UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Katarina Černe

Permutacije in konvergenca številskih vrst

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: prof. dr. Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, 2017

Kazalo

Permutacije in konvergenca številskih vrst

Povzetek

To delo se ukvarja s pogojno konvergentnimi vrstami in vplivom permutacij, ki spreminjajo vrstni red členov, na njihovo konvergenco in vsoto. Natančneje, ukvarja se s t. i. λ-permutacijami, torej permutacijami, ki ohranjajo konvergenco, poleg tega pa nekatere pogojno divergentne vrste spremenijo v konvergentne. Najprej si ogledamo, kaj sploh so λ-permutacije in kakšne so nekatere njihove lastnosti. Pojasnjena je zveza med lastnostjo ohranjanja konvergence in lastnostjo ohranjanja vsote. V nadaljevanju se delo ukvarja še z lastnostmi množice λ-permutacij, natančneje z njeno močjo in omejenostjo. Delo vsebuje tudi nekaj primerov konstrukcije λ-permutacij ter zgledov delovanja λ-permutacij na vrste.

Permutations and convergence of series

Abstract

This work discusses conditionally convergent series, their rearrangements under certain permutations and the influence those permutations have on their convergence and sum. That is to say, it deals with the so called λ-permutations, those are permutations which besides being convergence-preserving change some conditionally divergent series into conditionally convergent series. First we take a look at what λ-permutations are and what are some of their properties. There is an explanation of the connection between convergence-preservation and sum-preservation. The work also deals with the set of all λ-permutations and some of its properties, more precisely, with its cardinality and upper bound. It also contains some examples of constructions of λ-permutations and demonstrations on how λ-permutations act on series.

Math. Subj. Class. (2010): 40A05

Ključne besede: številska vrsta, konvergenca, λ-permutacija, preureditev pogojno konvergentne vrste

Keywords: series, convergence, λ-permutation, rearrangement of conditionally convergent series

1. Uvod

Teorija neskončnih številskih vrst kljub temu, da so nam marsikateri sklepi o njihovih lastnostih in predvsem o konvergenci poznani že od osemnajstega stoletja dalje, še vedno odpira številna zanimiva vprašanja. Z nekaterimi izmed teh se ukvarja tudi ta diplomska naloga. Preden pa se lotimo zastavljanja in odgovarjanja na omenjena vprašanja, bi bilo potrebno obnoviti nekaj pomembnih pojmov in rezultatov v zvezi z neskončnimi številskimi vrstami in njihovo konvergenco. Pri tem bomo sledili viru [1, poglavje 6].

Številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definirana kot neskončna vsota členov zaporedja realnih števil $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pri seštevanju številskih vrst si pomagamo z *zaporedjem delnih vsot* številske vrste, ki je definirano kot zaporedje $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s členi $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Pravimo, da številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira*, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, torej, če obstaja končna limita tega zaporedja. Če vrsta konvergira, njeno vsoto definiramo kot limito zaporedja delnih vsot.

Ukvarjanje z zaporedji delnih vsot zna biti v marsikaterem primeru precej zamudno, sploh kadar nas zanima zgolj, ali vrsta konvergira ali ne, in ne potrebujemo podatka o njeni vsoti. V takih primerih za ugotavljanje konvergence številske vrste uporabljamo različne konvergenčne kriterije. Eden izmed teh, ki ga je potrebno omeniti, saj se bo uporabljal v tem delu, je Cauchyjev kriterij za konvergenco, ki pravi:

Izrek 1.1 (Cauchyjev kriterij)**.** *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak par indeksov $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ velja*

$$|S_m - S_n| < \epsilon.$$

Ta izrek je pravzaprav posledica izreka o Cauchyjevem pogoju za zaporedja, ki ga najdemo v [1, podpoglavje 2.4, izrek 7]. Tam najdemo tudi njegov dokaz.

Potrebno je omeniti še naslednjo ugotovitev, ki sledi iz definicije konvergence vrst:

Opomba 1.2. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem za vsako število $m \in \mathbb{N}$ konvergira tudi $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$. In če za neko število $m \in \mathbb{N}$ vrsta $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergira, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Na konvergenco vrst pomembno vplivajo predznaki členov vrste. Vrste s samimi pozitivnimi členi se na primer obnašajo precej drugače kot tiste, ki imajo nekatere člene pozitivne in druge negativne. Ker se bo to delo ukvarjalo s slednjimi, je potrebno omeniti posebno obliko vrste z negativnimi in pozitivnimi členi, torej *alternirajočo vrsto*. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je alternirajoča, če za njene člene velja, da je za vsak n

$$\operatorname{sign}(a_{n+1}) = -\operatorname{sign}(a_n).$$

O konvergenci alternirajočih vrst govori Leibnizev kriterij.

Izrek 1.3 (Leibnizev kriterij)**.** *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirajoča vrsta in naj bo zaporedje $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ padajoče z limito 0. Potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.*

Dokaz tega izreka najdemo v [1, podpoglavje 6.5, dokaz izreka 84].

Ko gre za vrste z mešanimi, torej tako pozitivnimi kot negativnimi členi, lahko konvergentne vrste ločimo na *absolutno konvergentne* in *pogojno konvergentne*. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira absolutno*, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pa divergira, pa rečemo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno* *konvergentna.* V zvezi s tema tipoma konvergentnih vrst je potrebno omeniti dva pomembna izreka.

Izrek 1.4. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergenta. Potem za vsako permutacijo naravnih števil π konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ in velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}.$$

Izrek 1.5. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna vrsta. Potem za vsako število $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ obstaja taka permutacija naravnih števil π, da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A.$$

Izrek 1.4 je dokazan v [1, podpoglavje 6.4, dokaz izreka 82], izrek 1.5 pa v [1, podpoglavje 6.4, dokaz izreka 83].

Vidimo torej, da lahko v absolutno konvergentnih vrstah poljubno premešamo člene, ne da bi kakorkoli vplivali na vsoto ali konvergenco vrste, medtem ko za pogojno konvergentne vrste obstajajo permutacije, ki spremenijo vrstni red členov tako, da lahko dobljena vrsta konvergira h kateremukoli realnemu številu, ali pa celo divergira. Pri tem se pojavi vprašanje, kakšne so te permutacije. Se jih da kako klasificirati? Imajo kakšne skupne lastnosti? V nadaljevanju se bomo ukvarjali predvsem s permutacijami členov pogojno konvergentnih vrst, ki ohranjajo konvergenco. Primer takih permutacij so t. i. λ-permutacije.

1.1. **Permutacije z lastnostjo λ.**

Definicija 1.6. Permutacijo σ naravnih števil imenujemo *λ-permutacija* oz. *permutacija z lastnostjo* λ, če velja:

(1) Če vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem konvergira tudi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

(2) Obstaja vsaj ena divergentna vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, da vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$ konvergira.

Opomba 1.7. V nadaljevanju bomo divergentne vrste, za katere obstaja kakršnakoli permutacija, ki vrstni red elementov spremeni tako, da dobljena vrsta konvergira, imenovali kar *pogojno divergentne vrste.*

Naravno se ob definiciji λ-permutacij pojavi kar nekaj vprašanj. Najprej se lahko vprašamo, kako težko je skonstruirati tako permutacijo, oziroma ali kakšna taka permutacija sploh obstaja. Nadalje, koliko takih permutacij obstaja. Kaj še lahko povemo o permutacijah z lastnostjo λ in množici vseh λ-permutacij?

Eno izmed pomembnejših vprašanj, ki se porajajo ob raziskovanju lastnosti množice λ-permutacij, je, ali obstaja optimalna λ-permutacija, ki ustvari največ konvergentnih vrst, torej največ divergentnih vrst preuredi v konvergentne. Če je to res in če je ta optimalna permutacija različna od identitete, bi bilo bolje, da bi, kar se tiče seštevanja vrst, namesto običajnega uporabljali drugačno zaporedje naravnih števil, torej zaporedje, ki ga narekuje dobljena optimalna permutacija? Nazadnje pa se lahko vprašamo še, ali nam λ-permutacije lahko pomagajo pri vsaki pogojno divergentni vrsti, oziroma ali za vsako pogojno divergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obstaja λ-permutacija σ, da $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergira. To so vprašanja, na katera je odgovorjeno v tej diplomski nalogi.

V naslednjem razdelku z naslovom *Primer konstrukcije λ-permutacij* je odgovorjeno na prvi dve vprašanji, torej na vprašanji o konstrukciji in obstoju λ-permutacij. Prikazana je konstrukcija λ-permutacije. Dokazano je tudi, zakaj je dobljena permutacija res λ-permutacija. Naslednji, tretji razdelek, ki ima naslov *Lastnosti λ-permutacij*, obravnava lastnosti λ-permutacij s poudarkom na ohranjanju konvergence in vsote vrst. Sledi poglavje z naslovom *Množica vseh λ-permutacij*, v katerem je v podrazdelku *Moč množice λ-permutacij* dokazan izrek o moči množice λ-permutacij, v naslednjem podrazdelku pa je pojasnjeno, zakaj je množica λ-permutacij neomejena. V petem razdelku z naslovom *Pogojno divergentne vrste in λ-permutacije* je najprej obravnavan primer pogojno divergentne vrste, ki je nobena λ-permutacija ne more preoblikovati v konvergentno vrsto, potem pa še primer pogojno divergentne vrste, ki jo zgolj z uporabo λ-permutacij lahko preoblikujemo v konvergentno vrsto, katere vsota je poljubno realno število. Zadnji razdelek pa vsebuje primera konstrukcij še dveh λ-permutacij.

2. Primer konstrukcije λ-permutacije

Oglejmo si primer konstrukcije permutacije z lastnostjo λ. S tem bomo tudi pokazali, da množica λ-permutacij ni prazna. Pri tem se bomo opirali na [2].

Naravna števila najprej razvrstimo v bloke naraščajoče velikosti na naslednji način:

(1) $\quad 1 \quad 2\,3\,4 \quad 5\,6\,7\,8\,9 \quad 10\,11\,12\,13\,14\,15\,16 \quad 17\,18\,19\,20\,21\,22\,23\,24\,25\ \ldots$

Bloki imajo liho število elementov. Moč vsakega bloka je za 2 večja od moči prednodnega bloka. Natančneje, moč k-tega bloka je $2k-1$. Pokažemo lahko tudi, da se vsak blok kočna s popolnim kvadratom. Označimo s T število, s katerim se konča n-ti blok v zaporedju (1). Število T je enako vsoti dolžin vseh blokov do vključno n-tega bloka, torej $T = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$. Za to vsoto pa velja

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = -n + 2\sum_{k=1}^{n} k = -n + 2\left(\frac{n}{2}(1+n)\right) = -n + n(1+n) = n^2.$$

Torej se res vsak blok konča s popolnim kvadratom.

