UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Matic Rogar

Avtomorfizmi nekaterih ravninskih območij

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: prof. dr. Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, 2017

Kazalo

Avtomorfizmi nekaterih ravninskih območij

Povzetek

V tem delu bomo obravnavali avtomorfizme nekaterih kompleksnih območij. Predvsem se bomo osredotočili na avtomorfizme enotskega diska in zgornje polravnine ter nekatere njune podmnožice. Pokazali bomo, da sta enotski disk in zgornja polravnina biholomorfni domeni, kar hkrati pomeni, da sta njuni grupi avtomorfizmov izomorfni. S pomočjo homomorfizma med matrično grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in avtomorfizmi zgornje polravnine bomo opisali njuno grupno strukturo in samo obliko avtomorfizmov. Poleg grupne strukture se bomo osredotočili tudi na lastnosti avtomorfizmov zgoraj omenjenih domen, kot so negibne točke in homogenost. Povedali bomo tudi nekaj več o Schwarzevi lemi in bolj natančno ocenili vrednosti holomorfnih preslikav, ki slikajo iz enotskega diska nazaj v enotski disk. Poleg avtomorfizmov zgornje polravnine in enotskega diska si bomo pogledali tudi avtomorfizme obeh domen, ko jima izvzamemo neko diskretno množico točk. V primeru ko je ta diskretna množica točk tudi končna, bomo pokazali, da obstaja grupni monomorfizem iz grupe avtomorfizmov v grupo permutacij dane končne množice.

Automorphisms of some complex domains

Abstract

In this work we will examine the structure of automorphisms of some complex domains. The two subsets of the complex domain that we will mostly focus on, will be the unit disc and the upper half plane. We will show that these two domains are biholomorphic, with the help of the Cayley mapping. The fact that they are biholomorphic indicates that the groups of automorphisms of these two domains are isomorphic. With a homomorphism from the matrix group $SL(2,\mathbb{R})$ to the automorphism group of the upper half plane we will be able to describe the structure of the automorphism group. We will also examine some other properties of automorphisms, such as homogenity and fixed points. With the help of the Schwarz' lemma and some of its corollaries we will be able to further estimate the values of the automorphisms of unit disc. In the last chapter of my diploma work we will focus on the automorphisms of punctured domains. Again our main focus will be on the punctured unit disc and the punctured upper halh plane. We will show that if the set of points that we exclude form the domain is finite, there exists a group monomorphism from the automorphism group to the permutation group of that finite set.

Math. Subj. Class. (2010): 30C80, 30E99

Ključne besede: avtomorfizmi, holomorfne preslikave, kompleksna ravnina, enotski disk, Schwarzeva lema, prebodene domene

Keywords: automorphisms, holomorphic mappings, complex plane, unit disc, Schwarz lemma, punctured domains

1. Uvod

Avtomorfizmi so matematični pojem, ki ga lahko vpeljemo, ko imamo podane objekte z neko matematično strukturo in preslikave med njimi. Prva omemba avtomorfizmov datira v 19. stoletje, ko je irski matematik William Rowan Hamilton omenil avtomorfizme v študiji ikozaedrskega računa [2]. Danes so avtomorfizmi pojem, ki ga lahko povezujemo z več različnimi vejami matematike. Avtomorfizme poznamo v teoriji algebraičnih struktur, geometriji, topologiji, teoriji grafov in druge.

Za dano množico je avtomorfizem običajno definiran kot bijektivna preslikava iz množice nazaj v množico. Kadar ima množica dodatno strukturo, npr. grupno ali topološko, pa mora tudi avtomorfizem zadoščati nekaterim dodatnim predpostavkam. Zato je obravnava avtomorfizmov in njihove grupne strukture povezana s strukturo množic, na katerih so avtomorfizmi definirani. Za avtomorfizme kompleksnih območij predpostavljamo, da so biholomorfne preslikave. Zato se bomo v uvodu osredotočili na holomorfne in biholomorfne preslikave, ki jih bomo uporabili kot osnovo za kasnejše obravnavanje avtomorfizmov.

Najprej bomo povedali definiciji, kdaj je kompleksna preslikava holomorfna oz. biholomorfna. Pri tem si bomo pomagali s kompleksnim odvodom. Nato bomo pokazali še alternativno definicijo biholomornosti in dokazali izrek o kompozitumu biholomorfnih preslikav. Sledilo bo podpoglavje, v katerem bomo obravnavali lomljene linearne preslikave. Najprej jih bomo definirali in pokazali nekaj njihovih lastnosti, nato pa se bomo posvetili eni izmed lomljenih linearnih preslikav, ki ji pravimo Cayleyjeva preslikava. S pomočjo Cayleyjeve preslikave bomo pokazali, da sta enotski disk in zgornja polravnina biholomorni domeni v $\mathbb{C}$. V drugem poglavju bomo poizkušali najti čim več avtomorfizmov odprtega enotskega diska in zgornje polravnine, pri čemer si bomo pomagali z lomljenimi linearnimi preslikavami in biholomorfnostjo domen. Zadnji razdelek drugega poglavja bo namenjen preučevanju homogenosti domen v $\mathbb{C}$. Nato bo sledilo poglavje, kjer bomo s pomočjo Schwarzeve leme dokazali, da so v drugem poglavju dobljeni avtomorfizmi tudi vsi avtomorfizmi za enotski disk in zgornjo polravnino. Osredotočili se bomo tudi na njuno grupno strukturo in pokazali, kateri grupi sta grupi avtomorfizmov enotskega diska in zgornje polravnine izomorfni. V zadnjem poglavju dela diplomskega seminarja pa se bomo osredotočili na avtomorfizme prebodenih domen in njihovo grupno strukturo. Najbolj nas bo zanimala grupna struktura avtomorfizmov enotskega diska in zgornje polravnine, ki jima izvzamemo končno mnogo točk.

1.1. **Holomorfne in biholomorfne preslikave.**

Definicija 1.1. Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{C}$ in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zvezna preslikava. Naj bo $a \in \Omega$ poljubna točka in naj obstaja limita $\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Tedaj to limito imenujemo *kompleksni odvod* preslikave f v točki a. Označimo ga s $f'(a)$. Če $f'(a)$ obstaja za vsak $a \in \Omega$, je f kompleksno odvedljiva na Ω in pravimo, da je f *holomorfna funkcija*.

Če f pripada množici holomorfnih preslikav na neki odprti domeni Ω, to označimo kot $f \in O(\Omega)$. Osnovne rezultate in lastnosti holomorfnih preslikav najdemo v [1, poglavje 6.1] in [4, poglavje 1.3]. Od sedaj naprej bomo predpostavljali, da ko govorimo o domeni holomorfne preslikave, govorimo o odprti podmnožici kompleksnih števil. Razen ko bo eksplicitno napisano drugače.

Definicija 1.2. Holomorfna preslikava f je *biholomorfna preslikava* iz domene Ω na domeno $\Omega^{'}$, če je $f(\Omega) = \Omega^{'}$ in f ima inverz f^{-1}, ki je holomorfna preslikava za katero velja $f^{-1}(\Omega^{'}) = \Omega$.

Iz definicije sledi, da je inverz f^{-1} prav tako biholomorfna preslikava. Biholomorfno preslikavo pa lahko definiramo tudi na drugačen način.

Trditev 1.3. *Preslikava $f \in O(\Omega)$ iz Ω v Ω' je biholomorfna preslikava natanko tedaj, ko obstaja taka preslikava $g \in O(\Omega')$, da velja:*

$$f(\Omega) \subset \Omega', \quad g(\Omega') \subset \Omega, \quad f \circ g = id_{\Omega'} \quad in \quad g \circ f = id_{\Omega} \tag{1}$$

Dokaz. Naj bo f biholomorfna preslikava iz Ω v Ω'. Potem po definiciji vemo, da je $f(\Omega) = \Omega'$. Prav tako iz definicije sledi, da obstaja inverz f^{-1}, da je $f \circ f^{-1} = id_{\Omega'}$, $f^{-1} \circ f = id_{\Omega}$ in $f^{-1}(\Omega') = \Omega$. Torej je pogojem (1) zadoščeno.

Naj sedaj obratno veljajo pogoji iz (1). Iz $f(\Omega) \subset \Omega'$ in $f \circ g = id_{\Omega'}$ sledi, da je $f(\Omega) = \Omega'$. Analogno iz $g(\Omega') \subset \Omega$ in $g \circ f = id_{\Omega}$ sledi, da je $g(\Omega') = \Omega$. Sedaj pa je iz pridobljenih enakosti in dejstva, da je $f \circ g = id_{\Omega'}$ in $g \circ f = id_{\Omega}$, razvidno, da je g inverz funkcije f. □

Sedaj lahko definiramo še, kdaj sta poljubni dve odprti domeni v $\mathbb{C}$ biholomorfni.

Definicija 1.4. Domeni Ω in $\Omega^{'}$ sta *biholomorfni*, če obstaja biholomorfna preslikava f, da je $f(\Omega) = \Omega^{'}$.

Poglejmo si še izrek o kompozitumu biholomorfnih preslikav.

Izrek 1.5. *Če sta $f : \Omega \to \Omega'$ in $g : \Omega' \to \Omega''$ biholomorfni preslikavi, potem je njun kompozitum $g \circ f$ tudi biholomorfna preslikava in slika iz Ω v Ω''.*

Dokaz. Ker sta f in g biholomorfni preslikavi, velja, da je $(g \circ f)(\Omega) = \Omega^{''}$ in obstajata inverza f^{-1} in g^{-1}, ki zadoščata lastnostim iz definicije 1.2. Torej za preslikavo $f^{-1} \circ g^{-1}$ velja, da je inverz preslikavi $g \circ f$ in $(f^{-1} \circ g^{-1})(\Omega^{''}) = \Omega$. Iz tega po definiciji sledi, da je $g \circ f$ biholomorfna. □

Opomba 1.6. Biholomorfnost domen je ekvivalenčna relacija.

Dokaz. Pokazati moramo, da je relacija biholomorfnosti refleksivna, simetrična in tranzitivna. Refleksivnost sledi iz dejstva da je vsaka domena biholomorfna sama sebi, saj je identiteta biholomorfna preslikava. Simetričnost pa iz dejstva, da če je Ω biholomorfna $\Omega^{'}$ in je f biholomorfna preslikava iz Ω v $\Omega^{'}$, potem je f^{-1} biholomorfna preslikava iz $\Omega^{'}$ v Ω. Tranzitivnost sledi po izreku 1.5. □

1.2. **Lomljene linearne preslikave in Cayleyjeva preslikava.** Poglejmo si povezavo med kompleksnimi 2×2 matrikami in biholomorfnimi preslikavami. Vsaki kompleksni matriki A velikosti 2×2 oblike:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{kjer} \quad |c| + |d| > 0$$

lahko priredimo lomljeno linearno preslikavo oblike:

$$h_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

Izračunajmo še odvod take preslikave:

$$h_A^{'}(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{\det(A)}{(cz+d)^2}$$

Opazimo, da je v primeru, ko je $\det(A) = 0$, njej prirejena funkcija $h(z)$ konstantna. Osredotočimo se sedaj samo na obrnljive kompleksne 2×2 matrike. Za take matrike vemo, da z operacijo matričnega množenja tvorijo grupo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Enota grupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ je identiteta, označili jo bomo z I. Poglejmo si sedaj nekatere lastnosti, ki jih imajo lomljene linearne preslikave, ki so prirejene takim matrikam.

Trditev 1.7. *Za matriki A in B, ki pripadata grupi $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, velja:*

(1) *$h_A = id$ natanko tedaj, ko je $A = a \cdot I$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

(2) *$h_{AB} = h_A \circ h_B$.*

Dokaz. Najprej dokažimo (1). Naj bo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ poljubna matrika. Želimo, da je $h_A = id$. Torej mora med drugim veljati, da je $h_A(0) = 0$, $h_A(1) = 1$ in $h_A(2) = 2$. Dobimo enačbe:

$$\frac{b}{d} = 0 \;, \qquad \frac{a+b}{c+d} = 1 \qquad \text{in} \qquad \frac{2a+b}{2c+d} = 2$$

Od tod sledi, da je $b = 0$. Če preuredimo ostali dve enačbi dobimo:

$$a = c + d \qquad \text{in} \qquad a = 2c + d$$

Od tod sledi, da je $c = 0$. Izberimo sedaj še neko novo število $z \in \mathbb{C}$. Upoštevajmo, da je $b = 0$ in $c = 0$. Imamo enačbo:

$$\frac{az}{c} = z$$

Od tod neposredno sledi, da mora veljati $a = c$. Pokazali smo, da če je za matriko $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ prirejena lomljena linearna preslikava h_A identiteta, potem je $A = aI$ za $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Naj sedaj obratno velja, da je $A = aI$. Prirejena lomljena linearna preslikava je oblike $h_A(z) = \frac{az}{a} = z$. Torej je res identiteta na $\mathbb{C}$.

