

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Matematika – 3. stopnja

Boštjan Kovač

**Geometrijska aproksimacija
krožnih lokov**

Doktorska disertacija

Mentor: izred. prof. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2018

Zahvala

Najprej bi se rad zahvalil mentorju izred. prof. dr. Emilu Žagarju za vse strokovne nasvete, vodenje, potrpežljivost in pomoč pri izdelavi doktorske disertacije.

Zahvaljujem se vsem sodelavcem iz podjetja Abelium, ki so mi v času študija nudili ustvarjalno delovno okolje, me s svojimi zgledi motivirali in mi pomagali pri doseganju cilja.

Zahvala gre tudi vsem udeležencem seminarja za numerično analizo za vse poučne razprave in konstruktivne opombe ob predstavitev mojih raziskovalnih dosežkov.

Posebna zahvala gre tudi mojim staršem in sestri za vso podporo in razumevanje v času študija.

Nazadnje bi se zahvalil še svoji ženi za vse spodbudne besede in nesebično pomoč. Skupaj s hčerko sta mi vedno znali pričarati nasmeh na obraz tudi v najtežjih trenutkih.

Delo sta delno financirala Ministrstvo za gospodarski razvoj in tehnologijo ter Evropska unija - Evropski socialni sklad.

Povzetek

V doktorski disertaciji je izpeljanih nekaj novih metod za aproksimacijo krožnega loka. Prvi del predstavlja asimptotično najboljša enostranska geometrijska aproksimacija reda ena (G^1) glede na radialno napako. Metoda predstavlja aproksimacijo z Bézierjevimi krivuljami stopnje štiri, pri kateri kontrolne točke določimo tako, da se poleg robnih točk, aproksimacijska krivulja dotika krožnega loka z redom ena še v dveh notranjih točkah. Dokaz obstoja rešitve je zaradi kompleksnosti sistema enačb narejen s pomočjo homotopije. V nadaljevanju je izpeljana metoda uporabljena za aproksimacijo stožnic. Aproksimacijo izvedemo tako, da do izpolnitve dodatnih pogojev metodo uporabimo v subdivizijskem postopku za določitev novih delilnih točk, nato z isto metodo aproksimiramo vsak posamezen del.

V drugem delu disertacije za mero napake namesto radialne napake vzamemo napako ukrivljenosti. Predstavljenih je nekaj preprostih metod s polinomi nizkih stopenj in nekaj metod, kjer za aproksimacijo uporabimo dvoloke. Ugotovili smo, da imajo izpeljane metode še vedno optimalni red aproksimacije glede na radialno napako in za dva reda nižji aproksimacijski red glede na napako ukrivljenosti, ki je posledica odvodov drugega reda v formuli za ukrivljenost.

Izkazalo se je, da je optimalna aproksimacija krožnega loka vedno dosežena tedaj, ko napaka enakomerno oscilira, zato smo zadnji del disertacije posvetili izpeljavi metod takšne oblike. Gre za aproksimacije s polinomi nizkih stopenj, ki imajo v robnih točkah s krožnim lokom geometrijski kontakt določenega reda, ali pa samo aproksimirajo podan krožni lok. V slednjem primeru dobimo za rešitev skaliran polinom Čebiševa. Podobno kot v prvem delu disertacije, se tudi tu v primeru kompleksnejših sistemov enačb poslužimo dokaza obstoja rešitve s pomočjo homotopije.

Math. Subj. Class. (MSC 2010): 65D17, 65H04, 65H20

Ključne besede: krožni lok, Bézierjeva krivulja, radialna napaka, napaka ukrivljenosti, homotopija, stožnica, asimptotična analiza, najboljša enakomerna aproksimacija

Abstract

In this PhD thesis several new methods for an approximation of the circular arc are presented. The first part represents asymptotically the best single-sided geometric approximation of order one (G^1) according to the radial error. It is an approximation with the quartic Bézier curve. The control points are set so that in addition to the boundary points the approximative curve touches the circular arc with order one at two inner points. Due to the complexity of the system of equations, the proof of the existence of a solution is made using the homotopy. The generalization of the derived method is then used for the approximation of conic sections. The method is used in a subdivision process to determine new vertices until some additional conditions are met. Each individual part is then approximated using the derived method.

In the second part of the thesis curvature error is used instead of the radial one. Some simple low-degree polynomial methods and biarc methods are presented. It is confirmed that the derived methods still have the optimal approximation order according to the radial error, while the approximation order according to the curvature error is reduced by two as expected due to the second order derivatives.

As it turns out the optimal approximation of the circular arc is always achieved when the error equally oscillates. The last part of the thesis is thus dedicated to the methods of this type. These are low-degree approximations that have a geometric contact of some order with the circular arc at the boundary points, or they only approximate the same angle as the circular arc. In the latter case, we obtain a scaled Chebyshev polynomial. Similarly as in the first part, when a complicated system of equations appears, the proof of the existence of a solution is done using the homotopy.

Math. Subj. Class. (MSC 2010): 65D17, 65H04, 65H20

Keywords: circular arc, Bézier curve, radial error function, curvature error function, homotopy, conic section, asymptotic analysis, best uniform approximation

Kazalo

1	Uvod	1
1.1	Oznake	2
1.2	Mera napake	3
2	Aproksimacija krožnih lokov z G^1 zveznimi polinomskimi krivuljami stopnje štiri	9
2.1	Definicija problema in pripadajoči sistem nelinearnih enačb	10
2.2	Homotopija	15
2.3	Asimptotična analiza	24
2.4	Numerični primeri	26
2.5	Uporaba metode za aproksimacijo odsekov stožnic	28
2.6	Zaključek	33
3	Aproksimacija ukrivljenosti krožnega loka z aproksimanti nizkih stopenj	37
3.1	G^1 aproksimacija s kubičnimi parametričnimi polinomskimi krivuljami	37
3.2	Najboljša kubična aproksimacija glede na asimptotično analizo	40
3.3	G^1 aproksimacija krožnega loka s kvadratičnimi dvoloki	41
3.4	G^1 aproksimacija krožnega loka s kubičnimi dvoloki	44
3.5	Zaključek	47
4	Aproksimacija krožnega loka z enakomerno oscilirajočo radialno napako	49
4.1	Linearna aproksimacija	50
4.2	Kvadratična aproksimacija	52
4.3	Kubična aproksimacija	54
4.4	Zaključek	68
5	Zaključki	69
	Literatura	71

Poglavje 1

Uvod

Osnovni geometrijski objekti, kot so premice (daljice) in krožni loki, so najpomembnejši elementi v mnogih grafičnih in oblikovalskih aplikacijah. Za uporabo v programih jih najpogosteje predstavimo v parametrični obliki. To zahteva točno reprezentacijo ali vsaj dovolj dobro aproksimacijo. Ker v praksi mnoge naprave, ki uporabljajo parametrične krivulje, operirajo le s polinomi, je potrebna aproksimacija nekaterih, še tako enostavnih geometrijskih objektov, npr. krožnih lokov. Znano je namreč dejstvo, da krožnega loka ni možno točno predstaviti v polinomski obliki. Čim boljša aproksimacija je torej tudi zanimiv teoretični problem, ki muči raziskovalce že mnoga leta. Ker je običajno pomemben le izgled, se večina aproksimacijskih shem naslanja na geometrijsko zveznost, največkrat na geometrijsko zveznost reda ena (G^1) ali reda dva (G^2). Znano je, da G^1 sheme implicirajo zveznost enotskega tangentnega vektorja, medtem ko G^2 sheme dodatno zagotovijo še zveznost predznačene fleksijske ukrivljenosti.

Da je aproksimacija krožnega loka res zanimiva tema, priča veliko število rezultatov s tega področja. Večini je skupno, da so to polinomske aproksimacije nizkih stopenj, ki minimizirajo radialno napako. Kvadratičen primer je obravnavan v [22]. Kubična aproksimacija je bila leta 1990 obravnavana v [4] ter nato še leto kasneje v [9]. Precej bolj podrobna teorija interpolacije krožnega loka z Bézierjevimi krivuljami je bila podana šele leta 1997 v [2]. Nato so sledile objave aproksimacij stopnje pet [5, 6]. V prvem članku avtor predstavi različne metode aproksimacije krožnega loka reda dva, tri in štiri. V drugem članku obravnava G^3 aproksimacijo stožnic (torej tudi krožnega loka) s polinomsko krivuljo stopnje pet, ki dodatno aproksimira še srednjo točko. Sledile so aproksimacije stopnje štiri. V članku [10] avtorji predstavijo najboljšo G^2 aproksimacijo. Članki [15, 16, 21, 24] se vsi ukvarjajo z G^1 aproksimacijami krožnega loka, kjer dodatno zahtevajo kontakte različnih stopenj v eni ali več notranjih točkah. V literaturi se pojavljajo tudi aproksimacije, ki temeljijo na razvoju v Taylorjevo vrsto [12] in takšne, ki minimizirajo napako ukrivljenosti [14]. Ker je tematika še vedno aktualna, se bomo z nekaterimi, še ne rešenimi problemi, ukvarjali tudi v tem delu. Za začetek definirajmo nekaj oznak in navedimo nekaj uporabnih trditev/izrekov, ki nam bodo služili kot opora skozi celotno disertacijo.

1.1 Oznake

Glavni namen doktorske disertacije je aproksimacija enotskega krožnega loka, podanega s standardno parametrizacijo $\mathbf{c} : [-\varphi, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $0 < \varphi \leq \pi/2$, kjer je

$$\mathbf{c}(\psi) = (\cos \psi, \sin \psi)^\top, \quad |\psi| \leq \varphi, \quad (1.1)$$

saj lahko poljuben krožni lok, ki je podan z enakim kotom, preprosto preslikamo v (1.1) z uporabo afine preslikave. Če imamo namreč podan poljuben krožni lok s središčem v točki $\mathbf{a} = (a_x, a_y)^\top$, polmerom r_a , ki opisuje kot od φ_a do kota $\varphi_a + 2\varphi$, torej

$$\mathbf{c}_a(\psi) = (a_x + r_a \cos(\varphi_a + \varphi + \psi), a_y + r_a \sin(\varphi_a + \varphi + \psi))^\top, \quad |\psi| \leq \varphi,$$

tedaj dobimo (1.1) s translacijo za $-\mathbf{a}$, rotacijo za kot $-(\varphi_a + \varphi)$ in skaliranjem s faktorjem $1/r_a$. Ker nobena od omenjenih operacij ne vpliva na aproksimativne lastnosti, se lahko posvetimo le analizi enotskega krožnega loka \mathbf{c} .

V praksi (in tudi v teoriji) so Bézierjeve krivulje ena izmed standardnih reprezentacij polinomskih parametričnih krivulj, zato se bomo pri iskanju aproksimantov omejili prav na njih. Aproksimacija krožnega loka \mathbf{c} je torej podana kot

$$\mathbf{b}(t) = (x(t), y(t))^\top = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad (1.2)$$

kjer sta x in y polinoma stopnje $\leq n$, $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i)^\top \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \dots, n$, so kontrolne točke in $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $t \in [0, 1]$, standardni Bernsteinovi bazni polinomi.

Naštejmo nekaj osnovnih lastnosti Bézierjeve krivulje, ki jih bomo upoštevali pri konstrukciji aproksimatov.

1. Krivulja leži v konveksni ovojnici kontrolnih točk.
2. Krivulja je invariantna glede na afino preslikavo.
3. Krivuljo lahko reparametriziramo na poljuben interval.
4. Pri simetrični izbiri kontrolnih točk glede na neko v naprej določeno os, je tudi Bézierjeva krivulja simetrična glede na isto os zaradi simetrije Bernsteinovih polinomov $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$.

Ker je krožni lok \mathbf{c} po definiciji simetričen glede na abscisno os, bomo tudi vse aproksimante iskali v tej obliki. To pomeni, da bodo kontrolne točke Bézierjeve krivulje \mathbf{b} ležale simetrično glede na abscisno os.

1.2 Mera napake

Da lahko primerjamo dve parametrični krivulji, moramo naprej definirati merjenje razdalje. Kot smo omenili že zgoraj, večina raziskav uporabi kar radialno, oziroma poenostavljeno radialno razdaljo med krivuljama. Idealno bi bilo, če bi za mero lahko uporabili Hausdorffovo razdaljo $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{b})$, ki je razdalja med dvema množicama točk

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_2, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\|_2\},$$

kjer $\|\cdot\|_2$ označuje evklidsko normo. Znano je, da je Hausdorffova razdalja računsko nesprejemljiva, celo njena diskretna različica ni uporabna, saj je časovne zahtevnosti $O(mn)$, kjer je m število točk na eni krivulji, n pa na drugi. Alternativa je torej že prej omenjena radialna razdalja, ki je definirana kot

$$d_r(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \max_{t \in [0,1]} |\epsilon(t)|,$$

kjer je $\epsilon(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} - 1 = \|\mathbf{b}(t)\|_2 - 1$ funkcija napake. Jasno je $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \leq d_r(\mathbf{c}, \mathbf{b})$. Za aproksimacijo krožnega loka pri nekaterih dodatnih pogojih ([11]) velja, da je $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = d_r(\mathbf{c}, \mathbf{b})$. Maksimalna razdalja je dosežena pri nekem parametru t , kjer je $\epsilon'(t) = 0$, ali na robu.

Za potrebe naslednje leme definirajmo sedaj preslikavo argumenta \arg .

Definicija 1.1 Naj bo $z = |z|e^{i\psi}$, $z \neq 0$, $\psi \in (-\pi, \pi]$. Potem je $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ dana s predpisom $\arg(z) = \psi$.

Lema 1.2 (Jaklič, Kozak, 2017 [11]) Naj bo $\mathbf{b} = (x, y)^\top : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrično podana aproksimacija krožnega loka \mathbf{c} , za katero je preslikava argumenta

$$\arg(x + iy) : [0, 1] \rightarrow [-\varphi, \varphi]$$

surjektivna (takšnim aproksimacijam pravimo dopustne aproksimacije). Tedaj je $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = d_r(\mathbf{c}, \mathbf{b})$.

Dokaz. Z uporabo nekaterih standardnih ocen pridemo do

$$\begin{aligned} d_H(\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= \max\left\{ \sup_{\psi \in [-\varphi, \varphi]} \inf_{t \in [0,1]} \|\mathbf{c}(\psi) - \mathbf{b}(t)\|_2, \sup_{t \in [0,1]} \inf_{\psi \in [-\varphi, \varphi]} \|\mathbf{c}(\psi) - \mathbf{b}(t)\|_2 \right\} \\ &= \max\left\{ \max_{\psi \in [-\varphi, \varphi]} \min_{t \in [0,1]} \|\mathbf{c}(\psi) - \mathbf{b}(t)\|_2, \max_{t \in [0,1]} \min_{\psi \in [-\varphi, \varphi]} \|\mathbf{c}(\psi) - \mathbf{b}(t)\|_2 \right\} \\ &\geq \max_{t \in [0,1]} \min_{\psi \in [-\varphi, \varphi]} \|\mathbf{c}(\psi) - \mathbf{b}(t)\|_2 \\ &= \max_{t \in [0,1]} \|\mathbf{c}(\arg(x(t) + iy(t))) - \mathbf{b}(t)\|_2 \\ &= d_r(\mathbf{c}, \mathbf{b}), \end{aligned}$$

saj nam preslikava argumenta določa najbližjo točko na krožnem loku za poljuben parameter t . Ker velja tudi $d_H(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \leq d_r(\mathbf{c}, \mathbf{b})$, torej velja enakost. ■

Namesto ϵ se običajno uporablja poenostavljena različica

$$r(t) = \|\mathbf{b}(t)\|_2^2 - 1 = x^2(t) + y^2(t) - 1. \quad (1.3)$$

Ker je

$$r = \epsilon(\epsilon + 2) = 2\epsilon + \epsilon^2,$$

je jasno, da imata ϵ in r enake lokacije lokalnih ekstremov in ničel. Za ničle je jasno, saj je $\epsilon + 2 \geq 1$, za ekstreme se vidi iz

$$r' = \epsilon'(\epsilon + 2) + \epsilon'\epsilon = 2\epsilon'(\epsilon + 1),$$

saj je $\epsilon + 1 \geq 0$, enačaj pa bi bil dosežen le, če bi bila x in y ničelna polinoma. Tu in skozi celotno disertacijo črtica ($'$) pomeni odvod po parametru.

Za aproksimacije blizu krožnega loka, to je za majhne ϵ , se vidi še, da sta napaki istega velikostnega reda, saj je $r \approx 2\epsilon$.

V primeru aproksimacije s polinomsko krivuljo stopnje največ n bomo namesto oznake r uporabili oznako r_{2n} , saj $2n$ označuje maksimalno stopnjo polinoma napake r .

Kot smo omenili že v uvodu, se bomo večinoma ukvarjali z geometrijsko zveznostjo krivulj, zato za začetek podajmo definicijo, kaj točno to sploh je.

Definicija 1.3 Naj bosta $\mathbf{f}_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^d$, $j = 0, 1$, vsaj k -krat zvezno odvedljivi regularni parametrično podani krivulji. Privzemimo, da je $\mathbf{p} := \mathbf{f}_0(\sigma) = \mathbf{f}_1(\tau)$. Krivulji sta v točki \mathbf{p} geometrijsko zvezni reda k (G^k zvezni), če obstaja regularna gladka bijektivna reparametrizacija $\rho : [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon] \rightarrow [\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon]$, $\rho(\tau) = \sigma$, da je $\rho' > 0$ in velja

$$\frac{d^\ell \mathbf{f}_1}{du^\ell}(\tau) = \frac{d^\ell (\mathbf{f}_0 \circ \rho)}{d\sigma^\ell}(\tau), \quad \ell = 1, 2, \dots, k.$$

Zgornji definiciji je ekvivalentna naslednja.

Definicija 1.4 Naj bosta $\mathbf{f}_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^d$, $j = 0, 1$, vsaj k -krat zvezno odvedljivi regularni parametrično podani krivulji. Privzemimo, da je $\mathbf{p} := \mathbf{f}_0(\sigma) = \mathbf{f}_1(\tau)$. Krivulji sta v točki \mathbf{p} geometrijsko zvezni reda k (G^k zvezni), če obstaja spodnje trikotna matrika $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k,k}$, da velja

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{f}_1}{du}(\tau) \\ \frac{d^2\mathbf{f}_1}{du^2}(\tau) \\ \vdots \\ \frac{d^k\mathbf{f}_1}{du^k}(\tau) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{f}_0}{d\sigma}(\sigma) \\ \frac{d^2\mathbf{f}_0}{d\sigma^2}(\sigma) \\ \vdots \\ \frac{d^k\mathbf{f}_0}{d\sigma^k}(\sigma) \end{bmatrix}$$

kjer je

$$\beta_{ii} = \rho'(\tau)^i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Matriki B rečemo povezovalna matrika, elemente pa se dobi po Faà di Brunovih formulah za odvod sestavljene funkcije.

