovanja s pomočjo cen $C_i[K]$. Našli bomo torej strategijo trgovanja, ki bo imela ob času T večjo ali enako vrednost od $(\mathbb{S} - K)_+$. Ker bi želeli, da je takšna strategija čim cenejša, bomo poskusili najti tak nabor izvršilnih cen $(K_1, \ldots, K_n)$, da bo vsota $\sum_{i=1}^n \omega_i E[(X_i - K_i)_+]$ minimalna. Postavimo še dodatno omejitev $\sum_{i=1}^n \omega_i K_i \leq K$.

Trditev 1.21. *Pod pogojem $\sum_{i=1}^n \omega_i K_i \leq K$ velja*

$$\left(\sum_{i=1}^n \omega_i X_i - K\right)_+ \leq \sum_{i=1}^n \omega_i (X_i - K_i)_+$$

Dokaz. Funkcija $f(K) = (X - K)_+$ je (šibko) padajoča. Ker so števila ω_i pozitivna, je $(\omega_i a)_+ = \omega_i a_+$. Poleg tega velja trikotniška neenakost: $(a+b)_+ \leq a_+ + b_+$. Torej lahko ocenimo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i - K\right)_+ \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i (X_i - K_i)\right)_+ \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i (X_i - K_i)_+$$

□

Leva stran v trditvi 1.21 je enaka izplačilu eksotične opcije ob času T. Desna stran je izplačilo ob času T strategije trgovanja, kjer danes za vsak i kupimo količino $\omega_i e^{-r(T-T_i)}$ evropske nakupne opcije z zapadlostjo T_i in izvršilno ceno K_i, ob zapadlosti pa njeno izplačilo naložimo v netvegan vrednostni papir do časa T. Zgornja neenakost zagotavlja, da je vsaka taka strategija res strategija super-varovanja.

Naš optimizacijski problem se torej glasi: iščemo

$$\min_{K_1,\ldots,K_n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i E[(X_i - K_i)_+] \quad \text{pod pogojem} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i K_i \leq K$$

1.3. **Pričakovana vrednost.** Definirali bomo pričakovano vrednost slučajne spremenljivke X s pomočjo porazdelitvene funkcije F_X. Pri tem bomo sledili [4] (str. 156-160 in 386-389).

Definicija 1.22. Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljena diskretno, tj. njena zaloga vrednosti je kvečjemu števno neskončna. Elemente njene zaloge vrednosti indeksirajmo kot $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Njeno pričakovano vrednost definiramo kot

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X = k)$$

To definicijo bomo poskusili razširiti na vse slučajne spremenljivke. Recimo najprej, da je X omejena. Tedaj obstajata števili a in b, da velja $P(a < X \leq b) = 1$. Razdelimo interval $[a, b]$ na n delov:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Na vsakem intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ izberimo točko x_k^* in naredimo vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^* P(x_{k-1} < X \leq x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k^* (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

To je pričakovana vrednost diskretno porazdeljene slučajne spremenljivke X^* , za katero velja

$$P(X^* = x_k^*) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

Ta slučajna spremenljivka nam služi za aproksimacijo X. Ideja je, da drobimo interval $[a, b]$ na vedno manjše dele in računamo pričakovane vrednosti $E(X^*)$. Na ta način dobimo vedno boljšo aproksimacijo $E(X)$. V limiti dobimo t. i. Stieltjesov integral.

Definicija 1.23. Naj bosta omejeni funkciji f in g definirani na intervalu $[a, b]$. Naredimo delitev intervala:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Na vsakem intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ izberimo točko x_k^*. Zapišimo *Stieltjesovo vsoto*

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

Če pri pogoju $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ obstaja limita Stieltjesovih vsot S (neodvisno od delitve intervala in izbire točk x_k^*), jo imenujemo *Stieltjesov integral* funkcije f glede na funkcijo g. Stieltjesov integral označimo kot

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

Če v definiciji vzamemo $g(x) = x$, dobimo običajen Riemannov integral funkcije f.

Opomba 1.24. Na neomejenem intervalu definiramo integral tako, da pošljemo krajišči v neskončnost.

Definicija 1.25. Naj obstaja integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x)$. Pričakovano vrednost slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$$

Iz te formule še vedno ne znamo izračunati pričakovane vrednosti. Na srečo obstaja izrek, ki računanje pričakovane vrednosti prevede na računanje Riemannovega integrala. Najprej brez dokaza navedimo formulo za Stieltjesov integral *per partes.*

Izrek 1.26. *Če obstaja eden od integralov $\int_a^b f(x)dg(x)$ in $\int_a^b g(x)df(x)$, obstaja tudi drugi in velja relacija*

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Iz formule *per partes* sledi naslednji izrek:

Izrek 1.27. *Če za slučajno spremenljivko X obstaja $E[|X|]$, velja formula*

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx$$

Dokaz. Pričakovano vrednost lahko zapišemo kot

$$E(X) = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} x dF_X(x) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x dF_X(x) + \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} x dF_X(x)$$

Z integracijo *per partes* dobimo

$$\int_0^a x dF_X(x) = [xF_X(x)]_0^a - \int_0^a F_X(x)dx = [x(F_X(x) - 1)]_0^a + \int_0^a (1 - F_X(x))dx$$

$$\int_{-a}^{0} x dF_X(x) = [xF_X(x)]_{-a}^{0} - \int_{-a}^{0} F_X(x)dx$$

Izraza seštejemo in pošljemo $a \to \infty$. Pri tem upoštevamo, da iz ocen

$$0 \le \lim_{x\to\infty} x(1 - F_X(x)) \le \lim_{x\to\infty} \int_x^{\infty} y dF_X(y) = 0$$

in

$$0 \leq \lim_{x\to-\infty} xF_X(x) \leq \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} ydF_X(y) = 0$$

sledi, da je

$$\lim_{x\to\infty} x(1 - F_X(x)) = \lim_{x\to-\infty} xF_X(x) = 0.$$

□

Posledica 1.28. *Če za nenegativno slučajno spremenljivko X obstaja njena pričakovana vrednost, potem velja formula*

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx.$$

2. Inverzi porazdelitvenih funkcij slučajnih spremenljivk

V tem razdelku bomo sledili viru [1] (3. poglavje).

Definicija 2.1. *Kumulativno porazdelitveno funkcijo* slučajne spremenljivke X definiramo kot $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Definirajmo levo in desno zveznost funkcije:

Definicija 2.2. Funkcija f je *levo zvezna* v točki a, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, brž ko je $x \in (a - \delta, a)$.

Definicija 2.3. Funkcija f je *desno zvezna* v točki a, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, brž ko je $x \in (a, a + \delta)$.

Navedimo nekaj lastnosti F_X:

(i) F_X je vedno dobro definirana na vsej realni osi
(ii) F_X je nepadajoča.
(iii) F_X je desno zvezna.
(iv) V vsaki točki obstaja leva limita.
(v) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

Trditev 2.4 ([6, izrek 4.30])**.** *Funkcija F_X ima kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti.*

Dokaz. Vsaki točki nezveznosti x priredimo interval med levo in desno limito F_X v točki x. Ker je F_X nepadajoča, so ti intervali med sabo različni. Ker so racionalna števila gosta podmnožica realnih števil, lahko vsakemu intervalu priredimo racionalno število $r(x)$. Ker za $x_1 \neq x_2$ velja $r(x_1) \neq r(x_2)$, smo našli injektivno preslikavo med množico točk nezveznosti in množico racionalnih števil. Torej je točk nezveznosti števno mnogo. □

Opomba 2.5. V nalogi se omejimo na nenegativne slučajne spremenljivke, torej je $F_X(x) = 0$ za vsak negativen x.