Za dokaz (2) izračunajmo $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Izračunajmo še $(h_A \circ h_B)(z)$:

$$h_A(h_B(z)) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d} = \frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{c(ez+f) + d(gz+h)} = \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)}$$

Vidimo, da je prirejena lomljena linearna preslikava produkta AB res enaka kompozitumu $h_A \circ h_B$. $\square$

Opomba 1.8. V primeru, ko za $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ velja, da je $c = 0$, je preslikava h_A, ki slika $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, biholomorfna. Če $c \neq 0$, pa imamo biholomorfno preslikavo h_A, ki slika $\mathbb{C} \setminus \{-c^{-1}d\} \to \mathbb{C} \setminus \{ac^{-1}\}$, z inverzom $h_{A^{-1}}$.

Dokaz. Prvi del opombe je očiten, saj je v primeru, ko je $c = 0$ preslikava h_A oblike $h_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, torej je linearna.

Pri drugem delu opombe najprej opazimo, da ima za $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ preslikava h_A pol v točki $-c^{-1}d$. Torej, če za definicijsko območje vzamemo $\mathbb{C} \setminus \{-c^{-1}d\}$, bo preslikava holomorfna, njena slika pa bo ravno $\mathbb{C} \setminus \{ac^{-1}\}$. Dejstvo, da je $h_{A^{-1}}$ njen inverz, sledi po trditvi 1.7. $\square$

Poseben primer lomljene linearne preslikave je Cayleyjeva preslikava, ki je definirana kot:

$$h_C(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

Hkrati na tem mestu posebej označimo še dve domeni v $\mathbb{C}$. Naj bo od sedaj naprej $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Im(z) > 0\}$ oznaka za zgornjo polravnino, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ pa oznaka za enotski disk. Sedaj lahko dokažemo naslednji izrek, ki nam pove, da sta $\mathbb{E}$ in $\mathbb{D}$ biholomorfni domeni.

Izrek 1.9. *Preslikava $h_C : \mathbb{E} \to \mathbb{D}$, podana s predpisom $h_C(z) = \frac{z-i}{z+i}$ je biholomorfna, z inverzno preslikavo oblike $h_{C'} : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$, s predpisom $h_{C'}(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.*

Dokaz. Najprej opazimo, da je h_C definirana za vsak $z \in \mathbb{E}$ in $h_{C'}$ definirana za vsak $z \in \mathbb{D}$. Če želimo pokazati da je preslikava h_C biholomorfna, mora po trditvi 1.3 najprej veljati, da je $h_C(\mathbb{E}) \subset \mathbb{D}$ in $h_{C'}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{E}$. Poglejmo si naslednja izračuna:

$$\begin{aligned} 1 - |h_C(z)|^2 &= 1 - h_C(z)\overline{h_C(z)} = 1 - \frac{z-i}{z+1}\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} \\ &= \frac{z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1 - z\overline{z} + i\overline{z} - iz - 1}{(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{2i(z-\overline{z})}{|z+i|^2} = \frac{4\Im z}{|z+i|^2} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \Im h_{C'}(z) &= \frac{1}{2i}(h_{C'}(z) - \overline{h_{C'}(z)}) = \frac{1}{2i}\left(i\frac{1+z}{1-z} + i\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) \\ &= \frac{1 + z - \overline{z} - z\overline{z} + \overline{z} - z + 1 - z\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{1 - z\overline{z}}{|1-z|^2} \\ &= \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Iz enačb (2) in (3) sledi, da je $1 - |h_C(z)|^2 > 0$, za vsak z, ki zadošča $\Im z > 0$ in $\Im h_{C'}(z) > 0$ za vsak z, ki zadošča $|z| < 1$. Torej velja, da je $h_C(\mathbb{E}) \subset \mathbb{D}$ in $h_{C'}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{E}$.

Sedaj lahko opazimo, da je preslikava h_C prirejena matriki $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ preslikava $h_{C'}$ pa matriki $C' = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Izračunajmo njun produkt:

$$CC' = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

Torej po trditvi 1.7 sledi, da je $h_C \circ h_{C'} = h_{CC'} = id_{\mathbb{E}}$ in analogno $h_{C'} \circ h_C = id_{\mathbb{D}}$. Pokazali smo vse zahtevane lastnosti iz trditve 1.3. Od tod sledi, da je h_C biholomorfna preslikava iz zgornje polravnine $\mathbb{E}$ na enotski disk $\mathbb{D}$. □

2. Avtomorfizmi zgornje polravnine in enotskega diska

V tem poglavju bo naš namen najti čim več preslikav, ki so avtomorfizmi zgornje polravnine in enotskega diska. Najprej bomo začeli z definicijo avtomorfizma in nekaj primeri, nato pa se bomo osredotočili na avtomorfizme zgornje polravnine. Z uporabo Cayleyjeve preslikave bomo avtomorfizme zgornje polravnine prevedli še na avtomorfizme diska. V zadnjem razdelku poglavja si bomo pogledali homogenost domen. Najbolj nas bo zanimala seveda homogenost $\mathbb{E}$ in $\mathbb{D}$. Za začetek najprej definirajmo avtomorfizem za dano območje v $\mathbb{C}$.

Definicija 2.1. *Avtomorfizem* domene Ω je biholomorfna preslikava $h : \Omega \to \Omega$. Množico avtomorfizmov dane domene Ω bomo označili z $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

Poglejmo si sedaj nekaj primerov:

Primer 2.2. Preslikave oblike $h(z) = az + b$, kjer $a, b \in \mathbb{C}$, so avtomorfizmi kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. Res, preslikava $h(z)$ je holomorfna in bijekcija na $\mathbb{C}$, torej biholomorfna iz $\mathbb{C}$ v $\mathbb{C}$. Njen inverz je enak $h^{-1}(z) = a^{-1}(z - b)$. Poglejmo si še avtomorfizme kompleksne ravnine, ki ji izvzamemo izhodišče, torej imamo domeno $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Označimo jo s $\mathbb{C}^{\times}$. Nekateri izmed možnih avtomorfizmov so preslikave oblike $h(z) = az$ in $h(z) = az^{-1}$, kjer $a \in \mathbb{C}^{\times}$. Res, vidimo lahko, da so take preslikave holomorfne na $\mathbb{C}^{\times}$, prav tako pa so bijektivne, torej so res avtomorfizmi $\mathbb{C}^{\times}$. ♢

Primer 2.3. Oglejmo si podmnožico $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Množica $\mathbb{R}$ kot podmnožica $\mathbb{C}$ ni odprta, vendar pa lahko kljub temu definiramo avtomorfizme. V tem primeru gledamo avtomorfizme kot zvezne bijektivne preslikave z zveznim inverzom. Preslikave $h(z) = az + b$, kjer $a, b \in \mathbb{R}$, so primer avtomorfizmov $\mathbb{R}$. Prav tako so tudi preslikave oblike $h(z) = z^{2k-1}$, kjer $k \in \mathbb{N}$, avtomorfizmi $\mathbb{R}$. Ker pa je tudi kompozitum dveh avtomorfizmov avtomorfizem, lahko sedaj tvorimo nove avtomorfizme oblike $h(z) = (az + b)^{2k-1}$ in $h(z) = az^{2k-1} + b$. ♢

Opomba 2.4. Kot smo spoznali v primeru 2.3, je kompozitum dveh avtomorfizmov tudi avtomorfizem dane domene. To je direktna posledica izreka 1.5. Sedaj lahko opazimo, da so $\mathrm{Aut}(\Omega)$ grupa za operacijo kompozitum, katere enota je id_{Ω}.

2.1. **Avtomorfizmi zgornje polravnine.** Poglejmo si, katere preslikave so avtomorfizmi $\mathbb{E}$.

Izrek 2.5. *Naj bo A matrika, $A \in GL(2, \mathbb{R})$, $\det(A) > 0$ in A^{-1} njen inverz. Potem je matriki A prirejena linearna lomljena preslikva $h_A : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ avtomorfizem zgornje polravnine z inverzom $h_{A^{-1}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$.*

Dokaz. Naj bosta matriki A in A^{-1} kot v izreku. Prirejeni lomljeni linearni preslikavi h_A in $h_{A^{-1}}$ sta holomorfni na $\mathbb{E}$, saj imata le eno točko, v kateri nista definirani. To je pol, ki je vsebovan v $\mathbb{R}$. Računajmo:

$$\begin{aligned} 2i\Im h_A(z) &= h_A - \overline{h_A} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \\ &= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}(z - \overline{z}) = 2i\frac{\det(A)}{|cz+d|^2}\Im z \end{aligned}$$

Velja:

$$\Im h_A(z) = \frac{\det(A)}{|cz+d|^2}\Im z \quad \text{za vsako matriko } A \in GL(2,\mathbb{R}),\ \det(A) > 0. \tag{4}$$

Iz (4) neposredno sledi, da je $h_A(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ in $h_{A^{-1}}(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$. Hkrati pa iz lastnosti lomljenih linearnih preslikav velja $h_A \circ h_{A^{-1}} = h_{A^{-1}} \circ h_A = id_{\mathbb{E}}$. S tem smo dokazali izrek. □

Označimo z $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ grupo obrnljivih matrik A, za katere je $\det(A) > 0$. $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ je res grupa, kar sledi iz multiplikativnosti determinante, torej je zaprta za operacijo matričnega množenja. Hkrati je $\det(I) = 1$, torej vsebuje nevtralni element oziroma enoto.

Ker je za vsako matriko $A \in \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ njej prirejena preslikava h_A avtomorfizem $\mathbb{E}$, naravno sledi naslednja trditev.

Trditev 2.6. *Preslikava $\varphi : GL^+(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, podana kot $A \mapsto h_A$, je homomorfizem grup z jedrom, ki vsebuje matrike $\lambda\mathbb{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Če homomorfizem skrčimo na podgrupo $SL(2,\mathbb{R})$ dobimo enako sliko, v jedru pa sta v tem primeru matriki $\pm I$.*

Dokaz. Da je φ homomorfizem, ki ima v jedru matrike oblike λI, sledi neposredno iz trditve 1.7, saj je $\varphi(AB) = h_{AB} = h_A \circ h_B = \varphi(A)\varphi(B)$ in $\varphi(A) = id_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow A = \lambda I$.

Poglejmo si še zožitev na grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Za $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ velja $\frac{1}{\det(A)}A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in po trditvi 1.7 je $\varphi(\frac{1}{\det(A)}A) = \varphi(A)$, torej je slika res enaka. Jedro pa v tem primeru sestavljata edini dve matriki oblike λI, ki sta vsebovani v $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, tj. $\pm I$. $\square$

2.2. **Avtomorfizmi diska.** Pri iskanju avtomorfizmov diska ne bomo postopali tako kot pri avtomorfizmih zgornje polravnine, ampak si bomo pomagali s Cayleyjevo preslikavo. Pri tem bomo tudi videli povezavo med avtomorfizmi $\mathbb{E}$ in avtomorfizmi $\mathbb{D}$. Osnova za to izhaja iz naslednje trditve.