Definicija 1.5 Za vektorja $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ je planarni vektorski produkt \times definiran s predpisom $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

Definicija 1.6 Predznačena ukrivljenost κ regularne ravninske krivulje $\mathbf{r} = (x, y)^\top$ je definirana kot

$$\kappa = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

kjer je \times standardni planarni vektorski produkt. Ekvivalentno je $|\kappa| = \frac{1}{\rho}$, kjer je ρ polmer pritisnjene krožnice na krivuljo v dani točki.

Kot smo navedli že v uvodu, se največkrat uporabljata G^1 in G^2 zveznost, saj že s tem dosežemo vizualno gladkost krivulje. Geometrijska zveznost reda ena nam zagotavlja zveznost enotske tangente, kar se vidi iz

$$\frac{d\mathbf{f}_1}{du}(\tau) = \frac{d(\mathbf{f}_0 \circ \rho)}{du}(\tau) = \rho'(\tau) \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma),$$

saj je $\rho' > 0$ po definiciji, zato sta enotska tangentna vektorja na \mathbf{f}_0 in \mathbf{f}_1 v točki \mathbf{p} enaka. Geometrijska zveznost reda dva pa poleg zveznosti enotske tangente zagotavlja še zveznost fleksijske ukrivljenosti. Iz definicije dobimo

$$\frac{d^2\mathbf{f}_1}{du^2}(\tau) = \frac{d^2(\mathbf{f}_0 \circ \rho)}{du^2}(\tau) = \rho'(\tau)^2 \frac{d^2\mathbf{f}_0}{dv^2}(\sigma) + \rho''(\tau) \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma).$$

Naj κ_{f_j} označuje ukrivljenost krivulje \mathbf{f}_j , $j = 0, 1$. Tedaj po zgornjih izpeljavah velja

$$\begin{aligned} \kappa_{f_1}(\tau) &= \frac{\frac{d\mathbf{f}_1}{du}(\tau) \times \frac{d^2\mathbf{f}_1}{du^2}(\tau)}{\left\| \frac{d\mathbf{f}_1}{du}(\tau) \right\|^3} \\ &= \frac{\rho'(\tau) \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma) \times (\rho'(\tau)^2 \frac{d^2\mathbf{f}_0}{dv^2}(\sigma) + \rho''(\tau) \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma))}{\left\| \rho'(\tau) \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma) \right\|^3} \\ &= \frac{\rho'(\tau)^3 \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma) \times \frac{d^2\mathbf{f}_0}{dv^2}(\sigma) + \rho'(\tau) \rho''(\tau) \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma) \times \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma)}{\rho'(\tau)^3 \left\| \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma) \right\|^3} \\ &= \frac{\frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma) \times \frac{d^2\mathbf{f}_0}{dv^2}(\sigma)}{\left\| \frac{d\mathbf{f}_0}{dv}(\sigma) \right\|^3} \\ &= \kappa_{f_0}(\sigma). \end{aligned}$$

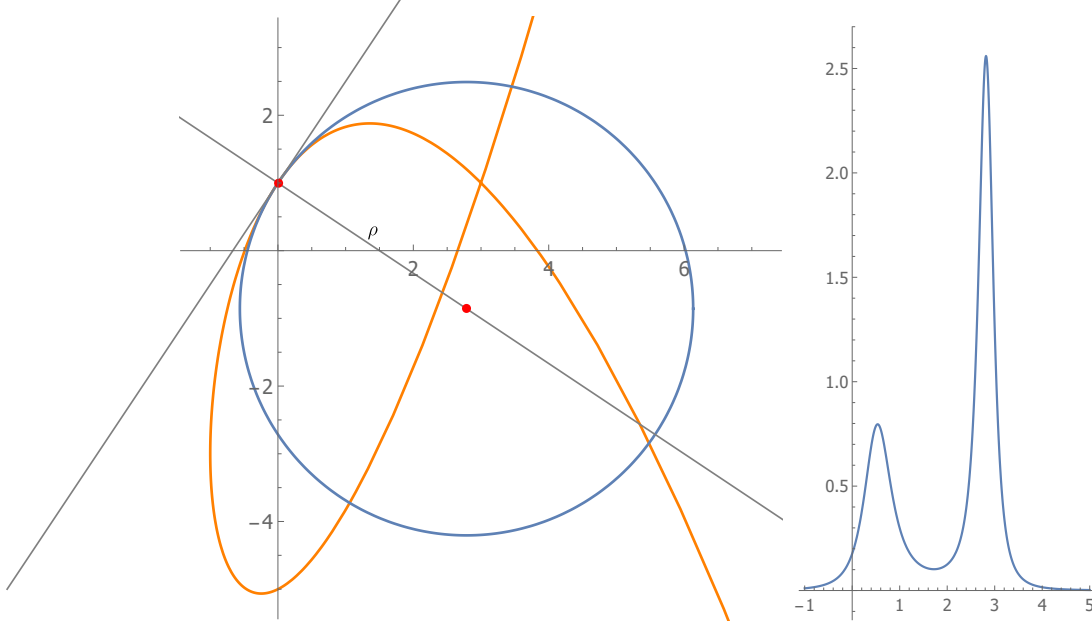
Če torej aproksimant G^k zvezno aproksimira dano krivuljo, pravimo, da imata krivulji geometrijski kontakt reda k .

Spodnja lema podaja enega izmed ključnih rezultatov, ki ga bomo uporabljali skozi celotno disertacijo.

Lema 1.7 (Ahn, Kim, 1997, [2], Ahn, Kim, 2007, [15]) *Aproksimant \mathbf{b} ima geometrijski kontakt reda m s krožnim lokom \mathbf{c} pri $t = t_0$ natanko tedaj, ko ima alternativna funkcija napake r_{2n} ničlo večkratnosti $m + 1$ pri $t = t_0$.*

Opomba 1.8 Ko imamo podano konkretno parametrizacijo, moramo za G^1 zveznost preveriti še ujemanje smeri tangent.

Druga možna mera za primerjavo krožnega loka \mathbf{c} in njegove aproksimacije \mathbf{b} je primerjava ukrivljenosti.



Slika 1.1: Zgled pritisnjene krožnice na krivuljo $\mathbf{r}(t) = ((t-2)^2-1, (t-4)(t-1)t+1)^\top$ pri $t = 1$ (levo) in graf ukrivljenosti iste krivulje (desno).

Ker je ukrivljenost enotskega krožnega loka \mathbf{c} identično enaka 1, lahko definiramo predznačeno funkcijo napake ukrivljenosti kot

$$e_\kappa = \kappa - 1 = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^3} - 1. \quad (1.4)$$

Kot v primeru radialne napake, lahko tudi tukaj definiramo alternativno funkcijo napake ukrivljenosti

$$e := e_{\kappa^2} = \kappa^2 - 1 = e_\kappa(e_\kappa + 2) = 2e_\kappa + e_\kappa^2 = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}{\|\mathbf{r}'\|^6} - 1.$$

Slednja je običajno primernejša za uporabo, saj ne vsebuje kvadratnih korenov, hkrati pa veljajo enake lepe lastnosti kot v primeru alternativne radialne napake, enake lokacije ekstremov in ničel ter isti velikostni red napake kot pri e_κ .

V naslednjem poglavju si bomo tako najprej ogledali še neraziskan primer G^1 aproksimacije stopnje štiri glede na radialno napako in uporabo te metode za aproksimacijo stožnic. Sledi poglavje namenjeno minimizaciji napake ukrivljenosti krožnega loka. Poleg kubičnih polinomskih aproksimacij je predstavljena še uporaba kvadratičnih in kubičnih dvolokov. Naslednje poglavje opisuje najboljše aproksimacije krožnega loka glede na radialno napako s polinomskimi krivuljami nizkih stopenj, ki v robnih točkah zadoščajo različnim pogojem geometrijske zveznosti. Zadnje poglavje podaja zaključke in nakazuje možnosti za nadaljnjo raziskovalno usmeritev.

Poglavje 2

Aproksimacija krožnih lokov z G^1 zveznimi polinomskimi krivuljami stopnje štiri

Geometrijsko zvezno aproksimacijo krožnega loka reda ena (G^1) je možno konstruirati že s polinomsko krivuljo stopnje dve, vendar je takšna aproksimacija enolično določena. Poglejmo si kakšno aproksimacijo dobimo.

Naj bodo \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 in \mathbf{b}_2 kontrolne točke aproksimacijske krivulje. Če želimo interpolirati robni točki, mora veljati

$$\mathbf{b}_0 = (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \quad \mathbf{b}_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top.$$

Zaradi pogoja G^1 zveznosti je sredinska točka \mathbf{b}_1 enolično določena kot presečišče tangent na krivuljo iz robnih točk \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_2 za kot $\varphi < \pi/2$. Zaradi simetrije velja, da srednja kontrolna točka leži na abscisni osi in je oblike $\mathbf{b}_1 = (x_1, 0)^\top$. Ker leži v smeri tangente na točko \mathbf{b}_0 , je oblike

$$\mathbf{b}_1 = (\cos \varphi + d \sin \varphi, -\sin \varphi + d \cos \varphi)^\top, \quad d \geq 0,$$

od koder dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \varphi + d \sin \varphi, \\ 0 &= -\sin \varphi + d \cos \varphi \end{aligned}$$

z rešitvijo

$$d = \tan \varphi, \quad x_1 = 1/\cos \varphi. \tag{2.1}$$

Pri stopnji dve smo torej brez dodatnih parametrov svobode, ki so pomembni za spreminjanje izgleda krivulje. Res je sicer, da nam že G^1 aproksimacija omogoča zvezno nadaljevanje preko robne točke, tj. C^1 zlepek, saj sta zaradi simetrije tudi tangenti v stični točki enaki (ne le enotski tangenti), vendar je parametre možno uporabiti za dodatno zmanjšanje radialne napake, za zmanjšanje napake ukrivljenosti,

za nadzor ločne dolžine aproksimacijske krivulje ... Pri aproksimaciji s polinomskimi krivuljami stopnje tri tako dobimo en dodaten parameter. To je najpreprostejši netrivialni primer, zato so vsi "zanimivi" primeri že raziskani [9, 10]. Objavljenih je bilo tudi že nekaj člankov o aproksimaciji krožnega loka s polinomsko parametrično krivuljo stopnje štiri [2, 10, 15, 16]. V tem poglavju bomo poiskali in pokazali obstoj še ene izmed G^1 aproksimacij krožnega loka stopnje štiri. Obravnavali bomo posplošitev metode iz [15] in poiskali aproksimacijo z manjšo radialno napako. Strnjeni rezultati tega poglavja so objavljeni v [19].

2.1 Definicija problema in pripadajoči sistem nelinearnih enačb

Bézierjeva krivulja stopnje štiri ima pet kontrolnih točk. Ker iščemo G^1 aproksimacijo krožnega loka \mathbf{c} , ki je seveda tudi G^0 zvezna, morata prva in zadnja kontrolna točka interpolirati robni točki krožnega loka \mathbf{c} , zato je

$$\mathbf{b}_0 = (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \quad \mathbf{b}_4 = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top.$$

Da zadostimo pogoju G^1 zveznosti, morata kontrolni točki \mathbf{b}_1 in \mathbf{b}_3 ležati v smeri tangente na krivuljo v robnih točkah in tako zadoščati zvezam

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top + d_1(\sin \varphi, \cos \varphi)^\top = (\cos \varphi + d_1 \sin \varphi, -\sin \varphi + d_1 \cos \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_3 &= (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top + d_3(\sin \varphi, -\cos \varphi)^\top = (\cos \varphi + d_3 \sin \varphi, \sin \varphi - d_3 \cos \varphi)^\top, \end{aligned}$$

za neka $d_1, d_3 \geq 0$.

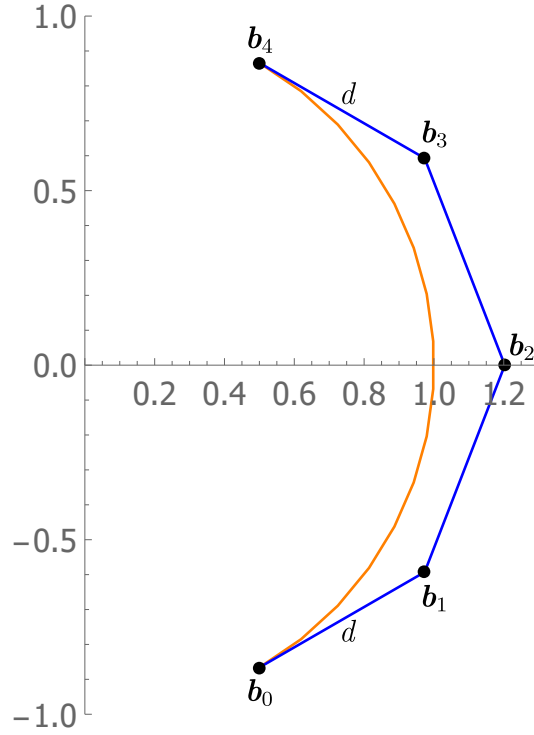
Iz omenjene simetrije krožnega loka glede na abscisno os sledi, da mora kontrolna točka \mathbf{b}_2 ležati na abscisni osi, poleg tega morata biti tudi točki \mathbf{b}_1 in \mathbf{b}_3 simetrični glede na abscisno os, kar pomeni, da je $d_1 = d_3 = d$. Od tod dobimo naslednjo izražavo kontrolnih točk

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_1 &= (\cos \varphi + d \sin \varphi, -\sin \varphi + d \cos \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_2 &= (x_2, 0)^\top, \\ \mathbf{b}_3 &= (\cos \varphi + d \sin \varphi, \sin \varphi - d \cos \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_4 &= (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top, \end{aligned}$$

kjer sta $d, x_2 \geq 0$, neznana prosta parametra. V primeru, ko gre $\varphi \rightarrow 0$, je očitno, da morata iti $d \rightarrow 0$ in $x_2 \rightarrow 1$. Kot bomo videli v nadaljevanju, lahko, za smiselne aproksimacije, parametra omejimo na precej majhen interval. Izkaže se, da je $d \in [0, 1]$ in $x_2 \in [1, 2]$.

Iz enačbe (1.3) dobimo

$$\begin{aligned} r_8(t) &= t^2(1-t)^2 (4(-3+4d^2+3x_2 \cos \varphi) \\ &\quad + 8t(1-t)(-1-8d^2+\cos(2\varphi)+6dx_2 \sin \varphi+d \sin(2\varphi)) \\ &\quad + 4t^2(1-t)^2(-3x_2+3 \cos \varphi+4d \sin \varphi)^2), \end{aligned} \quad (2.2)$$



Slika 2.1: Kontrolne točke (črno), kontrolni poligon (modro) in primer aproksimacije za kot $\varphi = \pi/3$ (oranžno).

oziroma

$$r_8(t) = t^2(1-t)^2 P_4(t),$$

kjer je P_4 polinom stopnje štiri oblike

$$\begin{aligned} P_4(t) = & (4(-3 + 4d^2 + 3x_2 \cos \varphi) \\ & + 8t(1-t)(-1 - 8d^2 + \cos(2\varphi) + 6dx_2 \sin \varphi + d \sin(2\varphi)) \\ & + 4t^2(1-t)^2(-3x_2 + 3 \cos \varphi + 4d \sin \varphi)^2). \end{aligned}$$

Tabela 2.1 prikazuje vse kvalitativno različne oblike polinoma P_4 , ki se pojavljajo v literaturi. Prva vrstica predstavlja G^3 aproksimacijo, sledita dve G^2 aproksimaciji, enostranska in optimalna glede na napako r_8 . Preostale metode predstavljajo G^1 aproksimacije. Opazimo, da je konstanta v asimptotičnem razvoju pri φ^8 tem manjša, čim več presečišč med aproksimantom in krožnim lokom imamo. Seveda na

velikost konstante vpliva tudi položaj presečišč. Vrednosti parametrov v tabeli so

$$\begin{aligned} t_0 &\approx 0,361562, \\ t_1 &= 1 - \sqrt{2}/2 \approx 0,292893, \\ t_2 &= \frac{3 - \sqrt{2\left(3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6(-1 + \sqrt{3})}\right)}}{6} \approx 0,198920, \\ t_3 &\approx 0,186439, \\ t_4 &\approx 0,390292. \end{aligned}$$

ničle P_4	konstanta pri φ^8	reference
0, 0, 1, 1	4,59957e-4	[2]
0, 1/2, 1/2, 1	-4,85111e-5	[2]
0, t_0 , $1 - t_0$, 1		[10]
1/2, 1/2, 1/2, 1/2	2,87473e-5	[15]
t_1 , t_1 , $1 - t_1$, $1 - t_1$	1,35399e-5	to poglavje oz. [19]
1/4, 1/2, 1/2, 3/4	1,55295e-5	[21]
1/5, 1/2, 1/2, 4/5	1,07131e-5	[24]
t_2 , 1/2, 1/2, $1 - t_2$	$\pm 1,06090e-5$	[16]
t_3 , t_4 , $1 - t_4$, $1 - t_3$		[23]

Tabela 2.1: Pregled vseh smiselnih polinomov P_4 , vodilni členi v asimptotičnem razvoju napake ter reference.

Aproksimacija, obravnavana v tem poglavju, je posplošitev rezultata iz [15]. Za r_8 namreč uporabimo splošnejšo obliko, namreč

$$r_8(t) = C t^2 (1-t)^2 (t-u_1)^2 (t-u_2)^2, \quad 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, \quad (2.3)$$

za neko konstanto C . Zaradi simetrije mora veljati $u_2 = 1 - u_1$. Če torej uporabimo $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$ pridemo do rezultata v [15].