Sedaj pa vsak blok preoblikujemo tako, da na začetek postavimo število na sredini bloka. Na drugem mestu bo število, ki je za 1 večje od srednjega števila, sledi število, ki je od srednjega za 1 manjše, potlej število, ki je za 2 večje od srednjega, in tako dalje, dokler ne preuredimo vseh števil v bloku. Dobimo naslednje zaporedje:

(2) $\quad 1 \quad 3\,4\,2 \quad 7\,8\,6\,9\,5 \quad 13\,14\,12\,15\,11\,16\,10 \quad 21\,22\,20\,23\,19\,24\,18\,25\,17\ldots$

Permutacijo, ki na zaporedje naravnih števil deluje na zgoraj opisani način, označimo s σ.

Permutacijo σ sedaj uporabimo na členih številske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Njene delne vsote bomo označili s S_n. Opazimo lahko, da je vsaka delna vsota $\tilde{S_n}$ permutirane vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ linearna kombinacija največ treh delnih vsot prvotne vrste. Natančneje, velja

$$\tilde{S_N} = S_{q^2} + (S_B - S_A). \tag{3}$$

Tu je q^2 največji popolni kvadrat, manjši od N, in $A \geq q^2$, $B \geq q^2$ ter $A \leq B$.

Oglejmo si, kako pridemo do enačbe (3). Ker se vsak blok v zaporedju (1) konča s popolnim kvadratom, so indeksi členov v delni vsoti $S_{q^2} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{q^2}$ vsa števila iz blokov od prvega do vključno tistega, ki se konča s q^2. In ker se permutiranje členov izvaja samo znotraj blokov, bo imela delna vsota $\tilde{S_{q^2}}$ enake člene kot S_{q^2}, le v drugačnem vrstnem redu. Delna vsota S_4 na primer izgleda tako:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

medtem ko je $\tilde{S}_4$ taka:

$$\tilde{S}_4 = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)} + a_{\sigma(4)} = a_1 + a_3 + a_4 + a_2.$$

Vidimo, da sta obe delni vsoti enaki, saj vsebujeta vse člene z indeksi iz prvih dveh blokov. Za delne vsote permutirane vrste torej velja:

$$\tilde{S}_n = \tilde{S_{q^2}} + Q = S_{q^2} + Q,$$

kjer je q^2 največji popolni kvadrat, manjši od n, Q pa vsebuje člene z indeksi, večjimi od q^2. S C označimo najmanjši indeks, za katerega velja, da je a_C vsebovan v Q, z B pa največji indeks, za katerega velja, da je a_B vsebovan v Q. Po konstrukciji permutacije σ velja, da če Q vsebuje člena a_C in a_B, kjer je $C < B$, potem vsebuje tudi vse člene a_i, kjer je $C < i < B$. Torej lahko zapišemo $Q = S_B - S_{C-1}$, od koder sledi enačba (3).

Ker je vsaka delna vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ končna linearna kombinacija delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, bo Cauchyjev kriterij, če bo veljal za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, veljal tudi za $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Torej bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergirala, če bo konvergirala vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, s čimer je zadoščeno prvi točki iz definicije λ-permutacije.

Da pokažemo, da je σ res λ-permutacija, moramo poiskati še pogojno divergentno vrsto, iz katere bo permutacija σ ustvarila pogojno konvergentno vrsto. Primer take divergente vrste je:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$$

Najprej pokažimo, da je ta vrsta res divergentna. Njeno zaporedje delnih vsot je tako:

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{12}, \ldots$$

Opazimo, da so nekatere delne vsote za 1 večje od predhodnih delnih vsot, druge pa za 1 manjše. Za S_7 na primer velja, da je za 1 večja od S_4, delna vsota S_3 pa je za 1 manjša od S_1. Še več, iz zgornjega zapisa lahko razberemo, da velja

$$S_{l^2+l+1} = S_{l^2} \pm 1,$$

kjer je $l \in \mathbb{N}$. Vrsta torej ne ustreza Cauchyjevemu kriteriju, saj za noben ϵ, ki leži na intervalu $(0, 1)$, ne obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da bi za vsak par indeksov $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ veljalo $|S_m - S_n| < \epsilon$. Za vsako število $n_0 \in \mathbb{N}$ bosta namreč obstajali naravni števili oblike $m = l^2 + l + 1$ in $n = l^2$, večji od n_0, zanju pa bo veljalo $|S_m - S_n| = 1 > \epsilon$. Torej je vrsta res divergentna.

Ko na zgornji vrsti uporabimo permutacijo σ, dobimo:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \pm \cdots$$

Dobljena vrsta konvergira po Leibnizevem testu za alternirajoče vrste (izrek 1.3), saj ima zaporedje absolutnih vrednosti njenih členov limito 0.

Našli smo torej pogojno divergentno vrsto, ki jo σ spremeni v konvergentno. Permutacija σ torej zadošča obema točkama v definiciji λ-permutacije. S tem smo dokazali, da obstaja vsaj ena λ-permutacija. Je to edina λ-permutacija ali obstaja še kakšna? Da odgovorimo na to vprašanje, si moramo najprej ogledati nekaj lastnosti λ-permutacij.

3. Lastnosti λ-permutacij

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj pomembnih lastnosti λ-permutacij, ki bodo pripomogle h kasnejšemu dokazovanju lastnosti množice λ-permutacij, pa tudi dokazovanju, ali določena permutacija je λ-permutacija ali ne. Pri tem bomo v podpoglavju 3.1 sledili viru [3], v podpoglavju 3.2 pa viru [2].

3.1. **Ohranjanje konvergence in vsote.**

Definicija 3.1. Pravimo, da permutacija σ množice naravnih števil *ohranja konvergenco*, kadar iz konvergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, in *ohranja vsoto*, kadar velja, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Ob tej definiciji se lahko vprašamo, ali obstaja kakšna povezava med lastnostjo ohranjanja konvergence in lastnostjo ohranjanja vsote. Natančneje, ali permutacija, ki ohranja konvergenco, nujno ohranja tudi vsoto. Definicija λ-permutacij pravi, da te permutacije ohranjajo konvergenco. Ali lahko trdimo, da ohranjajo tudi vsoto? Kasneje bomo videli, da lahko. Vendar pa moramo, preden se lotimo dokaza, vpeljati še nekaj oznak in pojmov, ki nam bodo koristili pri dokazovanju.

Za lažje obravnavanje omenjenih lastnosti vpeljimo oznako

$$[c, d]_{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{Z}^+; c \leq x \leq d\},$$

kjer sta c in d naravni števili, za kateri velja $c \leq d$. Z oznako $[2, 5]_{\mathbb{Z}}$ na primer označimo množico $\{2, 3, 4, 5\}$.

Naj bo sedaj σ neka permutacija naravnih števil in n naravno število. Zapišemo lahko:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = [c_1^n, d_1^n]_{\mathbb{Z}} \cup [c_2^n, d_2^n]_{\mathbb{Z}} \cup \cdots \cup [c_{b_n}^n, d_{b_n}^n]_{\mathbb{Z}}, \tag{4}$$

pri čemer je $c_i^n \leq d_i^n$ in $c_{i+1}^n \geq d_i^n + 2$. Sedaj lahko definiramo še t. i. *zaporedje števil blokov.*

Definicija 3.2. Naj bo σ neka permutacija naravnih števil. Naj bo $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje, da vsak njegov člen b_k označuje število blokov oblike $[c_i^n, d_i^n]_{\mathbb{Z}}$, ki sestavljajo unijo $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\} = [c_1^n, d_1^n]_{\mathbb{Z}} \cup [c_2^n, d_2^n]_{\mathbb{Z}} \cup \cdots \cup [c_{b_k}^n, d_{b_k}^n]_{\mathbb{Z}}$. To zaporedje imenujemo *zaporedje števil blokov.*

V nadaljevanju bomo rabili še oznako

$$M_n = d_{b_n}^n + 1 = \max(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}) + 1,$$

kjer je $d_{b_n}^n$ število, s katerim se konča zadnji blok v zapisu (4).

Za lažje razumevanje si oglejmo uporabo zgoraj vpeljanih pojmov in oznak na primeru.

Primer 3.3. Vzemimo permutacijo σ, ki smo jo skonstruirali v poglavju 2, torej

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 8 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Potem lahko zapišemo

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(6)\} = \{1, 3, 4, 2, 7, 8\} = [1, 4]_{\mathbb{Z}} \cup [7, 8]_{\mathbb{Z}}.$$

V tem primeru je število blokov $b_6 = 2$, saj lahko $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(6)\}$ zapišemo kot unijo dveh blokov oblike $[c_i^n, d_i^n]_{\mathbb{Z}}$. Oglejmo si še zaporedje števil blokov za permutacijo σ. Očitno je $b_1 = 1$. Ker je

$$\{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{1, 3\} = [1, 1]_{\mathbb{Z}} \cup [3, 3]_{\mathbb{Z}},$$

je $b_2 = 2$. Za $n = 3$ velja

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\} = \{1, 3, 4\} = [1, 1]_{\mathbb{Z}} \cup [3, 4]_{\mathbb{Z}},$$

torej je b_3=2 in tako dalje. Zaporedje števil blokov za permutacijo σ je torej videti tako:

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ \ldots. \qquad \diamondsuit$$

Zgoraj vpeljane oznake bodo zelo uporabne pri dokazu sledeče trditve, ki govori o povezavi med ohranjanjem konvergence in vsote.

Trditev 3.4. *Naj bo σ permutacija naravnih števil. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(1) *permutacija σ ohranja konvergenco,*
(2) *zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omejeno,*
(3) *permutacija σ ohranja vsoto.*

Dokaz. Da iz (3) sledi (1), je očitno.

Dokažimo sedaj, da iz (1) sledi (2). Naj bo σ neka permutacija naravnih števil, ki ohranja konvergenco. Dokaza se lotimo s protislovjem. Predpostavimo, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ permutacije σ neomejeno. Poiskali bomo tako zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oziroma tako konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ divergentna, kar je v nasprotju s predpostavko, da σ ohranja konvergenco.

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bomo skonstruirali po delih. Najprej bomo za izbrano število n_1 skonstruirali prvih n_1 členov zaporedja, nadaljevali pa bomo rekurzivno.