Želeli bi definirati inverz $F_X^{-1}(p)$ za $p \in [0, 1]$. Kumulativna porazdelitvena funkcija seveda ni nujno obrnljiva preslikava. Težava se pojavi v točkah nezveznosti in na intervalih, kjer je F_X konstantna.

Definicija 2.6. *Levi inverz* kumulativne porazdelitvene funkcije definiramo kot

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}, p \in [0, 1].$$

Definicija 2.7. *Desni inverz* definiramo kot

$$F_X^{-1+}(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq p\}, p \in [0,1].$$

Po dogovoru je $\inf \emptyset = +\infty$ in $\sup \emptyset = -\infty$. Opazimo, da je $F_X^{-1}(0) = -\infty$ in $F_X^{-1+}(1) = +\infty$, za $p \in (0,1)$ pa imata inverza vedno končni vrednosti. Prav tako skoraj gotovo velja

$$X \geq F_X^{-1+}(0)$$

in

$$X \leq F_X^{-1}(1).$$

Ker smo predpostavili, da je X skoraj gotovo nenegativna, $F_X^{-1+}(0)$ obstaja, medtem ko $F_X^{-1}(1)$ obstaja le, če je X skoraj gotovo omejena.

Definicija infimuma pove:

(i) Če je $F_X(x) \geq p$, potem je $x \geq F_X^{-1}(p)$.
(ii) Če je $x > F_X^{-1}(p)$, potem obstaja $y < x$, da je $F_X(y) \geq p$.

Podobno za supremum:

(i) Če je $F_X(x) \leq p$, potem je $x \leq F_X^{-1+}(p)$.
(ii) Če je $x < F_X^{-1+}(p)$, potem obstaja $y > x$, da je $F_X(y) \leq p$.

Trditev 2.8. *Inverza imata naslednje lastnosti:*

(i) $F_X^{-1}(p) \leq x \iff p \leq F_X(x)$
(ii) F_X^{-1} *je nepadajoča in levo zvezna*
(iii) $F_X^{-1+}(p) \geq x \iff p \geq F_X(x)$
(iv) F_X^{-1+} *je nepadajoča in desno zvezna*

Dokaz. Dokazali bomo prvi dve točki.

(i): Najprej dokažimo implikacijo v desno. Naj bo $F_X^{-1}(p) \leq x$. Ker je F_X nepadajoča funkcija, jo lahko uporabimo na obeh straneh neenakosti:

$$F_X(\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}) \leq F_X(x)$$

Zaradi desne zveznosti F_X velja

$$F_X(\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}) \geq p.$$

Iz obeh neenakosti sledi $p \leq F_X(x)$. Implikacija v levo sledi iz definicije infimuma.
(ii): Naj bo $p < q$. Potem je

$$\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq q\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}$$

in zato

$$\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} \leq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq q\}.$$

Torej je F_X^{-1} nepadajoča. Dokažimo še levo zveznost. Izberimo si $p \in (0,1)$ in $\epsilon > 0$. Iščemo tak pozitiven δ, da bo iz $x \in (p - \delta)$ sledilo $|F_X^{-1}(x) - F_X^{-1}(p)| < \epsilon$. Ker je F_X^{-1} nepadajoča, je

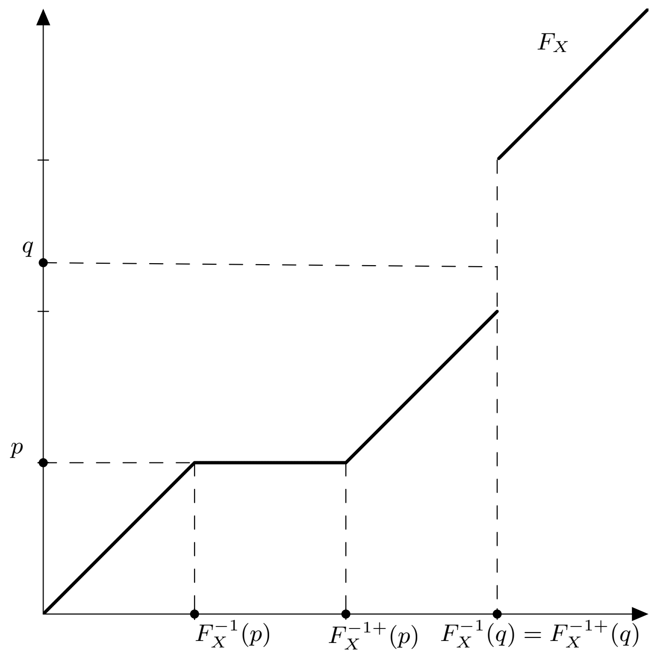
$$|F_X^{-1}(x) - F_X^{-1}(p)| = F_X^{-1}(p) - F_X^{-1}(x)$$

Tej neenakosti je ekvivalentna

$$F_X^{-1}(x) > F_X^{-1}(p) - \epsilon,$$

po prvi točki trditve pa to drži natanko tedaj, ko velja

$$x > F_X(F_X^{-1}(p) - \epsilon)$$



Slika 1. Primer inverzov za F_X

Iz definicije levega inverza pa sledi, da za vsak pozitiven ϵ velja

$$F_X(F_X^{-1}(p) - \epsilon) < p,$$

torej imamo neenakost

$$F_X(F_X^{-1}(p) - \epsilon) < x < p.$$

Sledi, da lahko vzamemo $\delta = p - F_X(F_X^{-1}(p) - \epsilon)$. □

Opazimo, da se inverza ujemata povsod razen na intervalih, kjer je F_X konstantna. Na teh intervalih je F_X^{-1} levo, F_X^{-1+} pa desno krajišče intervala konstantnosti. Za inverz bi lahko vzeli tudi katerokoli točko med njima. V ta namen definiramo še α-inverz.

Definicija 2.9. *α-inverz* kumulativne porazdelitvene funkcije je definiran kot konveksna kombinacija F_X^{-1} in F_X^{-1+}:

$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha)F_X^{-1+}(p), p \in (0,1), \alpha \in [0,1]$$

Trditev 2.10. *Naj bo X slučajna spremenljivka in $d \in \mathbb{R}$ tak, da je $0 < F_X(d) < 1$. Potem obstaja $\alpha_d \in [0,1]$, da je $F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)) = d$.*

Dokaz. Premislili smo že, da sta vrednosti $F_X^{-1}(F_X(d))$ in $F_X^{-1+}(F_X(d))$ končni, poleg tega velja $F_X^{-1}(F_X(d)) \leq d \leq F_X^{-1+}(F_X(d))$. Torej lahko d izrazimo kot konveksno kombinacijo:

$$d = \alpha_d F_X^{-1}(F_X(d)) + (1-\alpha_d)F_X^{-1+}(F_X(d)) = F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d))$$

□

Izrek 2.11. *Naj bo g funkcija, X in $g(X)$ slučajni spremenljivki, in $0 < p < 1$.*

(i) *Če je g nepadajoča in levo zvezna, je* $F^{-1}_{g(X)}(p) = g(F^{-1}_X(p))$.
(ii) *Če je g nepadajoča in desno zvezna, je* $F^{-1+}_{g(X)}(p) = g(F^{-1+}_X(p))$.