Trditev 2.7. *Naj bo f biholomorfna preslikava, $f : \Omega \to \Omega'$. Potem je preslikava $\varphi : h \mapsto f \circ h \circ f^{-1}$, $h \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ izomorfizem grup $\mathrm{Aut}(\Omega)$ in $\mathrm{Aut}(\Omega')$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da je φ homomorfizem. Slika φ bo vsebovana v $\mathrm{Aut}(\Omega')$, saj je $f\circ h\circ f^{-1}$ biholomorfna preslikava iz Ω' v Ω'. Imamo: $\varphi(h\circ g) = f\circ h\circ g\circ f^{-1} = f \circ h \circ f^{-1} \circ f \circ g \circ f^{-1} = \varphi(h)\varphi(g)$, torej je φ res homomorfizem. Bijektivnost sledi iz dejstva, da je f biholomorfna preslikava. Naj bo $f \circ h \circ f^{-1} = id_{\Omega'}$ za $h \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, potem je $h = f^{-1} \circ f = id_{\Omega}$. Prav tako pa za poljuben $h \in \mathrm{Aut}(\Omega')$ obstaja $f^{-1} \circ h \circ f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, da je $\varphi(f^{-1} \circ h \circ f) = h$. $\square$

Po zgornji trditvi torej velja, da lahko s pomočjo Cayleyjeve preslikave h_C in njenega inverza $h_{C'}$ konstruiramo izomorfizem med grupama $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, saj za vsako preslikavo h_A, ki je avtomorfizem $\mathbb{E}$, velja, da je $h_C \circ h_A \circ h_{C'} = h_{CAC'}$ avtomorfizem $\mathbb{D}$. Bolj natančno to pove naslednji izrek.

Izrek 2.8. *Množica* $M := \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \ ;\ a, b \in \mathbb{C}, \det(B) = 1 \right\}$ *je podgrupa* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *in preslikava* $\varphi : A \mapsto \frac{1}{2i}CAC'$, *ki slika iz grupe* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *na množico* M, *je grupni izomorfizem.*

Preslikava $B \mapsto h_B$, ki slika M v $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, *je homomorfizem grup, katerega jedro sta matriki $\pm I$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da je M podgrupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Očitno je $M \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ in $I \in M$. Prav tako za $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in M$ velja, da je $A^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} \in M$. Preverimo še zaprtost za matrično množenje:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ \overline{b}c + \overline{a}\overline{d} & \overline{b}d + \overline{a}\overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ \overline{ad + b\overline{c}} & \overline{ac + b\overline{d}} \end{pmatrix} \in M$$

Dokažimo še, da je preslikava iz $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ na M s predpisom $A \mapsto \frac{1}{2i}CAC'$ izomorfizem grup. Najprej opazimo, da zaradi multiplikativnosti determinante velja $\det(\frac{1}{2i}CAC') = \frac{1}{(2i)^2}\det(C)\det(A)\det(C') = 1$, saj sta determinanti C in C' enaki $\det(C) = \det(C') = 2i$. Torej je preslikava φ dobro definirana in slika v $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Pokažimo sedaj, da je φ homomorfizem. Najprej se spomnimo, da je $CC' = C'C = 2iI$. Torej velja:

$$\varphi(AB) = \frac{1}{2i}CABC' = \frac{1}{2i}CAC'\frac{1}{2i}CBC' = \varphi(A)\varphi(B)$$

Pokažimo, da je injektiven. Naj bosta $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in $A \neq B$. Recimo, da velja $\varphi(A) = \varphi(B)$. Torej je $\frac{1}{2i}CAC' = \frac{1}{2i}CBC'$. Če množimo z leve s C' in z desne s C, dobimo $2iA = 2iB$. Torej je $A = B$ in s tem smo dokazali injektivnost φ.

Sedaj moramo dokazati še, da je slika φ enaka M. Vzemimo poljubno matriko $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Računajmo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}CAC' &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \alpha - i\gamma & \beta - i\delta \\ \alpha + i\gamma & \beta + i\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha + \delta + i(\beta - \gamma) & \alpha - \delta - i(\beta + \gamma) \\ \alpha - \delta + i(\beta + \gamma) & \alpha + \delta - i(\beta - \gamma) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Če označimo $a = \frac{1}{2}(\alpha + \delta + i(\beta - \gamma))$ in $b = \frac{1}{2}(\alpha - \delta - i(\beta + \gamma))$, dobimo, da je $\varphi(A)$ oblike:

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

in je slika φ res vsebovana v M, tj. $\mathrm{Im}(\varphi) \subset M$. Pokažimo še obratno, torej da je $M \subset \mathrm{Im}(\varphi)$. Vzemimo poljubno matriko $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in M$ in pokažimo, da obstaja taka matrika $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, da je $B = \frac{1}{2i}CAC'$. Nastavimo koeficiente A:

$$\alpha := \Re(a+b)\ , \quad \beta := \Im(a-b)\ , \quad \gamma := -\Im(a+b)\ , \quad \delta := \Re(a-b) \tag{6}$$

Tako konstruirana matrika A ima realne koeficiente, hkrati pa zaradi konstrukcije elementov iz (6) in enačbe (5) vidimo, da zadošča $B = \frac{1}{2i}CAC'$ za dani B. S tem smo dokazali, da je φ bijektivni homomorfizem, torej izomorfizem med $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in M.

Ostane nam pokazati, da je preslikava iz M v $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ s predpisom $B \mapsto h_B$ homomorfizem grup z jedrom, ki je enak množici $\{I, -I\}$. Vemo, da za $B = \frac{1}{2i}CAC'$ velja, da je $h_B = h_{\frac{1}{2i}CAC'} = h_C \circ h_A \circ h_{C'}$ biholomorfna preslikava iz $\mathbb{D}$ v $\mathbb{D}$, torej avtomorfizem $\mathbb{D}$. Ker je M izomorfen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, za poljubno matriko $B \in M$ velja, da je oblike $\frac{1}{2i}CAC'$, torej je h_B avtomorfizem $\mathbb{D}$ za vsak $B \in M$. Dejstvo, da je preslikava $B \mapsto h_B$ homomorfizem, sledi neposredno po trditvi 1.7 in smo podoben dokaz že naredili. Jedro preslikave $B \mapsto h_B$ bo enako jedru preslikave $A \mapsto h_A$ za $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, ko slikamo A v $\frac{1}{2i}CAC'$. Jedro preslikave $A \mapsto h_A$ sta matriki $I, -I$ in ko slikamo z izomorfizmom φ, spet dobimo I in $-I$. Za lažjo predstavo si lahko pomagamo z naslednjim komutativnim diagramom:

$$
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & h_A \\
\varphi \updownarrow & & \updownarrow \\
B & \longrightarrow & h_B
\end{array}
\tag{7}
$$

kjer je $B = \frac{1}{2i}CAC'$ in $h_B = h_C \circ h_A \circ h_{C'}$. $\square$

S tem smo dobili podgrupo avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Seveda pa tako kot za prej opisane avtomorfizme $\mathbb{E}$ še ne vemo, ali so to tudi vsi avtomorfizmi. S tem se bomo ukvarjali v naslednjem poglavju. Sedaj si rajši še malo bolj podrobno poglejmo že dobljene avtomorfizme $\mathbb{D}$. Zaenkrat so to lomljene linearne preslikave h_B, kjer je $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. Te matrike pa lahko zapišemo tudi drugače, s čimer si bomo pomagali v nadaljevanju. Dokažimo naslednjo lemo.

Lema 2.9. *Za vsako matriko $W = \begin{pmatrix} u & -uw \\ \overline{w} & -1 \end{pmatrix}$, kjer $u \in \partial\mathbb{D}$, $w \in \mathbb{D}$, obstaja tako število $s \in \mathbb{C}^\times$, da velja $W = sB$ za neko matriko $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ v M. Velja tudi obratno, da za vsako matriko $B \in M$, obstaja tako število $s' \in \mathbb{C}^\times$, da velja $B = s'W$ za neko matriko W oblike kot zgoraj.*

Dokaz. Najprej pokažimo prvi del leme. Vzemimo poljubno matriko W, ki je oblike kot v lemi. Želimo konstruirati tako matriko B, da bo za neko neničelno število $s \in \mathbb{C}^\times$ veljalo, da je $W = sB$. Ker je $w \in \mathbb{D}$ velja, da je $1 - |w|^2 > 0$. Naj bo sedaj $a^2 = \frac{-u}{1-|w|^2}$. Ker velja $\frac{-u}{1-|w|^2} \in \mathbb{C}^\times$, takšen a gotovo obstaja. Hkrati naj bo $b = -wa$. Računamo:

$$|a^2| - |b^2| = \frac{|u|}{1-|w|^2} - \frac{|u||w|^2}{1-|w|^2} = |u|\frac{1-|w|^2}{1-|w|^2} = |u| = 1,$$

saj je $u \in \partial\mathbb{D}$. Naj bo sedaj iskana matrika B oblike $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. Za B velja, da je $\det(B) = |a|^2 - |b|^2 = 1$, torej $B \in M$.

Naj bo $s = ua^{-1}$. Za s velja, da pripada $\mathbb{C}^\times$. Računamo:

$$sB = ua^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua^{-1}a & ua^{-1}(-wa) \\ s(\overline{-wa}) & s\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -uw \\ -s\overline{wa} & s\overline{a} \end{pmatrix}$$

Hkrati pa za s velja tudi:

$$sa^2 = s\frac{-u}{1-|w|^2} = ua$$

$$s = -a(1-|w|^2)$$

Torej lahko izračunamo $s\overline{a}$:

$$s\overline{a} = -(1-|w|^2)a\overline{a} = -(1-|w|^2)\frac{1}{1-|w|^2} = -1.$$

In posledično za matriko sB velja:

$$\begin{pmatrix} u & -uw \\ -s\overline{wa} & s\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -uw \\ \overline{w} & -1 \end{pmatrix}.$$

S tem smo dokazali, da naša konstrukcija matrike B res zadošča $W = sB$.

Pokažimo še obratno. Naj bo $B \in M$ poljubna matrika in naj bo oblike $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. Naj bo število s oblike $s = -\frac{a}{|a|^2}$. Poglejmo si koeficiente matrike sB:

$$
\begin{aligned}
sa &= -\frac{a}{|a|^2}a = -\frac{a^2}{|a|^2} \\
s\overline{a} &= -\frac{a}{|a|^2}\overline{a} = -1 \\
sb &= -\frac{a}{|a|^2}b = -\frac{a^2}{|a|^2}\frac{\overline{a}b}{|a|^2} \\
s\overline{b} &= -\frac{a}{|a|^2}\overline{b} = -\frac{a\overline{b}}{|a|^2}
\end{aligned}
$$

Označimo $u = -\frac{a^2}{|a|^2}$ in $w = -\frac{\overline{a}b}{|a|^2}$. Velja, da je $u \in \partial\mathbb{D}$ in $w \in \mathbb{D}$, saj je $|a|^2 = |b|^2 + 1$ po definiciji matrik iz množice M. Torej je matrika sB oblike:

$$
\begin{pmatrix} u & -uw \\ \overline{w} & -1 \end{pmatrix} \quad u \in \partial\mathbb{D} \quad \text{in} \quad w \in \mathbb{D}
$$

Ker $s \in \mathbb{C}^\times$ obstaja tak s', da velja $ss' = 1$. Od tod sledi, da za poljubno matriko $B \in M$ obstaja tako število s' in taka matrika W, da je $B = s'W$, kar pa je ravno trditev naše leme. □

S pomočjo leme 2.9 lahko že znane avtomorfizme zapišemo malo drugače. Tukaj ne gre samo za estetski vtis, ampak bomo s pomočjo novega zapisa lahko iz preslikav razbrali več kot do sedaj. Dokažimo torej naslednji izrek.

Izrek 2.10. *Vsaka kompleksna preslikava oblike* $z \mapsto u\frac{z-w}{\overline{w}z-1}$, *kjer* $u \in \partial\mathbb{D}$ *in* $w \in \mathbb{D}$, *je avtomorfizem* $\mathbb{D}$.