Izberimo torej tak $n_1 \in \mathbb{N}$, da je $c_1^{n_1} = 1$, kjer je $c_1^{n_1}$ število, s katerim se začne prvi blok v izrazu $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)\} = [c_1^{n_1}, d_1^{n_1}]_{\mathbb{Z}} \cup [c_2^{n_1}, d_2^{n_1}]_{\mathbb{Z}} \cup \cdots \cup [c_{b_n}^{n_1}, d_{b_n}^{n_1}]_{\mathbb{Z}}$. Drugače rečeno, naj bo $1 \in \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)\}$. Naj bo še $M_{n_1} = d_{b_{n_1}}^{n_1} + 1$. Sedaj pa za vsak $k \in \mathbb{N}$, za katerega velja $1 \leq k \leq M_{n_1}$, definiramo člen a_k zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$ na naslednji način:

$$a_k = \begin{cases} 1 & ; \quad k = d_i^{n_1} \text{ za neki } i,\ 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ -1 & ; \quad k = d_i^{n_1} + 1 \text{ za neki } i,\ 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Oglejmo si primer takega zaporedja. Če imamo na primer permutacijo σ kot v poglavju 2 in $n_1 = 6$, potem je

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(6)\} = \{1, 3, 4, 2, 7, 8\} = [1, 4]_{\mathbb{Z}} \cup [7, 8]_{\mathbb{Z}}.$$

V tem primeru je 8 število, s katerim se konča zadnji blok v zgornjem zapisu, torej je $d_{b_n}^{n_1} = 8$ in $M_{n_1} = d_{b_n}^{n_1} + 1 = 9$. Poglejmo si, kako je z zaporedjem $\{a_n\}_{n=1}^{M_n}$ oziroma

$\{a_n\}_{n=1}^{9}$. Vidimo, da imamo v uniji $[1,4]_{\mathbb{Z}} \cup [7,8]_{\mathbb{Z}}$ le dva bloka, prvi se konča s 4 in drugi z 8, torej velja $d_1^{n_1} = 4$ in $d_2^{n_1} = 8$ ter $d_1^{n_1} + 1 = 5$ in $d_2^{n_1} + 1 = 9$. Za zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ torej v tem primeru velja, da je

$$a_4 = 1,\ a_5 = -1,\ a_8 = 1 \text{ in } a_9 = -1,$$

vsi ostali členi pa so enaki nič.

Oglejmo si sedaj nekaj značilnosti zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$. Najprej opazimo, da velja

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_{\sigma(k)} = b_{n_1} \geq 1.$$

To je vsota ravno tistih členov a_k zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, katerih indeks k je element množice $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)\}$. Členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, ki so enaki -1, zagotovo niso vključeni v to vsoto. Členi, enaki $a_k = -1$, so namreč tisti, za katere je $k = d_i^{n_1} + 1$, $d_i^{n_1} + 1$ pa za noben i ni element množice $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)\}$, saj mora biti med $d_i^{n_1}$ in $c_{i+1}^{n_1}$ vsaj eno število, ki ni v množici $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)\}$. V nasprotnem primeru bi namesto $[c_i^{n_1}, d_i^{n_1}] \cup [c_{i+1}^{n_1}, d_{i+1}^{n_1}]$ v izrazu (4) pisali kar $[c_i^{n_1}, d_{i+1}^{n_1}]$.

Členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, ki so enaki $a_k = 1$, so zagotovo vsi vključeni v zgornjo vsoto, saj zanje velja, da je $k = d_i^{n_1}$ za $1 \leq i \leq b_{n_1}$, število $d_i^{n_1}$ pa je za vsak tak i element množice $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)\}$. Ta množica torej vsebuje toliko elementov oblike $d_i^{n_1}$, kolikor je blokov v uniji v zapisu (4), torej ravno b_{n_1} elementov oblike $d_i^{n_1}$. Torej bo v vsoti $\sum_{k=1}^{n_1} a_{\sigma(k)}$ ravno b_{n_1} členov, ki bodo enaki 1, vsi ostali pa bodo ničelni. Od tod torej sledi, da je $\sum_{k=1}^{n_1} a_{\sigma(k)} = b_{n_1}$, da je $b_{n_1} \geq 1$, pa je očitno.

Poleg tega vidimo še, da je

$$\sum_{k=1}^{M_{n_1}} a_k = 0.$$

Členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, ki so enaki 1 in -1, namreč vselej nastopajo v parih. Če je $a_i = 1$, potem je $a_{i+1} = -1$. Zadnji člen vsote je $a_{M_{n_1}} = -1$, saj je $M_{n_1} = d_{b_{n_1}}^{n_1} + 1$. V zgornji vsoti je tako enako število členov, enakih 1, in členov, enakih -1. Ti se med sabo odštejejo, vsi ostali členi v vsoti pa so ničelni.

Na podoben način pokažemo tudi, da je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \text{ ali } 1,$$

kjer za n velja $1 \leq n \leq M_{n_1}$. Za tako vsoto namreč obstajajo tri možnosti: ali je zadnji člen enak 0 ali 1 ali pa -1. Če je enak 0 ali -1, bo število členov, enakih 1, enako številu členov, enakih -1, in bo vsota enaka nič. Če pa je zadnji člen enak 1, bo število členov, enakih 1, za eno večje od števila členov, enakih -1 (-1 namreč vedno sledi takoj za 1), torej bo vsota enaka 1.

Do sedaj smo skonstruirali zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, radi pa bi imeli zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Preostanek zaporedja konstruiramo rekurzivno: za vsako število $j \in \mathbb{N}$, večje od 1, moramo izbrati n_j, da je $M_{n_j} > M_{n_{j-1}}$ in da gre M_{n_j} proti neskončno, ko gre j proti neskončno. Nato pa moramo za vsak k, ki ustreza $M_{n_{j-1}} < k \leq M_{n_j}$, definirati a_k, da bo veljalo $\sum_{k=1}^{M_{n_j}} a_k = 0$.

Recimo, da je $j > 1$ in da smo v prejšnjem koraku že izbrali tak n_{j-1} in take a_k za $M_{n_{j-2}} < k \leq M_{n_{j-1}}$, da velja $\sum_{k=1}^{M_{n_{j-1}}} a_k = 0$. Ker smo predpisali, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ permutacije σ neomejeno, lahko izberemo tak n_j, da je $b_{n_j} \geq j^2$ in $d_1^{n_j} > M_{n_{j-1}}$. Potem je zagotovo $M_{n_j} > M_{n_{j-1}}$, saj je

$$M_{n_j} = d_{b_{n_j}}^{n_j} + 1 > d_1^{n_j} > M_{n_{j-1}}.$$

Še več, vidimo lahko, da je $M_{n_j} - M_{n_{j-1}} > j^2$. V zapisu $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)\} = [c_1^n, d_1^n]_{\mathbb{Z}} \cup [c_2^n, d_2^n]_{\mathbb{Z}} \cup \cdots \cup [c_{b_{n_1}}^{n_1}, d_{b_{n_1}}^{n_1}]_{\mathbb{Z}}$ namreč unijo sestavlja vsaj j^2 blokov. Tudi če imajo vsi bloki razen prvega le en element, bo, če upoštevamo, da mora biti med dvema številoma, vsebovanima v sosednjih blokih, vsaj eno število, ki ni v nobenem bloku, zagotovo veljalo, da je

$$d_{b_{n_j}}^{n_1} > d_1^{n_1} + j^2 - 1.$$

Sledi, da je $M_{n_j} - M_{n_{j-1}} > j^2$. Torej gre zaporedje $\{M_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ proti neskončno, ko gre j proti neskončno.

Definirajmo sedaj a_k za $M_{n_{j-1}} < k \leq M_{n_j}$:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j} & ; \quad k = d_i^{n_j} \text{ za neki } i,\ 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ -\frac{1}{j} & ; \quad k = d_i^{n_j} + 1 \text{ za neki } i,\ 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Podobno kot pri $j = 1$, tudi tu vidimo, da je

$$\sum_{k=1}^{n_j} a_{\sigma(k)} = \frac{b_{n_j}}{j} \geq j, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{M_{n_j}} a_k = 0 \tag{6}$$

$$\text{in } \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \text{ ali } \frac{1}{j} \text{ za } M_{n_{j-1}} < n \leq M_{n_j}. \tag{7}$$

Če v izrazu (7) pošljemo j proti neskončno, dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

Ta vrsta torej konvergira. Po drugi strani pa $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ divergira, saj je, kot vidimo v izrazu (5), $\sum_{k=1}^{n_j} a_{\sigma(k)} \geq j$ za vsak j. Torej σ ne ohranja konvergence, kar je v nasprotju z začetno predpostavko. Sledi, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno.

Zadnja implikacija, ki jo moramo dokazati, je, da iz (2) sledi (3). Imejmo permutacijo naravnih števil σ in naj bo $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ njeno zaporedje števil blokov, ki je omejeno. Naj bo $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje, da velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L \in \mathbb{R}.$$

Pokazati hočemo, da pri takih pogojih σ ohranja vsoto, torej da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = L.$$

Označimo s

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

delne vsote vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Iz definicije vsote vrste sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = L.$$

Oglejmo si sedaj delovanje permutacije σ. Naj bo n tako velik, da bo v zapisu (4) veljalo, da je c_1^n enak 1. Potem je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k + \sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k = S(d_1^n) + \sum_{i=2}^{b_n} (S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)). \tag{8}$$

Enakost $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k + \sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k$ sledi iz zapisa (4). Vrsta $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ namreč predstavlja vsoto členov zaporedja $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ z indeksi iz množice $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$, medtem ko gre v izrazu $\sum_{k=1}^{d_1^n} a_k + \sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k$ za seštevanje po blokih, ki sestavljajo unijo v izrazu (4). Vsota $\sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k$ je na primer vsota vseh členov zaporedja $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ z indeksi iz i-tega bloka, torej iz bloka $[c_i^n, d_i^n]_{\mathbb{Z}}$. Vrsta $\sum_{k=1}^{d_1^n} a_k$ je ravno enaka d_1^n-ti delni vsoti vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, medtem ko za vrsto $\sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k$ velja

$$\sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k = \sum_{k=1}^{d_i^n} a_k - \sum_{k=1}^{c_i^n - 1} a_k = S(d_i^n) - S(c_i^n - 1).$$

Ko pošljemo n proti neskončno, gre d_1^n proti neskončno. Večji kot je namreč n, več naravnih števil obsega množica $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Posledično se veča tudi blok $[1, d_1^n]_{\mathbb{Z}}$ (čeprav se ne poveča nujno vsakič, kadar se poveča n). Za vsako naravno število k zato lahko najdemo tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $k \in [1, d_1^{n_0}]_{\mathbb{Z}}$. Sledi, da gre d_1^n proti neskončno, ko gre n proti neskončno. Torej gre, ko gre n proti neskončno, d_1^n-ta delna vsota $S(d_1^n)$ proti L. Oglejmo si še limito izraza $\sum_{i=2}^{b_n} (S(d_i^n) - S(c_i^n - 1))$. Velja

$$\left| \sum_{i=2}^{b_n} (S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)) \right| \leq \sum_{i=2}^{b_n} |S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)|.$$

Vemo, da gresta vrednosti d_i^n in c_i^n proti neskončno, ko gre n proti neskončno, saj sta tako vrednost d_i^n kot c_i^n večji od vrednosti d_1^n. Torej gresta delni vsoti $S(d_i^n)$ in $S(c_i^n - 1)$ proti L, ko gre n proti neskončno. Izberimo neki $\epsilon > 0$. Za dovolj velike vrednosti n je torej

$$|S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)| < \frac{\epsilon}{\max_{t\in\mathbb{N}} b_t}.$$