Dokaz. Dokazali bomo, da je $F^{-1}_{g(X)}(p) \leq x \iff g(F^{-1}_X(p)) \leq x$ za vse x. Iz trditve 2.8 sledi, da je
$$F^{-1}_{g(X)}(p) \leq x \iff p \leq F_{g(X)}(x).$$
Ker je g levo zvezna, je
$$g(z) \leq x \iff z \leq \sup\{y \in \mathbb{R} | g(y) \leq x\}.$$
Seveda $\sup\{y \in \mathbb{R} | g(y) \leq x\}$ ne obstaja vedno. To se zgodi, če je g navzgor ali navzdol omejena z x. Vendar v tem primeru očitno velja
$$F^{-1}_{g(X)}(p) \leq x \iff g(F^{-1}_X(p)) \leq x.$$
Od tod sledi, da je
$$F_{g(X)}(x) = F_X(\sup\{y \in \mathbb{R} | g(y) \leq x\}).$$
Če je $\sup\{y \in \mathbb{R} | g(y) \leq x\}$ končen, lahko spet uporabimo trditev 2.8 in dobimo
$$p \leq F_X(\sup\{y \in \mathbb{R} | g(y) \leq x\}) \iff F^{-1}_X(p) \leq \sup\{y \in \mathbb{R} | g(y) \leq x\}.$$
Ker je g nepadajoča in levo zvezna, je
$$F^{-1}_X(p) \leq \sup\{y \in \mathbb{R} | g(y) \leq x\} \iff g(F^{-1}_X(p)) \leq x.$$
Iz naštetega sledi želena neenakost. Drugo točko dokažemo podobno. □

3. Komonotonost

V tem razdelku sledimo viru [1] (razdelki 4.1, 4.4 in 5.1).

V nadaljevanju z U označimo slučajno spremenljivko, porazdeljeno enakomerno na intervalu (0,1).

Trditev 3.1. *Naj bo X slučajna spremenljivka. Potem imata X in $F^{-1}_X(U)$ enaki porazdelitveni funkciji, kar označimo z* $X \stackrel{d}{=} F^{-1}_X(U)$.

Dokaz. Iz trditve 2.8 sledi $F^{-1}_X(U) \leq x \iff U \leq F_X(x)$. Torej je
$$P(F^{-1}_X(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$
□

Definicija 3.2. Naj bo $(X_1, \ldots, X_n)$ slučajen vektor. Njegova *komonotona modifikacija* $(X^c_1, \ldots, X^c_n)$ je slučajen vektor, definiran z
$$(X^c_1, \ldots, X^c_n) = (F^{-1}_{X_1}(U), \ldots, F^{-1}_{X_n}(U)).$$
Vsoto njegovih komponent označimo z S^c:
$$S^c = X^c_1 + \cdots + X^c_n.$$

Komponente vektorja $(X^c_1, \ldots, X^c_n)$ so med sabo »močno odvisne« v smislu, da so nepadajoče funkcije iste slučajne spremenljivke. Robne porazdelitve komponent X^c_i pa so enake porazdelitvam komponent X_i. Pokazali bomo, da je S^c zgornja meja za $S = X_1 + \cdots + X_n$ v smislu konveksne urejenosti.

Definicija 3.3. Za vektorja $\underline{x}$ in $\underline{y}$ iz $\mathbb{R}^n$ definiramo relacijo $\leq$ kot
$$\underline{x} \leq \underline{y} \iff x_i \leq y_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$
.

Definicija 3.4. Množica $A \subset \mathbb{R}^n$ je *komonotona*, če za vse $\underline{x}$ in $\underline{y}$ iz A velja bodisi $\underline{x} \leq \underline{y}$ bodisi $\underline{y} \leq \underline{x}$.

Trditev 3.5. *Naslednje trditve o slučajnem vektorju* $\underline{X}$ *so ekvivalentne:*

(i) $(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U))$

(ii) Obstaja komonotona množica A*, da je* $P(X \in A) = 1$.

(iii) $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots F_{X_n}(x_n)\}$

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$: Slučajen vektor $\underline{X}$ je z verjetnostjo 1 vsebovan v množici

$$A = \{(F_{X_1}^{-1}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1}(p); p \in (0,1)\}.$$

Naj bosta $\underline{x}$ in $\underline{y}$ vektorja iz A. Recimo, da za nek $i \in \{1, \ldots, n\}$ velja $x_i \leq y_i$, to je, $F_{X_i}^{-1}(p_1) \leq F_{X_i}^{-1}(p_2)$ za neka $p_1, p_2 \in (0,1)$. Ker je $F_{X_i}^{-1}$ nepadajoča funkcija in obstaja kvečjemu števno mnogo intervalov, kjer je konstantna (intervali, kjer je $F_{X_i}^{-1}$ konstantna, bijektivno ustrezajo skokom funkcije F_{X_i}), je $p_1 \leq p_2$ povsod razen morda na množici z mero 0. Ker je $F_{X_i}^{-1}$ nepadajoča, je $\underline{x} \leq \underline{y}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Naj bo B komonotona množica, za katero velja $P(\underline{X} \in B) = 1$, in naj bo $x \in \mathbb{R}^n$. Označimo $A_j = \{\underline{y} \in B | y_j \leq x_j\}$. Zaradi komonotonosti B množice A_j tvorijo zaporedje:

$$A_{i_1} \subseteq \cdots \subseteq A_{i_n},$$

torej obstaja i, da je $A_i = \cap_{j=1}^n A_j$.

Potem je

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X} \in A_i) = \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}\}.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$:

$$\begin{aligned}
&\min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}\} = \\
&= P(U \leq \{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}\}) \\
&= P(U \leq F_{X_1}(x_1), \ldots, U \leq F_{X_n}(x_n)) \\
&= P(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, \ldots, F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n)
\end{aligned}$$

□

Izrek 3.6. *Za inverze slučajne spremenjivke* S^c *in* $0 < p < 1$ *velja*

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p)$$

in

$$F_{S^c}^{-1+}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(p)$$

in zato

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p)$$

Dokaz. Definiramo funkcijo g kot

$$g(u) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(u), 0 < u < 1.$$

Funkcija je vsota nepadajočih levo zveznih funkcij, zato je nepadajoča in levo zvezna. Prav tako velja $g(U) = S^c$. Iz izreka 2.11 sledi

$$F_{g(U)}^{-1}(p) = g(F_U^{-1}(p)) = g(p), p \in (0,1).$$

Torej je $F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p)$. Podobno dobimo $F_{S^c}^{-1+}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(p)$. Prvo enakost pomnožimo z α, drugo z $(1-\alpha)$, in seštejemo. □

Če v enačbi $F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p)$ pošljemo p proti 1, dobimo, zaradi leve zveznosti:

$$F_{S^c}^{-1}(1) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1).$$

Podobno je, zaradi desne zveznosti F_X^{-1+}:

$$F_{S^c}^{-1+}(0) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0)$$

Izrek 3.7. *Naj bo d tak ,da je $F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$. Potem velja*

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+],$$

kjer so d_i podani z

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)),$$

α_d pa je določen z enačbo

$$F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d.$$

Dokaz. Za d velja $0 < F_{S^c}(d) < 1$, zato po trditvi 2.10 obstaja ustrezen α_d. Po izreku 3.6 velja $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$. Naj bo A komonotona množica, za katero velja $P(\underline{X} \in B) = 1$. Opazimo, da lahko v A obstaja kvečjemu ena točka $\underline{x}$, za katero velja $\sum_{i=1}^{n} x_i = d$. Sledi, da je vektor $(d_1, \dots, d_n)$ edina taka točka. Torej za vsak vektor $\underline{x}$ iz A velja enakost

$$(x_1 + \cdots + x_n - d)_+ = (x_1 - d_1)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+.$$

Če zamenjamo konstante s slučajnimi spremenljivkami in uporabimo pričakovano vrednost, dobimo želeno enakost. □

Sedaj definirajmo konveksno urejenost slučajnih spremenljivk in pokažimo, da je v tem smislu S^c zgornja meja za S. To napeljuje k ideji, da bi uporabili komonotonost pri iskanju zgornje meje za ceno eksotične opcije.