Dokaz. Po lemi 2.9 sledi, da lahko vsako matriko $W = \begin{pmatrix} u & -uw \\ \overline{w} & -1 \end{pmatrix}$ zapišemo kot $W = sB$, kjer je $s \in \mathbb{C}^\times$ neničelen skalar in B matrika oblike $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. Vemo, da je preslikava h_B avtomorfizem diska za vsak $B \in M$. Iz lastnosti lomljenih linearnih preslikav neposredno sledi, da je $h_W(z) = h_B(z)$ za vsako točko z, kjer sta preslikavi definirani, če velja $W = sB$. Torej je preslikava h_W, ki je prirejena matriki W, avtomorfizem diska. □

Poglejmo si avtomorfizme diska v na novo dobljenem zapisu oblike $h_W(z) = u\frac{z-w}{\overline{w}z-1}$. V kolikor je $w = 0$, lahko preslikavo zapišemo kot $h(z) = e^{i\alpha}z$ za neki $\alpha \in [0, 2\pi)$. V tem primeru imamo rotacijo diska okoli izhodišča. Preverimo lahko, da je kompozitum dveh rotacij $h(z) = e^{i\alpha}z$, $g(z) = e^{i\beta}z$ spet rotacija $(h \circ g)(z) = e^{i\alpha}e^{i\beta}z$. Prav tako velja, da je identiteta $id_{\mathbb{D}}$ rotacija diska, v tem primeru je $\alpha = 0$. Za poljubno rotacijo okoli izhodišča $h(z) = e^{i\alpha}z$ velja, da je njen inverz tudi rotacija oblike $h^{-1}(z) = e^{-i\alpha}z = e^{i(2\pi-\alpha)}z$. Torej rotacije v grupi $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tvorijo podgrupo, ki je izomorfna ciklični grupi S^1.

Naj bo sedaj v naši preslikavi h_W $u = 1$. Imamo torej preslikavo oblike $h(z) = \frac{z-w}{\overline{w}z-1}$. Taki preslikavi rečemo *Möbiusova preslikava* in ima prav tako nekaj zelo lepih lastnosti, ki jih bomo še potrebovali v nadaljevanju. Zapišimo jih v trditvi.

Trditev 2.11. *Za poljubno Möbiusovo preslikavo oblike* $h(z) = \frac{z-w}{\overline{w}z-1}$ *velja:*

(1) $h(w) = 0$ *in* $h(0) = w$,
(2) $h^{-1} = h$.

Dokaz. Za dokaz prve lastnosti vstavimo vrednosti 0 in w v funkcijo ter dobimo $h(w) = 0$ in $h(0) = w$. Pri inverzu si lahko pomagamo z matriko, ki ji je Möbiusova preslikava prirejena. Izračunamo lahko:

$$\begin{pmatrix} 1 & -w \\ \bar{w} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -w \\ \overline{w} & -1 \end{pmatrix} = (1-|w|^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iz tega neposredno sledi, da za poljubno Möbiusovo preslikavo velja, da je sama sebi inverz. □

2.3. **Homogenost zgornje polravnine in enotskega diska.** V tem podpoglavju se bomo seznanili s homogenostjo kompleksnih domen. Najprej bomo definirali homogenost za poljubno domeno v $\mathbb{C}$ in si pogledali nekaj primerov, potem pa se bomo osredotočili na za nas pomembni domeni $\mathbb{E}$ in $\mathbb{D}$. S homogenostjo si bomo kasneje pomagali pri preučevanju strukture grup $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Pa začnimo z definicijo.

Definicija 2.12. Naj bo L podgrupa $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Domena $\Omega \subset \mathbb{C}$ je *homogena* glede na L, če za poljubni dve točki $z, z' \in \Omega$ obstaja tak avtomorfizem $h \in L$, da velja $h(z) = z'$. V takih primerih pravimo tudi, da grupa L deluje *tranzitivno* na Ω.

Opomba 2.13. Če za neko podgrupo L v $\mathrm{Aut}(\Omega)$ velja, da domena Ω zadošča definiciji 2.12, potem rečemo, da je Ω *homogena domena.* Očitno velja, da če je Ω homogena glede na neko podgrupo L, potem je homogena tudi glede na $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

V splošnem domena v $\mathbb{C}$ ni homogena. Največkrat je grupa avtomorfizmov samo identiteta, ampak takšni splošni primeri za nas ne bodo zanimivi. Poglejmo si nekaj primerov.

Primer 2.14. Vzemimo za območje kar celoten $\mathbb{C}$. Za podgrupo avtomorfizmov pa vse preslikave oblike $z \mapsto az + b$, kjer $a \in \mathbb{C}^\times$ in $b \in \mathbb{C}$. Če vzamemo poljubni točki $w, w' \in \mathbb{C}$, preslikava $z \mapsto z - (w - w')$ slika točko w v točko w'. V bistvu smo v tem primeru naredili translacijo v kompleksni ravnini. Torej velja, da je kompleksna ravnina $\mathbb{C}$ homogena. ♢

Primer 2.15. Za domeno vzemimo $\mathbb{C}^\times$, za podgrupo avtomorfizmov pa množico preslikav $L_1 = \{e^{i\varphi}z \ ; \ \varphi \in [0, 2\pi)\}$, torej rotacije okoli izhodišča. Množica L_1 je očitno podgrupa avtomorfizmov, saj je grupa za operacijo kompozitum, prav tako pa poljubna rotacija okoli izhodišča bijektivno slika $\mathbb{C}^\times$ v $\mathbb{C}^\times$. V tem primeru velja, da $\mathbb{C}^\times$ ni homogena glede na L_1. Če vzamemo poljubni točki, katerih absoutna vrednost ni enaka, npr. 1 in $2i$, ne obstaja rotacija, ki bi 1 slikala v $2i$ in obratno.

Lahko pa vzamemo drugačno grupo avtomorfizmov. Vzemimo množico preslikav $L_2 = \{az \ ; \ a \in \mathbb{C}^\times\}$. Tako kot prej lahko hitro preverimo, da je L_2 podgrupa avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^\times)$. V tem primeru za poljubni dve točki $w, w' \in \mathbb{C}^\times$ preslikava

$z \mapsto w'w^{-1}z$ slika w v w'. Torej je $\mathbb{C}^{\times}$ homogena glede na L_2 in zato je homogena domena. $\diamondsuit$

Homogenost v splošnem ni lahko določljiva lastnost, zato si bomo v nadaljevanju pomagali z naslednjo lemo.

Lema 2.16. *Če obstaja taka točka $c \in \Omega$, katere orbita $\{g(c)\ ;\ g \in L\}$ je celotna domena Ω, potem je Ω homogena glede na L.*

Dokaz. Vzemimo poljubni dve točki $w, w' \in \Omega$. Ker obstaja točka $c \in \Omega$, za katero je $\{g(c)\ ;\ g \in L\} = \Omega$, obstajata preslikavi f in g, za kateri je $f(c) = w$ in $g(c) = w'$. Za kompozitum velja $g \circ f^{-1}(w) = w'$, torej je domena po definiciji homogena glede na L. $\square$

Poglejmo si sedaj, ali sta domeni $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$ homogeni. Velja naslednji izrek.

Izrek 2.17. *Enotski disk $\mathbb{D}$ je homogen glede na grupo $Aut(\mathbb{D})$.*

Dokaz. Spomnimo se Möbiusovih preslikav, tj. preslikav oblike $h(z) = \dfrac{z-w}{\overline{w}z-1}$. Pokažimo da je orbita točke 0 celoten enotski disk. Res, za poljubno točko w in preslikavo $h(z) = \dfrac{z-w}{\overline{w}z-1}$ velja, da je $h(0) = w$. Ker je orbita točke 0 enaka $\mathbb{D}$, po lemi 2.16 velja, da je $\mathbb{D}$ homogen glede na grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. $\square$

Dejstvo, da je tudi $\mathbb{E}$ homogena domena glede na $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, lahko pokažemo na več načinov. Eden izmed njih je s pomočjo biholomorfnosti in naslednje trditve.

Trditev 2.18. *Naj bo Ω homogena domena glede na grupo avtomorfizmov* $\mathrm{Aut}(\Omega)$ *in naj bo Ω' biholomorfno ekvivalentna Ω. Potem je Ω' homogena glede na grupo* $\mathrm{Aut}(\Omega')$.

Dokaz. Označimo s h biholomorfno preslikavo med Ω in Ω'. Naj bosta $z, z' \in \Omega'$ poljubni dve točki. Potem obstajata taki točki $w, w' \in \Omega$, da je $h(w) = z$ in $h(w') = z'$. Ker je domena Ω homogena, obstaja tak avtomorfizem f, da je $f(w) = w'$. Preslikava $h \circ f \circ h^{-1}$ je avtomorfizem Ω', hkrati pa velja $(h \circ f \circ h^{-1})(z) = z'$. Kar pa pomeni, da smo za poljubni dve točki v Ω' našli avtomorfizem, ki slika eno v drugo, torej je Ω' homogena. $\square$

Dokazali smo, da je homogenost lastnost, ki se pri biholomorfnih domenah ohranja. Iz tega dejstva neposredno sledi, da je tudi $\mathbb{E}$ homogena domena. Seveda pa bi se lahko vprašanja o homogenosti $\mathbb{E}$ lotili tudi malo drugače, podobno kot smo se lotili homogenosti $\mathbb{D}$. Spomnimo se, da smo pri homogenosti $\mathbb{D}$ našli točko 0, ki je imela za orbito kar celoten $\mathbb{D}$. Poglejmo si, kam inverzna Caylejeva preslikava slika točko 0. $h_{C'}(0) = i\dfrac{1+0}{1-0} = i$. Naravno se sedaj porodi vprašanje, ali je tudi orbita i celoten $\mathbb{E}$? Odgovor je pritrdilen. To spet sledi neposredno iz biholomorfnosti $\mathbb{E}$ in $\mathbb{D}$. Vemo, da za za poljubno točko $w \in \mathbb{D}$ obstaja taka Mobiusova preslikava $h(z) = \dfrac{z-w}{\overline{w}z-1}$, da je $h(0) = w$. Če sedaj vzamemo poljubno točko $w' \in \mathbb{E}$ in njej prirejeno točko $w \in \mathbb{D}$, da je $h_{C'}(w) = w'$, bo preslikava $h_{C'} \circ h \circ h_C$ slikala točko i v w'.

3. Grupi avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$

V tem poglavju bo naša naloga opisati strukturo grup avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. V prejšnjem poglavju smo želeli poiskati čim več avtomorfizmov $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$, naloga v tem poglavju pa bo dokazati, da so to tudi vsi možni avtomorfizmi. Ker smo avtomorfizme dobili tako, da smo matrikam priredili lomljene linearne preslikave preko homomorfizma $A \mapsto h_A$, bomo s tem, ko bomo dokazali, da so to vsi avtomorfizmi, že imeli podano strukturo grupe. Na koncu poglavja bomo podrobneje pogledali še, kako je z negibnimi točkami avtomorfizmov. Torej kdaj za avtomorfizem f domene Ω velja, da obstaja točka z, za katero je $f(z) = z$. Zanimalo nas bo, kateri avtomorfizmi imajo negibne točke in koliko jih je lahko. Tu nam bo prav prišla homogenost domen $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$.

Najprej pa se moramo spomniti še nekaj lastnosti holomorfnih preslikav, s katerimi si bomo pomagali v nadaljevanju.

3.1. Schwarzeva lema.

V tem podpoglavju bomo podrobneje obravnavali Schwarzevo lemo. Ponovili bomo princip maksimuma in nato formulirali osnovno verzijo Schwarzeve leme in se nato poglobili v njene različne oblike. Še več rezultatov v povezavi s Schwarzevo lemo najdemo v [3, poglavje 2]. Začnimo s trditvijo o principu maksimuma, ki pa je ne bomo dokazali. Dokaz najdemo v [4, poglavje 8.5.2].

Trditev 3.1. *Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ poljubna povezana domena in f nekonstantna holomorfna preslikava na Ω, ki je zvezna na robu $\partial\Omega$. Potem za funkcijo $|f|$, definirano na $\overline{\Omega}$, velja, da nima nobenega lokalnega maksimuma.*

Trditev 3.1 pove, da za poljubno povezano domeno Ω in poljubno nekonstantno holomorfno preslikavo f, ki je zvezna na robu Ω, velja, da bo funkcija $|f|$ dosegla svoj maksimum nekje na robu. Velja tudi, da če funkcija $|f|$ doseže svoj maksimum v notranjosti, tj. maksimalna vrednost v notranjosti domene je enaka maksimalni vrednosti na robu, potem je f konstantna. Princip maksimuma bomo potrebovali pri dokazu Schwarzeve leme. Najprej se jo spomnimo v njeni običajni verziji.

Lema 3.2. *Vsaka holomorfna preslikava $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, za katero je $f(0) = 0$, zadošča naslednjim pogojem:*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{za vsak } z \in \mathbb{D} \quad \text{in} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Če obstaja točka $c \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, da velja enakost $|f(c)| = |c|$, oz. če velja enakost $|f'(0)| = 1$, potem je f rotacija okoli izhodišča. To pomeni, da obstaja tak $a \in \partial\mathbb{D}$, da je $f(z) = az$.