Poiščimo sedaj ekstreme napake $|r_8|$, definirane z (2.3). To so $t = 0$, $t = u_1$, $t = u_2 = 1 - u_1$, $t = 1$ in

$$t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2u_1 + 2u_1^2} \right).$$

Prvi štirje ekstremi so lokalni minimumi, ostali so lokalni maksimumi. Po funkcijem skemu zgledu za iskanje najboljše aproksimacije, na najboljšo rešitev računamo tedaj, ko bodo vse maksimalne vrednosti enake, ko bo torej

$$r_8\left(\frac{1}{2}\right) = r_8\left(\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2u_1 + 2u_1^2} \right)\right),$$

oziroma

$$\frac{1}{256}C(1 - 2u_1)^4 = \frac{1}{16}C(-1 + u_1)^4u_1^4.$$

Od tu dobimo $u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ in še štiri kompleksne rešitve. Enolična rešitev, ki zadosti tudi pogoju $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ iz (2.3) je $u_1 = t_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sistem nelinearnih enačb za d in x_2 sedaj sledi iz

$$r_8 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \quad r'_8 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \quad (2.4)$$

od koder dobimo

$$\begin{aligned} & \left(102 - 72\sqrt{2} + (-34 + 24\sqrt{2}) \cos(2\varphi)\right) d^2 + \left(\frac{153}{4} - 27\sqrt{2}\right) x_2^2 + \\ & \quad \left((102\sqrt{2} - 144) \sin \varphi\right) d x_2 + \left((44 - 31\sqrt{2}) \sin(2\varphi)\right) d + \\ & \left(\frac{3}{2}(-45 + 32\sqrt{2}) \cos \varphi\right) x_2 + \frac{137}{8} - \frac{25\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{97}{8} - \frac{17\sqrt{2}}{2}\right) \cos(2\varphi) = 0, \\ & \left(656 - 464\sqrt{2} + 16(-17 + 12\sqrt{2}) \cos(2\varphi)\right) d^2 + \left(306 - 216\sqrt{2}\right) x_2^2 + \\ & \quad \left((-1068 + 756\sqrt{2}) \sin \varphi\right) d x_2 + \left(6(61 - 43\sqrt{2}) \sin(2\varphi)\right) d + \\ & \left(12(-48 + 34\sqrt{2}) \cos \varphi\right) x_2 + 159 - 114\sqrt{2} + (111 - 78\sqrt{2}) \cos(2\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Sistem enačb stopnje dve v dveh spremenljivkah lahko z uporabo Gröbnerjeve baze in eliminacije preoblikujemo v eno enačbo stopnje štiri. Eliminacija je postopek, s katerim želimo dobiti polinomske enačbe, ki vsebujejo kar se da malo različnih spremenljivk. Pri tem lahko delamo poljubne linearne kombinacije začetnih polinomov. Da se pokazati, da Gröbnerjeva baza vsebuje takšne polinome, če veljajo nekatere dodatne predpostavke. Množica polinomov je Gröbnerjeva baza natanko tedaj, ko so vsi vodilni produkti potenc linearnih kombinacij polinomov iz baze, produkti vsaj ene vodilne potence iz začetne množice polinomov. Za določitev vodilnega produkta potenc je potrebna neka urejenost produktov potenc. Če za urejenost vzamemo leksikografsko urejenost, pri kateri vsi produkti potenc s spremenljivkami, ki jih želimo eliminirati, pridejo na vrsto kasneje, kot produkti potenc spremenljivk, ki jih želimo obdržati, potem takšen polinom, ki vsebuje le željene produkte potenc, obstaja natanko tedaj, ko takšen element obstaja že v Gröbnerjevi bazi, dobljeni s to urejenostjo. Do ene enačbe lahko pridemo tudi z uporabo rezultante, vendar je rezultat ponavadi nekoliko slabši (daljši). Dobimo lahko tudi dodatne rešitve.

Z uporabo Gröbnerjeve baze in eliminacije v našem primeru pridemo do enačbe

stopnje štiri za d

$$\begin{aligned} & d^4 \left(952 - 672\sqrt{2} - 64(-17 + 12\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + (136 - 96\sqrt{2}) \cos(4\varphi) \right) + \\ & d^3 \left(-640 \sin(2\varphi) + 448\sqrt{2} \sin(2\varphi) - 160 \sin(4\varphi) + 112\sqrt{2} \sin(4\varphi) \right) + \\ & d^2 \left(110 - 88\sqrt{2} - 8 \cos(2\varphi) + (-38 + 24\sqrt{2}) \cos(4\varphi) \right) + \\ & d \left(-24 \sin(2\varphi) + 20\sqrt{2} \sin(2\varphi) - 4 \sin(4\varphi) + 6\sqrt{2} \sin(4\varphi) \right) + \\ & 5 - 2\sqrt{2} - 4 \cos(2\varphi) - \cos(4\varphi) + 2\sqrt{2} \cos(4\varphi) = 0, \end{aligned}$$

ali za x_2

$$\begin{aligned} & x_2^4 \left(648(-665857 + 470832\sqrt{2})(\cos \varphi)^2(3 + \cos(2\varphi)) \right) + \\ & x_2^3 \left(-432 \cos \varphi(-9073911 + 6416224\sqrt{2} + 8(-941664 + 665857\sqrt{2}) \right. \\ & \left. \cos(2\varphi) + (-665857 + 470832\sqrt{2}) \cos(4\varphi)) \right) + \\ & x_2^2 \left(9(-563209714 + 398249408\sqrt{2} + (-652840601 + 461628016\sqrt{2}) \right. \\ & \left. \cos(2\varphi) + 2(-60514583 + 42790272\sqrt{2}) \cos(4\varphi) + \right. \\ & \left. 7(-665857 + 470832\sqrt{2}) \cos(6\varphi)) \right) + \\ & x_2 \left(-12 \cos \varphi(6(-62623611 + 44281580\sqrt{2}) + \right. \\ & (-313018319 + 221337376\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + \\ & (-32992686 + 23329352\sqrt{2}) \cos(4\varphi) + \\ & \left. (-665857 + 470832\sqrt{2}) \cos(6\varphi)) \right) + \\ & \frac{1}{8}(-8372975915 + 5920588048\sqrt{2} + \\ & (-8643119012 + 6111608064\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + \\ & 12(-127702919 + 90299600\sqrt{2}) \cos(4\varphi) + \\ & (-86222044 + 60968192\sqrt{2}) \cos(6\varphi) + \\ & (-665857 + 470832\sqrt{2}) \cos(8\varphi)) = 0. \end{aligned}$$

Formalno bi lahko poiskali eksplisitno rešitev z uporabo Ferrarijeve metode. To je metoda za reševanje enačbe stopnje 4 v kompleksnem, pri čemer rešitev dobimo v zaključeni obliki. Pri tem postopku enačbo najprej normaliziramo (delimo z vodilnim koeficientom), nato s substitucijo parametra postavimo koeficient pri kubičnem členu na nič. Z vpeljavo dodatne spremenljivke enačbo preoblikujemo v razliko dveh popolnih kvadratov. Pri tem moramo rešiti enačbo stopnje tri. Iz popolnih kvadratov potem dobimo štiri rešitve, ki pa so za nadaljnjo analizo prekompleksne, zato se bomo posvetili samo dokazu obstoja dopustne realne rešitve, kar se še vedno izkaže za težko nalogo. Pomagamo si s homotopijo.

2.2 Homotopija

Dokazovanje obstoja rešitve sistema nelinearnih enačb je običajno precej težka naloga. Ena izmed metod, ki se pogosto izkaže za uspešno, je homotopija. Homotopija je zvezen prehod med dvema funkcijama f in g , ki slikata iz prostora X v prostor Y , $H : X \times [a, b] \rightarrow Y$, pri čemer je $\mathbf{H}(\cdot; a) = f$ in $\mathbf{H}(\cdot; b) = g$. Glavna ideja je torej povezati konkreten sistem enačb (takšnega, ki ga je preprosto rešiti) s sistemom, ki ga želimo rešiti. Če to naredimo s pomočjo homotopije vemo, da se določene lastnosti ohranijo, so invariantne. Ena izmed takšnih je Brouwerjeva stopnja preslikave, ki nam lahko poda tudi informacijo o številu rešitev sistema enačb.

Definicija 2.1 Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ omejeno območje in $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka preslikava. Za poljuben $\mathbf{p} \notin \partial D$ definiramo Brouwerjevo stopnjo preslikave s predpisom

$$\deg(f, D, \mathbf{p}) = \sum_{f(\mathbf{x})=\mathbf{p}} \operatorname{sgn}|J_f(\mathbf{x})|,$$

$$\text{kjer je } |J_f| \text{ Jacobian preslikave } f \text{ in } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Izrek 2.2 (Berger, 1977, [3]) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ omejeno območje in naj bo $\mathbf{H} : D \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava za katero enačba $\mathbf{H}(\mathbf{x}; t) = \mathbf{p}$ nima rešitve za $x \in \partial D$ in poljuben $t \in [a, b]$. Tedaj je Brouwerjeva stopnja preslikave $\deg(\mathbf{H}(\mathbf{x}; t), D, \mathbf{p})$ konstanta, neodvisna od $t \in [a, b]$.

Če s pomočjo homotopije reševanje sistema prevedemo na reševanje nekega drugega sistema, ki ima samo eno rešitev in pri njej neničelno vrednost Jacobiana, potem po zgornjem izreku obstaja vsaj ena rešitev začetnega sistema in vseh sistemov vmes.

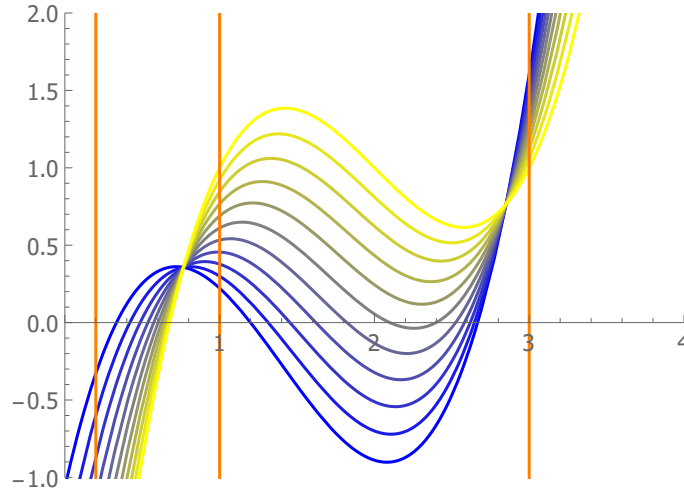
Oglejmo si preprost primer. Denimo, da imamo dva kubična polinoma

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x - 1)(x - 2)(x - 3), \\ g(x) &= (x - 1/3)(x - 6/5)(x - 8/3). \end{aligned}$$

Homotopijo po parametru t definiramo kot $\mathbf{H}_{f,g} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $\mathbf{H}_{f,g}(x; t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. Vidimo, da se v odvisnosti od območja, s katerega izbiramo parameter x , npr. $D_1 = [1/5, 1]$ ali $D_2 = [1, 3]$, število ničel enačbe $\mathbf{H}_{f,g} = 0$ lahko spremeni za večkratnik števila 2, čeprav na robu območja D_2 dejansko nimamo nobene ničle za $t \in [0, 1]$. Če torej obstaja liho število rešitev, potem obstaja vsaj ena rešitev za poljuben $t \in [0, 1]$.

Oglejmo si sedaj rešitve prvotnega sistema nelinearnih enačb (2.4). Gledamo jih lahko kot množico ničel preslikave

$$\mathbf{H} : [0, \infty)^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$



Slika 2.2: Primer uporabe homotopije med preslikavama f (zgornja rumena) in g (spodnja modra) ter meje območij D_1 in D_2 (oranžno), ki ne vsebujejo nobene ničle za $t \in [0, 1]$.

kjer je $I := [\varepsilon, \pi/2]$ in $0 < \varepsilon < \pi/2$. Natančneje, \mathbf{H} je definirana kot

$$\mathbf{H}(x_2, d; \varphi) = \left(r_8 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), r_8' \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^\top.$$

Numerični primeri kažejo, da ima lahko sistem $\mathbf{H}(x_2, d; \varphi) = \mathbf{0}$ več rešitev, od katerih nekatere ne izpolnijo zahtev $x_2, d \geq 0$. Zato moramo omejiti \mathbf{H} na $D \times I$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$ zaprto območje (glej sliko 2.3) definirano z

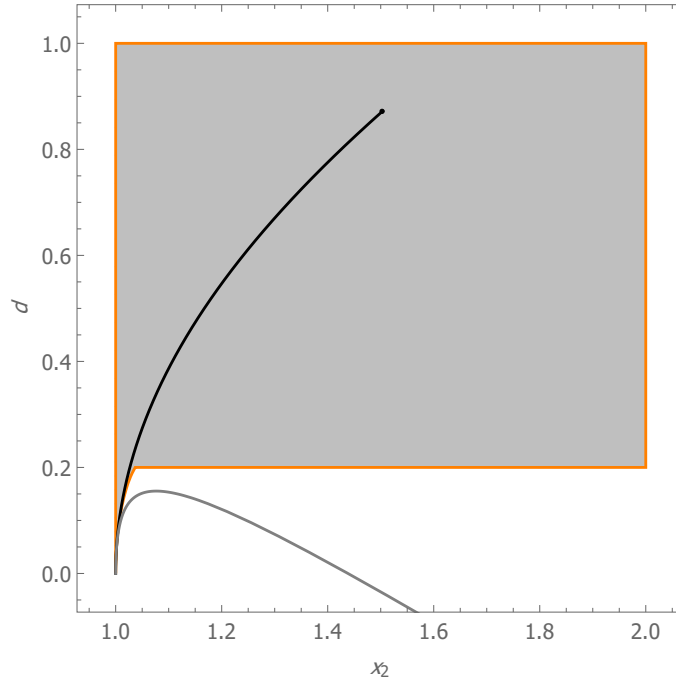
$$\begin{aligned} d &\leq 1, \\ 1 &\leq x_2 \leq 2, \\ d &\geq \frac{1}{5}, \text{ za } x_2 \geq x_m := 1 + \frac{1}{3} \left(\cos^2 \left(\frac{1}{3} \left(\pi + \arctan \left(\sqrt{\frac{7}{18}} \right) \right) \right) \right) \approx 1,03660, \\ d &\geq \left(-2x_2 + \frac{5}{2} \right) \sqrt{6(x_2 - 1)}, \text{ za } x_2 < x_m. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Vrednost x_m dobimo kot presečišče $d = (-2x_2 + \frac{5}{2})\sqrt{6(x_2 - 1)}$ in premice $d = \frac{1}{5}$, pri čemer dobimo prvo zvezo iz asimptotične analize, ki sledi v nadaljevanju. Krivuljo, ki ločuje obe rešitvi, dobimo kot parametrično podano krivuljo, ki ima za člene aritmetično povprečje členov obeh rešitev do stopnje φ^2 . Natančen razvoj obeh vej je predstavljen v poglavju 2.3.

Dokazali bomo, da ima sistem nelinearnih enačb (2.4), oziroma

$$\mathbf{H}(x_2, d; \varphi) = \mathbf{0}, \tag{2.6}$$

vsaj eno dopustno rešitev v $D \times I$. Po izreku 2.2 je dovolj pokazati



Slika 2.3: Območje D z dvema vejama rešitev za (x_2, d) za $\varphi \in I$. Črna predstavlja dopustno rešitev, siva pa ne obstaja vedno (za vse $\varphi \in I$) in ima asimptotično slabše aproksimacijske lastnosti.

- Sistem (2.6) ima le eno rešitev v D za nek kot iz I , recimo $\varphi = \pi/2$. Jacobian pri tej rešitvi je neničeln.
- Preslikava \mathbf{H} je neničelna na ∂D (rob območja D) za vsak $\varphi \in I$.

Tedaj velja, da ima sistem (2.6) liho število rešitev za poljuben $\varphi \in I$.

Za dokaz a) si pogledjmo sistem (2.4) pri $\varphi = \pi/2$

$$\begin{aligned} 5 - 4\sqrt{2} + (136 - 96\sqrt{2})d^2 - 6(24 - 17\sqrt{2})dx_2 + (153/4 - 27\sqrt{2})x_2^2 &= 0, \\ 48 - 36\sqrt{2} + (928 - 656\sqrt{2})d^2 - 12(89 - 63\sqrt{2})dx_2 + 6(51 - 36\sqrt{2})x_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

ki se z uporabo Gröbnerjeve baze ter eliminacije parametra x_2 poenostavi v

$$(874 - 618\sqrt{2})d^2 + 41 - 29\sqrt{2} = 0,$$

ter ima enolično rešitev v D , tj.,

$$d = \sqrt{\frac{5 + 4\sqrt{2}}{14}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{52 + 64\sqrt{2}}{63}}.$$

Jacobian preslikave je enak

$$-6 \left(32 \left(169\sqrt{2} - 239 \right) d^2 + 24 \left(338 - 239\sqrt{2} \right) dx_2 + 9 \left(169\sqrt{2} - 239 \right) x_2^2 \right),$$

torej pri zgornji rešitvi $24(53\sqrt{2} - 75) \approx -1,1204 \neq 0$.