Definicija 3.8. Slučajna spremenljivka X je *konveksno manjša* od slučajne spremenljivke Y, oznaka $X \leq_{cx} Y$, če velja

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y] \\ E[(X-d)_+] &\leq E[(Y-d)_+] \quad \text{za vsak} \quad d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definicija 3.9. Slučajna spremenljivka X je *naraščajoče konveksno manjša* od slučajne spremenljivke Y, oznaka $X \leq_{icx} Y$, če velja

$$E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+] \quad \text{za vsak} \quad d \in \mathbb{R}$$

.

Očitno $X \leq_{cx} Y$ implicira $X \leq_{icx} Y$.

Izrek 3.10. *Za vsak slučajen vektor $(X_1, \dots, X_n)$ velja*

$$X_1 + \cdots + X_n \leq_{cx} X_1^c + \cdots + X_n^c.$$

Dokaz. Enakost pričakovanih vrednosti sledi iz enakosti robnih porazdelitev in linearnosti pričakovane vrednosti. Dokažimo neenakost

$$E[(X_1 + \cdots + X_n - d)_+] \leq E[(X_1^c + \cdots + X_n^c - d)_+].$$

Za $d \notin (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ sta obe strani enaki 0. Za $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ velja $\sum_{i=1}^n d_i = d$ za primerno izbrane d_i (glej dokaz izreka 3.7), zato je

$$\begin{aligned}
&(x_1 + \cdots + x_n - d)_+ = \\
=&((x_1 - d_1) + \cdots + (x_n - d_n))_+ \\
\leq&((x_1 - d_1)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+)_+ \\
=&(x_1 - d_1)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+
\end{aligned}$$

Konstante nadomestimo s slučajnimi spremenljivkami in uporabimo pričakovano vrednost. Dobimo

$$E[(X_1 + \cdots + X_n - d)_+] \leq E[(X_1 - d_1)_+ + \cdots + (X_n - d_n)_+].$$

Desna stran je po izreku 3.7 enaka $E[(S^c - d)_+]$. □

4. Zgornja meja za ceno eksotične opcije

V tem razdelku sledimo viru [2] (razdelek 3.1).

Uteženo vsoto cen osnovnega premoženja označimo z $\mathbb{S} = \omega_1 X_1 + \cdots + \omega_n X_n$, kjer so ω_i strogo pozitivne deterministične uteži. Komonotone slučajne spremenljivke $\mathbb{S}$ definiramo kot

$$\mathbb{S}^c = \omega_1 F_{X_1}^{-1}(U) + \cdots + \omega_n F_{X_n}^{-1}(U).$$

Podobno kot prej je

$$F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0) = \sum_{i=1}^n \omega_i F_{X_i}^{-1+}(0)$$

$$F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1) = \sum_{i=1}^n \omega_i F_{X_i}^{-1}(1)$$

V tem razdelku predpostavimo, da za poljuben $i \in \{1, \ldots, n\}$ in poljuben $K \geq 0$ poznamo ceno evropske nakupne opcije z zapadlostjo i, to je, poznamo $E[(X_i - K)_+]$.

Trditev 4.1. *Če za vsak $K \geq 0$ poznamo pričakovano vrednost $E[(X - K)_+]$, potem poznamo porazdelitev slučajne spremenljivke X.*

Dokaz. Izberimo $a, b \in \mathbb{R}$ tako , da je $0 \leq a < b$. Definiramo funkcijo

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{b-a}\left[(x-a)_+ - (x-b)_+\right] = \begin{cases} 1 & za\ x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & za\ a < x < b \\ 0 & za\ x \leq a \end{cases}$$

$$\lim_{a \uparrow b} E[f_{a,b}(x)] = E[\lim_{a \uparrow b} f_{a,b}(x)] = E[1_{(x \geq b)}] = P(X \geq b)$$

Če poznamo verjetnosti $P(X \geq b)$ za vse b, poznamo tudi F_X. □

Opomba 4.2. V dokazu smo limito nesli znotraj pričakovane vrednosti. Povejmo samo, da nam to dovoljujejo izreki iz teorije mere.

Torej lahko iz cen evropskih nakupnih opcij razberemo porazdelitve slučajnih spremenljivk X_i, še vedno pa ne poznamo porazdelitve slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$. Označimo ceno eksotične nakupne opcije s $C[K]$:

$$C[K] = e^{-rT} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i - K\right)_+\right]$$

Izrek 4.3. *Za $K \in (F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0), F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1))$ velja*

$$C[K] \leq e^{-rT} E[(\mathbb{S}^c - K)_+] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K))].$$

Za $K \leq F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0)$ velja

$$C[K] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[0] - e^{-rT} K.$$

Za $K \geq F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1)$ velja

$$C[K] = 0.$$

Tu je α podan z

$$\alpha = \frac{F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(F_{\mathbb{S}^c}(K)) - K}{F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(F_{\mathbb{S}^c}(K)) - F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(F_{\mathbb{S}^c}(K))},$$

če je $F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(F_{\mathbb{S}^c}(K)) = F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(F_{\mathbb{S}^c}(K))$ in $\alpha = 1$, sicer.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je

$$C[K] \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K))].$$

Recimo, da neenakost ne velja. Potem lahko danes prodamo eksotično nakupno opcijo po ceni $C[K]$ in kupimo $\omega_i e^{-r(T-T_i)}$ evropskih nakupnih opcij z zapadlostmi i in izvršilnimi cenami $F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K))$. Ob zapadlosti vsake od teh opcij izkupiček naložimo v netvegan vrednostni papir do časa T. To je arbitražna strategija.

Sedaj dokažimo enakost

$$e^{-rT} E[(\mathbb{S}^c - K)_+] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K))].$$

Izrek 3.7 pove, da lahko $E[(\mathbb{S}^c - K)_+]$ razcepimo kot

$$E[(\mathbb{S}^c - K)_+] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E\left[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K)))_+\right].$$

Tu smo upoštevali, da je zaradi izreka 2.11

$$\omega_i F_{X_i}^{-1}(U) = F_{\omega_i X_i}^{-1}(U) \quad \text{in} \quad \omega_i F_{X_i}^{-1+}(U) = F_{\omega_i X_i}^{-1+}(U).$$

Obe strani pomnožimo z e^{-rT} in upoštevamo definicijo C_i.

Če je $K \leq F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0)$, je $F_{\mathbb{S}^c}(K) = 0$, torej opcija skoraj gotovo izplača $\mathbb{S} - K$. Zato je

$$C[K] = e^{-rT} E[\mathbb{S} - K] = e^{-rT}(E[\mathbb{S}] - K) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[0] - e^{-rT} K.$$

Če je $K \geq F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1)$, opcija skoraj gotovo ne bo izplačala ničesar, torej je

$$C[K] = e^{-rT}E[0] = 0.$$

$\square$

Za vsak nabor izvršilnih vrednosti $(K_1, \ldots, K_n)$, za katere je $\sum_{i=1}^n \omega_i K_i \leq K$, velja neenakost

$$\begin{aligned}
E[(\mathbb{S}^c - K)_+] &\leq E\left[\left(\sum_{i=1}^n F_{\omega_i X_i}^{-1}(U) - \sum_{i=1}^n \omega_i K_i\right)_+\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (F_{X_i}^{-1}(U) - K_i)\right)_+\right] \\
&\leq E\left[\sum_{i=1}^n \omega_i (F_{X_i}^{-1}(U) - K_i)_+\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i E[(F_{X_i}^{-1}(U) - K_i)_+] \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i E[(X_i - K_i)_+].
\end{aligned}$$

Pri drugi neenakosti smo uporabili trikotniško neenakost – velja namreč

$$(a+b)_+ \leq a_+ + b_+.$$

To pomeni, da nam izbira $K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K))$ da optimalno strategijo supervarovanja z linearno kombinacijo evropskih nakupnih opcij (kjer kupimo $\omega_i e^{-r(T-T_i)}$ vsake opcije), če le zahtevamo, da je $\sum_{i=1}^n \omega_i K_i \leq K$.