Sledi, da za dovolj velike vrednosti n velja

$$\sum_{i=2}^{b_n} |S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)| < \sum_{i=2}^{b_n} \frac{\epsilon}{\max_{t\in\mathbb{N}} b_t} < \epsilon.$$

Ko gre vrednost n proti neskončno, gre torej izraz $\sum_{i=2}^{b_n}(S(d_i^n) - S(c_i^n - 1))$ proti 0. $\square$

Enakost (8), ki smo jo uporabili v zgornjem dokazu, ima naslednjo posledico:

Posledica 3.5. *Naj bo σ permutacija, ki ohranja konvergenco, in $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta. Potem obstaja tako število $B \in \mathbb{N}$, da je vsaka delna vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ linearna kombinacija največ B delnih vsot prvotne vrste.*

Dokaz. Naj bo σ permutacija, ki ohranja konvergenco. Potem je njeno zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno, torej obstaja njegov maksimum $\max_{n\in\mathbb{N}} b_n = C \in \mathbb{R}$. Naj bo $\tilde{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ neka delna vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. Po enakosti (8) velja:

$$\tilde{S}(n) = \sum_{k=c_1^n}^{d_1^n} a_k + \sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k = \sum_{i=1}^{b_n}(S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)).$$

Ker je $b_n \leq C$, sledi, da je $\tilde{S}(n)$ linearna kombinacija največ $B = 2C$ delnih vsot $S(i)$ prvotne vrste. $\square$

3.2. **Množici $\mathcal{O}$ in $\mathcal{N}$.** Naj bo $\mathcal{O}$ množica vseh permutacij naravnih števil, ki ohranjajo konvergenco, vendar niso λ-permutacije, z $\mathcal{N}$ pa označimo množico vseh λ-permutacij. Oglejmo si nekaj njunih lastnosti oziroma lastnosti in obnašanje njunih elementov. Dobljeni rezultati bodo zelo koristni pri nadaljnjem obravnavanju lastnosti množice λ-permutacij.

Trditev 3.6. (1) *Če je permutacija σ element množice $\mathcal{N}$, potem σ^{-1} ne ohranja konvergence.*
(2) *Če je permutacija σ element množice $\mathcal{N}$ in β permutacija, ki ohranja konvergenco, potem je $\beta \circ \sigma$ element $\mathcal{N}$.*
(3) *Množica $\mathcal{N}$ je polgrupa za kompozitum permutacij, ni pa grupa.*

Dokaz. (1) Naj bo σ permutacija iz množice $\mathcal{N}$. Potem obstaja neka pogojno divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergentna. Delujmo sedaj na vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ s permutacijo σ^{-1}. Dobimo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

ki je divergentna. Permutacija σ^{-1} torej ne ohranja konvergence.

(2) Naj bo σ permutacija iz množice $\mathcal{N}$ in naj bo β permutacija, ki ohranja konvergenco. Ker tako σ kot tudi β ohranja konvergenco, sledi, da tudi njun kompozitum $\beta\circ\sigma$ ohranja konvergenco. Ker je σ element množice $\mathcal{N}$, obstaja neka pogojno divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergira. Ker permutacija β ohranja konvergenco, je tudi vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\beta(\sigma(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{(\beta\circ\sigma)(n)}$$

konvergentna. Torej obstaja pogojno divergentna vrsta, ki jo permutacija $\beta \circ \sigma$ spremeni v konvergentno. Sledi, da je $\beta \circ \sigma \in \mathcal{N}$.

(3) Najprej dokažimo, da je množica $\mathcal{N}$ polgrupa za kompozitum. Dokazati moramo zaprtost operacije in asociativnost. Asociativnost kompozituma je očitna,

zaprtost operacije pa sledi iz točke (2). Pokažimo še, da množica $\mathcal{N}$ ni grupa za kompozitum. Opazimo, da $\mathcal{N}$ ne vsebuje enote, torej identitete. Identiteta namreč nobene pogojno divergentne vrste ne preslika v pogojno konvergentno. Poleg tega po točki (1) množica $\mathcal{N}$ ne vsebuje inverza nobenega svojega elementa, saj za elemente množice $\mathcal{N}$ velja, da njihovi inverzi ne ohranjajo konvergence. □

Posledica prejšnje trditve podaja alternativno definicijo λ-permutacij.

Posledica 3.7. *Permutacija naravnih števil σ je λ-permutacija natanko tedaj, ko ohranja konvergenco, njen inverz pa je ne ohranja.*

4. Množica vseh λ-permutacij

Sedaj ko poznamo nekatere lastnosti λ-permutacij, lahko odgovorimo na vprašanja o lastnostih množice vseh λ-permutacij. Ta razdelek se v prvem delu ukvarja z močjo te množice, pri čemer sledimo [3], v drugem delu pa z njeno omejenostjo, pri čemer se opiramo na [2]. Obenem bo ponujen tudi odgovor na vprašanje obstoja optimalne λ-permutacije.

4.1. Moč množice λ-permutacij.

Pokazali smo že, da množica λ-permutacij ni prazna. Postavlja se nam torej vprašanje, kakšna je njena moč. Odgovor nanj nam podaja naslednji izrek.

Izrek 4.1. $\mathrm{card}(\mathcal{N}) = \mathrm{card}(\mathcal{O}) = 2^{\aleph_0}$

Dokaz. Dokaza se bomo lotili tako, da bomo skonstruirali neštevno neskončno permutacij, ki pripadajo množici $\mathcal{O}$ oziroma $\mathcal{N}$. Naj bo množica X poljubna podmnožica množice naravnih števil $\mathbb{N}$. Naj bo τ_X permutacija, ki transponira števili $2m-1$ in $2m$, če je $m \in X$, ostala števila pa preslika sama vase. Najprej bomo pokazali, da je $\tau_X \in \mathcal{O}$.

Oglejmo si primera dveh takih permutaciji τ_X in τ_Y. Naj bo $X = \{m\}$ in $Y = \{m, m+1\}$. Permutacija τ_X je videti tako:

$$\tau_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m-1 & 2m & 2m+1 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m & 2m-1 & 2m+1 & \cdots \end{pmatrix}$$

Permutacija τ_X je torej transpozicija $\tau_X = (2m-1\ 2m)$. Potem velja naslednje:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\} = [1, k]_{\mathbb{Z}}$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$, različen od $2m-1$. Za $k = 2m-1$ pa velja:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(2m-1)\} = [1, 2m-2]_{\mathbb{Z}} \cup [2m, 2m]_{\mathbb{Z}}$$

Permutacija τ_Y pa izgleda tako:

$$\tau_Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m-1 & 2m & 2m+1 & 2m+2 & 2m+3 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m & 2m-1 & 2m+2 & 2m+1 & 2m+3 & \cdots \end{pmatrix},$$

torej je τ_Y produkt transpozicij $\tau_Y = (2m-1\ 2m)\,(2m+1\ 2m+2)$. V tem primeru pa je

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\} = [1, k]_{\mathbb{Z}}$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$, različen od $2m+1$ in od $2m-1$. Za $k = 2m+1$ oziroma $k = 2m-1$ pa velja:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(2m-1)\} = [1, 2m-2]_{\mathbb{Z}} \cup [2m, 2m]_{\mathbb{Z}}$$

in

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(2m+1)\} = [1, 2m]_{\mathbb{Z}} \cup [2m+2, 2m+2]_{\mathbb{Z}}$$

Iz teh dveh primerov je razvidno, da je v splošnem permutacija τ_X vedno enaka (lahko tudi neskončnemu) produktu disjunktnih transpozicij oblike $(2m-1\,2m)$ za $m \in X$ in da za njeno zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ zato velja:

$$b_n = \begin{cases} 2 \ ; & n = 2m-1 \text{ za neki } m \in X \\ 1 \ ; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Njeno zaporedje števil blokov je torej omejeno, od koder po trditvi 3.4 sledi, da permutacija τ_X na številskih vrstah ohranja konvergenco in vsoto.

Očitno je tudi, da je τ_X sama svoj inverz. Permutacija τ_X je namreč enaka produktu disjunktnih transpozicij. Komponiranje disjunktnih transpozicij je komutativno, torej je permutacija $\tau_X \circ \tau_X$ enaka takemu produktu transpozicij, v katerem sta po dve in dve sosednji transpoziciji enaki. Produkt dveh enakih transpozicij pa je identiteta, tako da je kompozitum $\tau_X \circ \tau_X$ enak identiteti. Inverz permutacije τ_X torej ohranja konvergenco, od koder po trditvi 3.6 sledi, da τ_X ni element množice $\mathcal{N}$. Sledi, da je $\tau_X \in \mathcal{O}$, saj ohranja konvergenco, ni pa λ-permutacija.

Za različne množice $X \subseteq \mathbb{N}$ dobimo različne permutacije τ_X. Ker je podmnožic množice naravnih števil ravno $2^{\aleph_0}$, imamo tudi $2^{\aleph_0}$ permutacij oblike τ_X. Sledi, da je $\mathrm{card}(\mathcal{O}) \geq 2^{\aleph_0}$. Po drugi strani pa vemo, da ima množica vseh permutacij naravnih števil moč $2^{\aleph_0}$, torej lahko velja le $\mathrm{card}(\mathcal{O}) \leq 2^{\aleph_0}$. Sledi, da je $\mathrm{card}(\mathcal{O}) = 2^{\aleph_0}$.

Oglejmo si še, kako je z močjo množice λ-permutacij oziroma množice $\mathcal{N}$. Iz trditve 3.6 je razvidno, da je kompozicija permutacije iz množice $\mathcal{O}$ z λ-permutacijo spet λ-permutacija. Naj bo σ neka λ-permutacija (v poglavju 2 smo pokazali, da obstaja vsaj ena λ-permutacija) in naj bo τ_X prej definirana permutacija, ki je, kot smo pokazali, element množice $\mathcal{O}$. Torej je kompozitum obeh permutacij $\tau_X \circ \sigma$ spet λ-permutacija. Enako kot pri računanju moči množice $\mathcal{O}$, tudi tu opazimo, da mora biti moč množice λ-permutacij vsaj $2^{\aleph_0}$, saj je toliko vseh množic $X \subseteq \mathbb{N}$, hkrati pa ne more biti večja od moči množice vseh permutacij naravnih števil. Tako da je tudi $\mathrm{card}(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$. □

4.2. **Omejenost množice λ permutacij.** Eno najzanimivejših vprašanj v zvezi z λ-permutacijami je vprašanje, ali ima množica vseh λ-permutacij zgornjo mejo, tj. ali obstaja permutacija, ki ustvari največ konvergentnih vrst.

Da bomo lahko odgovorili nanj, najprej definirajmo relacijo delne urejenosti na množici $\mathcal{N}$. Naj bosta σ_1 in σ_2 λ-permutaciji. Rečemo, da je $\sigma_1 \leq \sigma_2$, če za vsako vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, za katero $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_1(n)}$ konvergira, konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_2(n)}$.