Dokaz. Definirajmo preslikavo $g(z) := \dfrac{f(z)}{z}$. Ta preslikava je holomorfna za vsak $z \in \mathbb{D}\backslash\,\{0\}$ in zvezna na robu $\partial\mathbb{D}$. Ker pa velja še, da je $f(0) = 0$, imamo:

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0),$$

torej lahko g zvezno holomorfno razširimo:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} \ ; \ z \in \mathbb{D}\backslash\,\{0\} \\ f'(0) \ ; \ z = 0 \end{cases}$$

Ker f slika v enotski disk, je $|f(z)| < 1$ za vsak $z \in \mathbb{D}$ in posledično velja:

$$\max_{|z|=r} g(z) = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \quad \text{za vsak pozitiven } r < 1.$$

Sedaj lahko uporabimo princip maksimuma, saj veljajo vsi pogoji iz trditve 3.1. Velja:

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \text{za vse } |z| \leq r \text{ in } 0 < r < 1.$$

Pošljemo r proti 1. Dobimo, da za vsak $z \in \mathbb{D}$ velja, da je $|g(z)| \leq 1$. Če upoštevamo še, kako je funkcija g definirana, dobimo, da veljata neenakosti:

$$|f(z)| \leq |z| \text{ za vsak } z \in \mathbb{D} \quad \text{in} \quad |f'(0)| \leq 1$$

Če velja enakost $|f(c)| = |c|$ za neki c, potem je v tej točki $|g(c)| = 1$, oz. če velja $|f'(0)| = 1$, potem je prav tako $|g(0)| = 1$. Po principu maksimuma je funkcija g konstantna, torej je oblike $g(z) = a$, za $|a| = 1$. Če spet upoštevamo definicijo g, dobimo, da je f oblike $f(z) = az$, torej rotacija okoli izhodišča. $\square$

Kot smo že omenili, obstaja veliko alternativnih verzij Schwarzeve leme in njenih posplošitev. Za boljše razumevanje holomorfnih preslikav iz enotskega diska nazaj v disk si bomo pogledali posplošitev, ki se ji reče Schwarz-Pickova lema. V njej nam ni treba predpostaviti, da je $f(0) = 0$, njen zaključek pa je tudi bolj splošen.

Lema 3.3. *Naj bo $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna funkcija in naj bosta $a, b \in \mathbb{D}$ poljubni točki, $a \neq b$. Označimo $f(a) = \alpha$ in $f(b) = \beta$. Velja:*

(1) $\left|\dfrac{\beta - \alpha}{\overline{\alpha}\beta - 1}\right| \leq \left|\dfrac{b - a}{\overline{a}b - 1}\right|$

(2) $|f'(a)| \leq \dfrac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2}$

Dokaz. Najprej dokažimo (1). Vzemimo poljubno točko $a \in \mathbb{D}$. Označimo s $h_a(z) = \dfrac{z - a}{\overline{a}z - 1}$ Möbiusovo preslikavo, za katero velja $h_a(a) = 0$ in $h_a(0) = a$. Spomnimo se še, da je inverz Möbiusove preslikave h_a kar h_a. Definirajmo preslikavo:

$$g(z) := (h_\alpha \circ f \circ h_a)(z),$$

kjer je $\alpha = f(a)$. Potem je $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna preslikava in $g(0) = 0$. Res:

$$g(0) = h_\alpha(f(h_a(0))) = h_\alpha(f(a)) = h_\alpha(\alpha) = 0.$$

Torej po Schwarzevi lemi velja $|g(z)| \leq |z|$, oziroma:

$$|(h_\alpha \circ f \circ h_a)(z)| \leq |z|.$$

Označimo $w = h_a(z)$. Velja $z = h_a(w)$, saj je h_a sam sebi inverz. Vstavimo to v zgornjo neenačbo in dobimo:

$$|h_\alpha(f(w))| \leq |h_a(w)|,$$

oziroma:

$$\left|\frac{f(w) - \alpha}{\overline{\alpha}f(w) - 1}\right| \leq \left|\frac{w - a}{\overline{a}w - 1}\right|.$$

Seveda je w neka poljubna točka v $\mathbb{D}$, $w \neq a$. Označimo jo z b in $f(b) = \beta$. S tem dobimo želeno neenakost:

$$\left|\frac{\beta - \alpha}{\overline{\alpha}\beta - 1}\right| \leq \left|\frac{b - a}{\overline{a}b - 1}\right|.$$

Podobno sedaj dokažimo še (2). Naj bo g definirana tako kot prej. Po Schwarzevi lemi velja:

$$|g'(0)| = |(h_\alpha \circ f \circ h_a)'(0)| \leq 1.$$

Če posredno odvajamo g:

$$g'(z) = h'_\alpha(f \circ h_a(z))f'(h_a(z))h'_a(z),$$

dobimo neenakost:

$$|h'_\alpha(f \circ h_a(0))| \cdot |f'(h_a(0))| \cdot |h'_a(0)| \leq 1. \tag{8}$$

Spomnimo se sedaj na odvod lomljene linearne preslikave, v posebnem primeru Möbiusove preslikave. Za matriki $W = \begin{pmatrix} 1 & -w \\ \overline{w} & -1 \end{pmatrix}$ prirejeno Möbiusovo preslikavo $h(z) = \dfrac{z-w}{\overline{w}z-1}$ je odvod $h'(z)$ enak:

$$h'(z) = \frac{\det(W)}{(\overline{w}z-1)^2} = \frac{|w|^2-1}{(\overline{w}z-1)^2}$$

Uporabimo to na neenačbi (8), skupaj z dejstvom, da je $h_a(0) = a$ in $(f \circ h_a)(0) = \alpha$. Izračunajmo najprej prvi faktor produkta, pri tem upoštevajmo, da je $|\alpha| < 1$:

$$|h'_\alpha(f \circ h_a(0))| = |h'_\alpha(\alpha)| = \left| \frac{|\alpha|^2-1}{(\overline{\alpha}\alpha-1)^2} \right| = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-|\alpha|^2)^2} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

Drugi faktor produkta je enostavno $|f'(a)|$, pri tretjem faktorju pa spet upoštevamo, da je $|a| < 1$ in dobimo $|h'_a(0)| = 1 - |a|^2$. Dobili smo neenačbo:

$$\frac{1}{1-|\alpha|^2}\,|f'(a)|(1-|a|^2) \leq 1.$$

Če enačbo še preoblikujemo, dobimo želeni rezultat:

$$|f'(a)| \leq \frac{1-|\alpha|^2}{1-|a|^2}\,.$$

□

Opomba 3.4. Če v Schwarz-Pickovi lemi 3.3 za točko a vzamemo 0, dobimo neenakosti $|f(z)| \leq |z|$ in $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$. Če za funkcijo f velja še $f(0) = 0$, dobimo ravno neenakosti iz Schwarzeve leme 3.2.

Poglejmo si še eno od posledic Schwarz-Pickove leme, ki bolj natančno kot Schwarzeva lema omeji absolutno vrednost $|f(z)|$ za poljubno holomorfno funkcijo $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, torej nimamo omejitve, da mora biti $f(0) = 0$.

Posledica 3.5. *Naj bo $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna funkcija. Potem velja:*

$$|f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}$$

Dokaz. Vzemimo najprej poljubni števili $a, b \in \mathbb{D}$ in izračunajmo:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 &= \frac{(a-b)(\overline{a}-\overline{b})}{|1-\overline{a}b|^2} = \frac{|a|^2+|b|^2-a\overline{b}-\overline{a}b}{|1-\overline{a}b|^2} \\
&= \frac{1-a\overline{b}-\overline{a}b+|a|^2|b|^2-1-|a|^2|b|^2+|a|^2+|b|^2}{|1-\overline{a}b|^2} \\
&= 1-\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\overline{a}b|^2} \\
&\geq 1-\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|a||b|)^2} \\
&= \frac{1-2|a||b|+|a|^2|b|^2-1+|a|^2+|b|^2-|a|^2|b|^2}{(1-|a||b|)^2} \\
&= \frac{(|a|-|b|)^2}{(1-|a||b|)^2}
\end{aligned}$$

Dobili smo neenakost:

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 \geq \frac{(|a|-|b|)^2}{(1-|a||b|)^2}\,. \tag{9}$$

Uporabimo sedaj neenakost (9) za primer, ko je $a = f(z)$ za poljuben $z \in \mathbb{D}$ in $b = f(0)$. Dobimo:

$$\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(0)||f(z)|} \leq \frac{|f(z)-f(0)|}{|1-\overline{f(0)}f(z)|}.$$

Po Schwarz-Pickovi lemi 3.3 velja:

$$\frac{|f(z)-f(0)|}{|1-\overline{f(0)}f(z)|} \leq \frac{|z-0|}{|1-\overline{0}z|} = |z|.$$

Dobili smo neenakost:

$$\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(0)||f(z)|} \leq |z| \quad \text{oz.} \quad |f(z)|-|f(0)| \leq |z|-|z|\cdot|f(0)|\cdot|f(z)|.$$

Če iz neenačbe izpostavimo $|f(z)|$ in jo preuredimo, dobimo:

$$|f(z)| \leq \frac{|f(0)|+|z|}{1+|z||f(0)|} \qquad \text{za vsak } z \in \mathbb{D},$$

kar je naš želen rezultat. □

Poglejmo si neenakost iz posledice 3.5 na primerih avtomorfizmov diska, ki jih že poznamo, torej na rotacijah in Möbiusovih preslikavah. Za poljubno rotacijo okoli izhodišča $h(z) = e^{i\varphi}$ imamo:

$$|e^{i\varphi}z| \leq \frac{|0|+|z|}{1+0}.$$

Vidimo lahko, da v primeru rotacije za poljuben $z \in \mathbb{D}$ velja enakost. Pri Möbiusovih preslikavah enakost ne velja vedno. Oglejmo si to na primeru poljubne Möbiusove preslikave $h(z) = \dfrac{z-w}{\overline{w}z-1}$, kjer $w \neq 0$:

$$\left|\frac{z-w}{\overline{w}z-1}\right| \leq \frac{|w|+|z|}{1+|w||z|}.$$

Lahko vzamemo npr. točko $z = w$ in hitro vidimo, da enakost ni izpolnjena.

Sedaj si bomo pogledali še eno izmed posledic Schwarzeve leme, ki se neposredno nanaša na avtomorfizme diska. Bolj natančno, na rotacije. Preden pa jo zapišemo, formulirajmo naslednjo definicijo.

Definicija 3.6. Naj bo c poljubna točka v dani domeni Ω, $\Omega \subset \mathbb{C}$, in naj bo L podgrupa grupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Podmnožici grupe L, za katero velja, da vsak avtomorfizem iz te podmnožice fiksira točko c, pravimo *grupa izotropij* točke c glede na L.

Hitro lahko preverimo, da je grupa izotropij točke c res grupa, saj velja, da je kompozitum dveh avtomorfizmov, ki fiksirata točko c, tudi avtomorfizem, ki fiksira c. Analogno velja tudi za inverz ter seveda identiteto. Če je $L = \mathrm{Aut}(\Omega)$, to grupo označimo kot $\mathrm{Aut}_c(\Omega)$.

Posledica 3.7. *Vsak avtomorfizem $f : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, za katerega velja $f(0) = 0$, je rotacija. To podgrupo označimo kot:*

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}\ ;\ f(z) = az\ ,\ a \in \partial\mathbb{D}\}.$$

Dokaz. Za poljubno rotacijo f okoli izhodišča velja, da je avtomorfizem $\mathbb{D}$, ki zadošča $f(0) = 0$.