Zaenkrat nismo še ugotovili ničesar o enoličnosti optimalne strategije. Naslednji preprost zgled bo pokazal, da v splošnem obstaja več optimalnih rešitev.

Primer 4.4 ([3], str. 10-11)**.** Naj bo:

- $n = 2$, $K = 1$
- $\omega_1 = \omega_2 = 1$
- $\mathbb{Q}(X_1 = 0) = \mathbb{Q}(X_1 = 1) = \mathbb{Q}(X_2 = 0) = \mathbb{Q}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$.

V tem primeru je

$$\mathbb{S}^c = S^c = 2F_{X_1}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} 2X_1.$$

$$F_{\mathbb{S}^c}(1) = \mathbb{Q}(2X_1 \leq 1) = F_{X_1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Iz enačbe $F_{S^c}^{-1(\alpha)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ sledi $\alpha = \frac{1}{2}$. Od tod je $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$ in

$$E[(\mathbb{S}^c - 1)_+] = 2E[(X_1 - K_1)_+] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Opazimo, da za poljuben $K_1 \in (0,1)$ in $K_2 = 1 - K_1$ dobimo enako ceno, ker je

$$E[(X_1 - K_1)_+] + E[(X_2 - K_2)_+] = \frac{1}{2}(1 - K_1) + \frac{1}{2}(1 - K_2) = \frac{1}{2}.$$

$\diamondsuit$

Optimalna strategija torej ni enolično določena, lahko pa točno določimo množico optimalnih rešitev. Do zdaj smo od rešitve zahtevali, da velja $\sum_{i=1}^n \omega_i K_i \le K$, za našo rešitev pa tu velja enakost. Pri iskanju optimalne strategije je torej smiselno zaostriti pogoj na $\sum_{i=1}^n \omega_i K_i = K$. V tem primeru imamo naslednji izrek.

Izrek 4.5 ([3, izrek 1])**.** *Naj bo A množica rešitev problema*

$$\min_{K_1,\ldots,K_n} \sum_{i=1}^n \omega_i E[(X_i - K_i)_+] \quad \textit{pri pogoju} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i K_i = K$$

Potem je

$$A = \{(K_1,\ldots,K_n) | \sum_{i=1}^n \omega_i K_i = K \quad \textit{in} \quad F_{X_i}(K_i) = F_{\mathbb{S}^c}(K); i = 1,\ldots,n\}$$

Dokaz. Najprej si oglejmo komponente vektorja $(K_1,\ldots,K_n)$. Iz izreka 4.3 sledi, da za $K \in (F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0), F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1))$ velja

$$K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K)),$$

za α kot v izreku.

Če je $K \le F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0)$, velja

$$K_i = F_{X_i}^{-1+}(0) - e_i,$$

kjer so konstante e_i take, da velja $e_i \ge 0$ in $\sum_{i=1}^n \omega_i e_i = F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0) - K$.

Če je $K \ge F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1)$, velja

$$K_i = F_{X_i}^{-1}(1) + f_i,$$

kjer so konstante f_i take, da velja $f_i \ge 0$ in $\sum_{i=1}^n \omega_i f_i = K - F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1)$.

Vrnimo se k dokazu izreka. Zaradi enostavnosti ga bomo dokazali za primer, ko je $n = 2$, brez težav pa ga lahko posplošimo tudi na višje dimenzije. Definirajmo za $i \in \{1,2\}$:

$$K_i^* = \begin{cases} F_{X_i}^{-1+}(0) - e_i & ; K \le F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0) \\ K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{\mathbb{S}^c}(K)) & ; K \in (F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0), F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1)) \\ F_{X_i}^{-1}(1) + f_i & ; K \ge F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1) \end{cases}$$

Tu so e_i, f_i in α definirani kot zgoraj. Jasno je, da je (K_1^*, K_1^*) rešitev minimizacijskega problema, prav tako je $(K_1^*, K_2^*) \in A$. Iz trditve 1.28 sledi, da lahko $E[(X_i - K)_+]$ izrazimo kot

$$E[(X_i - K)_+] = \int_K^\infty (1 - F_{X_i}(x))dx$$

Najprej dokažimo, da iz $\underline{K} = (K_1, K_2) \in A$ sledi, da je $\underline{K}$ optimalna rešitev. Če je $K_1 = K_1^*$, iz pogoja $\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 = K$ sledi $K_2 = K_2^*$, zato je $\underline{K}$ res optimalna rešitev. Dokažimo še za primer $K_1 < K_1^*$. Opazimo, da za $x \in [K_1, K_1^*]$ velja $F_{X_1}(x) = F_{\mathbb{S}^c}(K)$. To sledi iz tega, da sta vektorja $\underline{K}$ in (K_1^*, K_1^*) elementa množice A in da je kumulativna porazdelitvena funkcija nepadajoča. Torej velja

$$
\begin{aligned}
E[(X_1-K_1)_+] &= \int_{K_1}^{\infty}(1-F_{X_1}(x))dx \\
&= \int_{K_1}^{K_1^*}(1-F_{X_1}(x))dx + \int_{K_1^*}^{\infty}(1-F_{X_1}(x))dx \\
&=(K_1^*-K_1)(1-F_{\mathbb{S}^c}(K)) + E[(X_1-K_1^*)_+]
\end{aligned}
$$

Ker je $\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 = \omega_1 K_1^* + \omega_2 K_2^*$, mora veljati $K_2 > K_2^*$. Kot prej ugotovimo, da za $x \in [K_2^*, K_2]$ velja $F_{X_2}(x) = F_{\mathbb{S}^c}(K)$, torej je

$$
E[(X_2-K_2)_+] = (K_2^*-K_2)(1-F_{\mathbb{S}^c}(K)) + E[(X_2-K_2^*)_+]
$$

Iz pogoja $\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 = \omega_1 K_1^* + \omega_2 K_2^*$ sledi $\omega_1(K_1 - K_1^*) = \omega_2(K_2^* - K_2)$. Če to upoštevamo v zgornjih formulah, dobimo

$$
\omega_1 E[(X_1-K_1)_+] + \omega_2 E[(X_2-K_2)_+] = \omega_1 E[(X_1-K_1^*)_+] + \omega_2 E[(X_2-K_2^*)_+]
$$

Ker je (K_1^*, K_2^*) rešitev minimizacijskega problema, je tak tudi $\underline{K}$. Dokazali smo torej, da so elementi množice A res optimalne rešitve.

Zdaj dokažimo, da če velja $\underline{K} \notin A$, $\underline{K}$ ne more biti optimalna rešitev. Če je $\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 \neq K$, $\underline{K}$ ne more biti optimalna rešitev po definiciji problema. Naj torej velja $\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 = K$, vendar $F_{X_i}(K_i) \neq F_{\mathbb{S}^c}(K)$ za nek $i \in \{1, 2\}$.

(i) Najprej obravnavajmo primer, ko je $K \in (F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0), F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1))$. Recimo, da velja $F_{X_1}(K_1) < F_{\mathbb{S}^c}(K)$. Ostale primere obravnavamo podobno. Velja $K_1 < K_1^*$ in z razmislekom kot prej dobimo neenakost

$$
E[(X_1-K_1)_+] > (K_1^*-K_1)(1-F_{\mathbb{S}^c}(K)) + E[(X_1-K_1^*)_+]
$$

Ker je $K_1 < K_1^*$, mora biti $K_2 > K_2^*$ in zato $F_{X_2}(K_2) \geq F_{\mathbb{S}^c}(K)$. Torej je

$$
E[(X_2-K_2)_+] \geq E[(X_2-K_2^*)_+] - (K_2-K_2^*)(1-F_{\mathbb{S}^c}(K))
$$

Lahko zaključimo, da je

$$
\omega_1 E[(X_1-K_1)_+] + \omega_2 E[(X_2-K_2)_+] > \omega_1 E[(X_1-K_1^*)_+] + \omega_2 E[(X_2-K_2^*)_+],
$$

torej $\underline{K}$ ni optimalna rešitev.