Pokazali smo že (trditev 3.6), da je, če je σ λ-permutacija, tudi $\sigma \circ \sigma$ λ-permutacija. Če je σ λ-permutacija in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergira, torej vedno konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma\circ\sigma(n)}$, zato velja $\sigma \leq \sigma \circ \sigma$. Pokažimo, da velja celo $\sigma < \sigma \circ \sigma$. To bomo storili tako, da bomo poiskali divergentno vrsto, ki jo permutacija $\sigma \circ \sigma$ spremeni v konvergentno, permutacija σ pa ne. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ taka divergentna vrsta, da je $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$ konvergentna. Potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma^{-1}(n)}$ divergentna. Če bi bila namreč $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma^{-1}(n)}$ konvergentna, bi bila, ker σ ohranja konvergenco, tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, kar pa ni res. Permutacija σ vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma^{-1}(n)}$ ne spremeni v konvergentno, saj je $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ki je divergentna. Če na vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma^{-1}(n)}$ uporabimo permutacijo $\sigma \circ \sigma$, pa dobimo $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma\circ\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$, ki je konvergentna. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma^{-1}(n)}$ je torej tista divergentna vrsta, ki jo permutacija $\sigma \circ \sigma$ spremeni v konvergentno, permutacija σ pa ne. Torej velja $\sigma < \sigma \circ \sigma$, od tod pa induktivno sledi: $\sigma < \sigma \circ \sigma < \sigma \circ \sigma \circ \sigma < \cdots$.

Za vsako λ-permutacijo lahko najdemo novo λ-permutacijo, ki bo »večja« od nje. Torej množica vseh λ-permutacij nima zgornje meje.

5. Pogojno divergentne vrste in λ-permutacije

V tem razdelku, v katerem sledimo viru [3], bomo poskušali odgovoriti še na vprašanje, ali za vsako pogojno divergentno vrsto obstaja taka λ-permutacija, da vrsta s spremenjenim vrstnim redom členov konvergira. V ta namen za vsako pogojno konvergento oziroma pogojno divergentno vrsto definirajmo množico

$$S = \left\{ L \in \mathbb{R} : \text{obstaja } \lambda\text{-permutacija } \sigma, \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L \right\}.$$

Na vprašanje bomo odgovorili s pomočjo primera pogojno divergentne številske vrste, za katero je množica S prazna.

Oglejmo si naslednjo številsko vrsto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{33} - \frac{1}{2} + \cdots \tag{9}$$

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki ga seštevamo, je zgrajeno iz med sabo prepletenih zaporedij $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Začne se s prvimi nekaj členi zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Teh mora biti toliko, da je njihova vsota večja ali enaka 2. Sledi prvi element zaporedja $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, nato pa naslednjih nekaj členov zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, spet toliko, da njihova vsota doseže ali preseže 2, potem pa drugi elelemnt zaporedja $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ in tako dalje. Vrsta je pogojno divergentna. Da je divergentna, vidimo, če si ogledamo njeno zaporedje delnih vsot. Delna vsota $S(n)$, kjer za n velja, da je a_n pozitiven in a_{n+1} negativen, je za vsaj 2 večja od delne vsote $S(n-k)$, kjer je a_{n-k} pozitiven in a_{n-k+1} negativen. Ko vrednost členov zaporedja delnih vsot narašča, naraste za vsaj 2, ko pada, pa pade za največ 1. Sledi, da je zaporedje delnih vsot te vrste divergentno, zato je tudi sama vrsta divergentna. Da je pogojno divergentna, pa sledi iz dejstva, da obstaja pogojno konvergentna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \cdots ,$$

sestavljena iz popolnoma enakih členov kot vrsta (9). Ta konvergira po testu za alternirajoče vrste iz izreka 1.3. Torej mora obstajati nekakšna permutacija, ki preuredi člene vrste (9), da dobimo pogojno konvergentno vrsto. Trdimo, da tega ni mogoče storiti z nobeno λ-permutacijo, torej da za to vrsto velja, da je $S = \emptyset$.

Zakaj je to tako, bomo pokazali s protislovjem. Naj bo σ neka poljubna λ-permutacija, s katero delujemo na vrsto (9), in naj bo zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno z B. Naj bo $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ delna vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, kjer je n tako velik, da je $1 \in \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Če to delno vsoto zapišemo kot v enakosti (8), dobimo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k + \sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k \geq \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k - (b_n - 1) \geq \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k - (B - 1).$$

Očitno je namreč, da vsota katerihkoli zaporednih členov zgoraj definiranega zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nikoli ni manjša od -1. Torej velja, da je

$$\sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k \geq -1.$$

Sledi:

$$\sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k \geq \sum_{i=2}^{b_n}(-1) = -(b_n - 1).$$

Ko pošljemo n proti neskončno, gre tudi d_1^n proti neskončno (kar smo videli že v dokazu trditve 3.4). Vsote oblike $\sum_{k=1}^{d_1^n} a_k$ tvorijo podzaporedje zaporedja delnih vsot vrste (9). To podzaporedje gre proti neskončno, ko gre d_1^n proti neskončno, saj vrsta (9) divergira, poleg tega pa je iz konstrukcije zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ razvidno, da zaporedje delnih vsot vrste (9) nima stekališč. Kadar vrednost členov zaporedja delnih vsot narašča, namreč naraste vsaj za 2, kadar pada, pa pade za vsakič manjšo vrednost, ki je hkrati tudi manjša od 1, zato za poljubno realno število α obstaja tako naravno število n_0, da je $S(n) > |\alpha| + 1$ za vsak $n > n_0$. Sledi, da je $|S(n) - \alpha| \geq |S(n)| - |\alpha| > 1$ za vsak $n > n_0$. Od tod pa sledi, da zaporedje delnih vsot nima nobenega podzaporedja, ki bi konvergiralo k α, in ker je bila vrednost α poljubna, zaporedje delnih vsot nima stekališč. Sledi, da tudi zaporedje delnih vsot $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ divergira. Ker je bila izbira permutacije σ poljubna, lahko zaključimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ne konvergira za nobeno λ-permutacijo σ.

Z zgornjim primerom smo pokazali, da je množica S lahko prazna. Oglejmo si še primer vrste, za katero je $S = \mathbb{R}$. Izrek 1.5 pravi, da je v vsaki pogojno konvergentni vrsti mogoče spremeniti vrstni red členov tako, da dobljena vrsta divergira ali pa konvergira proti kateremukoli realnemu številu. Zgolj z uporabo λ-permutacij lahko to dosežemo pri naslednji vrsti:

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{33} - \frac{1}{5} - \cdots$$

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tudi v tem primeru zgrajeno iz med sabo prepletenih zaporedij $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Začne se s prvimi nekaj členi zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, takimi, da je njihova vsota enaka s_1. Tu je s_1 najmanjše število, da velja $s_1 \geq 1$. Sledi prvih nekaj števil zaporedja $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, takih, da je njihova vsota enaka $-t_1$, pri čemer je t_1 najmanjše možno število, za katero velja $t_1 \geq s_1 + 1$. Nadaljujemo z elementi zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, ki jih je toliko, da je njihova vsota enaka s_2, pri čemer je $s_2 \geq t_1 + 1$, in tako dalje.

Za lažjo obravnavo pozitivne člene zaporedja a_n, katerih vsota je s_i, imenujmo *i-ti pozitivni blok*, negativne člene, katerih vsota je $-t_i$, pa *i-ti negativni blok*.

Da je ta vrsta divergentna, zopet vidimo, če si ogledamo njeno zaporedje delnih vsot. Delna vsota, ki vsebuje vse člene prvega pozitivnega bloka, je enaka $s_1 \geq 1$, delna vsota, ki vsebuje vse člene prvega pozitivnega in prvega negativnega bloka, je enaka $s_1 - t_1 \leq -1$, delna vsota s členi iz prvih dveh pozitivnih in prvega negativnega bloka je enaka $s_1 - t_1 + s_2 \geq s_1 + 1 \geq 2$, delna vsota z vsemi členi iz obeh pozitivnih in obeh negativnih blokov je enaka $s_1 - t_1 + s_2 - t_2 \leq -2$ in tako dalje. Da je pogojno divergentna, pa vidimo enako kot v prejšnjem primeru, torej iz dejstva, da obstaja pogojno konvergentna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \cdots ,$$

sestavljena iz popolnoma enakih členov kot vrsta (10).

Trdimo, da za vsako število $L \in \mathbb{R}$ obstaja λ-permutacija, ki iz zgornje (divergentne) vrste (10) ustvari konvergentno vrsto z vsoto L, torej da je za to vrsto množica S enaka množici realnih števil. Pri dokazovanju te trditve si poleg vira [3] pomagamo tudi z dokazom Riemannovega izreka v [1, podpoglavje 6.4, dokaz izreka 83] in v [4]. Ideja dokaza te trditve je namreč zelo podobna ideji dokaza Riemannovega izreka.

Naj bo torej L neko realno število. Poiskali bomo λ-permutacijo σ, ki bo ustrezno preoblikovala vrsto (10).

Najprej poiščimo tak indeks m_1, da bo za prej definirano zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ veljalo

$$a_{m_1} > 0 \text{ in } L < \sum_{k=1}^{m_1} a_k \leq L + 1.$$

Tak indeks m_1 zagotovo obstaja. Iz konstrukcije zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ namreč sledi, da delne vsote vrste (10) stalno nihajo z vedno večjo amplitudo med pozitivnimi in negativnimi celimi števili. Za prvo delno vsoto te vrste na primer velja, da je $S(1) \geq 1$, za neki $n_1 > 1$, da je $S(n_1) \leq -1$, potem za neki $n_2 > n_1$ velja, da je $S(n_2) \geq 2$, in tako dalje.

Definirajmo permutacijo σ na prvih m_1 elementih naravnih števil kot identiteto, torej

$$\sigma(k) = k \text{ za } k \leq m_1.$$

Predpostavimo sedaj, da je a_{m_1} del j-tega pozitivnega bloka, torej eden izmed členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, katerih vsota je s_j. Člen a_{m_1} je namreč pozitivno število. Nadaljujmo s konstrukcijo permutacije σ. Vrednost $\sigma(m_1 + 1)$ naj bo taka, da je člen $a_{\sigma(m_1+1)}$ enak prvemu še neuporabljenemu (v tem primeru kar prvemu) členu zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki pripada j-temu negativnemu bloku, torej bloku števil z vsoto $-t_j$.