Za dokaz b) moramo analizirati obnašanje \mathbf{H} na robu ∂D . Rob je sestavljen iz petih delov, kot je prikazano na sliki 2.3. Najprej si pogledjmo primer, ko je $d = 1$. Pokazati moramo, da je $\mathbf{H}(x_2, 1; \varphi) \neq \mathbf{0}$, za $(x_2, 1) \in D$ in $\varphi \in I$. Sistem enačb (2.6) se prepiše v

$$(27 - 18\sqrt{2})x_2^2 + (6(-7 + 6\sqrt{2}) \cos \varphi + (72\sqrt{2} - 96) \sin \varphi)x_2 + \left(-\frac{29}{2} + 11\sqrt{2}\right) \cos(2\varphi) - 4(-8 + 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) + \frac{155}{2} - 61\sqrt{2} = 0 \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{27}{2} - 9\sqrt{2}\right)x_2^2 + (6(-4 + 3\sqrt{2}) \cos \varphi + (33\sqrt{2} - 45) \sin \varphi)x_2 + \left(-\frac{27}{4} + 5\sqrt{2}\right) \cos(2\varphi) + \frac{3}{2}(11 - 7\sqrt{2}) \sin(2\varphi) + \frac{133}{4} - 26\sqrt{2} = 0. \quad (2.8)$$

Iz oblike grafa se vidi, da ima enačba (2.7) samo eno pozitivno rešitev za x_2 kot funkcijo φ , saj je $27 - 18\sqrt{2} > 0$ in

$$\left(-\frac{29}{2} + 11\sqrt{2}\right) \cos(2\varphi) - 4(-8 + 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) + \frac{155}{2} - 61\sqrt{2} < 0.$$

Prva neenakost je jasna, druga sledi iz

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} \left(-\frac{29}{2} + 11\sqrt{2}\right) \cos(2\varphi) - 4(-8 + 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) &\leq \\ \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} \left(-\frac{29}{2} + 11\sqrt{2}\right) \cos(2\varphi) + \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} -4(-8 + 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) &\leq \\ \left(-\frac{29}{2} + 11\sqrt{2}\right) + (-4(-8 + 5\sqrt{2})) &= \\ \frac{35}{2} - 9\sqrt{2} &< \\ -\frac{155}{2} + 61\sqrt{2}. & \end{aligned}$$

Analogno ima tudi enačba (2.8) samo eno pozitivno rešitev za x_2 kot funkcijo φ , saj je $\frac{27}{2} - 9\sqrt{2} > 0$ in

$$\left(-\frac{27}{4} + 5\sqrt{2}\right) \cos(2\varphi) + \frac{3}{2}(11 - 7\sqrt{2}) \sin(2\varphi) + \frac{133}{4} - 26\sqrt{2} < 0.$$

Pozitivna rešitev za x_2 , ki jo dobimo iz enačbe (2.7), je

$$x_2 = \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \left((7 - 6\sqrt{2}) \cos \varphi + 4(4 - 3\sqrt{2}) \sin \varphi + \sqrt{-36 + 26\sqrt{2} + (-31 + 22\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 2(10 - 7\sqrt{2}) \sin(2\varphi)} \right),$$

pozitivna rešitev za x_2 , ki jo dobimo iz enačbe (2.8), pa je

$$x_2 = \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \left((8 - 6\sqrt{2}) \cos \varphi + (15 - 11\sqrt{2}) \sin \varphi + \sqrt{-106 + 76\sqrt{2} + (-85 + 60\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + (69 - 49\sqrt{2}) \sin(2\varphi)} \right).$$

Pokazati moramo torej, da ne obstaja takšen $\varphi \in I$, za katerega bi se ti dve rešitvi ujemali. Uporabimo Gröbnerjevo bazo ter eliminacijo parametra x_2 na enačbah (2.7) in (2.8), kar nam da

$$g(\varphi) = 1067 - 762\sqrt{2} + (1076 - 768\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + (97 - 70\sqrt{2}) \cos(4\varphi) + (-664 + 468\sqrt{2}) \sin(2\varphi) + 2(-82 + 59\sqrt{2}) \sin(4\varphi).$$

Videti moramo, da ne obstaja takšen $\varphi \in I$, za katerega je $g(\varphi) = 0$.

Pokažimo, da je $g(\varphi) < 0$ za vsak $\varphi \in I$. Pišimo $g(\varphi) = g_1(\varphi) + g_2(\varphi)$, kjer je

$$g_1(\varphi) = 1067 - 762\sqrt{2} + (1076 - 768\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + (-664 + 468\sqrt{2}) \sin(2\varphi),$$

$$g_2(\varphi) = (97 - 70\sqrt{2}) \cos(4\varphi) + 2(-82 + 59\sqrt{2}) \sin(4\varphi).$$

Preprosto se pokaže, da je g_1 negativna na intervalu I , da ima lokalni minimum pri

$$\varphi_m = -\frac{1}{2} \left(\arctan \frac{274 - 399\sqrt{2}}{1367} \right) \approx 1,04617 \cdot 10^{-1}$$

ter da je padajoča funkcija na $[0, \varphi_m]$ in naraščajoča na $[\varphi_m, \frac{\pi}{2}]$. Po drugi strani je g_2 nenegativna le na $J := [\varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{4}]$, kjer je

$$\varphi_0 = \left(\arctan \frac{18 + \sqrt{2}}{28} \right) / 4 \approx 1,51565 \cdot 10^{-1}.$$

Ker je g_1 naraščajoča na $J \subseteq [\varphi_m, \frac{\pi}{2}]$, ima maksimum pri $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{4}$ in je

$$\max_{\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \frac{\pi}{4}} g_2(\varphi) = g_2\left(\left(\arctan \frac{2(-18 + \sqrt{2})}{23}\right)/4 + \frac{\pi}{4}\right) < -g_1\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right)$$

sledi, da je $g < 0$ na I , kar smo želeli pokazati.

Pokažimo sedaj, da tudi na robu območja D , kjer je $d = \frac{1}{5}$ in $x_2 \geq x_m$, ne obstaja rešitev sistema (2.6) za $\varphi \in I$.

Sistem enačb se v tem primeru glasi

$$(27 - 18\sqrt{2})x_2^2 + (6(-7 + 6\sqrt{2}) \cos \varphi + \frac{24}{5}(-4 + 3\sqrt{2}) \sin \varphi)x_2 + \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{50} \left(419 - 746\sqrt{2} + (427 - 218\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 40(8 - 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) \right) = 0,$$

$$\left(\frac{27}{2} - 9\sqrt{2} \right)x_2^2 + (6(-4 + 3\sqrt{2}) \cos \varphi + (-9 + \frac{33}{5}\sqrt{2}) \sin \varphi)x_2 + \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{100} \left((637 - 680\sqrt{2} + (477 - 268\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 30(11 - 7\sqrt{2}) \sin(2\varphi) \right) = 0.$$

Enačba (2.9) ima samo eno pozitivno rešitev za x_2 kot funkcija φ , ker je $27 - 18\sqrt{2} > 0$ in

$$\frac{1}{50} \left(419 - 746\sqrt{2} + (427 - 218\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 40(8 - 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) \right) < 0.$$

Prva neenakost je jasna, druga sledi iz

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} (427 - 218\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 40(8 - 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) &\leq \\ \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} (427 - 218\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} 40(8 - 5\sqrt{2}) \sin(2\varphi) &\leq \\ (427 - 218\sqrt{2}) + 40(8 - 5\sqrt{2}) &= \\ 747 - 418\sqrt{2} &< \\ -419 + 746\sqrt{2}. & \end{aligned}$$

Analogno ima tudi enačba (2.10) samo eno pozitivno rešitev za x_2 kot funkcija φ , saj je $\frac{27}{2} - 9\sqrt{2} > 0$ in

$$\frac{1}{100} \left((637 - 680\sqrt{2} + (477 - 268\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 30(11 - 7\sqrt{2}) \sin(2\varphi) \right) < 0.$$

Pozitivna rešitev za x_2 , ki jo dobimo iz enačbe (2.9), je

$$x_2 = \frac{1}{45 - 30\sqrt{2}} \left(5(7 - 6\sqrt{2}) \cos \varphi + 4(4 - 3\sqrt{2}) \sin \varphi + \sqrt{-84 + 74\sqrt{2} + (41 - 26\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 10(10 - 7\sqrt{2}) \sin(2\varphi)} \right),$$

pozitivna rešitev za x_2 , ki jo dobimo iz enačbe (2.10), pa je

$$x_2 = \frac{1}{-45 + 30\sqrt{2}} \left(10(4 - 3\sqrt{2}) \cos \varphi + (15 - 11\sqrt{2}) \sin \varphi + \sqrt{-382 + 292\sqrt{2} + (215 - 156\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 5(69 - 49\sqrt{2}) \sin(2\varphi)} \right).$$

Pokazati moramo torej, da ne obstaja takšen $\varphi \in I$, za katerega bi se ti dve rešitvi ujemali in ležali na robu. Uporabimo Gröbnerjevo bazo ter eliminacijo parametra x_2 na enačbah (2.9) in (2.10), od koder dobimo

$$h(\varphi) = (-6827 + 4122\sqrt{2}) + 4(403 + 192\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + (1439 - 1754\sqrt{2}) \cos(4\varphi) + 20(310 - 237\sqrt{2}) \sin(2\varphi) + 10(130 - 131\sqrt{2}) \sin(4\varphi).$$

Poiščemo vse ničle h na I . S pomočjo računalniškega programa Mathematica ugotovimo, da obstaja le ena, in sicer $\varphi_h = \arctan\left(\frac{2410 - 76\sqrt{2}}{5485}\right)$. Ugotovimo, da ima x_2 pri φ_h vrednost

$$x_2 = \frac{1}{13935} \sqrt{\frac{258458802517 - 3138489200\sqrt{2}}{1241}} \approx 1,02669 < x_m,$$

zato ta točka ne leži na robu območja, pač pa v notranjosti. Tako smo pokazali, da tudi na tem robu območja ni ničle.

V primeru, ko je $x_2 = 1$ tudi velja, da je $\mathbf{H}(1, d; \varphi) \neq \mathbf{0}$, za $(1, d) \in D$ in $\varphi \in I$. Sistem enačb (2.6) se prepíše v

$$8(2\sqrt{2} - 3)d^2(\cos(2\varphi) - 3) - 8d \sin \varphi \left((5\sqrt{2} - 8) \cos \varphi - 9\sqrt{2} + 12 \right) + 6(6\sqrt{2} - 7) \cos \varphi + \left(\frac{19}{2} - 5\sqrt{2} \right) \cos(2\varphi) + \frac{65}{2} - 31\sqrt{2} = 0, \quad (2.11)$$

$$4d^2 \left((2\sqrt{2} - 3) \cos(2\varphi) - 5\sqrt{2} + 7 \right) + \left((11\sqrt{2} - 15) + (11 - 7\sqrt{2}) \cos \varphi \right) 3d \sin \varphi + 3 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \left((4\sqrt{2} - 7) \cos \varphi - 8\sqrt{2} + 9 \right) = 0. \quad (2.12)$$

Enačba (2.11) ima samo eno pozitivno rešitev, in sicer

$$d = \frac{(-2\sqrt{2} - 3) \left(-6(3\sqrt{2} - 4) \sin \varphi + (5\sqrt{2} - 8) \sin(2\varphi) + \sqrt{2} \sqrt{d_1(\varphi)} \right)}{4(\cos(2\varphi) - 3)}, \quad (2.13)$$

kjer je

$$d_1(\varphi) = -\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \left((12\sqrt{2} - 17) \cos(3\varphi) + (388\sqrt{2} - 563) \cos \varphi + (170 - 120\sqrt{2}) \cos(2\varphi) - 248\sqrt{2} + 330 \right),$$

saj je $8(2\sqrt{2} - 3)(\cos(2\varphi) - 3) > 0$ in

$$6(6\sqrt{2} - 7) \cos \varphi + \left(\frac{19}{2} - 5\sqrt{2} \right) \cos(2\varphi) + \frac{65}{2} - 31\sqrt{2} < 0$$

za $\varphi \in I$. Prvi del je jasen, drugi sledi iz

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} 6(6\sqrt{2} - 7) \cos \varphi + \left(\frac{19}{2} - 5\sqrt{2} \right) \cos(2\varphi) &\leq \\ \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} 6(6\sqrt{2} - 7) \cos \varphi + \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} \left(\frac{19}{2} - 5\sqrt{2} \right) \cos(2\varphi) &\leq \\ 6(6\sqrt{2} - 7) + \frac{19}{2} - 5\sqrt{2} &= \\ -\frac{65}{2} + 31\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ugotovimo, da je $6(6\sqrt{2} - 7) \cos \varphi + \left(\frac{19}{2} - 5\sqrt{2} \right) \cos(2\varphi) + \frac{65}{2} - 31\sqrt{2} \leq 0$, in da je enako 0 natanko tedaj, ko je $\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, zato stroga neenakost velja za vsak $\varphi \in I$.

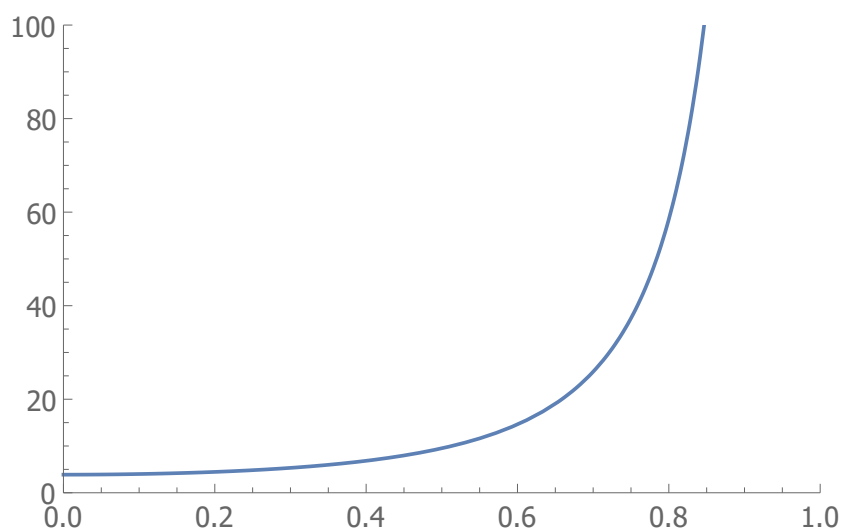
Enačba (2.12) ima dve rešitvi. Prva rešitev je enaka

$$d = \frac{3(7\sqrt{2} - 11)\sin(2\varphi) + (90 - 66\sqrt{2})\sin\varphi - \sqrt{6}\sqrt{d_2(\varphi)}}{16((2\sqrt{2} - 3)\cos(2\varphi) - 5\sqrt{2} + 7)}, \quad (2.14)$$

kjer je

$$d_2(\varphi) = -\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left((46\sqrt{2} - 65)\cos(3\varphi) + (1522\sqrt{2} - 2175)\cos\varphi + (626 - 444\sqrt{2})\cos(2\varphi) - 1060\sqrt{2} + 1486 \right).$$

Rešitev ima pol pri $\varphi_p = \frac{1}{2} \arccos(1 - \sqrt{2}) \approx 0,998937$, za manjše kote je pozitivna, za večje pa negativna. Ničlo ima pri $\varphi = 0$. Slika 2.4 prikazuje razliko odvoda rešitev (2.13) in (2.14), od koder sklepamo, da se rešitvi za $\varphi \in I$ nikoli ne ujemata.



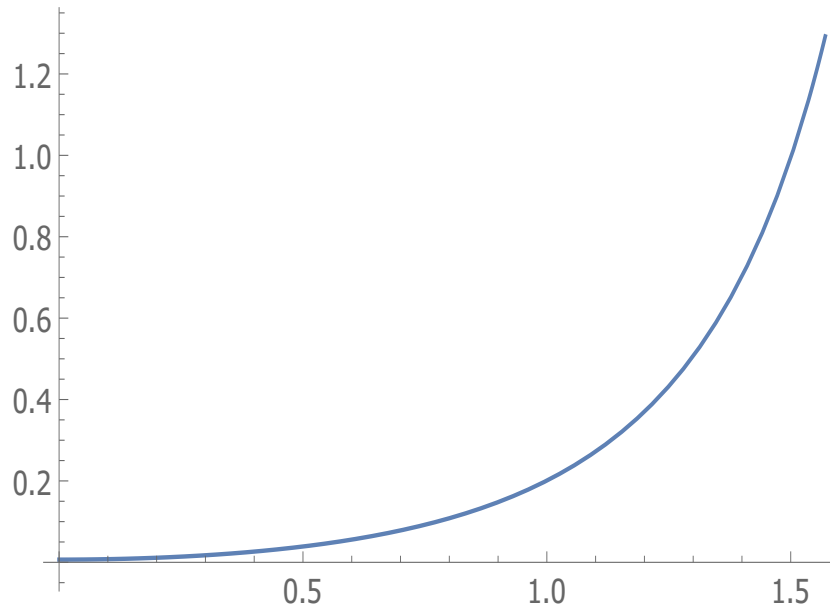
Slika 2.4: Odvod razlike rešitev (2.13) in (2.14) kaže, da se rešitvi, razen pri $\varphi = 0$, nikoli ne ujemata.

Druga rešitev enačbe (2.12) je enaka

$$d = \frac{3(7\sqrt{2} - 11)\sin(2\varphi) + (90 - 66\sqrt{2})\sin\varphi + \sqrt{6}\sqrt{d_2(\varphi)}}{16((2\sqrt{2} - 3)\cos(2\varphi) - 5\sqrt{2} + 7)}. \quad (2.15)$$

Razlika rešitev (2.15) in (2.13) je spet ves čas pozitivna, zato se na intervalu I rešitvi ne ujemata, saj sta enaki pri $\varphi = 0$. Razlika je prikazana na sliki 2.5.

Namesto analize rešitev, ki smo jo naredili zgoraj, lahko z uporabo Gröbnerjeve baze ter eliminacije parametra d sistem (2.6) pri $x_2 = 1$ prepisemo v enačbo



Slika 2.5: Odvod razlike rešitev (2.15) in (2.13) kaže, da se rešitvi, razen pri $\varphi = 0$, nikoli ne ujemata.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ & \left(-6976864387539005813774837123411487663802923707387188708\sqrt{2} + \right. \\ & \quad 9866776239695519384988850560062417606079013001771224546 + \\ & \quad 11247877724607498075664080198900620907021091191207430288\sqrt{2} \cos \varphi - \\ & \quad 15906901226054152394070906392347980090563042042712634696 \cos \varphi - \\ & \quad 6172118628016518423643314809197717463866267991822120974\sqrt{2} \cos(2\varphi) + \\ & \quad 8728693872316580415468872248430415973432898127109752351 \cos(2\varphi) + \\ & \quad 2344459078276259287856356017352723897379975422767043544\sqrt{2} \cos(3\varphi) - \\ & \quad 3315565824927011541737963711328881430690027141928066956 \cos(3\varphi) - \\ & \quad 508796534434252398497611856816194213401651033490368028\sqrt{2} \cos(4\varphi) + \\ & \quad 719546959485349207131228608555957144322004739806343134 \cos(4\varphi + \\ & \quad 49584777187885347886531548341735796645376084468970904\sqrt{2} \cos(5\varphi)) - \\ & \quad 70123464386355515946955898457941506126893629821969324 \cos(5\varphi) - \\ & \quad 1126926754270121542875717007766722651031274647022066\sqrt{2} \cos(6\varphi) + \\ & \quad \left. 1593715099689898089703543146771397866520309768681121 \cos(6\varphi) \right) = 0, \end{aligned}$$

ki za $\varphi \in I$ nima rešitev.