(ii) Naj bo sedaj $K \leq F_{\mathbb{S}^c}^{-1+}(0)$, torej je $F_{\mathbb{S}^c}(K) = 0$. Spet mora biti $F_{X_i}(K_i) \neq F_{\mathbb{S}^c}(K) = 0$ za nek $i \in \{1, 2\}$ in recimo, da je $F_{X_1}(K_1) > 0$. Torej je $K_1 > F_{X_1}^{-1+}(0)$ in $K_2 < F_{X_2}^{-1+}(0)$.

Ocenimo

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 E[(X_1-K_1)_+] + \omega_2 E[(X_2-K_2)_+] \\
&= \omega_1 E[(X_1-K_1)_+] + \omega_2 E[X_2-K_2] \\
&> \omega_1 E[X_1-K_1] + \omega_2 E[X_2-K_2] \\
&= E[\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2] - K \\
&= \omega_1 E[(X_1-K_1^*)_+] + \omega_2 E[(X_2-K_2^*)_+]
\end{aligned}
$$

(iii) Dokažimo še za primer, ko je $K \geq F_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1)$, torej je $F_{\mathbb{S}^c}(K) = 1$. Recimo, da je $F_{X_1}(K_1) < 1$. Od tod sledi, da je $K_1 < F_{X_1}^{-1}(1)$ in $K_2 > F_{X_2}^{-1}(1)$.

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 E[(X_1 - K_1)_+] + \omega_2 E[(X_2 - K_2)_+] \\
&= \omega_1 E[(X_1 - K_1)_+] \\
&> \omega_1 E[X_1 - K_1] \\
&= \omega_1 E[(X_1 - K_1^*)_+] + \omega_2 E[(X_2 - K_2^*)_+]
\end{aligned}
$$

□

4.1. **Uporaba v Black-Scholesovem modelu.** Izberimo si naravno število n in privzemimo, da je množica časov kar $\{0, 1, \ldots, n\}$ in da za vse uteži velja $\omega_i = \frac{1}{n}$ (pri takih utežeh govorimo o azijski opciji). V Black-Scholesovem modelu predpostavimo, da je vrednost tveganega vrednostnega papirja ob času i enaka (glej [5], str. 123)

$$
X_i = X_0 \exp(\sigma W_k + ri - \frac{\sigma^2}{2} i),
$$

kjer je W_i porazdeljena normalno s pričakovano vrednostjo 0 in varianco i. Tako porazdelitev označimo kot $X_i \sim N(0, i)$.

Povejmo še, da lahko v tem modelu eksplicitno izrazimo ceno evropske nakupne opcije (glej [5], str. 125-126):

Definiramo d_1 in d_2 kot

$$
d_1 = \frac{\log \frac{X_0}{K} + ri + \frac{\sigma^2}{2} i}{\sigma \sqrt{i}}
$$

in

$$
d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{i}.
$$

Potem je

$$
C_i[K] = X_0 \Phi(d_1) - K e^{-ri} \Phi(d_2)
$$

S Φ smo označili porazdelitveno funkcijo standardne normalne porazdelitve.

Iz enačbe

$$
\log X_i = \log X_0 + \sigma W_i + ri - \frac{\sigma^2}{2} i
$$

ugotovimo, da je

$$
\log X_i \sim N(\log X_0 + ri - \frac{\sigma^2}{2} i, \sigma^2 i)
$$

in zato

$$
\frac{\log X_i - \log X_0 - ri + \frac{\sigma^2}{2} i}{\sigma \sqrt{i}} \sim N(0, 1).
$$

Za $x > 0$ izračunajmo porazdelitveno funkcijo F_{X_i}:

$$
\begin{aligned}
F_{X_i}(x) &= P(X_i \leq x) = P(\log X_i \leq \log x) = \\
&= P\left(\frac{\log X_i - \log X_0 - ri + \frac{\sigma^2}{2}i}{\sigma\sqrt{i}} \leq \frac{\log x - \log X_0 - ri + \frac{\sigma^2}{2}i}{\sigma\sqrt{i}}\right) = \\
&= \Phi\left(\frac{\log x - \log X_0 - ri + \frac{\sigma^2}{2}i}{\sigma\sqrt{i}}\right)
\end{aligned}
$$

Očitno za $x \leq 0$ velja $F_{X_i}(x) = 0$. Ker je

$$\lim_{x \downarrow 0} \Phi\left(\frac{\log x - \log X_0 - ri + \frac{\sigma^2}{2}i}{\sigma\sqrt{i}}\right) = 0,$$

je F_{X_i} zvezna. Poleg tega je na $[0, \infty)$ strogo naraščajoča, zato se levi in desni inverz ujemata na $(0, 1)$. Torej lahko postavimo $\alpha = 1$ in $F_{X_i}^{-1}$ obravnavamo kot običajno inverzno preslikavo. Brez težav lahko izračunamo, da je

$$F_{X_i}^{-1}(p) = X_0 \exp\left(\Phi^{-1}(p)\sigma\sqrt{i} - \frac{\sigma^2}{2}i + ri\right)$$

Če želimo $C[K]$ oceniti v skladu z izrekom 4.3, moramo poznati še $F_{\mathbb{S}^c}(K)$. V splošnem velja (glej [2], str. 17)

$$F_{\mathbb{S}^c}(K) = \sup\left\{p \in [0, 1] | \sum_{i=1}^{n} \omega_i F_{X_i}^{-1}(p) \leq K\right\}$$

V našem primeru se formula poenostavi v

$$F_{\mathbb{S}^c}(K) = \sup\left\{p \in [0, 1] | \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\Phi^{-1}(p)\sigma\sqrt{i} - \frac{\sigma^2}{2}i + ri\right) \leq \frac{nK}{X_0}\right\}$$

Označimo

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\Phi^{-1}(p)\sigma\sqrt{i} - \frac{\sigma^2}{2}i + ri\right)$$

Očitno je f strogo naraščajoča, zvezna in zavzame vse vrednosti na intervalu $(0, \infty)$. Problem iskanja $F_{\mathbb{S}^c}(K)$ se torej prevede na reševanje enačbe

$$f(p) = \frac{nK}{X_0}$$

,

ki ima natanko eno rešitev. Enačbo lahko numerično rešujemo z bisekcijo. Težava je v tem, da je f definirana le na intervalu $(0, 1)$, ne pa tudi v njegovih krajiščih. Druga možnost je reševanje enačbe

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{\mathbb{S}^c}(K)) = K,$$

ki sledi iz izreka 3.6, če vzamemo $\alpha = 1$.