Dokažimo še obratno. Če je $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ avtomorfizem, ki fiksira točko 0, potem je tudi inverz $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ avtomorfizem, za katerega je $f^{-1}(0) = 0$. Iz Scwarzeve leme sledi:

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \text{in} \qquad |z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$$

za vsak $z \in \mathbb{D}$. Torej velja $|f(z)| = |z|$ za vsak $z \in \mathbb{D}$. Ker imamo holomorfno preslikavo, za katero je $f(0) = 0$ in velja enakost $|f(z)| = |z|$, iz Schwarzeve leme sledi, da je f rotacija. □

Posledica 3.7 pove, da je izotropna grupa oz. grupa izotropij točke 0, sugestivno smo jo označili z $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{D})$, grupa vseh rotacij, torej je izomorfna krožni grupi S^1. S pomočjo biholomorfnosti in Cayleyjeve preslikave bi lahko pokazali, da ima tudi grupa izotropij točke $i \in \mathbb{E}$ enako strukturo, saj lahko poljubno rotacijo f s komponiranjem $h_{C'} \circ f \circ h_C$ prenesemo iz avtomorfizma $\mathbb{D}$, ki fiksira točko 0, v avtomorfizem $\mathbb{E}$, ki fiksira točko i. Zaradi biholomorfne ekvivalentnosti so seveda to tudi vsi avtomorfizmi $\mathbb{E}$, ki fiksirajo točko i.

3.2. **Grupi Aut($\mathbb{D}$) in Aut($\mathbb{E}$).** Prišli smo do poglavja, kjer bomo dokazali, da sta grupi avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ enaki do sedaj najdenim avtomorfizmom, za katere smo do sedaj lahko trdili le, da so podgrupa. Kot smo že omenili, bomo s tem lahko opisali tudi algebraično obliko omenjenih grup, s pomočjo že znanega homomorfizma, ki matriki priredi lomljeno linearno preslikavo. Preden bomo to dokazali, potrebujemo še nekaj orodij iz algebre.

Definicija 3.8. Naj bo G grupa in X poljubna množica. Preslikavo $\rho : G \times X \to X$ imenujemo *delovanje grupe* G na množico X, če zadošča pogojema:

(1) $\rho(gh, x) = \rho(g, \rho(h, x))$,
(2) $\rho(1, x) = x$ za vsak $x \in X$, kjer je 1 enota grupe G.

Več o delovanjih grupe in njenih lastnostih lahko izvemo v [5, poglavje 4]. Poglejmo si delovanje grupe na množico na dveh primerih.

Primer 3.9. Delovanje permutacijske grupe S_n na množico $[n]$, tj. množico prvih n naravnih števil, definiramo s predpisom:

$$\rho(\pi, k) = \pi(k).$$

Preverimo, če zadošča lastnostim iz definicije 3.8. Naj bosta $\pi, \sigma \in S_n$ poljubni premutaciji in id identična permutacija. Velja:

$$\rho(\sigma\pi, k) = \sigma(\pi(k)) = \rho(\sigma, \pi(k)) \quad \text{in} \quad \rho(id, k) = id(k) = k \quad \text{za vsak } k \in [n]\,.$$

Torej imamo res delovanje grupe S_n na množico $[n]$. ♢

Primer 3.10. Vzemimo za množico poljubno domeno $\Omega \in \mathbb{C}$. Oglejmo si delovanje grupe avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\Omega)$ na množico Ω. Delovanje bo preslikava $\rho : \mathrm{Aut}(\Omega) \times \Omega \to \Omega$ oblike:

$$\rho(f, z) = f(z).$$

Preverimo, da je taka preslikava res delovanje grupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ na Ω. Poglejmo, da res zadošča lastnostim iz definicije 3.8:

$$\rho(fg, z) = f(g(z)) = \rho(f, g(z)) \quad \text{in} \quad \rho(id_\Omega, z) = z \quad \text{za vsak } z \in \Omega,\ f, g \in \mathrm{Aut}(\Omega).$$

Dejstvo, da je ρ delovanje grupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ na Ω, nam bo prišlo prav tudi v nadaljevanju. ♢

Delovanje grupe ima lahko nekatere posebne lastnosti. Nas bo zanimalo, kdaj je delovanje grupe tranzitivno.

Definicija 3.11. Naj bo $\rho : G \times X \to X$ delovanje grupe G na množico X. Delovanje ρ je *tranzitivno*, če velja, da za poljubna $x, y \in X$ obstaja tak $g \in G$, da je $\rho(g, x) = y$.

Sedaj lahko formuliramo lemo, ki nam bo povedala, kdaj je neka pogrupa avtomorfizmov danega območja Ω že kar celotna grupa $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Pomagali si bomo z dejstvom iz primera 3.10, ki pravi, da je preslikava $\rho : \mathrm{Aut}(\Omega) \times \Omega \to \Omega$ delovanje grupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ na množico Ω.

Lema 3.12. *Naj bo J podgrupa $\mathrm{Aut}(\Omega)$ z naslednjima lastnostma:*

(1) *J deluje tranzitivno na Ω.*
(2) *Za neko točko $c \in \Omega$, J vsebuje grupo izotropij $\mathrm{Aut}_c(\Omega)$.*

Potem velja $J = \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Dokaz. Spomnimo se, da je grupa izotropij neke točke $c \in \Omega$ grupa, v kateri so vsi avtomorfizmi Ω, ki fiksirajo točko c.

Naj bo sedaj $h \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ poljuben avtomorfizem. Ločimo dva možna primera. Če je $h(c) = c$, potem je $h \in \mathrm{Aut}_c(\Omega)$ in posledično $h \in J$.

Naj sedaj velja $h(c) \neq c$. Ker podgrupa J deluje tranzitivno na Ω, obstaja tak avtomorfizem $g \in \Omega$, da je $g(h(c)) = c$. Ker hkrati J vsebuje podgrupo $\mathrm{Aut}_c(\Omega)$, velja, da je $f := g \circ h \in J$. To pa pomeni, da je potem tudi $h = g^{-1} \circ f \in J$. Dokazali smo, da je $\mathrm{Aut}(\Omega) \subset J$. Ker hkrati velja, da je J podgrupa $\mathrm{Aut}(\Omega)$, iz tega sledi, da je $J = \mathrm{Aut}(\Omega)$. □

Sedaj imamo vse potrebno, da lahko formuliramo naslednji izrek.

Izrek 3.13. *Grupa avtomorfizmov enotskega diska je oblike:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) &= \left\{ \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} \ ;\ a, b \in \mathbb{C}\ ,\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ e^{i\varphi} \frac{z - w}{\overline{w}z - 1} \ ;\ w \in \mathbb{D}\ ,\ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}\end{aligned}$$

Dokaz. V podpoglavju 2.2 smo pokazali, da sta množici iz izreka enaki in tvorita podgrupo v grupi $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, označimo jo z J. Spomnimo se še izreka 2.17, ki pravi, da je $\mathbb{D}$ homogena domena glede na podgrupo J, tj. za poljubni točki $x, y \in \mathbb{D}$ obstaja tak avtomorfizem $h \in J$, da je $h(x) = y$, kar je ekvivalentno temu, da je delovanje grupe J na Ω tranzitivno. Vemo tudi, da je grupa avtomorfizmov, ki fiksirajo točko 0, tj. $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{D})$, vsebovana v naši podgrupi J. Če povzamemo, torej velja, da J deluje tranzitivno na $\mathbb{D}$ in da vsebuje grupo izotropij $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{D})$. Iz leme 3.12 sledi, da je $J = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. □

Pokazali smo, kakšne oblike so avtomorfizmi diska. Ker pa vemo, da je s preslikavo $h_A \mapsto h_{C'} \circ h_A \circ h_C$ definiran izomorfizem med grupama $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, lahko sedaj povemo še, kakšni so avtomorfizmi $\mathbb{E}$.

Posledica 3.14. *Grupa avtomorfizmov zgornje polravnine je oblike:*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \ ; \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \ \right\}$$

Dokaz. Kot smo že povedali, preslikava $\sigma : h_A \mapsto h_{C'} \circ h_A \circ h_C$ tvori izomorfizem med grupama $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Iz izreka 3.13 in dejstva, da so slike σ ravno lomljene linearne preslikave oblike $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, kjer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, sledi posledica. □

S tem smo pokazali obliko grup $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. V poglavju 2 smo pokazali, da obstaja homomorfizem iz določene podgrupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ v naši grupi avtomorfizmov. Kot v podpoglavju 2.2 jo označimo z $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \ ; \ a, b \in \mathbb{C} \ , \ \det(B) = 1 \right\}$. Označimo še $W = \left\{ \begin{pmatrix} u & -uw \\ \overline{w} & -1 \end{pmatrix} \ ; \ u \in \partial\mathbb{D} \text{ in } w \in \mathbb{D} \right\}$. Naslednji diagram, ki ponazarja zvezo med matričnimi grupami in grupami avtomorfizmov $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$, komutira:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \\ \cong\updownarrow & & \cong\updownarrow \\ \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{E}) \end{array} \tag{10}$$

Poglejmo si najprej grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. V podpoglavju 2.1 smo pokazali, da imamo homomorfizem iz $SL(2,\mathbb{R})$ v $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, ki ima v jedru matriki $\pm I$. Torej lahko zapišemo:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) / \{I, -I\} \tag{11}$$

Ker sta grupi $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ izomorfni, pa velja tudi:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) / \{I, -I\} \tag{12}$$

Ena izmed posledic izomorfizma (12) je, da za grupo S^1 velja, da je podgrupa grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) / \{I, -I\}$.

3.3. **Negibne točke avtomorfizmov.** To podpoglavje je namenjeno preučevanju negibnih točk avtomorfizmov $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$. Pogledali si bomo, kdaj avtomorfizem ima kakšno negibno točko in koliko je lahko negibnih točk za dan avtomorfizem. Izjema pri tem je identiteta $z \mapsto z$, za katero je vsaka točka negibna. Dejstva, ki jih bomo spoznali v tem podpoglavju, nam bodo prišla prav v naslednjem poglavju, ko bomo preučevali avtomorfizme prebodenih domen.

Začnimo najprej s kratko obravnavo avtomorfizmov $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$. Ker so vsi avtomorfizmi oblike $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, za negibne točke $h(z) = z$ dobimo enačbo

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

S preoblikovanjem dobimo:

$$cz^2 + (d-a)z + b = 0$$

Iz tega sledi, da za poljuben avtomorfizem velja, da če ni identiteta, ima lahko največ dve negibni točki. Velja pa še več, kar nam bo povedal naslednji izrek.

Izrek 3.15. *Naj bo $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ avtomorfizem $\mathbb{D}$ z dvema negibnima točkama. Potem je h identiteta $id_{\mathbb{D}}$.*

Dokaz. Naj bo $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in naj velja, da sta $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ negibni točki h. Če vzamemo Möobiusovo preslikavo $h_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - 1}$, lahko naredimo kompozitum $f = h_\alpha \circ h \circ h_\alpha$. Za preslikavo f velja $f(0) = h_\alpha(h(h_\alpha(0))) = h_\alpha(h(\alpha)) = h_\alpha(\alpha) = 0$. Prav tako obstaja še druga točka $b = h_\alpha(\beta)$, za katero je prav tako $f(b) = b$. Torej je dovolj, da se osredotočimo na preslikave, ki fiksirajo točki 0 in b za neki $b \neq 0$. Posledica 3.7 nam pove, da za poljuben avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}_0(\mathbb{D})$ velja, da je f rotacija, tj. $f(z) = az$ za neki $a \in \partial\mathbb{D}$. Vemo, da je $f(0) = 0$ in $f(b) = b$ za neki $b \neq 0$. Torej velja enačba $b = ab$ za $b \in \mathbb{D}$ in $a \in \partial\mathbb{D}$. Množimo z b^{-1} in dobimo $a = 1$. Sledi $f = id_{\mathbb{D}}$. $\square$

Iz biholomorfnosti domen $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$, oz. sedaj lahko rečemo tudi iz izomorfnosti grup $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, sledi, da za poljuben avtomorfizem $\mathbb{E}$, ki fiksira dve točki, velja, da je enak $id_{\mathbb{E}}$. Zapišimo to v posledici.