Podobno lahko tudi v primeru, ko je $x_2 = 2$ z uporabo Gröbnerjeve baze ter

eliminacije parametra d , pridemo do enačbe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32} \left(-452268598679920773942406974909872315144764695736497246758\sqrt{2} + \right. \\ & \quad 639604386088618430490844564506988261129155954578450641483 + \\ & \quad 773799933080301104988769350239056958002074418316798554176\sqrt{2} \cos \varphi - \\ & \quad 1094318359925555181514041882562936573843884188882687528736 \cos \varphi + \\ & \quad 735082796046986650946471857800044030033063306345857667908 \cos(2\varphi) - \\ & \quad 519782029818392131332946460546898668424717773692174032264\sqrt{2} \cos(2\varphi) + \\ & \quad 248048837059463572187411025733160898680588820820868917440\sqrt{2} \cos(3\varphi) - \\ & \quad 350794029500367377200305374303581345518058080310417122528 \cos(3\varphi) - \\ & \quad 84954076823841698710753145441487438999888478890647344872\sqrt{2} \cos(4\varphi) + \\ & \quad 120143207623162760696358645107718327494968771888792369044 \cos(4\varphi) + \\ & \quad 21047299760587943067210425141923345288818177864585638976\sqrt{2} \cos(5\varphi) - \\ & \quad 29765376772755465510653190763500742352493549920005822368 \cos(5\varphi) - \\ & \quad 2417810456167838292129076467973022384248630285545747832\sqrt{2} \cos(6\varphi) + \\ & \quad 3419300338360036571089030699186705130207409487952162108 \cos(6\varphi) + \\ & \quad 108184968409931668116068832745605374499002366114118336\sqrt{2} \cos(7\varphi) - \\ & \quad 152996649570230216611540142090054195185949737793387616 \cos(7\varphi) - \\ & \quad 1126926754270121542875717007766722651031274647022066\sqrt{2} \cos(8\varphi) + \\ & \quad \left. 1593715099689898089703543146771397866520309768681121 \cos(8\varphi) \right) = 0. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe za $\varphi \in I$ sicer obstaja, vendar izračunana točka ne leži v območju D , saj dobljeni rešitvi φ ustreza vrednost $d \approx -0,332394$.

Kljub temu, da numerični primeri kažejo na le eno rešitev znotraj območja, pa tega teoretično ne znamo potrditi. Točnega števila rešitev sistema (2.4) ne moremo utemeljiti. Vemo le, da je število rešitev liho. Enoličnost bi lahko dokazali z neničelnim Jacobianom, vendar je izračun prezahteven. Numerični primeri sicer kažejo, da je rešitev na D samo ena ter da obstaja še ena rešitev za $x_2, d \geq 0$, vsaj za φ blizu 0 (glej sliko 2.3, siva krivulja). Obstoj takšne rešitve bi lahko pokazali na podoben način, vendar bomo v naslednjem razdelku pokazali, da ima omenjena rešitev precej večjo konstanto v asimptotičnem razvoju napake in zato ni praktično uporabna. S slike 2.3 je tudi jasno, zakaj smo morali izbrati takšno območje D , ki loči dve veji rešitev tako, da nobena ne seka roba območja ∂D , kar nam je omogočilo dokaz obstoja rešitve s pomočjo homotopije.

2.3 Asimptotična analiza

V prejšnjem razdelku smo dokazali, da obstaja rešitev zastavljenega problema v območju D , ki je določen s pogoji (2.5). Sedaj bomo pokazali še, da je red aproksimacije optimalen, tj., 8. Analizo bomo izdelali za rešitve blizu $\varphi = 0$.

Krožni lok \mathbf{c} se pri $\varphi = 0$ reducira v točko $\mathbf{c}_0 = (1, 0)^\top$, torej za kote blizu $\varphi = 0$ pričakujemo, da ima tudi aproksimant \mathbf{b} vse kontrolne točke blizu nje.

Kot je prikazano na sliki 2.3, numerični izračuni kažejo, da ima sistem (2.4) dve dopustni rešitvi blizu $\varphi = 0$, od katerih je ena v območju D . Da bi poiskali njuni Maclaurinovi vrsti, označimo

$$d = d(\varphi) = d(0) + d^{(1)}(0)\varphi + d^{(2)}(0)\frac{\varphi^2}{2!} + d^{(3)}(0)\frac{\varphi^3}{3!} + \dots$$

in

$$x_2 = x_2(\varphi) = x_2(0) + x_2^{(1)}(0)\varphi + x_2^{(2)}(0)\frac{\varphi^2}{2!} + x_2^{(3)}(0)\frac{\varphi^3}{3!} + \dots$$

Sistem nelinearnih enačb (2.4) za $\varphi = 0$ postane

$$\begin{aligned} (68 - 48\sqrt{2})d(0)^2 - \frac{3}{4}(-1 + x_2(0))(39 - 28\sqrt{2} + (-51 + 36\sqrt{2})x_2(0)) &= 0, \\ (384 - 272\sqrt{2})d(0)^2 - 6(-1 + x_2(0))(45 - 32\sqrt{2} + (-51 + 36\sqrt{2})x_2(0)) &= 0. \end{aligned}$$

Dobimo $d(0) = 0$ in $x_2(0) = 1$. Z uporabo teh zvez in odvajanjem (2.4), lahko poiščemo vse vrednosti odvodov $d^{(k)}(0)$ in $x_2^{(k)}(0)$ za $k = 1, 2, 3, \dots$. Ugotovimo, da se ena izmed rešitev razvije kot

$$\begin{aligned} d(\varphi) &= \frac{1}{2}\varphi + \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\varphi^3 + \frac{488 - 345\sqrt{2}}{5!}\varphi^5 + \\ &\quad \frac{-256862 + 181629\sqrt{2}}{7!}\varphi^7 + \mathcal{O}(\varphi^9), \\ x_2(\varphi) &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 2!}\varphi^2 + \frac{\frac{35}{3} - 8\sqrt{2}}{4!}\varphi^4 + \\ &\quad \frac{-\frac{11879}{3} + 2800\sqrt{2}}{6!}\varphi^6 + \frac{\frac{9783395}{3} - 2305968\sqrt{2}}{8!}\varphi^8 + \mathcal{O}(\varphi^{10}). \end{aligned}$$

Z uporabo razvoja v enačbi (2.2) dobimo asimptotično obnašanje maksimuma funkcije napake, tj.,

$$\max_{t \in [0,1]} r_8(t) = \frac{577 - 408\sqrt{2}}{64}\varphi^8 + \mathcal{O}(\varphi^9) \approx 1,35399 \cdot 10^{-5}\varphi^8 + \mathcal{O}(\varphi^9). \quad (2.16)$$

S tem smo dokazali, da je asimptotični red aproksimacije enak 8. Iz definicije območja D tudi sledi, da je ta rešitev v njegovi notranjosti, vsaj za dovolj majhne φ , saj smo robno krivuljo izbrali tako, da loči to in naslednjo rešitev.

Kot je bilo omenjeno že v prejšnjem razdelku, obstaja še ena rešitev v bližini $\varphi = 0$, ki pa ni v območju D . Njena Maclaurinova vrsta, ki jo dobimo na enak

način, tj. z odvajanjem (2.4), pri čemer izberemo drugo rešitev za $d^{(3)}(0)$, se glasi

$$\begin{aligned} d(\varphi) &= \frac{1}{2}\varphi + \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\varphi^3 + \frac{-22 - 15\sqrt{2}}{5!}\varphi^5 + \\ &\quad \frac{-242 - 189\sqrt{2}}{7!}\varphi^7 + \mathcal{O}(\varphi^9), \\ x_2(\varphi) &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 2!}\varphi^2 + \frac{\frac{35}{3} + 8\sqrt{2}}{4!}\varphi^4 + \\ &\quad \frac{\frac{361}{3} + 80\sqrt{2}}{6!}\varphi^6 + \frac{\frac{5795}{3} + 1008\sqrt{2}}{8!}\varphi^8 + \mathcal{O}(\varphi^{10}). \end{aligned}$$

Izračunamo lahko, da je tudi tu red aproksimacije enak 8, vendar ima razvoj večjo vodilno konstanto, saj je maksimum enak

$$\max_{t \in [0,1]} r_8(t) = \frac{1}{64}\varphi^8 + \mathcal{O}(\varphi^9).$$

Ker je torej konstanta veliko večja, je boljša prva rešitev.

Opazimo, da je vodilna konstanta (2.16) boljša kot konstanta, izračunana v [15]. Poleg tega je konstanta tudi boljša od konstante pri metodi iz [21] (glej tabelo 2.1). Vseeno pa imata metodi, opisani v [24] in v [16], boljše aproksimacijsko konstanto.

2.4 Numerični primeri

Ogledali si bomo nekaj numeričnih primerov, ki potrjujejo izpeljane rezultate. Naj bo dan krožni lok (1.1) za kot $\varphi = \pi/3$. Numerična rešitev sistema enačb (2.4) je enaka $x_2 = 1,2007$ in $d = 0,5478$. Tako dobimo napako $\max_{t \in [0,1]} r_8(t) = 1,9181 \cdot 10^{-5}$.

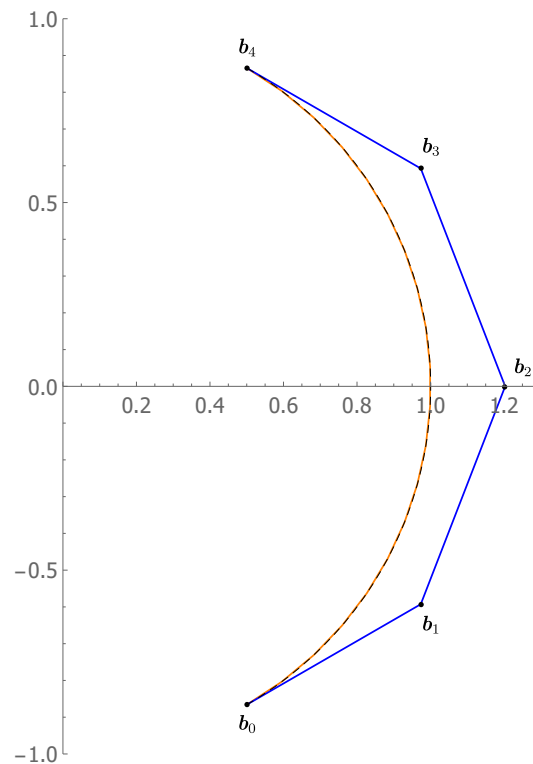
Krožni lok skupaj z aproksimacijo je prikazan na sliki 2.6. Kot pričakovano, sta krivulji neločljivi.

Slika 2.7 prikazuje primerjavo napak r_8 opisane metode in metode uporabljene v [15]. Vidi se, da je napaka naše rešitve približno pol manjša kot napaka v omenjeni literaturi, kjer so uporabili $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$ v funkciji napake r_8 definirani z (2.3).

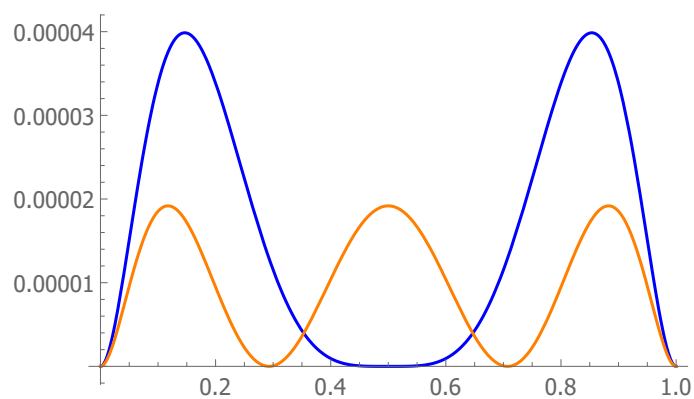
Nazadnje lahko primerjamo še profile ukrivljenosti vseh omenjenih metod. Prikazani so na sliki 2.8 za kot $\varphi = \pi/3$. Profila metod, izpeljanih v [24] in [16], sta najboljša in vizualno neločljiva. Profil naše metode je nekoliko slabši, vendar še vedno boljši od metod, opisanih v [15] in [21].

Aproksimacijo poljubnega odseka krožnega loka ali celotne krožnice, lahko dobimo tudi tako, da skupaj zlepimo manjše odseke. Očitno lahko v ta namen uporabimo poljubno od omenjenih metod. Zlepek, sestavljen le iz dveh delov, kjer je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nam da aproksimacijo celotne krožnice. Rezultat, dobljen z izpeljano metodo, je prikazan na sliki 2.9 in je vizualno neločljiv od krožnice.

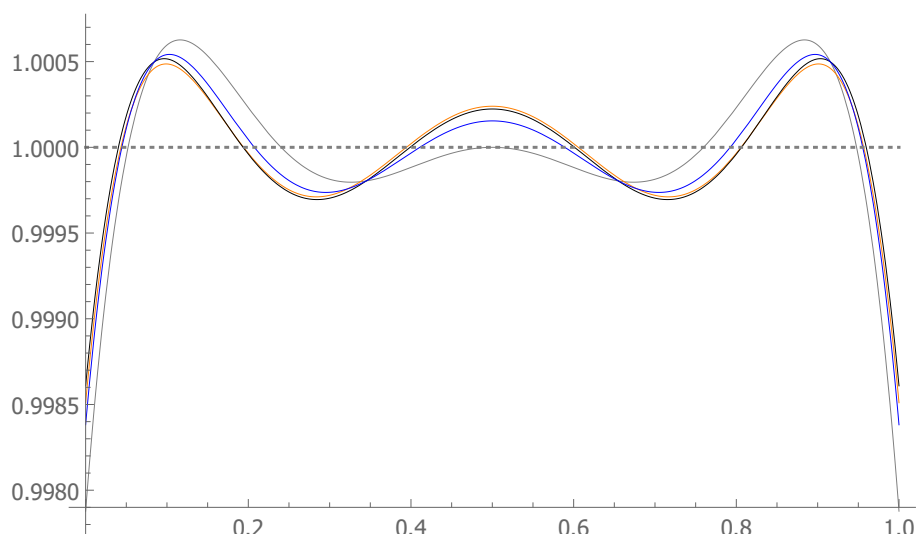
Če torej namesto ene aproksimacije uporabimo zlepek sestavljen iz m segmentov, moramo pri vsakem aproksimirati namesto krožnega loka, ki oklepa kot φ , le kot φ/m . Ker je red aproksimacije enak 8 to pomeni, da napaka pada s konstanto $\frac{1}{m^8}$.



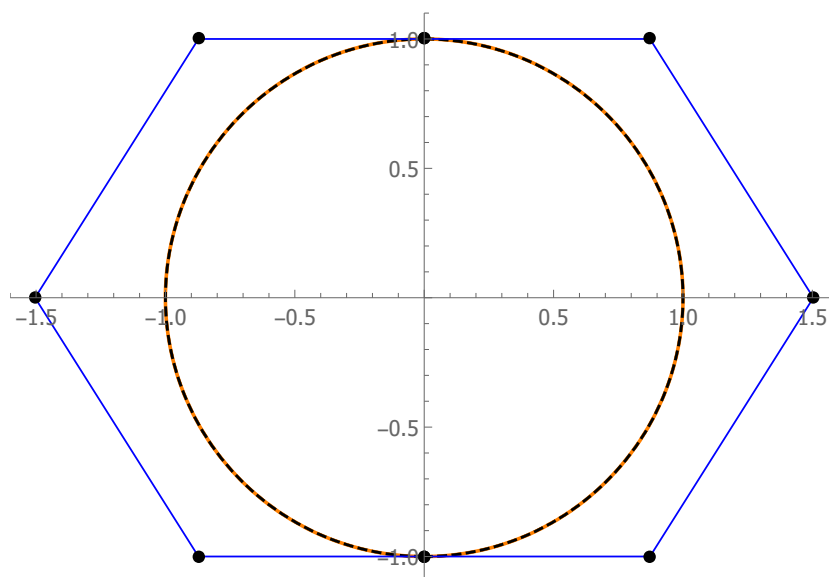
Slika 2.6: Bézijerjeva aproksimacija reda štiri, dobljena z opisano metodo za kot $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (oranžno), njen kontrolni poligon (modro) in krožni lok (črno, črtkano).



Slika 2.7: Funkcija napake (2.2) za kot $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ima tri ekstreme z enakimi vrednostmi (oranžno), ki so približno pol manjši kot je maksimalna vrednost napake, dobljene po metodi predstavljeni v [15] (modro).



Slika 2.8: Primerjava ukrivljenosti za različne rešitve in kot $\varphi = \pi/3$: naša metoda (oranžna), metoda iz [16] skupaj z [24] (obe črni in vizualno neločljivi), rešitev iz [21] (modra) in rešitev predstavljena v [15] (siva).



Slika 2.9: Aproksimacija celotne krožnice z dvema segmentoma.

2.5 Uporaba metode za aproksimacijo odsekov stožnic

Ogledali si bomo še en primer uporabe izpeljane metode, in sicer za aproksimacijo odsekov stožnic. Gre za posplošitev/razširitev metode, ki smo jo prvotno razvili za aproksimacijo krožnega loka, sedaj pa jo bomo uporabili za aproksimacijo dela stožnice. Sledili bomo ideji, podani v članku [1].

Naj bo odsek stožnice \mathbf{r} parametriziran kot

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}_0 B_0^2(t) + w \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + w B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

kjer so \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_2 kontrolne točke in w pozitivna utež. Kot v [1], vpeljemo bari-centrične koordinate τ_0 , τ_1 in τ_2 točke \mathbf{x} glede na trikotnik $\Delta \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$,

$$\mathbf{x} = \tau_0 \mathbf{p}_0 + \tau_1 \mathbf{p}_1 + \tau_2 \mathbf{p}_2, \quad \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = 1.$$

Definiramo funkcijo napake

$$f(\mathbf{x}) := \tau_1^2 - 4w^2 \tau_0 \tau_2. \quad (2.17)$$

V zgornjem primeru za $\mathbf{r}(t)$ velja

$$\begin{aligned} \tau_0(t) &= \frac{B_0^2(t)}{B_0^2(t) + w B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \\ \tau_1(t) &= \frac{w B_1^2(t)}{B_0^2(t) + w B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \\ \tau_2(t) &= \frac{B_2^2(t)}{B_0^2(t) + w B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \end{aligned}$$

od koder sledi, da je $f(\mathbf{r}(t)) \equiv 0$ za poljuben $t \in [0, 1]$ (glej, npr. [7]), zato je f primerna mera za napako. V [8] je bila dokazana sledeča lema.