Preostanek permutacije σ skonstruiramo na podoben način. Recimo, da smo do sedaj določili m_i členov zaporedja $\{a_\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Če za njihovo vsoto velja

$$\sum_{n=1}^{m_i} a_{\sigma(n)} \leq L,$$

bomo vrednost $\sigma(m_i + 1)$ določili tako, da bo $a_{\sigma(m_i+1)}$ enak prvemu še neuporabljenemu pozitivnemu členu zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Če pa je

$$\sum_{n=1}^{m_i} a_{\sigma(n)} > L,$$

bo vrednost $\sigma(m_i + 1)$ taka, da bo člen $a_{\sigma(m_1+1)}$ enak prvemu še neuporabljenemu negativnemu členu zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, ki jo dobimo, ko končamo s konstrukcijo permutacije σ, ima vsoto L. Za $n > m_1$ namreč velja, da je $|\tilde{S}(n) - L| \leq |a_p|$, kjer je a_p zadnji člen v vsoti $\tilde{S}(n)$, pri katerem se zamenja predznak, torej zadnji člen, za katerega velja, da ima a_p drugačen predznak kot a_{p+1}. Člen a_p je ali element zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ali element zaporedja $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, torej je $|a_p|$ element zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. To zaporedje ima limito 0. Sledi, da je limita zaporedja delnih vsot $\{\tilde{S}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ enaka L.

Sedaj moramo dokazati še, da je dobljena permutacija σ λ-permutacija. Omenimo najprej nekaj koristnih opažanj. Vidimo lahko, da je $a_{\sigma(m_1+1)}$ enak ravno prvemu členu $(j+1)$ negativnega bloka. Ker za $k \leq m_1$ velja $\sigma(k) = k$ in ker je $\sigma(m_1)$ element j-tega pozitivnega bloka, pred $\sigma(m_1)$ v zaporedju $\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ni nastopilo nobeno število iz $(j+1)$ negativnega bloka. Torej je v tem primeru prvi člen $(j+1)$ negativnega bloka ravno prvi še neuporabljeni člen tega bloka. Poleg tega vidimo tudi, da prvih m_1 členov vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ vsebuje vse člene prvotne vrste do vključno $(j-1)$ negativnega bloka (in morda še kakšnega iz j-tega pozitivnega bloka).

Trdimo sedaj, da se v vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ prvi člen $(j+1)$ pozitivnega bloka pojavi pred prvim členom $(j+1)$ negativnega bloka. Ta trditev nam bo prišla prav v nadaljevanju, pri dokazovanju, da je zaporedje števil blokov za permutacijo σ omejeno. Njenega dokaza se lotimo s protislovjem. Recimo, da se prvi člen $(j+1)$ negativnega bloka pojavi pred prvim členom $(j+1)$ pozitivnega bloka in naj se pojavi na $(m'+1)$ mestu permutirane vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. Potem mora biti za vsako vrednost k, ki zadošča pogoju $m_1 < k \leq m'$, k-ti člen permutirane vrste ali iz j-tega pozitivnega bloka ali iz j-tega negativnega bloka. Poleg tega morajo za tak k med člene oblike $a_{\sigma(k)}$ spadati ravno vsi elementi j-tega negativnega bloka, saj lahko pri konstrukciji permutacije σ oziroma zaporedja $\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ začnemo uporabljati elemente $(j+1)$ negativnega bloka šele po tem, ko uporabimo vse elemente j-tega negativnega bloka. Vidimo tudi, da mora biti

$$\sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)} > L,$$

saj je šele takrat, ko je delna vsota permutirane vrste večja od L, naslednji člen v permutirani vrsti lahko negativen. Opazimo še, da vrsta $\sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)}$ zajema člene iz vseh blokov do vključno $(j-1)$ negativnega bloka, vse člene j-tega negativnega bloka in nekaj členov j-tega pozitivnega bloka. Vrsta $\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)}$ pa zagotovo zajema vse člene do vključno $(j-1)$ negativnega bloka in morda še kakšen člen iz j-tega pozitivnega bloka. Zato je vsota

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} + s_j - t_j,$$

kjer je s_j vsota j-tega pozitivnega bloka in $-t_j$ vsota j-tega negativnega bloka, večja ali enaka vsoti $\sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)}$. Iz konstrukcije permutacije σ sledi, da je

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} \leq L + 1,$$

iz lastnosti vrste (10) pa, da je $s_j - t_j \leq -1$. Imamo torej:

$$L < \sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} + s_j - t_j \leq L + 1 - 1 = L.$$

Pridemo do protislovja.

Pokazali smo torej, da se prvi člen $(j+1)$ pozitivnega bloka v permutirani vrsti pojavi pred prvim členom $(j+1)$ negativnega bloka. Recimo, da se pojavi na (m_2+1) mestu. Velja, da prvih m_2 členov permutirane vrste vključuje vse člene originalne vrste do vključno j-tega pozitivnega bloka in nekaj členov j-tega negativnega bloka. Na podoben način kot prej vidimo, da je prvi člen $(j+1)$ negativnega bloka uporabljen pred prvim členom $(j+2)$ pozitivnega bloka.

Pokažimo še, da se prvi člen $(j+l)$ pozitivnega bloka pojavi pred prvim členom $(j+l)$ negativnega bloka za vsak $l \geq 2$. Naj bo torej l neko naravno število, večje od 1, predpostavimo pa še, da za vsako naravno število p, manjše od l, velja, da prvi element $(j+p)$ pozitivnega bloka nastopi pred prvim elementom $(j+p)$ negativnega bloka. Dokaza se spet lotimo s protislovjem. Recimo, da se prvi člen $(j+l)$ negativnega bloka pojavi pred prvim členom $(j+l)$ pozitivnega bloka in naj se pojavi na $(n'+1)$ mestu permutirane vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. Potem mora biti za vsako vrednost k, ki zadošča pogoju $m_1 < k \leq n'$, k-ti člen permutirane vrste element enega izmed blokov od j-tega pozitivnega bloka do vključno $(j+l-1)$ negativnega bloka. Poleg tega morajo za tak k med člene oblike $a_{\sigma(k)}$ spadati ravno vsi elementi vseh negativnih blokov od j-tega do vključno $(j+l-1)$ negativnega bloka, saj lahko pri konstrukciji zaporedja $\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ začnemo uporabljati elemente $(j+l)$ negativnega bloka šele po tem, ko uporabimo vse elemente predhodnjih negativnih blokov. Ker smo predpostavili, da za vsako naravno število p, manjše od l, velja, da prvi element $(j+p)$ pozitivnega bloka nastopi pred prvim elementom $(j+p)$ negativnega bloka, pa za tak k med člene oblike $a_{\sigma(k)}$ spadajo tudi vsi elementi vseh pozitivnih blokov od j-tega do vključno $(j+l-2)$ pozitivnega bloka. Enako kot v dokazu za $(j+1)$ pozitivni in negativni blok vidimo, da mora biti

$$\sum_{k=1}^{n'} a_{\sigma(k)} > L.$$

Opazimo še, da vrsta $\sum_{k=1}^{n'} a_{\sigma(k)}$ zajema člene iz vseh blokov do vključno $(j+l-2)$ negativnega bloka, vse člene $(j+l-1)$ negativnega bloka in nekaj členov $(j+l-1)$ pozitivnega bloka. Podobno kot v dokazu za $(j+1)$ pozitivni in negativni blok vidimo, da je vsota

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} + s_j - t_j + s_{j+1} - t_{j+1} + \ldots + s_{j+l-1} - t_{j+l-1},$$

večja ali enaka vsoti $\sum_{k=1}^{n'} a_{\sigma(k)}$. Spet upoštevamo še, da je

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} \leq L+1,$$

in da je $s_o - t_o \leq -1$ za vsako naravno število o. Imamo torej:

$$L < \sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} + s_j - t_j + \ldots + s_{j+l-1} - t_{j+l-1} \leq L + 1 - (l-1) = L + 2 - l \leq L.$$

Ponovno pridemo do protislovja.

Na podoben način pokažemo tudi, da je prvi člen $(j+l)$ negativnega bloka uporabljen pred prvim členom $(j+l+1)$ pozitivnega bloka za vsak $l \geq 2$. Sledi, da je prvi člen vsakega bloka uporabljen pred prvim členom naslednjega bloka.

Oglejmo si sedaj, kako je z zaporedjem števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ za to permutacijo σ. Predpostavimo, da množica $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$, kjer je $n > m_1$, vsebuje indekse vseh elementov do vključno $(i-1)$-tega negativnega bloka in indekse nekaterih elementov iz i-tega pozitivnega in i-tega negativnega bloka. Če ta množica ne vsebuje indeksov vseh elementov i-tega pozitivnega bloka, potem v njej ni indeksov nobenega elementa $(i+1)$-tega pozitivnega bloka, od tod pa sledi, da v njej ni indeksov nobenega elementa $(i+1)$-tega negativnega bloka, saj prvi element tega bloka ne nastopi pred prvim elementom $(i+1)$-tega pozitivnega bloka. Torej lahko pišemo $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = [1, k_1]_{\mathbb{Z}} \cup [k_2, k_3]_{\mathbb{Z}}$, kjer je a_{k_1} zadnji že uporabljeni element i-tega pozitivnega bloka, v $[k_2, k_3]_{\mathbb{Z}}$ pa so vsebovani indeksi že uporabljenih elementov i-tega negativnega bloka. Enaki sklepi pokažejo, da za katerikoli n množica $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ vsebuje indekse vseh elementov do nekega bloka in indekse nekaterih elementov iz največ dveh sledečih blokov, torej se jo v vsakem primeru da zapisati kot unijo največ dveh blokov oblike $[c, d]_{\mathbb{Z}}$. Od tod vidimo, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ za permutacijo σ omejeno z 2. Po trditvi 3.4 sledi, da permutacija σ ohranja konvergenco, torej ustreza prvi točki iz definicije λ-permutacij. Ker smo permutacijo σ zgradili tako, da pogojno divergentno vrsto preoblikuje v pogojno konvergentno, torej ustreza tudi drugi točki iz definicije λ-permutacij. Permutacija σ je torej λ-permutacija.

Ogledali smo si taka primera pogojno divergentnih vrst, da je za eno veljalo $S = \emptyset$, za drugo pa $S = \mathbb{R}$. Pojavi se vprašanje, ki naj ostane neodgovorjeno: Je lahko S še kaj drugega kot le $\mathbb{R}$ in $\emptyset$?

6. Še dva primera ...

Za konec si oglejmo še dva primera λ-permutacij, vzeta iz [2].