5. Končen trg

V tem razdelku sledimo viru [2] (razdelek 4.1). Do zdaj smo predpostavljali, da so za vsak $K \geq 0$ znane cene $C_i[K]$. Ta predpostavka nujno zahteva uporabo modela za gibanje cen (recimo Black-Scholesovega modela), saj na trgu ne more biti na voljo neskončno mnogo različnih opcij. Poskusimo najti zgornjo mejo za $C[K]$ s pomočjo tržnih cen. Zato v tem razdelku predpostavimo, da so za vsako zapadlost i na voljo zgolj evropske nakupne opcije z izvršilnimi vrednostmi $K_{i,j}, j = 0, \ldots, m_i$. Lahko predpostavimo, da velja

$$0 = K_{i,0} < K_{i,1} < \cdots < K_{i,m_i}.$$

Ponovimo definicijo $C_i[K]$:

$$C_i[K] = e^{-rT_i} E[(X_i - K)_+]$$

Definicija 5.1. Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcija. Potem je f *konveksna*, če za poljubna $x, y \in [0, \infty)$ in za vsak $\lambda \in [0, 1]$ velja

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Trditev 5.2. *Funkcija $C_i[K]$ je konveksna.*

Dokaz. Recimo, da ni konveksna, torej za neka $K_1, K_2 \geq 0$ in nek $\lambda \in [0, 1]$ velja

$$C_i[\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2] > \lambda C_i[K_1] + (1 - \lambda)C_i[K_2].$$

Smemo predpostaviti, da je $K_1 < K_2$. Sestavili bomo arbitražno strategijo. Danes prodamo opcijo z izvršilno ceno $\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$ ter kupimo λ opcije z izvršilno ceno K_1 in $(1 - \lambda)$ opcije z izvršilno ceno K_2. Po predpostavki smo zaslužili nekaj denarja, to razliko naložimo v netvegan vrednostni papir do časa i. Glede na stanje trga v času i ločimo več primerov:

- Če je $X_i \leq \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$, nam ni treba ničesar izplačati, zato ima portfelj nenegativno vrednost.
- Če je $\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2 \leq X \leq K_2$, dobimo $\lambda(X_i - K_1)$, izplačamo pa $X_i - \lambda K_1 - (1 - \lambda)K_2$. Ker je $X_i \leq K_2$, hitro vidimo, da je

$$\lambda(X_i - K_1) \geq X_i - \lambda K_1 - (1 - \lambda)K_2.$$

- Če je $X_i \geq K_2$, dobimo $\lambda(X_i - K_1) + (1 - \lambda)(X_i - K_2)$, izplačamo pa $X_i - (\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2)$. Izplačili sta enaki.

Ob času i dobimo strogo pozitivno izplačilo netveganega vrednostnega papirja in nenegativno izplačilo portfelja opcij, torej je to arbitražna strategija. □

Opomba 5.3. Konveksnost funkcije pomeni, da če poljubni dve točki na grafu funkcije povežemo z daljico, celotna daljica leži nad grafom funkcije. Od tod sledi, da graf vsake linearne interpolacije leži nad grafom funkcije.

Definiramo

$$K_{i,m_i+1} = \sup\{K \geq 0 | C_i[K] > 0\}.$$

V splošnem bi bila lahko vrednost K_{i,m_i+1} enaka neskočno. Predpostavimo, da je končna. Predpostavimo, da za $i = 1, \ldots, n$ obstajajo slučajne spremenljivke $\bar{X}_i$, ki ustrezajo naslednji definiciji.

Definicija 5.4. Za $i = 1, \dots, n$ je kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $\bar{X}_i$ definirana kot

$$F_{\bar{X}_i}(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 + e^{rT_i} \frac{C_i[K_{i,j+1}] - C_i[K_{i,j}]}{K_{i,j+1} - Ki,j} & , K_{i,j} \leq x < K_{i,j+1}, j = 0, \dots, m_i \\ 1 & , x \geq K_{i,m_i+1} \end{cases}$$

Tu smo predpostavili, da za vse i velja

$$0 = K_{i,0} < K_{i,1} < \dots < K_{i,m_i} < K_{i,m_i+1}.$$

Definicija 5.5. Definiramo funkcijo $\bar{C}_i[K]$ kot

$$\bar{C}_i[K] = e^{-rT_i} E[(\bar{X}_i - K)_+]$$

Opazimo, da so $\bar{X}_i$ porazdeljene diskretno, zato je $\bar{C}_i[K]$ odsekoma linearna funkcija. Pokazali bomo, da linearno interpolira funkcijo $C_i[K]$.

Trditev 5.6. *Za $K \geq K_{i,m_{i+1}}$ velja*

$$\bar{C}_i[K] = 0.$$

Za $K_{i,j} \leq K < K_{i,j+1}, j = 0, \dots, m_i$ velja

$$\bar{C}_i[K] = \frac{C_i[K_{i,j+1}] - C_i[K_{i,j}]}{K_{i,j+1} - K_{i,j}} (K - K_{i,j}) + C_i[K_{i,j}].$$

Dokaz. Iz trditve 1.28 sledi, da lahko $E[(X - K)_+]$ izračunamo kot

$$E[(X - K)_+] = \int_K^\infty (1 - F_X(x)) dx.$$

Od tod in iz definicije $F_{\bar{X}_i}$ takoj sledi, da za $K \geq K_{i,m_i+1}$ velja $\bar{C}_i[K] = 0$.

Naj bo sedaj $K_{i,j} \leq K < K_{i,j+1}$. Iz definicije $F_{\bar{X}_i}$ in zgornje formule sledi

$$\begin{aligned} \bar{C}_i[K] =& e^{-rT_i} \int_K^\infty (1 - F_{\bar{X}_i}(x)) dx = \\ =& e^{-rT_i} (\sum_{l=j}^{m_i} \int_{K_{i,l}}^{K_{i,l+1}} (1 - F_{\bar{X}_i}(x)) dx - \int_{K_{i,j}}^{K} (1 - F_{\bar{X}_i}(x)) dx) \\ =& e^{-rT_i} (\sum_{l=j}^{m_i} e^{rT_i} \frac{C_i[K_{i,l}] - C_i[K_{i,l+1}]}{K_{i,l+1} - K_{i,l}} (K_{i,l+1} - K_{i,l}) + \\ &+ e^{rT_i} \frac{C_i[K_{i,j+1}] - C_i[K_{i,j}]}{K_{i,j+1} - K_{i,j}} (K - K_{i,j})) \end{aligned}$$

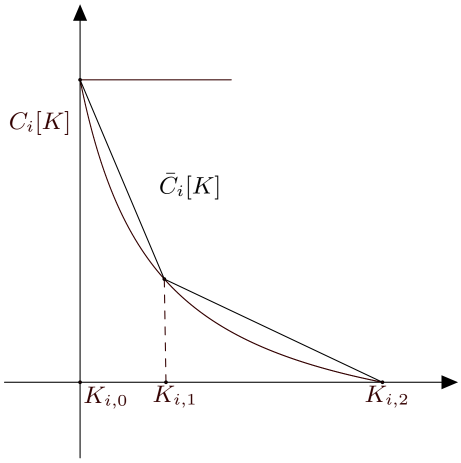
Upoštevamo, da je prvi izraz teleskopska vsota in da za $K = K_{i,m_i+1}$ velja $\bar{C}_i[K] = 0$. □

Trditev pove, da je $\bar{C}_i[K]$ odsekoma linearna funkcija in velja

$$\bar{C}_i[K_{i,j}] = C_i[K_{i,j}].$$

Torej je $\bar{C}_i[K]$ linearna interpolacija funkcije $C_i[K]$. Iz konveksnosti $C_i[K]$ sledi, da za vsak K velja $\bar{C}_i[K] \geq C_i[K]$, oziroma povedano drugače

$$X_i \leq_{icx} \bar{X}_i.$$



Slika 2. Grafa funkcij $C_i[K]$ in $\bar{C}_i[K]$ pri izvršilnih cenah $K_{i,0}$, $K_{i,1}$ in $K_{i,2}$

Definicija 5.7. Komonotono vsoto slučajnega vektorja $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ definiramo kot

$$\bar{\mathbb{S}}^c = \omega_1 F^{-1}_{\overline{X}_1}(U) + \dots + \omega_n F^{-1}_{\overline{X}_n}(U).$$

Za $K \in (0, \sum_{i=1}^n \omega_i K_{i,m_i+1})$ velja $F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K) \in (0,1)$.