Lema 2.3 *Naj bo $\mathbf{a} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezna krivulja, ki v celoti leži v zaprtem trikotniku $\Delta \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$ tako, da je $\mathbf{a}(0) = \mathbf{p}_0$ in $\mathbf{a}(1) = \mathbf{p}_2$. Potem je*

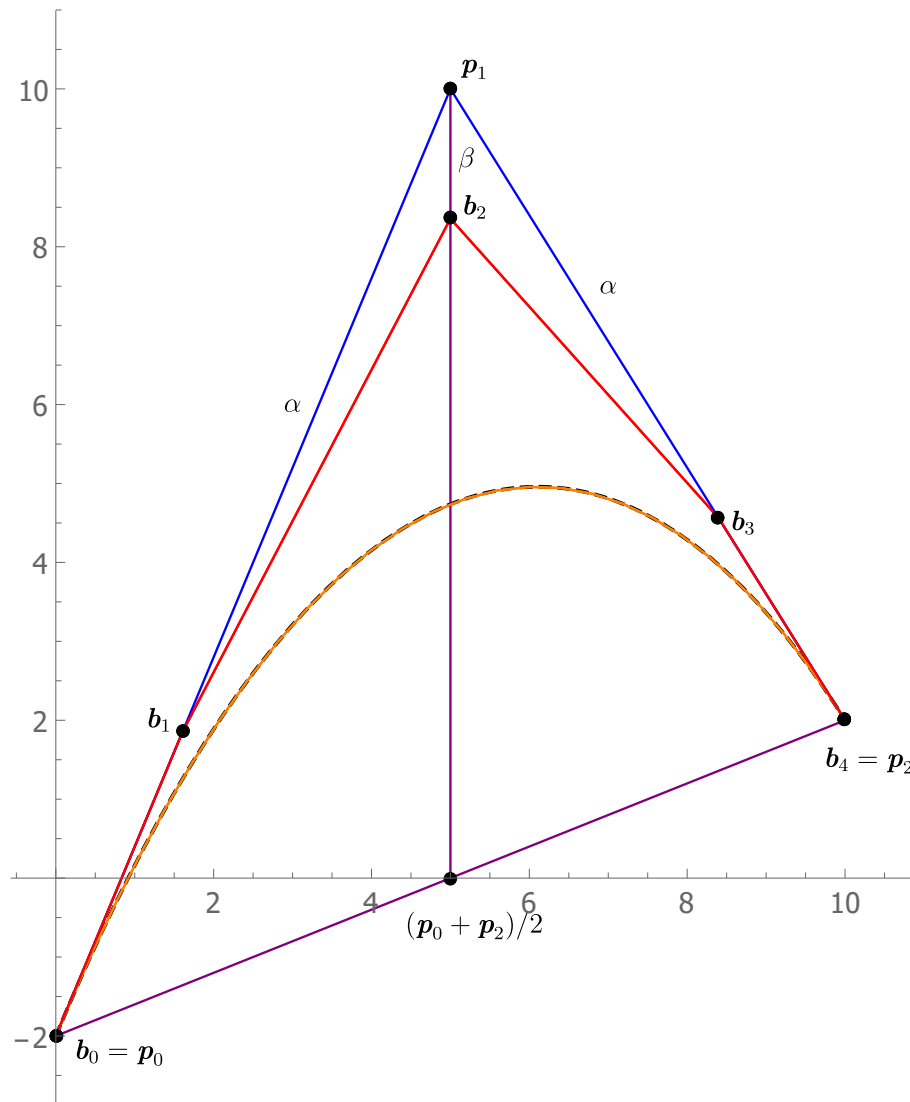
$$d_H(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \leq \frac{1}{4} \max\left(\frac{1}{w^2}, 1\right) \max_{t \in [0, 1]} |f(\mathbf{a}(t))| \|\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\|.$$

Naš cilj je aproksimirati odsek stožnice \mathbf{r} z G^1 Bézierjevo krivuljo stopnje štiri. S tem namenom izberemo kontrolne točke na enak način, kot so to storili v [1], tj.,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{b}_1 &= (1 - \alpha)\mathbf{p}_0 + \alpha\mathbf{p}_1, \\ \mathbf{b}_2 &= (1 - \beta)\frac{\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_2}{2} + \beta\mathbf{p}_1, \\ \mathbf{b}_3 &= (1 - \alpha)\mathbf{p}_2 + \alpha\mathbf{p}_1, \\ \mathbf{b}_4 &= \mathbf{p}_2 \end{aligned}$$

in definiramo

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{b}_i B_i^4(t). \quad (2.18)$$



Slika 2.10: Primer kontrolnega poligona stožnice (moder) in postopek izračuna kontrolnih točk aproksimacije (izbira točk s parametroma α in β). Prikazani so še kontrolni poligon aproksimacije (rdeče), aproksimacija (oranžno) in stožnica (črno črtkano).

Če zgornje kontrolne točke vstavimo v vsoto, lahko preprosto preverimo, da so bariцентриčne koordinate točke $\mathbf{b}(t)$ enake

$$\begin{aligned}\tau_0(t) &= (1-t)^2 \left((1-t)^2 + 4(1-\alpha)t(1-t) + 3(1-\beta)t^2 \right), \\ \tau_1(t) &= 2t(1-t) \left(2\alpha(1-t)^2 + 3\beta t(1-t) + 2\alpha t^2 \right), \\ \tau_2(t) &= t^2 \left(3(1-\beta)(1-t)^2 + 4(1-\alpha)t(1-t) + t^2 \right).\end{aligned}$$

Funkcija napake (2.17) se zato izraža kot

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}(t)) = & -4\left((w^2 - 1)(4\alpha - 3\beta)^2\left(t - \frac{1}{2}\right)^4 + (-8w^2\alpha^2 - \frac{9}{2}w^2\beta^2 + \right. \\ & \left. \frac{9}{2}\beta^2 - 8\alpha^2 + 16w^2\alpha - 4w^2)\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}((4\alpha + 3\beta) \right. \\ & \left. (w + 1) - 8w)((4\alpha + 3\beta)(w - 1) - 8w)\right)t^2(1 - t)^2. \end{aligned}$$

Po analogiji s člankom [1] lahko uporabimo našo metodo iz prejšnjih razdelkov in zahtevamo, da ima $f(\mathbf{b}(t))$ dvojne ničle pri t_1 in $1 - t_1$, kjer je $t_1 = 1 - \sqrt{2}/2$. Tako dobimo sistem nelinearnih enačb za α in β . Ustrezna rešitev sistema, ki je definirana v okolici $w = 1$, se glasi

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1 + \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2})w^2}{2(1 + w^2)}, \\ \beta &= \frac{4(99 - 70\sqrt{2} + (321 - 227\sqrt{2})w^2 + (-379 + 268\sqrt{2})w^4 + (-1393 + 985\sqrt{2})w^6)}{3(1 + w^2)(338 - 239\sqrt{2} + (280 - 198\sqrt{2})w^2 + (-1970 + 1393\sqrt{2})w^4)}. \end{aligned}$$

Da bi lahko uporabili lemo 2.3, moramo preveriti še, da aproksimant \mathbf{b} leži v zaprtem trikotniku $\Delta\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$.

Lema 2.4 Če je $0 \leq W_1 := \sqrt{4\sqrt{2} - 5} < w < W_2 := \sqrt{2\sqrt{2} - 1}$, potem je $0 < \alpha, \beta < 1$ in je Bézierjeva aproksimacija \mathbf{b} stopnje štiri, definirana z enačbo (2.18), vsebovana v trikotniku $\Delta\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$.

Dokaz. Preprosto se vidi, da je α , kot funkcija w , monoton naraščajoča za $w > 0$, saj je odvod enak

$$\frac{2(2 + \sqrt{2})w}{(1 + w^2)^2} > 0.$$

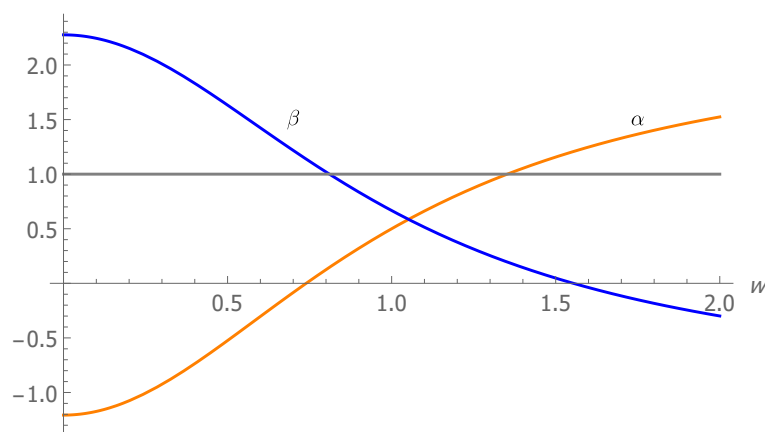
Podobno je β monoton padajoča za $w > 0$, saj se odvod izraža kot

$$\frac{-16w(7 + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + w^2)^2(7 + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + w^2)^2}{3(1 + w^2)^2(338 - 239\sqrt{2} + (280 - 198\sqrt{2})w^2 + (-1970 + 1393\sqrt{2})w^4)^2} \leq 0.$$

Pogoja za W_1 in W_2 sedaj sledita iz zahtev $0 < \alpha, \beta < 1$. Vsebovanost v trikotniku $\Delta\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ sledi iz lastnosti konveksne ovojnice za racionalne Bézierjeve krivulje (glej, npr. [7]), saj za $0 < \alpha, \beta < 1$ vse kontrolne točke \mathbf{b}_i , $i = 0, 1, \dots, 5$, ležijo v tem trikotniku (afine kombinacije oglišč trikotnika). ■

Z uporabo leme 2.3 in dejstva, da ima polinom $t^2(1 - t)^2(t - t_1)^2(t - (1 - t_1))^2$ ekstremno vrednost pri $t = 1/2$, za $W_1 < w < W_2$, sledi

$$d_H(\mathbf{b}, \mathbf{r}) \leq \frac{1}{2^6} \max\left(\frac{1}{w^2}, 1\right) \frac{|-1 + w^2|^3}{(1 + w^2)^2} \|\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\|.$$



Slika 2.11: Rešitvi za α (modra) in β (oranžna), ki pogojujeta izbiro W_1 in W_2 .

Ker ima f dvojne ničle pri $\mathbf{b}(0)$, $\mathbf{b}(t_1)$, $\mathbf{b}(1-t_1)$ in $\mathbf{b}(1)$, morajo te štiri točke tudi ležati na \mathbf{r} . S preprosto primerjavo koeficientov ugotovimo, da so to ravno točke $\mathbf{r}(u_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, kjer je

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_1 &= \frac{w}{1 + \sqrt{2} + w}, \\ u_2 &= \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + w}, \\ u_3 &= 1. \end{aligned}$$

Naj bo $\mathbf{r}_i := \mathbf{r}|_{[u_i, u_{i+1}]}$, $i = 0, 1, 2$. Z uporabo de Casteljaujevega algoritma za \mathbf{r}_i pri u_i in u_{i+1} , se preprosto dobi $\mathbf{r}(u_i)$, $\mathbf{r}(u_{i+1})$, $\mathbf{r}'(u_i)$ in $\mathbf{r}'(u_{i+1})$. To implicira kontrolne točke racionalne Bézierjeve krivulje stopnje dve \mathbf{r}_i , $i = 0, 1, 2$, zapisane v standardni obliki z utežmi

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{(\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2} + w^2)}{\sqrt{1 + w^2}}, \\ w_1 &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})(5 + 4\sqrt{2} + w^2)w}{1 + w^2}, \\ w_2 &= w_0. \end{aligned}$$

Ta postopek lahko ponavljamo, dokler niso dosežene zahteve leme 2.4. Zagotovilo, da bomo res po končno mnogo korakov prišli do primera, ko bodo nove uteži na predpisanem intervalu $[W_1, W_2]$, dobimo iz predpisa za izračun novih uteži, saj je vrednost 1 v vseh primerih privlačna negibna točka. Za $w = 1$ so tudi $w_0 = w_1 =$

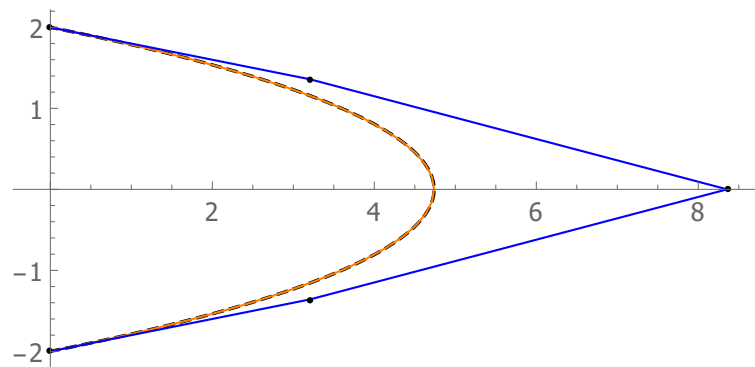
$w_2 = 1$, hkrati pa velja še

$$\begin{aligned} \left| \frac{dw_0}{dw}(1) \right| &= \frac{3}{2} - \sqrt{2} < 1, \\ \left| \frac{dw_1}{dw}(1) \right| &= 3 - 2\sqrt{2} < 1, \\ \left| \frac{dw_2}{dw}(1) \right| &= \left| \frac{dw_0}{dw}(1) \right| < 1. \end{aligned}$$

Ko so torej vse w_i na intervalu $[W_1, W_2]$, aproksimiramo vsak segment \mathbf{r}_i odseka stožnice \mathbf{r} z našo G^1 Bézierjevo krivuljo stopnje štiri. Subdivizijski proces lahko dodatno ponavljamo še toliko časa, da izpolnimo tudi zahtevo o predpisani toleranci.

Za zaključek razdelka si oglejmo dva konkretna primera.

Naj bo odsek elipse \mathbf{r} podan s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_0 = (0, -2)$, $\mathbf{p}_1 = (10, 0)$ in $\mathbf{p}_2 = (0, 2)$ in utežjo $w = 9/10$. Ker so izpolnjeni vsi pogoji leme, lahko metodo direktno uporabimo in dobimo aproksimacijo, kot je prikazana na sliki 2.12.

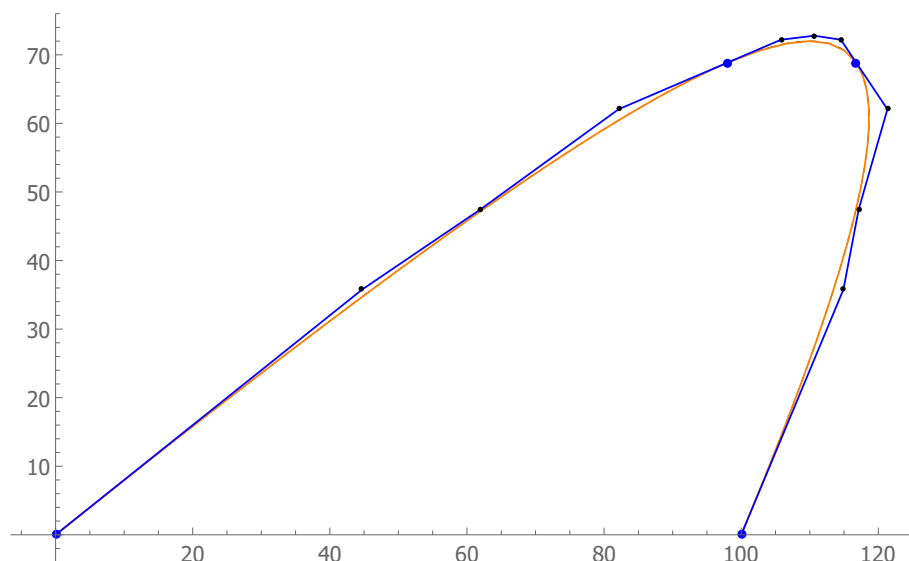


Slika 2.12: Aproksimacija odseka elipse: originalen odsek (črno, črtkano), aproksimacija (oranžno), kontrolni poligon (modro).

Naj bo odsek stožnice \mathbf{r} podan s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (150, 120)$ in $\mathbf{p}_2 = (100, 0)$ ter utežjo $w = 3/2$. Po enem koraku subdivizijskega algoritma opisanega zgoraj, dobimo tri dele odseka stožnice z utežmi $w_0 = w_2 \approx 1,07$ in $w_1 \approx 1,02$. Ker so vse uteži na intervalu $[W_1, W_2]$, lahko vsak segnemt aproksimiramo z G^1 Bézierjevo krivuljo stopnje štiri. Slika 2.13 prikazuje aproksimacijo skupaj z originalnim odsekom stožnice.

2.6 Zaključek

V tem poglavju smo izpeljali novo G^1 aproksimacijo krožnega loka stopnje štiri, ki ima manjšo napako kot nekatere obstoječe metode podobnega tipa. Izpeljana aproksimacija ima tudi boljši profil ukrivljenosti kot metoda, opisana v [15]. Vseeno pa izpeljana aproksimacija ni najboljša možna G^1 aproksimacija stopnje štiri.



Slika 2.13: Aproksimacija odseka stožnice za opisan primer po enem koraku subdivizije: originalna krivulja (črna, črtkana), trije G^1 Bézierjevi aproksimanti stopnje štiri (oranžna krivulja) in njihove kontrolne točke (črni krogi). Modri krogi predstavljajo robne točke delov \mathbf{r}_i , $i = 0, 1, 2$ odseka stožnice \mathbf{r} .

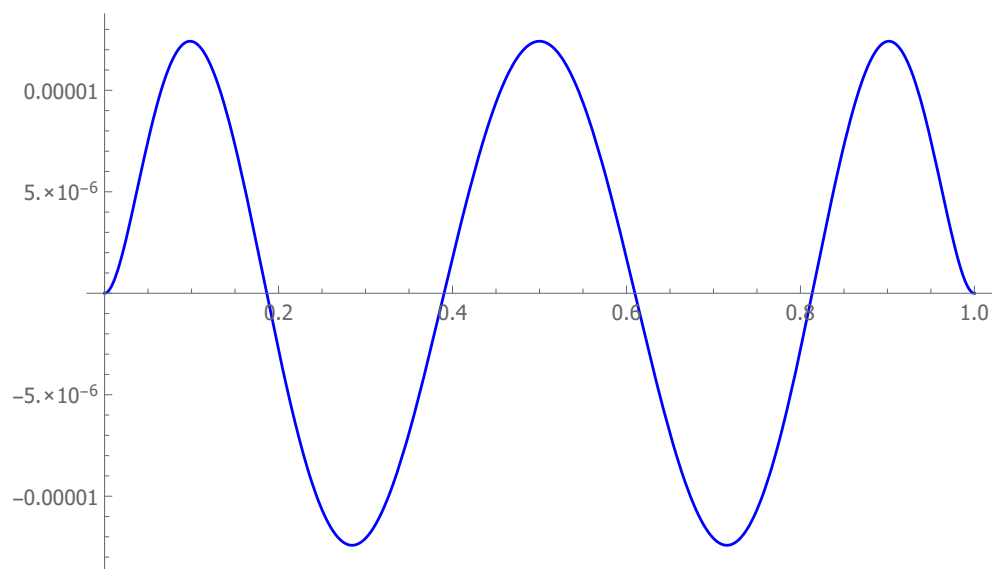
Pričakovati je, da bi bilo boljše, če bi za funkcijo napake vzeli

$$r_8(t) = Ct^2(1-t)^2(t-t_3)(t-1+t_3)(t-t_4)(t-1+t_4), \quad 0 \leq t_3 \leq t_4 \leq \frac{1}{2},$$

kjer bi napaka enakomerno oscilirala (glej zadnjo vrstico tabele 2.1). Vendar pa je analiza s tem porojenega sistema enačb veliko težja. Numerično rešitev sicer obstaja in je enaka $t_3 \approx 0,186439$, $t_4 = 0,390292$. Od tu sedaj dobimo sistem enačb za neznanke d , x_2 , saj mora veljati $r_8(t_3) = 0$, $r_8(t_4) = 0$, ki ima pri $\varphi = \pi/3$ numerično rešitev $d \approx 0,547788$ in $x_2 \approx 1,200819$. Graf napake, ki ga dobimo za $\varphi = \pi/3$ je prikazan na sliki 2.14.