Primer 6.1. Razdelimo naravna števila v bloke na naslednji način:

$$1 \quad 2\,3\,4\,5 \quad 6\,7\,8\,9\,10\,11 \quad 12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\,\ldots$$

V bloke smo jih razdelili tako, da ima vsak blok razen prvega dolžino $2n$, kjer je n zaporedna številka bloka. Drugi blok ima torej dolžino 4, tretji blok ima dolžino 6 in tako dalje. Zaradi lažje obravnave poimenujmo bloke tako:

$$\begin{aligned} B_1 &= 1 \\ B_2 &= 2\,3\,4\,5 \\ B_3 &= 6\,7\,8\,9\,10\,11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sedaj vsak blok B_i razdelimo na dva enako velika bloka B_i^1 in B_i^2 in ju prepletemo med sabo. Blok $B_3 = 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11$ na primer razdelimo na bloka $B_3^1 = 6\ 7\ 8$ in $B_3^2 = 9\,10\,11$ ter ju prepletemo tako, da na prvo mesto postavimo prvo število bloka B_3^1, torej 6, na drugo mesto prvo število bloka B_3^2, torej 9, na tretje mesto drugo število bloka B_3^1 in tako dalje. Ko opisani postopek izvedemo na vseh blokih v zaporedju, dobimo:

$$1 \quad 2\,4\,3\,5 \quad 6\,9\,7\,10\,8\,11 \quad 12\,16\,13\,17\,14\,18\,15\,19\,\ldots$$

Oziroma:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= 1 \\ \tilde{B}_2 &= 2\,4\,3\,5 \\ \tilde{B}_3 &= 6\,9\,7\,10\,8\,11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pokažimo, da je permutacija (označimo jo s σ_1), ki jo implicira zgornja preureditev števil, λ-permutacija.

Najprej si bomo ogledali zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ permutacije σ_1 in pokazali, da je omejeno. Če je omejeno, namreč permutacija σ_1 po trditvi 3.4 ohranja konvergenco, torej zadošča prvi točki iz definicije λ-permutacij.

Naj bo $B_i = m,\ m+1, \ldots, m+n-1,\ m+n$ neki poljuben blok. Na tem bloku uporabimo permutacijo σ_1. Razdelimo ga na bloka $B_i^1 = m,\ m+1, \ldots,\ m+\frac{n}{2}-1$ in $B_i^2 = m+\frac{n}{2},\ m+\frac{n}{2}+1, \ldots,\ m+n$, ki ju prepletemo med sabo in dobimo blok $\tilde{B}_i = m,\ m+\frac{n}{2},\ m+1, \ldots,\ m+n-1,\ m+\frac{n}{2}-1,\ m+n$. Opazimo lahko, da se blok $\tilde{B}_i$ zaradi načina, kako prepletemo bloka B_i^1 in B_i^2, začne z istim številom kot blok B_i in konča prav tako z istim številom kot B_i, torej velja $\sigma_1(m) = m$ in $\sigma_1(m+n) = m+n$. Ker permutiranje oziroma sprememba vrstnega reda števil poteka samo znotraj posameznega bloka in ne med različnimi bloki, blok $\tilde{B}_i$ vsebuje enaka števila kot B_i, torej ravno vsa naravna števila med m in $m+n$, le da v drugačnem vrstnem redu. Zato velja

$$\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+n)\} = [m, m+n]_{\mathbb{Z}}.$$

Naj bosta sedaj $B_i = m,\ m+1, \ldots, m+n-1,\ m+n$ in $B_{i-1} = m-l,\ m-l+1, \ldots, m-2,\ m-1$ zaporedna bloka. Potem je

$$\begin{aligned}
&\{\sigma_1(m-l), \sigma_1(m-l+1), \ldots, \sigma_1(m+n)\} \\
=&\{\sigma_1(m-l), \sigma_1(m-l+1), \ldots, \sigma_1(m-1)\} \cup \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+n)\} \\
=&[m-l, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup [m, m+n]_{\mathbb{Z}} = [m-l, m+n]_{\mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

Od tod lahko induktivno sklepamo, da je

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \ldots, \sigma_1(m+n)\} = [1, m+n]_{\mathbb{Z}},$$

kjer je $m+n$ število, s katerim se konča neki blok B_i. Za tako število je torej $(m+n)$-ti element zaporedja števil blokov enak $b_{m+n} = 1$.

Podobno vidimo, da je tudi za število m, s katerim se začne neki blok B_i, m-ti element zaporedja števil blokov enak $b_m = 1$. S številom $m-1$ se namreč konča blok B_{i-1}, torej od prej sledi

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \ldots, \sigma_1(m-1)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}}.$$

Torej je

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \ldots, \sigma_1(m)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup \{\sigma(m)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup \{m\} = [1, m]_{\mathbb{Z}}.$$

Kako pa je z ostalimi elementi zaporedja števil blokov? Naj bo $m+k$ število, ki ni ne na začetku in ne na koncu bloka $B_i = m,\ m+1, \ldots, m+n-1,\ m+n$, in naj bo $m+k \in [m, m+n]_{\mathbb{Z}}$ oziroma $\sigma_1(m+k) \in \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+n)\}$. Iščemo b_{m+k}, ki je število blokov oblike $[c, d]_{\mathbb{Z}}$, katerih unija je enaka množici $\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \ldots, \sigma_1(m+k)\}$. Od prej vemo, da je

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \ldots, \sigma_1(m+k)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}.$$

Oglejmo si množico $\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}$. Vsebuje števila iz bloka $\tilde{B}_i$, torej se v njej izmenjujejo števila iz blokov B_i^1 in B_i^2. Števila iz vsakega izmed obeh blokov si sledijo po vrsti, torej če sta števili n_1 in n_2 obe vsebovani na primer v bloku B_i^1 in je $n_1 < n_2$, bo tudi v permutiranem bloku $\tilde{B}_i$ število n_1 nastopilo pred številom n_2. Enako velja, če sta obe vsebovani v bloku B_i^2. Sledi, da se množica vseh števil iz bloka B_i^1, ki so vsebovana v množici $\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}$, da zapisati kot $[m, m+j]_{\mathbb{Z}}$, kjer je

$$m = \min\{B_i^1 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}\}$$

in

$$m + j = \max\{B_i^1 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}\},$$

in množica vseh števil iz bloka B_i^2, ki so vsebovana v množici $\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}$, se da zapisati kot $[m+o, m+p]_{\mathbb{Z}}$, kjer je

$$m + o = \min\{B_i^2 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}\}$$

in

$$m + p = \max\{B_i^2 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\}\}.$$

Sledi

$$\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\} = [m, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}}.$$

Dobimo torej, da je

$$\begin{aligned}\{\sigma_1(1), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\} &= [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup [m, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}} \\ &= [1, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

Če je $m + j + 1 < m + o$, je dobljeni zapis končen in za $(m+k)$ element zaporedja števil blokov velja $b_{m+k} = 2$. Če pa je $m + j + 1 = m + o$, se da zgornji zapis poenostaviti v

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\} = [1, m+k]_{\mathbb{Z}}$$

in v tem primeru je $b_{m+k} = 1$. Ker je bila izbira števila $m+k$ poljubna, sledi, da so vsi členi zaporedja števil blokov za permutacijo σ_1 enaki ali 1 ali 2, torej je zaporedje števil blokov omejeno in po trditvi 3.4 permutacija σ_1 ohranja konvergenco.

Da pokažemo, da je σ_1 λ-permutacija, moramo dokazati še, da zadošča drugi točki iz definicije λ-permutacij, torej da obstaja neka pogojno divergentna vrsta, ki ji σ_1 preuredi člene tako, da dobimo pogojno konvergentno vrsto. Primer take pogojno divergentne vrste je naslednji:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n =& 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \\ &+ \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Zaporedje delnih vsot te vrste je videti tako:

$$S_1 = 1,\ S_2 = -\frac{1}{2},\ S_3 = 0,\ S_4 = \frac{1}{2},\ S_5 = 1,\ S_6 = \frac{2}{3},\ S_7 = \frac{1}{3},\ S_8 = 0,\ \ldots$$

Vidimo, da to zaporedje delnih vsot med drugim vsebuje podzaporedje, sestavljeno iz samih enic, in podzaporedje, sestavljeno iz samih ničel. Zaporedje ima torej dve različni stekališči, 1 in 0, od koder sledi, da ni konvergentno.

Če sedaj člene vrste (11) preuredimo s permutacijo σ_1, dobimo vrsto

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} =& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \\ & - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \pm \cdots \end{aligned} \tag{12}$$

Ta pa konvergira po konvergenčnem testu za alternirajoče vrste.

Permutacija σ_1 je torej res λ-permutacija. $\diamondsuit$

Primer 6.2. Oglejmo si še en primer λ-permutacije. Zopet začnemo z zaporedjem naravnih števil, razdeljenim v bloke naraščajoče dolžine:

$$1 \quad 2\,3\,4 \quad 5\,6\,7\,8\,9\,10 \quad 11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\,\ldots$$

V bloke smo ga razdelili tako, da je njihova dolžina (razen prvega bloka, ki ima dolžino 1) večkratnik števila 3. Drugi blok ima na primer dolžino 3, tretji blok ima dolžino 6, n-ti pa dolžino $3(n-1)$. Zaradi lažje obravnave spet poimenujmo bloke tako:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= 2\,3\,4 \\ C_3 &= 5\,6\,7\,8\,9\,10 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ker je dolžina blokov večkratnik števila 3, lahko vsak blok C_i razdelimo na bloka C_i^1 in C_i^2, kjer je C_i^1 dolg $\frac{2}{3}$ dolžine celotnega bloka C_i, blok C_i^2 pa $\frac{1}{3}$ dolžine celotnega bloka. Dobljena bloka nato prepletemo med sabo tako, da blok C_i^1 razdelimo na podbloke dožine 2 in jih prepletemo z elementi bloka C_i^2. Pri bloku C_3, na primer, je postopek tak: ker ima blok dolžino 6, ga razdelimo na blok dolžine $\frac{2}{3}6 = 4$ in blok dolžine $\frac{1}{3}6 = 2$. Prvi štirje elementi C_3 torej pripadajo bloku C_3^1, zadnja dva pa bloku C_3^2. Blok $C_3^1 = 5\ 6\ 7\ 8$ sedaj razdelimo na podbloka dolžine 2, torej na 5 6 in 7 8, in ju prepletemo z elementi bloka C_3^2, tako da prvi podblok 5 6 postavimo na prvo mesto, sledi prvi element bloka C_3^2, potem drugi podblok 7 8 in nato drugi element bloka C_3^2. Ta postopek permutiranja poteka nekoliko drugače le pri bloku C_2, kjer elementov bloka C_2^1 ne moremo deliti na podbloke, temveč ju zgolj prepletemo z elementom bloka C_2^2. Na tak način dobimo:

$$1 \quad 2\,4\,3 \quad 5\,6\,9\,7\,8\,10 \quad 11\,12\,17\,13\,14\,18\,15\,16\,19\,\ldots$$

Oziroma:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= 1 \\ \tilde{C}_2 &= 2\,4\,3 \\ \tilde{C}_3 &= 5\,6\,9\,7\,8\,10 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dobljena preureditev števil implicira permutacijo σ_2, za katero trdimo, da je λ-permutacija. Za dokaz bomo spet najprej pokazali, da je njeno zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno, nato pa poiskali pogojno divergentno vrsto, ki jo bo σ_2 preuredila tako, da bo konvergirala.