Definicija 5.8. Za $K \in (0, \sum_{i=1}^n \omega_i K_{i,m_i+1})$ in $i \in \{1, \dots, n\}$ je $j_i(K)$, krajše j_i enolično določen indeks, za katerega velja

$$F_{\bar{X}_i}(K_{i,j-1}) < F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K) \leq F_{\bar{X}_i}(K_{i,j}).$$

Množico N_K in njen komplement $\bar{N}_K$ definiramo kot

$$N_K = \{i \in \{1, \dots, n\} | F_{\bar{X}_i}(K_{i,j-1}) < F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K) < F_{\bar{X}_i}(K_{i,j})\}$$

$$\bar{N}_K = \{i \in \{1, \dots, n\} | F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K) = F_{\bar{X}_i}(K_{i,j})\}$$

Trditev 5.9. *Za $0 < p < 1$ in $0 \leq \alpha \leq 1$ velja*

$$F^{-1(\alpha)}_{\bar{X}_i}(p) = \begin{cases} K_{i,j} & , F_{\bar{X}_i}(K_{i,j-1}) < p < F_{\bar{X}_i}(K_{i,j}) \\ \alpha K_{i,j} + (1-\alpha) K_{i,j+1} & , p = F_{\bar{X}_i}(K_{i,j}) \end{cases}$$

Dokaz. Sledi neposredno iz definicije $F_{\bar{X}_i}$. □

Izrek 5.10. *Za $K \in (0, \sum_{i=1}^n \omega_i K_{i,m_i+1})$ velja ocena*

$$\begin{aligned} C[K] &\leq e^{-rT} E[(\bar{\mathbb{S}}^c - K)_+] \\ &= \sum_{i \in N_K} \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[K_{i,j_i}] + \sum_{i \in \bar{N}_K} \omega_i e^{-r(T-T_i)} (\alpha C_i[K_{i,j_i}] + (1-\alpha) C_i[K_{i,j_i+1}]), \end{aligned}$$

kjer je

$$\alpha = \frac{\sum_{i \in N_K} \omega_i K_{i,j_i} + \sum_{i \in \bar{N}_K} \omega_i K_{i,j_i+1} - K}{\sum_{i \in \bar{N}_K} \omega_i (K_{i,j_i+1} - K_{i,j_i})}$$

za $\bar{N}_K \neq \emptyset$, in $\alpha = 1$ sicer.
Za $K \notin (0, \sum_{i=1}^n \omega_i K_{i,m_i+1})$ velja

$$C[K] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[0] - e^{-rT} K & , K \leq 0 \\ 0 & , K \geq \sum_{i=1}^n \omega_i K_{i,m_i+1} \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo $K \in (0, \sum_{i=1}^n \omega_i K_{i,m_i+1})$.

Spomnimo, da nam izrek 3.7 omogoča, da $E[(\bar{\mathbb{S}}^c - K)_+]$ razcepimo kot

$$E[(\bar{\mathbb{S}}^c - K)_+] = \sum_{i=1}^n \omega_i E[(\bar{X}_i - K_i)+],$$

kjer je α določen z enačbo

$$F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K)) = K,$$

K_i pa so podani z enačbo

$$K_i = F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K)).$$

Z upoštevanjem definicije $\bar{C}_i$ in množenjem z e^{-rT} dobimo

$$e^{-rT} E[(\bar{\mathbb{S}}^c - K)_+] = \sum_{i=1}^n \omega_i e^{-r(T-T_i)} \bar{C}_i[F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K))]$$

Izračunajmo še vrednosti $\bar{C}_i[F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K))]$.

Naj bo najprej $i \in N_K$. Tedaj je

$$F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K)) = K_{i,j_i},$$

zato je

$$\bar{C}_i[F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K))] = \bar{C}_i[K_{i,j_i}] = C_i[K_{i,j_i}].$$

Če pa je $i \in \bar{N}_K$, je

$$F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K)) = \alpha K_{i,j_i} + (1-\alpha) K_{i,j_i+1},$$

zato je

$$\bar{C}_i[F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K))] = \bar{C}_i[\alpha K_{i,j_i} + (1-\alpha) K_{i,j_i+1}] = \alpha C_i[K_{i,j_i}] + (1-\alpha) C_i[K_{i,j_i+1}].$$

Določimo še α. Zaradi izreka 3.6 lahko α dobimo tudi iz enačbe

$$\sum_{i=1}^n \omega_i F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K)) = K.$$

Če uporabimo formuli, dobimo želen izraz za α.

Sedaj dokažimo, da je

$$C[K] \leq e^{-rT} E[(\bar{\mathbb{S}}^c - K)_+].$$

Iz

$$K = \sum_{i=1}^n \omega_i F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K))$$

sledi

$$(\mathbb{S} - K)_+ = (\mathbb{S} - \sum_{i=1}^n \omega_i F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K)))_+ \leq \sum_{i=1}^n \omega_i (X_i - F_{\bar{X}_i}^{-1(\alpha)}(F_{\bar{\mathbb{S}}^c}(K)))_+$$

Izraz na desni je enak

$$\sum_{i \in N_k} \omega_i (X_i - K_{i,j_i})_+ + \sum_{i \in \bar{N}_k} \omega_i (X_i - \alpha K_{i,j_i} - (1-\alpha) K_{i,j_i+1})_+$$

Če v vsoti na desni prištejemo in odštejemo αX_i in uporabimo trikotniško neenakost, dobimo neenakost

$$(\mathbb{S} - K)_+ \leq \sum_{i \in N_k} \omega_i (X_i - K_{i,j_i})_+ + \sum_{i \in \bar{N}_k} \omega_i (\alpha (X_i - K_{i,j_i})_+ + (1-\alpha)(X_i - K_{i,j_i+1})_+)$$

Če na obeh straneh vzamemo pričakovane vrednosti in diskontiramo, dobimo

$$C[K] \leq \sum_{i \in N_K} \omega_i e^{-r(T-T_i)} C_i[K_{i,j_i}] + \sum_{i \in \bar{N}_K} \omega_i e^{-r(T-T_i)} (\alpha C_i[K_{i,j_i}] + (1-\alpha) C_i[K_{i,j_i+1}]),$$

kar je želena neenakost.

Če je $K \leq 0$, je $(\mathbb{S} - K)_+ = \mathbb{S} - K$, zato lahko $C[K]$ izračunamo kot v dokazu izreka 4.3. Tam smo izpeljali tudi formulo za primer, ko je $K \geq \sum_{i=1}^n \omega_i K_{i,m_i+1}$. $\square$

Slovar strokovnih izrazov

European call option evropska nakupna opcija
super-replicating strategy strategija super-varovanja, strategija super-zaščite
comonotonicity komonotonost
cumulative distribution function kumulativna porazdelitvena funkcija
expectation pričakovana vrednost
right continuity desna zveznost
left continuity leva zveznost
convex order konveksna urejenost – slučajna spremenljivka X je konveksno manjša od slučajne spremenljivke Y, če velja $E[X] = E[Y]$ in $E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+]$ za vsak $d \in \mathbb{R}$

Literatura

[1] J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke, *The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory*, v: Insurance: Mathematics and Economics, **XXXI**, 2002, str. 3–33.

[2] X. Chen, G. Deelstra, J. Dhaene, M. Vanmaele, *Static Super-Replicating Strategies for a Class of Exotic Options*, v:Insurance: Mathematics and Economics, **XLII**, 2008, str. 1067–1085.

[3] X. Chen, G. Deelstra, J. Dhaene, D. Linders, M. Vanmaele, *On an optimization problem related to static super-replicating strategies*, v:Journal of Computational and Applied Mathematics, **CCLXXVIII**, 2014, str. 213–230.

[4] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, 1971.

[5] M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2nd ed., Springer, 2005

[6] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, Inc., 1976