Rešitev problema je bila konec leta 2017 poslana v objavo [23].

Pri aproksimaciji krožnega loka pa ni vedno pomembna le radialna napaka. Večjih je zaradi izgleda, ali pa tehničnih omejitev, bolj pomembna napaka ukrivljenosti. O aproksimaciji profila ukrivljenosti krožnega loka je bilo objavljenih zelo malo člankov, zato bomo v naslednjem poglavju poskušali predstaviti nekaj metod, s katerimi lahko izboljšamo profil ukrivljenosti aproksimacije.



Slika 2.14: Napaka aproksimacije krožnega loka za kot $\varphi = \pi/3$, kjer napaka enakomerno oscilira.

36 Aproksimacija krožnih lokov z G^1 zveznimi polinomskimi krivuljami stopnje štiri

Poglavje 3

Aproksimacija ukrivljenosti krožnega loka z aproksimanti nizkih stopenj

Iz naslova je razvidno, da si bomo ogledali nekaj načinov aproksimacije ukrivljenosti krožnega loka s polinomskimi krivuljami nizkih stopenj. Poglavje je povzeto po [20]. V prvem razdelku si bomo ogledali G^1 aproksimacijo s kubičnimi parametričnimi polinomskimi krivuljami. Sledita G^1 aproksimaciji s kvadratičnimi in kubičnimi dvoloki.

3.1 G^1 aproksimacija s kubičnimi parametričnimi polinomskimi krivuljami

Razdelek je posvečen kubičnim aproksimantom. Ker je vizualno pogosto zelo pomembno, da krivulje izgledajo gladko, se običajno zahteva vsaj geometrijska gladkost reda ena (G^1) v robnih točkah. Z uporabo notacije (1.2) za $n = 3$ in z zahtevo G^1 zveznosti krivulje $\mathbf{b} = (x, y)^\top$ pri $t = 0, 1$, se kontrolne točke kubične Bézierove krivulje zapišejo

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0 &= (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_1 &= (\cos \varphi + d \sin \varphi, -\sin \varphi + d \cos \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_2 &= (\cos \varphi + d \sin \varphi, \sin \varphi - d \cos \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_3 &= (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top,\end{aligned}$$

kjer je $d \geq 0$ neznan parameter. Običajno se ga uporabi za zmanjšanje radialne napake. Ker pa nas bolj zanima aproksimacija ukrivljenosti, bomo prosti parameter uporabili za izboljšanje profila ukrivljenosti krivulje. Sledi nekaj metod, kako uporabiti parameter d v ta namen.

METODA 1

Prva metoda je bila že opažena v [4], kjer so avtorji zahtevali $\mathbf{b}(1/2) = (1, 0)^\top$. Iz zahteve dobimo sistem dveh skalarnih enačb, od katerih je ena, tj., $y(1/2) = 0$, izpolnjena zaradi simetrije. Druga enačba, tj., $x(1/2) = 1$, nam glede na minimizacijo radialne napake, da optimalno rešitev za neznan parameter d

$$d = 4/3 \tan(\varphi/2). \quad (3.1)$$

Asimptotična analiza pokaže, da ima metoda optimalen red 4 za napako ukrivljenosti $e_\kappa = \kappa - 1 = \frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{b}''}{\|\mathbf{b}'\|^3} - 1$ definirani v (1.4). Maksimalna vrednost e_κ je dosežena pri $t \in \{0, 1\}$. Če zgornjo rešitev apliciramo na kontrolne točke in izračunamo napako ukrivljenosti, se razvoj e_κ okrog $\varphi = 0$ (Maclaurinova vrsta) pri parametru $t \in \{0, 1\}$ izraža kot

$$\kappa(0) = \kappa(1) = 1 - \frac{\varphi^4}{16} + \frac{\varphi^6}{96} - \frac{\varphi^8}{1280} + \dots,$$

torej je absolutna vrednost vodilnega člena v razvoju enaka $1/16$.

Kot je zapisano že v [4], ima metoda optimalen red aproksimacije 6 z vodilno konstanto $1/432$, če za mero napake vzamemo radialno napako. Izkaže se, da izbira (3.1) parametra d ne določa rešitve z optimalno konstanto za napako ukrivljenosti.

Zato bomo zapisali dve novi metodi in njuni eksplicitni rešitvi za d , ki imata obe manjšo napako ukrivljenosti, a večjo radialno napako.

METODA 2

Pri prvi metodi opazimo, da je maksimalna napaka ukrivljenosti dosežena v robnih točkah. Drugo metodo bomo torej izpeljali tako, da bomo interpolirali ukrivljenost v robnih točkah. Ker je interpolant z izbiro kontrolnih točk že G^1 zvezen, nam ta izbira dejansko implicira G^2 zveznost. Ponovno lahko zaradi simetrije izpolnimo več pogojev

$$e_\kappa(0) = e_\kappa(1) = 0.$$

Zadnji pogoj se poenostavi v kvadratno enačbo za d , in sicer

$$3d^2 + 2 \sin(2\varphi) d - 4 \sin^2 \varphi = 0,$$

ki ima natanko eno pozitivno rešitev

$$d = \frac{2}{3} \sin \varphi \left(\sqrt{3 + \cos^2 \varphi} - \cos \varphi \right).$$

Red aproksimacije ukrivljenosti te metode je enak 4. Za dovolj majhne kote φ je največja napaka ukrivljenosti dosežena pri $t = 1/2$, konstanta vodilnega člena pa je enaka $3/64$, saj je

$$\kappa(1/2) = 1 - \frac{3\varphi^4}{64} - \frac{\varphi^6}{512} + \frac{197\varphi^8}{81920} + \dots$$

Konstanta vodilnega člena pri ostalih dveh ekstremih je manjša in je enaka $3/80$.

Asimptotična analiza radialne napake pokaže, da je tudi red aproksimacije te metode enak 6 in ima vodilni koeficient enak $1/64$. Maksimalna napaka je dosežena pri parametru $t = 1/2$.

METODA 3

Če si ogledamo profil ukrivljenosti obeh metod ugotovimo, da se je pri drugi metodi globalni ekstrem z robu preselil na sredino intervala $[0, 1]$. Z malo računanja hitro ugotovimo, da mora zaradi simetrije eden od lokalnih ekstremov funkcije napake e_κ vedno ležati pri parametru $t = \frac{1}{2}$. Ker želimo minimizirati napako, bi po analogiji o minimizaciji napake v funkcijskem primeru lahko zahtevali, da napaka enakomerno oscilira. Vendar pa imamo v danem primeru premalo prostostnih stopenj in nam ta predpostavka ne prinese optimalne aproksimacije. Namesto tega, po zgledu prvih dveh metod, izenačimo vrednosti e_κ pri $t = 0$ in $t = \frac{1}{2}$. Enaka vrednost je zaradi simetrije dosežena tudi pri $t = 1$, tj. $e_\kappa(0) = e_\kappa(1)$. Iz enačbe

$$e_\kappa(0) = e_\kappa(1/2),$$

ki se poenostavi v

$$(2 + \cos^3 \varphi) d^3 - 5 \cos^2 \varphi \sin \varphi d^2 + 8 \cos \varphi \sin^2 \varphi d - 4 \sin^3 \varphi = 0, \quad (3.2)$$

dobimo le eno realno rešitev in dve kompleksni, saj ima zgornji polinom diskriminanto enako $-64 (27 \sin^6 \varphi + \sin^6 \varphi \cos^3 \varphi) < 0$ za $0 < \varphi \leq \pi/2$. Realna rešitev je

$$d = (4 - 768 \cos \varphi + 2 \cos(2\varphi) + 768 \cos(3\varphi) - 4 \cos(4\varphi) - 2 \cos(6\varphi) + a(10 \sin \varphi + 10 \sin(3\varphi) + a)) / (6a(8 + 3 \cos \varphi + \cos(3\varphi))),$$

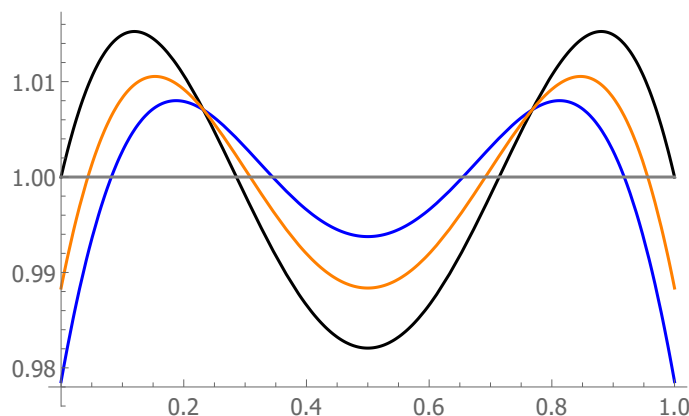
kjer je

$$a = (82932 \sin \varphi + 768\sqrt{3}\sqrt{108 + 3 \cos \varphi + \cos(3\varphi)} - (8 + 3 \cos \varphi + \cos(3\varphi)) \sin^3 \varphi - 6912 \sin(2\varphi) - 27664 \sin(3\varphi) + 2304 \sin(6\varphi) + 6 \sin(7\varphi) + 2 \sin(9\varphi))^{1/3}.$$

Za dokaz da je $d \geq 0$, uporabimo Descartesovo pravilo predznakov v enačbi (3.2). Od tu zaključimo, da ima za kote $0 < \varphi \leq \pi/2$ enačba eno ali tri pozitivne rešitve in nobene negativne. Dobljena rešitev je torej res nenegativna.

Red aproksimacije te metode je prav tako enak 4, za dovolj majhne kote φ pa je največja napaka ukrivljenosti dosežena pri $t \in \{0, 1/2, 1\}$ s konstanto enako $1/32$.

$$\kappa(0) = \kappa(1/2) = \kappa(1) = 1 - \frac{\varphi^4}{32} + \frac{\varphi^6}{1536} + \frac{373\varphi^8}{491520} + \dots$$



Slika 3.1: Profili ukrivljenosti za različne aproksimacije in kot $\varphi = \pi/4$. METODA 1 (modra), METODA 2 (črna), METODA 3 (oranžna).

	$\max_{t \in [0,1]} e_\kappa(t)$	$\max_{t \in [0,1]} r_{2n}(t) $
METODA 1, $\varphi = \pi/4$	2,14466e-2	5,45134e-4
METODA 2, $\varphi = \pi/4$	1,79293e-2	3,92163e-3
METODA 3, $\varphi = \pi/4$	1,16352e-2	1,80610e-3
METODA 1, $\varphi = \pi/8$	1,44858e-3	8,49108e-6
METODA 2, $\varphi = \pi/8$	1,12054e-3	5,83869e-5
METODA 3, $\varphi = \pi/8$	7,40362e-4	2,85556e-5

Tabela 3.1: Primerjava maksimalnih napak ukrivljenosti in radialnih napak za različne metode in različne kote.

V ostalih dveh ekstremnih točkah je vrednost konstante manjša in je enaka $7/256$.

Kot prej, ima metoda glede na radialno napako red aproksimacije enak 6, s konstanto $1/128$. Maksimalna napaka je dosežena pri $t = 1/2$.

Glavna ideja metod v tem razdelku je bila minimizacija maksimalne vrednosti napake e_κ . Za dovolj majhen kot φ lahko za minimizacijo napake uporabimo asimptotično analizo. To je tudi cilj naslednjega razdelka.

3.2 Najboljša kubična aproksimacija glede na asimptotično analizo

Da bi minimizirali e_κ vsaj asimptotično, moramo najprej poiskati lokalne ekstreme κ . To vodi v reševanje nelinearne enačbe $\kappa'(t) = 0$. Dobimo pet različnih rešitev, od katerih so tri, označimo jih z t_0 , t_1 in t_2 , na intervalu $(0, 1)$. Zaradi simetrije je ena izmed rešitev $t_1 = 1/2$, ostali dve pa sta simetrični glede na t_1 , torej $t_2 = 1 - t_0$.

Zapišimo sedaj razvoj parametra d v Maclaurinovo vrsto kot

$$d = d_0 + d_1 \varphi + \dots$$

Enako lahko naredimo za funkcijo $\kappa - 1$, in dobimo

$$\kappa - 1 = c_0 + c_1 \varphi + \dots$$

Očiten cilj je doseči, da bo čimveč koeficientov c_i enakih 0 v vseh ekstremnih in tudi robnih točkah, torej globalno. Preprost izračun pokaže, da je $c_i = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, če je $d_0 = 0$, $d_1 = 2/3$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1/18$ in $d_4 = 0$. Tedaj dobimo

$$\begin{aligned}\kappa(0) - 1 &= -\left(\frac{7}{240} + 6d_5\right)\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^5), \\ \kappa(t_0) - 1 &= \left(\frac{223}{8000} + \frac{3}{25}d_5(-13 + 720d_5)\right)\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^5), \\ \kappa(t_1) - 1 &= \left(\frac{-31}{960} + 3d_5\right)\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^5), \\ \kappa(t_2) - 1 &= \left(\frac{223}{8000} + \frac{3}{25}d_5(-13 + 720d_5)\right)\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^5), \\ \kappa(1) - 1 &= -\left(\frac{7}{240} + 6d_5\right)\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^5),\end{aligned}$$

in asimptotični red ne more biti boljši kot 4, saj vse konstante pred φ^4 ne morejo biti sočasno enake 0. Vseeno pa lahko izberemo parameter d_5 tako, da minimiziramo koeficient c_4 . Iščemo torej takšen d_5 , da bo maksimalen koeficient v razvoju $\kappa - 1$ čim manjši. Dovolj je gledati le lokalne ekstreme in robni točki, torej

$$\min_{d_5} \max \left(\left| -\left(\frac{7}{240} + 6d_5\right) \right|, \left| \frac{223}{8000} + \frac{3}{25}d_5(-13 + 720d_5) \right|, \left| \frac{-31}{960} + 3d_5 \right| \right).$$

Izračunamo $d_5 = \frac{1}{2880}$ in $c_4 = 1/32$.

Zanimivo je, da METODA 3 iz prejšnjega razdelka izpolnjuje zgornje zahteve v razvoju za $d(\varphi)$. To pomeni, da je to optimalna metoda glede na asimptotični red.

3.3 G^1 aproksimacija krožnega loka s kvadratičnimi dvoloki

Določanje parametrov za aproksimacijo ukrivljenosti s polinomskimi krivuljami višje stopnje je bolj težavno, saj dobimo sistem nelinearnih enačb. Zato si bomo v tem poglavju ogledali aproksimacijo s pomočjo dvolokov.

Namesto uporabe ene parametrične polinomske krivulje za aproksimacijo ukrivljenosti krožnega loka, bomo torej uporabili dve, ki ju združimo/zlepimo skupaj pri neki neznani točki, stični točki. Takšnemu objektu pravimo dvolok. Doprinos dvoloka so dodatni parametri svobode, ki jih lahko uporabimo za izboljšanje aproksimacije. Najprej si oglejmo najbolj preprost primer, kvadratični dvolok.

Kvadratični dvolok je sestavljen iz dveh delov, vsak izmed njiju je določen s tremi kontrolnimi točkami. Označimo prvi del z \mathbf{b}^1 in drugi del z \mathbf{b}^2 . Ponovno bomo

za predstavitev uporabili Bernstein-Bézierjevo reprezentacijo, kjer je \mathbf{b}^1 podan s kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2^1$ in \mathbf{b}^2 s kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_0^2, \mathbf{b}_1^2, \mathbf{b}_2^2$.

Ker nas zanima G^1 aproksimacija krožnega loka, zahtevamo G^1 aproksimacijo robnih točk in G^1 zveznost v stični točki. Zaradi simetrije krožnega loka izberemo stično točko tako, da bosta tudi oba dela dvoloka simetrična. Posledično so kontrolne točke oblike

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0^1 &= (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_1^1 &= (\cos \varphi + d \sin \varphi, -\sin \varphi + d \cos \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_2^1 &= \mathbf{b}_0^2 = (\cos \varphi + d \sin \varphi, 0)^\top, \\ \mathbf{b}_1^2 &= (\cos \varphi + d \sin \varphi, \sin \varphi - d \cos \varphi)^\top, \\ \mathbf{b}_2^2 &= (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top,\end{aligned}$$

kjer je $d \geq 0$ edini prosti parameter. Ta parameter bomo v nadaljevanju določili tako, da bomo zadostili različnim aproksimacijskim pogojem.

METODA 4

Pri tej metodi prosti parameter d določimo tako, da je napaka ukrivljenosti v robnih točkah enaka 0 (to je mogoče zaradi simetrije). Dobimo

$$2d^2 + \sin \varphi \cos \varphi d - \sin^2 \varphi = 0,$$

ki ima za $d \geq 0$ samo eno rešitev, namreč

$$d = \frac{1}{4} \sin \varphi (\sqrt{8 + \cos^2 \varphi} - \cos \varphi).$$

Profil ukrivljenosti za kot $\varphi = \pi/4$ je prikazan na sliki 3.2. Red aproksimacije te metode je enak 2 s konstanto enako $1/2$, doseženo v stičišču. Natančneje,

$$\kappa(1/2) = 1 - 1/2\varphi^2 + 11/72\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^6).$$

METODA 5

Pri prejšnji metodi smo postavili napako ukrivljenosti pri robnih točkah na nič in smo dobili maksimalno odstopanje pri stični točki. Poglejmo, kaj se zgodi, če zahtevamo, da je napaka ukrivljenosti v stičišču obeh delov dvoloka enaka nič. Od tod dobimo

$$2 \cos^2 \varphi d^2 - \sin \varphi (1 + 4 \cos \varphi) d + 2 \sin^2 \varphi = 0,$$

z dvema rešitvama za $d \geq 0$,

$$d_{+,-} = \frac{\sin \varphi}{4 \cos^2 \varphi} (1 + 4 \cos \varphi \pm \sqrt{1 + 8 \cos \varphi}).$$

Ker je $(1 + 4 \cos \varphi)^2 = 1 + 8 \cos \varphi + 16 \cos^2 \varphi \geq 1 + 8 \cos \varphi$, sta zagotovo obe rešitvi $d_{+,-}$ nenegativni. Boljša glede na aprosimacijsko konstanto je d_- .