Posledica 3.16. *Naj bo $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ avtomorfizem z dvema negibnima točkama. Potem je h enak identiteti $id_{\mathbb{E}}$.*

Dokaz. Recimo, da je $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ avtomorfizem z dvema negibnima točkama. Potem lahko s kompnoranjem $h_C \circ h \circ h_{C'}$ dobimo avtomorfizem $\mathbb{D}$ z dvema negibnima točkama. Iz 3.15 vemo, da je tak avtomorfizem identiteta, torej je $h_C \circ h \circ h_{C'} = id_{\mathbb{D}}$. Ker pa je hkrati preslikava $h \mapsto h_C \circ h \circ h_{C'}$ tudi izomorfizem, lahko iz tega sklepamo, da je tudi $h = id_{\mathbb{E}}$. $\square$

Pokazali smo, da za poljuben avtomorfizem $\mathbb{D}$ ali $\mathbb{E}$, ki ni enak identiteti, velja, da ima lahko največ eno negibno točko. Pri avtomorfizmih $\mathbb{E}$ pa smo lahko še nekoliko bolj natančni. Povemo lahko natančno, kdaj bo avtomorfizem imel negibno točko. Na tem mestu se spomnimo še, da je za poljubno matriko A velikosti $n \times n$ sled matrike A enaka vsoti diagonalnih elementov, tj. $\mathrm{sl}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Trditev 3.17. *Za matriki $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm I\}$ prirejen avtomorfizem $h_A : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ velja, da ima negibno točko natanko tedaj, ko je $|\,\mathrm{sl}(A)| < 2$.*

Dokaz. Naj bo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ poljubna matrika v $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm I\}$. Kot smo že pokazali, računanje negibnih točk $h_A(z) = z$ prevedemo na enačbo oblike:

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Dobimo dve možni rešitvi:

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$$

Nas zanima, ali katera izmed teh rešitev leži v $\mathbb{E}$, tj. ali za katero izmed teh dveh rešitev velja, da je $\Im(z_i) > 0$, za $i \in \{1, 2\}$. Ker so koeficienti matrike A realni, bo to res natanko tedaj, ko bo $(d-a)^2 + 4bc < 0$. Takrat bosta rešitvi kompleksni in ena izmed njiju bo imela pozitiven predznak pred imaginarnim delom. Poglejmo si, kdaj bo neenačba $(d-a)^2 + 4bc < 0$ izpolnjena. Pri tem upoštevajmo, da je $ad - bc = 1$:

$$\begin{aligned}(d-a)^2 + 4bc &= d^2 - 2ad + a^2 + 4bc \\ &= d^2 + 2ad + a^2 - 4 < 0\end{aligned}$$

Oziroma $(a+d)^2 < 4$. Če neenačbo korenimo, dobimo želeni rezultat $|\operatorname{sl}(A)| = |a+d| < 2$. □

4. Avtomorfizmi prebodenih domen

Poljubni domeni $\Omega \in \mathbb{C}$ lahko izvzamemo neko diskretno množico točk A. Taki novi domeni rečemo *prebodena domena.* Naša naloga v zadnjem poglavju bo pokazati, kakšna je grupa avtomorfizmov nove domene $\Omega \backslash A$ in kako je, če sploh, povezana z grupo $\operatorname{Aut}(\Omega)$. Najprej vpeljimo oznako za avtomorfizme domene Ω, ki slikajo poljubno podmnožico $M \subset \Omega$ bijektivno nazaj v M:

$$\operatorname{Aut}_M(\Omega) := \{f \in \operatorname{Aut}(\Omega)\ ; f(M) = M\}$$

Tako definirana množica je seveda podgrupa v grupi $\operatorname{Aut}(\Omega)$. V kolikor za množico M vzamemo enojec $\{c\}$, kjer $c \in \Omega$, dobimo podgrupo avtomorfizmov, ki fiksirajo točko c. Tako podgrupo smo že spoznali in smo jo imenovali grupa izotropij točke c.

Na tej točki se naravno porodi vprašanje, v kakšni zvezi sta grupi $\operatorname{Aut}_M(\Omega)$ in $\operatorname{Aut}(\Omega \backslash M)$. Če vzamemo poljuben avtomorfizem $f \in \operatorname{Aut}_M(\Omega)$, za f velja:

$$f(M) = M \quad \text{in} \quad f(\Omega \backslash M) = \Omega \backslash M$$

Zožitev $f : \Omega \backslash M \to \Omega \backslash M$, je še vedno bijektivna holomorfna preslikava, po definiciji avtomorfizem. Zapišimo to v trditvi.

Trditev 4.1. *Za poljubno domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$ in za poljubno podmnožico M domene Ω obstaja homomorfizem grup $\operatorname{Aut}_M(\Omega) \to \operatorname{Aut}(\Omega \backslash M)$. Če za množico $\Omega \backslash M$ velja, da je gosta v vsaki povezani komponenti Ω, potem je tak homomorfizem tudi injektiven.*

Dokaz. Označimo s φ preslikavo $\varphi : f \mapsto f\,|_{\Omega \backslash M}$, torej zožitev avtomorfizma f na $\Omega \backslash M$. Pokazali smo že, da je taka zožitev avtomorfizem območja $\Omega \backslash M$. Pokazati moramo še, da φ ustreza lastnosti homomorfizma. Za poljubni preslikavi $f, g \in \operatorname{Aut}_M(\Omega)$ je $\varphi(f \circ g) = (f \circ g)\,|_{\Omega \backslash M}$ in ker za preslikavi f, g velja $f(\Omega \backslash M) = \Omega \backslash M$ in $g(\Omega \backslash M) = \Omega \backslash M$ velja $(f \circ g)\,|_{\Omega \backslash M} = f\,|_{\Omega \backslash M} \circ g\,|_{\Omega \backslash M} = \varphi(f) \circ \varphi(g)$. Dokazali smo, da je φ homomorfizem.

Injektivnost homomorfizma sledi po principu identičnosti [4, poglavje 8.1.1] za holomorfne preslikave, ki pravi, da če se dve holomorfni preslikavi ujemata na neki gosti podmnožici povezane domene, potem sta enaki. Recimo, da za $f \in \operatorname{Aut}_M(\Omega)$ velja, da je njegova slika $\varphi(f)$ identiteta na $\Omega \backslash M$. Dejstvo, da se f ujema z identiteto na gosti podmnožici vsake povezane komponente v Ω sledi, ker ima $\Omega \backslash M$ notranje točke v vsaki povezani komponenti Ω. Iz tega pa po principu identičnosti res sledi, da je $f = id_\Omega$. □

Nas ne zanimajo avtomorfizmi za poljubno domeno Ω in podmnožico M, ampak samo omejene domene in diskretne podmnožice. Najprej povejmo Riemannov izrek o zvezni razširitvi, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju. Izrek je dokazan v [4, poglavje 7.3.4].

Izrek 4.2. *Če je A diskretna in zaprta podmnožica Ω, potem so naslednje trditve o holomorfni preslikavi f na $\Omega \backslash A$ ekvivalentne:*

(1) *f lahko holomorfno razširimo na A.*
(2) *f lahko zvezno razširimo na A.*
(3) *f je omejena v okolici vsake točke v A.*
(4) *Velja limita* $\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$ *za vsako točko $a \in A$.*

Sedaj lahko formuliramo izrek, ki nam bo povedal, da v nekaterih primerih, ko je A diskretna podmnožica domene Ω velja, da sta grupi $\mathrm{Aut}_A(\Omega)$ in $\mathrm{Aut}(\Omega \backslash A)$ izomorfni.

Izrek 4.3. *Naj bo Ω omejena odprta domena, ki nima nobenih izoliranih robnih točk. Potem za vsako diskretno in relativno zaprto podmnožico A množice Ω velja, da je homomorfizem $\varphi : \mathrm{Aut}_A(\Omega) \to \mathrm{Aut}(\Omega \backslash A)$ bijektiven.*

Dokaz. Imamo homomorfizem φ, ki slika funkcijo $\hat{f} \in \mathrm{Aut}_A(\Omega)$ v njeno zožitev $f = \hat{f}\,|_{\Omega \backslash A}$. Injektivnost φ sledi iz dejstva, da je $\Omega \backslash A$ gosta v Ω. Torej, če sta sliki dveh funkcij homomorfizma enaki, se ujemata na gosti podmnožici Ω. Po principu identičnosti sta potem enaki na celotni domeni Ω.

Za surjektivnost moramo pokazati, da za vsak avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}(\Omega \backslash A)$ obstaja tak avtomorfizem $\hat{f} \in \mathrm{Aut}_A(\Omega)$, da je $f = \hat{f}\,|_{\Omega \backslash A}$. Vzemimo sedaj poljuben avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}(\Omega \backslash A)$. Preslikavi f in $g := f^{-1}$ sta omejeni, saj sta preslikavi iz $\Omega \backslash A$ v $\Omega \backslash A$, ki je omejena domena. Prav tako za poljubno točko $a \in A$ velja, da sta f in g v dovolj majhni prebodeni okolici točke a, torej na npr. nekem dovolj majhnem disku s središčem v a in brez točke a, holomorfni funkciji. Po Riemannovem izreku o zvezni razširitvi 4.2, lahko sedaj funkciji f in g holomorfno razširimo na celotno območje Ω, saj velja točka (3). Tako dobimo holomorfni funkciji $\hat{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ in $\hat{g} : \Omega \to \mathbb{C}$. Hkrati pa po izreku [4, 10.2.1] sledi, da sta $\hat{f}$ in $\hat{g}$ injektivni.

Naslednja stvar, ki jo bomo pokazali ,je, da velja $\hat{f}(\Omega) \subset \Omega$. Ker je $\hat{f}$ zvezna razširitev f, gotovo velja, da je slika $\hat{f}(\Omega)$ vsebovana vsaj v zaprtju $\overline{\Omega}$. Recimo sedaj, da obstaja točka $p \in \Omega$, za katero je $\hat{f}(p) \in \partial\Omega$. Za tak p gotovo velja, da je $p \in A$. Prav tako obstaja dovolj majhen disk B s središčem v p, da je $B \backslash p \subset \Omega \backslash A$. Ker je $\hat{f}$ holomorfna, je tudi odprta preslikava, torej bo slika $\hat{f}(B)$ okolica točke $\hat{f}(p)$. Iz dejstva, da je $\hat{f}$ tudi injektivna, bi sledilo:

$$\hat{f}(B) \backslash \hat{f}(p) = \hat{f}(B \backslash p) = f(B \backslash p)$$

kar pa pomeni, da je točka $\hat{f}(p)$ izolirana robna točka domene Ω, saj je $\hat{f}(B) \backslash \hat{f}(p) \subset \Omega$. To je v nasprotju s predpostavko, da Ω nima izoliranih robnih točk. Pokazali smo, da je $\hat{f}(\Omega) \subset \Omega$. Analogno bi pokazali tudi, da je $\hat{g}(\Omega) \subset \Omega$.

Poglejmo si sedaj kompozituma $\hat{f} \circ \hat{g} : \Omega \to \Omega$ in $\hat{g} \circ \hat{f} : \Omega \to \Omega$. Najprej povejmo, da sta oba kompozituma dobro definirana, saj sta sliki $\hat{f}$ in $\hat{g}$ podmnožici Ω. Ker sta preslikavi $f \circ g$ in $g \circ f$ enaki identiteti na gosti podmnožici $\Omega \backslash A$ množice Ω, po principu identičnosti sledi, da je:

$$\hat{f} \circ \hat{g} = \hat{g} \circ \hat{f} = id_\Omega$$

Ob upoštevanju, da je $\hat{f}(\Omega) \subset \Omega$ in $\hat{g}(\Omega) \subset \Omega$, sledi, da je $\hat{f} \in \mathrm{Aut}\Omega$.

Iz konstrukcije $\hat{f}$ sledi, da je $\hat{f}(\Omega\backslash A) = f(\Omega\backslash A) = \Omega\backslash A$, torej je tudi $\hat{f}(A) = A$ in posledično $\hat{f} \in \mathrm{Aut}_A(\Omega)$. □

Poglejmo si nekaj primerov uporabe izreka 4.3.

Primer 4.4. Naj bo domena enotski disk, ki mu izvzamemo izhodišče, torej $\mathbb{D}\backslash\{0\}$. Po izreku 4.3 velja, da je $\mathrm{Aut}_0(\mathbb{D}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{D}\backslash\{0\})$ in ker vemo, da je grupa izotropij točke 0 izomorfna rotacijski grupi S_1, je torej $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}\backslash\{0\}) \cong S^1$.