Opazimo, da v bloku C_i, kjer je $i > 2$ (permutiranje pri bloku C_2 poteka nekoliko drugače kot pri ostalih), velja za prvi dve števili in za zadnje število v bloku, da jih σ_2 preslika same vase. Naj bo spet $C_i = m,\ m+1, \ldots, m+n-1,\ m+n$ neki poljuben blok. Ker zamenjava členov poteka samo znotraj bloka in ne med različnimi bloki, je

$$\{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+n)\} = [m, m+n]_{\mathbb{Z}}.$$

Enako kot v primeru 6.1 od tod sledi

$$\{\sigma_2(1), \sigma_2(2), \ldots, \sigma_2(m+n)\} = [1, m+n]_{\mathbb{Z}},$$

torej je $(m+n)$-ti element zaporedja števil blokov enak $b_{m+n} = 1$. Opazimo, da enako velja tudi za blok C_2, čeprav se njegovo zadnje število s permutacijo σ_2 ne preslika samo vase.

Popolnoma enaki sklepi kot v primeru 6.1 pokažejo tudi, da za število m, s katerim se blok začne, in $m+1$, ki je drugo število v bloku, spet velja

$$\{\sigma_2(1), \sigma_2(2), \ldots, \sigma_2(m)\} = [1, m]_{\mathbb{Z}},$$

oziroma

$$\{\sigma_2(1), \sigma_2(2), \ldots, \sigma_2(m+1)\} = [1, m+1]_{\mathbb{Z}},$$

torej je $b_m = 1$ in $b_{m+1} = 1$. Spet nam ostane le še vprašanje, kako je z elementi b_j, kjer j ni prvo, drugo ali zadnje število v nekem bloku C_i. Naj bo $m+k$ število, ki ni ne na začetku ne na drugem mestu in ne na koncu bloka C_i, in naj bo $m+k \in [m, m+n]_{\mathbb{Z}}$, oziroma $\sigma_2(m+k) \in \{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+n)\}$. Iščemo b_{m+k}. Postopamo podobno kot v primeru 6.1. Vemo, da je

$$\{\sigma_2(1), \sigma_2(2), \ldots, \sigma_2(m+k)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup \{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\},$$

torej se lahko omejimo na obravnavo množice $\{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\}$. Ta vsebuje števila iz bloka $\tilde{C}_i$, torej se v njej izmenjujejo števila iz blokov C_i^1 in C_i^2. Spet opazimo, da bo, če sta števili n_1 in n_2 obe vsebovani na primer v bloku C_i^1 in je $n_1 < n_2$, tudi v permutiranem bloku $\tilde{C}_i$ število n_1 nastopilo pred številom n_2. Enako kot prej lahko množico vseh števil iz bloka C_i^1, ki so vsebovana v množici $\{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\}$, zapišemo kot $[m, m+j]_{\mathbb{Z}}$, kjer je

$$m = \min\{C_i^1 \cap \{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\}\}$$

in

$$m+j = \max\{C_i^1 \cap \{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\}\},$$

množica vseh števil iz bloka C_i^2, ki so vsebovana v množici$\{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\}$, pa se da zapisati kot $[m+o, m+p]_{\mathbb{Z}}$, kjer je

$$m+o = \min\{C_i^2 \cap \{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\}\}$$

in

$$m+p = \max\{C_i^2 \cap \{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\}\}.$$

Sledi, da je

$$\{\sigma_2(m), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\} = [m, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}}.$$

Dobimo enak rezultat kot v primeru 6.1, torej da je

$$\{\sigma_2(1), \sigma_2(m+1), \ldots, \sigma_2(m+k)\} = [1, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}},$$

ki predstavlja končni zapis, če je $m+j+1 < m+o$. V tem primeru je $(m+k)$-ti element zaporedja števil blokov enak $b_{m+k} = 2$. Če pa je $m+j+1 = m+o$, pa se zapis poenostavi v

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(m+1), \ldots, \sigma_1(m+k)\} = [1, m+k]_{\mathbb{Z}}$$

in velja $b_{m+k} = 1$. Ker je bila izbira števila $m+k$ poljubna, so torej vsi členi zaporedja števil blokov za permutacijo σ_2 enaki ali 1 ali 2, zaporedje števil blokov je zato omejeno in po trditvi 3.4 permutacija σ_2 ohranja konvergenco.

Potrebujemo le še primer pogojno divergentne vrste, ki jo bo permutacija σ_2 preuredila tako, da bo konvergirala. Oglejmo si naslednjo vrsto:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n =&1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\\ &+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\pm\cdots\end{aligned}\tag{13}$$

Zaporedje delnih vsot te vrste je tako:

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{4}, 1,\ \frac{7}{6},\ \frac{8}{6},\ \frac{9}{6},\ \frac{10}{6},\ \frac{8}{6},\ 1, \ldots$$

Opazimo, da to zaporedje delnih vsot vsebuje podzaporedje, katerega členi so vsi enaki 1. Torej je 1 eno izmed stekališč zaporedja $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vidimo pa tudi, da tisti elementi zaporedja $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki imajo indeks $n = c_k$, kjer je $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ zaporedje, podano z rekurzivno formulo $c_k = c_{k-1} + 3k - 1$, $c_1 = 3$, tvorijo podzaporedje $\{T_{c_k}\}_{k=1}^{\infty}$ zaporedja $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, za katerega velja

$$T_{c_k} = \frac{2k+1}{k+1}.$$

Vidimo, da je limita zaporedja $\{T_{c_k}\}_{k=1}^{\infty}$ enaka 2. Torej je 2 še eno izmed stekališč zaporedja $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ker ima zaporedje delnih vsot vsaj dve različni stekališči, je divergentno. Sledi, da je tudi vrsta (13) divergentna.

Če sedaj člene vrste (13) preuredimo s permutacijo σ_2, dobimo vrsto

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_2(n)} =&1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\\ &+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\pm\cdots\end{aligned}\tag{14}$$

Da pokažemo, da je dobljena vrsta konvergentna, si spet oglejmo zaporedje delnih vsot:

$$\{\tilde{S}_n\}_{n=1}^{\infty} = 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{4}, 1,\ \frac{7}{6},\ \frac{8}{6},\ 1,\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{8},\ 1,\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{8},\ 1, \ldots$$

Vemo, da neko zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$, kjer je m neko naravno število. Torej bo zaporedje $\{\tilde{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiralo natanko tedaj, ko bo konvergiralo zaporedje $\{\tilde{S}_n\}_{n=4}^{\infty}$. Opazimo, da je zaporedje $\{\tilde{S}_n\}_{n=4}^{\infty}$ sestavljeno iz treh podzaporedij. Členi $\tilde{S}_n$, kjer je $n = 3j + 1$ za $j \geq 0$, tvorijo podzaporedje, katerega členi so vsi enaki 1. Členi $\tilde{S}_n$, kjer je $n = 3j + 2$ za $j \geq 0$, tvorijo podzaporedje

$$\{U_k\}_{k=3}^{\infty} = \frac{7}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \ldots,\ \frac{2k+1}{2k},\ \frac{2k+1}{2k},\ \ldots,$$

členi $\tilde{S}_n$, kjer je $n = 3$ za $j \geq 1$, pa tvorijo podzaporedje

$$\{V_k\}_{k=3}^{\infty} = \frac{8}{6},\ \frac{8}{6},\ \frac{10}{8},\ \frac{10}{8},\ \ldots,\ \frac{2k+2}{2k},\ \frac{2k+2}{2k},\ \ldots$$

Vsa tri podzaporedja imajo limito 1. Ker omenjena tri podzaporedja pokrivajo celotno zaporedje $\{\tilde{S}_k\}_{k=4}^{\infty}$, je 1 edino stekališče oziroma limita tega zaporedja. Sledi, da zaporedje $\{\tilde{S}_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira, zato je tudi vrsta (14) konvergentna. Tako smo dokazali, da je tudi σ_2 λ-permutacija. $\diamondsuit$

7. Zaključek

V uvodu smo si zastavili kar nekaj vprašanj v zvezi z λ-permutacijami – o tem, ali sploh obstaja kakšna, o njihovih lastnostih in delovanju na pogojno divergentne vrste ter o moči in omejenosti množice λ-permutacij. Da množica λ-permutacij ni prazna, je v nalogi potrjeno s primeri konstrukcij treh različnih λ-permutacij, v nadaljevanju pa se pokaže, da je števno neskončna in neomejena. S tem dokažemo, da, kar se tiče seštevanja vrst, še vedno lahko brez škode uporabljamo zaporedje naravnih števil, saj med λ-permutacijami ni najti tiste optimalne, ki bi narekovala novo, za seštevanje vrst bolj primerno zaporedje, ki bi zagotavljalo največ konvergentnih vrst.

Kljub temu, da diplomska naloga odgovarja na vsa zastavljena vprašanja, s tem še zdaleč ni povedano vse o λ-permutacijah. Nekaj novih vprašanj se nam na primer postavi v razdelku 5, v katerem za vsako pogojno konvergentno oziroma pogojno divergentno vrsto definiramo množico, ki vsebuje vsote vseh vrst, dobljenih s preureditvijo te vrste z λ-permutacijami. Nato predlagamo taki divergentni vrsti, za kateri je omenjena množica prazna oziroma enaka množici realnih števil. Poiščemo torej pogojno divergentno vrsto, ki je nobena λ-permutacija ne more spremeniti v konvergentno, in drugo pogojno divergentno vrsto, ki jo λ-permutacije lahko preoblikujejo tako, da je njena vsota enaka kateremukoli realnemu številu. Tu se nam zastavlja vprašanje, kakšna še je lahko množica S.

Ob obravnavanju primera vrste, za katerega je množica S prazna, pa se pojavi še nekaj zanimivih vprašanj. Omenjena vrsta je pogojno divergentna, torej obstaja neka permutacija, ki njene člene preoblikuje tako, da je dobljena vrsta konvergentna, vendar smo videli, da ta permutacija ni λ-permutacija. Očitno torej obstaja še veliko več vrst permutacij, ki iz divergentnih vrst ustvarjajo konvergentne. Kakšne so te permutacije? Kaj se da povedati o njih? Imajo kakšne skupne lastnosti?

Teorija λ-permutacij nam torej odpira nov in zelo zanimiv pogled na pogojno konvergentne in pogojno divergentne vrste.

Slovar strokovnih izrazov

block number sequence zaporedje števil blokov – n-ti člen zaporedja števil blokov za permutacijo σ je enak številu blokov, ki vsebujejo zaporedna naravna števila in so oblike $[c,d]_{\mathbb{Z}} = \{c, c+1, \ldots, d-1, d\}$, njihova unija pa je enaka množici $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$
convergent konvergenten
divergent divergenten
one-to-one injektiven
onto surjektiven
semigroup polgrupa
sequence zaporedje
series (številska) vrsta

Literatura

[1] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010; dostopno tudi na `www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf`.

[2] S. G. Krantz in J. D. McNeal, *Creating more convergent series*, Amer. Math. Monthly **111** (2004) 32–38.

[3] D. Velleman, *A note on λ-permutations*, Amer. Math. Monthly **113** (2006) 173–178.

[4] *Riemann series theorem*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 11. 5. 2017], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Riemann_series_theorem`.