S pomočjo Cayleyjeve preslikave in izomorfizma $h \to h_{C'} \circ h \circ h_C$ lahko pokažemo, da je $\mathrm{Aut}_i(\mathbb{E})$ prav tako izomorfna grupi S^1. ♢

Primer 4.5. Vzemimo tako kot prej za našo domeno enotski disk $\mathbb{D}$, tokrat pa izvzemimo točki 0 in $w \neq 0$. Imamo torej prebodeno domeno oblike $\mathbb{D}\backslash\{0, w\}$. Avtomorfizme diska, za katere velja, da je $h(\{0, w\}) = \{0, w\}$, sta samo $id_{\mathbb{D}}$ in Möbiusova preslikava $z \mapsto \dfrac{z - w}{\overline{w}z - 1}$. Velja torej, da ima grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}\backslash\{0, w\})$ natanko dva elementa in je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2$ oz. grupi S_2. ♢

Primer 4.5 je v bistvu posledica naslednjega izreka, ki nam pove, kakšne oblike so grupe avtomorfizmov prebodenega enotskega diska v primeru, ko je ena izmed izvzetih točk izhodišče.

Izrek 4.6. *Naj bo A končna neprazna podmnožica $\mathbb{D}\backslash\{0\}$. Potem obstaja naravni grupni monomorfizem $\pi : \mathrm{Aut}(\mathbb{D}\backslash(A \cup \{0\})) \to \mathrm{Perm}(A \cup \{0\})$ na permutacijsko grupo množice $A \cup \{0\}$.*

Dokaz. Iz izreka 4.3 vemo, da je $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}\backslash(A \cup \{0\})) \cong \mathrm{Aut}_{(A\cup\{0\})}(\mathbb{D})$. Gledamo torej avtomorfizme $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, za katere bo veljalo, da je $f(A \cup \{0\}) = A \cup \{0\}$. Takšen avtomorfizem f bo naredil permutacijo elementov v $A \cup \{0\}$. Definiramo lahko preslikavo $\varphi : \mathrm{Aut}(\mathbb{D}\backslash(A \cup \{0\})) \to \mathrm{Perm}(A \cup \{0\})$ s predpisom $\varphi(f) = \pi_f$, ki bo avtomorfizmu f priredila permutacijo, s katero f slika elemente množice $A \cup \{0\}$. Hitro lahko preverimo, da je to homomorfizem, saj velja:

$$\varphi(f \circ g) = \pi_{f\circ g} = \pi_f \circ \pi_g = \varphi(f) \circ \varphi(g)$$

Da je homomorfizem φ injektiven, sledi iz izreka 3.15, ki pravi, da ima poljuben avtomorfizem $\mathbb{D}$, ki ni identiteta, največ eno fiksno točko. Torej za neki $f \in \mathrm{Aut}_{(A\cup\{0\})}(\mathbb{D})$, ki ni enak identiteti, velja, da kvečjemu eno točko iz množice $A \cup \{0\}$ slika nazaj vase. Od tod sledi, da slika $\varphi(f)$ gotovo ni trivialna permutacija, tj. ni identiteta na $A \cup \{0\}$. □

Poglejmo si zgornji izrek na primeru, ko enotskemu disku poleg izhodišča izvzamemo še dve točki.

Trditev 4.7. *Naj bosta a in b točki, $a, b \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, $a \neq b$. Potem za grupo avtomorfizmov domene $\mathbb{D}\backslash\{0, a, b\}$ velja, da $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}\backslash\{0, a, b\}) \neq \{id_{\mathbb{D}}\}$ natanko tedaj, ko za točki a in b velja vsaj ena od naslednjih štirih možnosti:*

(1) $a = -b$
(2) $2a = b + \overline{b}a^2$
(3) $2b = a + \overline{a}b^2$
(4) $|a| = |b|$ *in* $a^2 + b^2 = ab(1 + |b|^2)$ *oz.* $a^2 + b^2 = ab(1 + |a|^2)$

Dokaz. Po izreku 4.3 vemo, da velja $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}\setminus\{0,a,b\}) = \mathrm{Aut}_{0,a,b}(\mathbb{D})$. Spomnimo se, da lahko poljuben avtomorfizem diska f zapišemo v obliki $f(z) = e^{i\varphi}\dfrac{z-w}{\overline{w}z-1}$, kjer $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $w \in \mathbb{D}$. Avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}_{0,a,b}(\mathbb{D})$ ne bo enak identiteti natanko tedaj, ko slika $f(\{0,a,b\})$ ne bo identična permutacija množice $\{0,a,b\}$. Imamo torej pet primerov. Obravnavajmo vsakega posebej.

(1) Naj za f velja $f(0) = 0$, $f(a) = b$ in $f(b) = a$. Z upoštevanjem oblike f dobimo enačbe:

$$e^{i\varphi}a = b, \quad e^{i\varphi}b = a, \quad w = 0.$$

Če iz enačb izrazimo a in b, dobimo $a^2 = b^2$ in ker $a \neq b$, velja torej $a = -b$, kar je prva možnost v naši trditvi.

(2) Naj za f velja $f(0) = b$, $f(b) = 0$ in $f(a) = a$. Dobimo enačbe:

$$e^{i\varphi}w = b, \quad w = b \quad \text{in} \quad \frac{a-w}{\overline{w}a-1} = a.$$

Velja, da je $\varphi = 0$ in $b = w$. Vstavimo to preostalo enačbo in se znebimo ulomka. Dobimo $a - b = \bar{b}a^2 - a$, oziroma $2a = b + \bar{b}a^2$, kar je natanko druga možnost v trditi.

(3) Naj bo sedaj $f(0) = a$, $f(a) = 0$ in $f(b) = b$. Ta primer je analogen primeru (2), le da sta vlogi a in b zamenjani. Po enakem izračunu kot prej dobimo tretjo možnost $2b = a + \overline{a}b^2$.

(4) Preostaneta nam še možnosti $f(0) = a$, $f(a) = b$ in $f(b) = 0$, ter $f(0) = b$, $f(b) = a$ in $f(a) = 0$. Opazimo lahko, da sta si tudi ta dva primera analogna, zato lahko obravnavamo samo prvega, saj bo razmerje v drugem enako, le a in b bosta zamenjana. Imamo enačbe:

$$e^{i\varphi}w = a, \quad e^{i\varphi}\frac{a-w}{\overline{w}a-1} = b \quad \text{in} \quad b = w.$$

Velja torej:

$$e^{i\varphi}b = a \quad \text{in} \quad e^{i\varphi}\frac{a-b}{\bar{b}a-1} = b.$$

Iz tega neposredno sledi, da je $|a| = |b|$. Če v drugo enačbo vstavimo $e^{i\varphi} = ab^{-1}$ in se znebimo ulomka, dobimo:

$$a^2b^{-1} - a = \bar{b}ba - b.$$

Množimo z b, preoblikujemo in dobimo:

$$a^2 + b^2 = ab(1 + |b|^2).$$

To pa je točno eno izmed možnosti v (4).

S tem smo izčrpali vse možnosti, saj smo predelali vse možne netrivialne premutacije množice $\{0,a,b\}$. □

Poglejmo si še povezavo med prebodenim diskom in prebodeno zgornjo polravnino. Naj bo $A \subset \mathbb{E}$ množica končno mnogo točk oblike $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Zanima nas oblika grupe avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}\setminus A)$. Pomagajmo si s Cayleyjevo preslikavo. Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ točke, za katere velja:

$$\alpha_i = h_C(a_i) \quad \text{za vsak } i \in \{1, \ldots, n\}$$

Naj bo $\mathit{\Lambda} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Potem velja, da sta si domeni $\mathbb{E}\setminus A$ in $\mathbb{D}\setminus\mathit{\Lambda}$ biholomorfni, saj velja:

$$h_C(\mathbb{E}\setminus A) \subset \mathbb{D}\setminus\mathit{\Lambda} \quad h_{C'}(\mathbb{D}\setminus\mathit{\Lambda}) \subset \mathbb{E}\setminus A \quad h_C \circ h_{C'} = id_{\mathbb{E}\setminus A} \quad h_{C'} \circ h_C = id_{\mathbb{D}\setminus\mathit{\Lambda}}$$

Za biholomorfne domene vemo, da ohranjajo grupno strukturo avtomorfizmov. Torej bo grupa avtomorfizmov $\text{Aut}(\mathbb{E}\backslash A)$ izomorfna grupi avtomorfizmov $\text{Aut}(\mathbb{D}\backslash \Lambda)$. Kot posledica izreka 4.6 sledi naslednja trditev:

Trditev 4.8. *Naj bo A končna neprazna podmnožica $\mathbb{E}\backslash\{i\}$. Potem obstaja grupni monomorfizem φ : $Aut(\mathbb{E}\backslash(A \cup \{i\})) \mapsto Perm(A \cup \{i\})$ na permutacijsko grupo množice $A \cup \{i\}$.*

Dokaz. Naj bo $\Lambda = h_C(A)$. Spomnimo se, da je $h_C(i) = 0$. Izrek 4.6 nam pove, da obstaja grupni monomorfizem iz grupe $\text{Aut}(\mathbb{D}\backslash(\Lambda \cup \{0\}))$ na grupo permutacij množice $\Lambda \cup \{0\}$. Ker pa sta si grupi $\text{Aut}(\mathbb{E}\backslash(A \cup \{i\}))$ in $\text{Aut}(\mathbb{D}\backslash(\Lambda \cup \{0\}))$ izomorfni, obstaja grupni monomorfizem iz $\text{Aut}(\mathbb{E}\backslash(A \cup \{i\}))$ v grupo permutacij množice $\Lambda \cup \{0\}$. Ker je množica $\Lambda \cup \{0\}$ končna, njena moč pa enaka moči možice $A \cup \{i\}$, je ekvivalentno, če rečemo, da obstaja grupni monomorfizem iz grupe $\text{Aut}(\mathbb{E}\backslash(A \cup \{i\}))$ v grupo $\text{Perm}(A \cup \{i\})$. □

Za konec si poglejmo še naslednji primer.

Primer 4.9. Naj bo množica Λ enaka $\left\{\frac{1}{2}i, i, 2i\right\}$. Zanima nas oblika grupe avtomorfizmov $\text{Aut}(\mathbb{E}\backslash\Lambda)$. Poglejmo, kam Cayleyjeva preslikava slika točki $\frac{1}{2}i$ in $2i$:

$$h_C\left({}^1\!/_2 i\right) = \frac{\frac{1}{2}i - i}{\frac{1}{2}i + 1} = \frac{-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}i} = -\frac{1}{3}$$

$$h_C(2i) = \frac{2i - i}{2i + i} = \frac{i}{3i} = \frac{1}{3}$$

Naj bo $A = \left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$. Problem iskanja oblike grupe $\text{Aut}(\mathbb{E}\backslash\Lambda)$ lahko prevedemo na iskanje oblike grupe avtomorfizmov $\text{Aut}(\mathbb{D}\backslash A)$. Poglejmo, ali točki $\frac{1}{3}$ in $-\frac{1}{3}$ zadoščata kateri izmed možnosti iz trditve 4.7. Vidimo, da zadoščata samo možnosti (1). Od tod sledi, da obstaja, poleg identitete, še natanko en avtomorfizem $\mathbb{D}\backslash A$, ki je enak $f(z) = e^{i\pi}z$. Torej bo grupa $\text{Aut}(\mathbb{D}\backslash A)$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2$, posledično pa bo tudi grupa $\text{Aut}(\mathbb{E}\backslash\Lambda)$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2$. ♢

Slovar strokovnih izrazov

automorphism avtomorfizem, kot biholomorfna preslikava iz domene nazaj v domeno
biholomorphic biholomorfna preslikava
conformal mapping konformna preslikava
fixed points negibne točke
group action delovanje grupe
holomorphic holomorfna
homogenity homogenost
identity principle princip identičnsti
maximum principle princip maksimuma
Möbius mapping Möbiusova preslikava
punctured domain prebodena domena
rigid toga, lastnost domene z enim samim avtomorfizmom

Literatura

[1] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza II*, 2010, [ogled 15. 2. 2017 in 10. 5. 2017], dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf`.

[2] W. R. Hamilton, *Account of the Icosian Calculus*, Proceedings of the Royal Irish Academy **6** (1858) 415–416; dostopno tudi na `www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Icosian/PRIAIcos.pdf`, [ogled 10. 5. 2017].

[3] S. G. Krantz, *Geometric Function Theory*, Explorations in Complex Analysis, Birkhäuser, Boston, 2006.

[4] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[5] J. S. Rose, *A course on Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.