Maksimalna napaka ukrivljenosti je sedaj dosežena v robnih točkah. Red aproksimacije je ponovno enak 2, prav tako je konstanta ponovno enaka $1/2$. Asimptotična napaka pri d_+ raste čez vse meje, ko gre $\varphi \rightarrow 0$.

METODA 6

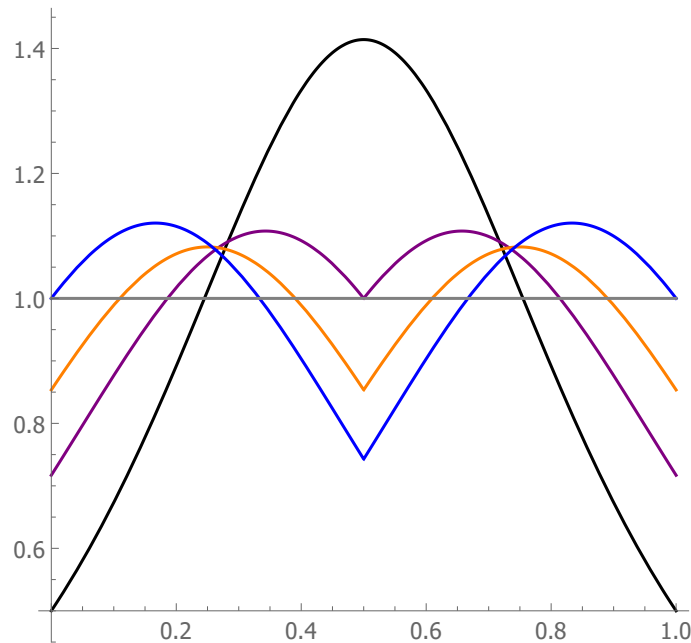
Glede na prejšnja dva zgleda ugotovimo, da bo optimalna rešitev za minimizacijo napake ukrivljenosti ležala nekje vmes. Parameter d določimo tako, da izenačimo predznačeni vrednosti ukrivljenosti v stičišču in v robnih točkah. Dobimo enačbo

$$d^3 + (\cos \varphi d - \sin \varphi)^3 = 0.$$

Slednja ima dve kompleksni rešitvi in le eno realno, ki zadošča pogoju $d \geq 0$, tj.

$$d = \tan(\varphi/2).$$

V tem primeru se izkaže, da je dobljena rešitev za dvolok enaka zlepku rešitev, ki bi jih dobili z G^1 aproksimacijo krožnega loka za kot $\varphi/2$ (glej 2.1).



Slika 3.2: Profili ukrivljenosti za različne aproksimacije in kot $\varphi = \pi/4$. METODA 4 (modra), METODA 5 (vijolična), METODA 6 (oranžna), G^1 kvadratičen aproksimant, ne dvolok (črna).

	$\max_{t \in [0,1]} e_\kappa(t)$	$\max_{t \in [0,1]} r_{2n}(t) $
kvadratičen aproksimant, $\varphi = \pi/4$	5,00000e-1	1,25000e-1
METODA 4, $\varphi = \pi/4$	2,57195e-1	3,34103e-2
METODA 5, $\varphi = \pi/4$	2,83030e-1	3,87514e-2
METODA 6, $\varphi = \pi/4$	1,46447e-1	6,28157e-3
kvadratičen aproksimant, $\varphi = \pi/8$	1,46447e-1	6,28157e-3
METODA 4, $\varphi = \pi/8$	7,35885e-2	2,01407e-3
METODA 5, $\varphi = \pi/8$	7,54711e-2	2,07189e-3
METODA 6, $\varphi = \pi/8$	3,80602e-2	3,76474e-4

Tabela 3.2: Primerjava maksimalne napake ukrivljenosti in radialne napake.

3.4 G^1 aproksimacija krožnega loka s kubičnimi dvo-loki

Kubični dvolok je sestavljen iz dveh delov, vsak ima štiri kontrolne točke. Kot prej prvi del dvoloka označimo z \mathbf{b}^1 in drugi del z \mathbf{b}^2 . Podobno označimo kontrolne točke \mathbf{b}^1 z $\mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2^1, \mathbf{b}_3^1$ in kontrolne točke \mathbf{b}^2 z $\mathbf{b}_0^2, \mathbf{b}_1^2, \mathbf{b}_2^2, \mathbf{b}_3^2$.

Ker nas zanimajo le G^1 aproksimacije, ponovno zahtevamo G^1 aproksimacijo robnih točk in G^1 zveznost v stični točki. Zaradi simetrije krožnega loka, je pri stični točki ponovno avtomatično dosežena C^1 zveznost. Kontrolne točke so zato oblike

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_0^1 &= (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \\
\mathbf{b}_1^1 &= (\cos \varphi + \sin \varphi d, -\sin \varphi + \cos \varphi d)^\top, \\
\mathbf{b}_2^1 &= (a, -h)^\top, \\
\mathbf{b}_3^1 &= \mathbf{b}_0^2 = (a, 0)^\top, \\
\mathbf{b}_1^2 &= (a, h)^\top, \\
\mathbf{b}_2^2 &= (\cos \varphi + \sin \varphi d, \sin \varphi - \cos \varphi d)^\top, \\
\mathbf{b}_3^2 &= (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top,
\end{aligned}$$

kjer so $d \geq 0, h \geq 0$ in $a \geq 0$ prosti parametri. Označimo še predznačeno ukrivljenost dela \mathbf{b}^i s κ_i za $i = 1, 2$.

V splošnem imamo veliko možnosti, kako izbrati proste parametre z namenom, da bi dobili čimbolj uporabne aproksimante. Podobne strategije kot v prejšnjem razdelku vodijo do zelo zahtevnih sistemov enačb, zato bomo uporabili nekoliko poenostavljen pristop.

METODA 7

V prvi metodi tega razdelka bomo pogledali metodo, ki ima v stični točki enake druge odvode in katere napaka ukrivljenosti v stični in robnih točkah je enaka nič.

Prvi pogoj je

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{b}^1}{dt^2}(t) \right|_{t=1} = \left. \frac{d^2 \mathbf{b}^2}{dt^2}(t) \right|_{t=0}, \quad (3.3)$$

kar nam da

$$\begin{aligned} &(-a + \cos \varphi + \sin \varphi d, 2h + \cos \varphi d - \sin \varphi)^\top = \\ &(-a + \cos \varphi + \sin \varphi d, -(2h + \cos \varphi d - \sin \varphi))^\top. \end{aligned}$$

Od tu lahko izračunamo parameter h kot

$$h = (-\cos \varphi d + \sin \varphi)/2. \quad (3.4)$$

Doseči moramo le še ničelno napako v stični in robnih točkah. Enačbe se glasijo

$$\begin{aligned} \kappa_1(0) &= \kappa_2(1) = 1, \\ \kappa_1(1) &= \kappa_2(0) = 1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

oziroma ekvivalentno

$$\begin{aligned} 6d^2 - \sin(2\varphi)d - \cos(2\varphi) + 4\cos\varphi a - 3 &= 0, \\ 3(\cos\varphi d - \sin\varphi)^2 + 8(\sin\varphi d + \cos\varphi - a) &= 0. \end{aligned}$$

Zgornji sistem enačb ima le eno dopustno rešitev za $a, d \geq 0$, ki se glasi

$$\begin{aligned} a &= \left(670 + 1514 \cos \varphi + 95 \cos(2\varphi) + 103 \cos(3\varphi) + 2 \cos(4\varphi) + \right. \\ & \quad \left. 15 \cos(5\varphi) + \cos(6\varphi) + 4\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))} \right. \\ & \quad \left. (32 - 21 \cos \varphi + \cos(3\varphi)) \sin^2 \varphi \right) / (96(4 + \cos^3 \varphi)^2), \\ d &= \left(\left(3 - 4 \cos \varphi + 3 \cos(2\varphi) + 2\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))} \right) \sin \varphi \right) / \\ & \quad (6(4 + \cos^3 \varphi)). \end{aligned}$$

Ker je $\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))} > \sqrt{2(25 - 18 - 1)} > 2$, velja

$$\begin{aligned} &670 + 1514 \cos \varphi + 95 \cos(2\varphi) + 103 \cos(3\varphi) + 2 \cos(4\varphi) + \\ &15 \cos(5\varphi) + \cos(6\varphi) + 4\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))} \\ &(32 - 21 \cos \varphi + \cos(3\varphi)) \sin^2 \varphi > \\ &670 + 1514 \cos \varphi - 95 - 103 - 2 - 15 - 1 + 4 * 2 * (32 - 21 - 1) = \\ &534 + 1514 \cos \varphi > 0, \end{aligned}$$

zato je $a \geq 0$. Podobno iz

$$3 - 4 \cos \varphi + 3 \cos(2\varphi) + 2\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))} > 7 - 4 \cos \varphi + 3 \cos(2\varphi) \geq 0$$

sledi tudi $d \geq 0$.

Pokazati moramo še, da je $h \geq 0$, kar je zaradi (3.4) ekvivalentno dejstvu, da je $d \leq \tan \varphi$. Za $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ je torej dovolj pokazati

$$\left(3 - 4 \cos \varphi + 3 \cos(2\varphi) + 2\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))}\right) \cos \varphi \leq 24 + 6 \cos^3 \varphi.$$

Ker je $(3 + 3 \cos(2\varphi)) \cos \varphi = 6 \cos^3 \varphi$, je dovolj preveriti, da je

$$\left(-4 \cos \varphi + 2\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))}\right) \cos \varphi \leq 24,$$

kar očitno velja, saj je $\sqrt{2(25 - 18 \cos \varphi + \cos(2\varphi))} < \sqrt{2(25 - 0 + 1)} = \sqrt{52} < 12$.

Ker za zgornjo metodo nismo uspeli določiti parametra lokalnega ekstrema eksplisitno, točna asimptotična analiza ni bila narejena. Numerično smo red aproksimacije še vedno lahko izračunali. Za nastavek smo vzeli $e_\kappa(t) \approx C\varphi^\alpha$. Od tu smo potem izračunali $\alpha \approx \log_2 \left(\frac{\max_t e_\kappa(t)|_\varphi}{\max_t e_\kappa(t)|_{\varphi/2}} \right)$. Konstanto C smo izračunali pri predpostavki, da je $\alpha = 4$. Tabela 3.3, prikazuje numerične rezultate testiranja in potrjuje, da je red aproksimacije enak 4.

φ	$\max_{t \in [0,1]} e_\kappa(t)$	α	C
$\pi/4$	7,98328e-3	-	0,0209808
$\pi/8$	5,47143e-4	3,86699	0,0230071
$\pi/16$	3,53033e-5	3,95404	0,0237518
$\pi/32$	2,22564e-6	3,98751	0,0239582
$\pi/64$	1,39411e-7	3,99680	0,0240114

Tabela 3.3: Numerični izračun reda aproksimacije in konstante.

METODA 8

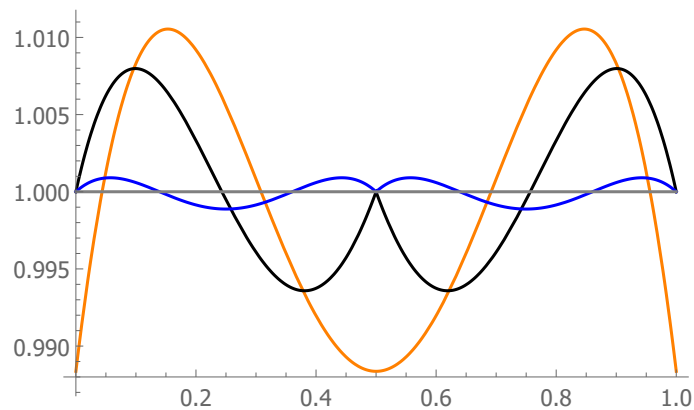
Pogoj (3.3) v stični točki lahko nadomestimo z bolj geometrijskim pogojem, pogojem simetrije ukrivljenosti

$$\left. \frac{d\kappa_1}{dt}(t) \right|_{t=1/2} = \left. \frac{d\kappa_2}{dt}(t) \right|_{t=1/2} = 0.$$

Skupaj z (3.5) dobimo

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ h &= 1/3 \left(-\sin \varphi + \sqrt{6 - 6 \cos \varphi + \sin^2 \varphi} \right), \\ d &= 1/3 \left(-\sin \varphi + \sqrt{6 - 6 \cos \varphi + \sin^2 \varphi} \right). \end{aligned}$$

Ker je $a = 1$ in $d = h$, je aproksimant dobljen s pomočjo te metode popolnoma enak aproksimaciji, ki nam jo da METODA 2 za pol manjši kot.



Slika 3.3: Profili ukrivljenosti za različne aproksimacije in kot $\varphi = \pi/4$. METODA 3 (oranžna), METODA 7 (črna), METODA 8 (modra).

	$\max_{t \in [0,1]} e_{\kappa}(t)$	$\max_{t \in [0,1]} r_{2n}(t) $
METODA 3, $\varphi = \pi/4$	1,16352e-2	1,80610e-3
METODA 7, $\varphi = \pi/4$	7,98328e-3	1,62336e-3
METODA 8, $\varphi = \pi/4$	1,12054e-3	5,83869e-5
METODA 3, $\varphi = \pi/8$	7,40362e-4	2,85556e-5
METODA 7, $\varphi = \pi/8$	5,47143e-4	2,75728e-5
METODA 8, $\varphi = \pi/8$	6,97790e-5	8,99659e-7

Tabela 3.4: Primerjava maksimumov funkcij napak za različne aproksimacije.

3.5 Zaključek

V tem poglavju je bilo predstavljenih nekaj G^1 aproksimacij krožnega loka s parametričnimi polinomskimi krivuljami nizkih stopenj. Omejili smo se na aproksimacijo glede na napako ukrivljenosti. Ugotovili smo, da je red aproksimacije napake ukrivljenosti vedno za 2 nižji od optimalnega reda aproksimacije glede na radialno napako. Vse metode, ki imajo optimalni red aproksimacije glede na radialno napako, imajo tudi optimalni red aproksimacije glede na napako ukrivljenosti. Vseeno pa imajo predstavljene metode manjšo vodilno konstanto glede na napako ukrivljenosti. V naslednjem poglavju si bomo ogledali optimalne aproksimacije pri različnih pogojih gladkosti v robnih točkah glede na poenostavljeno radialno napako r_{2n} .

Poglavje 4

Aproksimacija krožnega loka z enakomerno oscilirajočo radialno napako

V zadnjem poglavju bomo predstavili aproksimacije, ki so najboljše aproksimacije krožnega loka pri nekaterih dodatnih omejitvah v robnih točkah. Ogleдали si bomo aproksimacije različnega reda gladkosti v robnih točkah, pri čemer za napako v notranjosti zahtevamo, da enakomerno niha okrog ničle. Poiskali bomo kontrolne točke, ki definirajo napako v obliki najboljše enakomerne aproksimacije, kar pomeni, da napaka enakomerno niha okrog ničle in ima, kot polinom, najmanjšo možno neskončno normo. To področje je dolgo ostalo nerešeno, saj je bilo šele v zadnjem času napisanih nekaj člankov na to tematiko [11, 13, 23], ki pokrijejo nekoliko več primerov, ne samo aproksimacije nizkih stopenj. Poglavje je povzetek in dopolnitev članka v pripravi [18], delno pa se navezuje tudi na članke [4, 10, 22].

Oglejmo si aproksimacijo krožnega loka \mathbf{c} s polinomske krivuljo

$$\mathbf{b}(t) = (x(t), y(t))^{\top} = \sum_{i=0}^n (x_i, y_i)^{\top} B_i^n(t), \quad (4.1)$$

pri čemer se omejimo na pogoj, da sta robni kontrolni točki oblike

$$\begin{aligned} (x_0, y_0)^{\top} &= d_0 (\cos(-\varphi), \sin(-\varphi))^{\top}, \\ (x_n, y_n)^{\top} &= d_n (\cos \varphi, \sin \varphi)^{\top} \end{aligned}$$

kjer je $0 < \varphi \leq \pi/2$ za $d_0, d_n > 0$ in so $B_i^n(t) = \binom{n}{i} \left(\frac{1+t}{2}\right)^i \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n-i}$ Bernsteinovi polinomi stopnje n premaknjeni na $[-1, 1]$. V primeru, da imamo vsaj G^0 aproksimacijo, velja $d_0 = d_n = 1$. Ker bomo v nadaljevanju uporabljali polinome Čebiševa in simetrijo, smo se odločili, da se namesto na standardni interval $[0, 1]$, raje osredotočimo na simetričnega $[-1, 1]$, nad katerim so definirani tudi polinomi Čebiševa, ki bodo imeli pomembno vlogo. Cilj poglavja je minimizirati razdaljo med \mathbf{b} in enotskim krožnim lokom \mathbf{c} , definiranim v (1.1), tako, da minimiziramo napako

$$r_{2n}(t) = x^2(t) + y^2(t) - 1.$$

Slednja je polinom stopnje $2n$, ki ga lahko zapišemo kot $r_{2n}(t) = \sum_{i=0}^{2n} \rho_i B_i^{2n}(t)$, kjer je

$$\rho_i = \sum_{j+k=i} \frac{\binom{n}{j} \binom{n}{k}}{\binom{2n}{i}} (x_j x_k + y_j y_k) - 1. \quad (4.2)$$

Najmanjšo napako po analogiji s funkcijskim primerom pričakujemo, če aproksimacijo \mathbf{b} izberemo tako, da bo r_{2n} enak večkratniku polinoma Čebiševa. Velja namreč spodnji izrek.

Izrek 4.1 *Med vsemi polinomi stopnje največ $n \geq 1$ z vodilnim koeficientom 1, ima polinom $p(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t)$ najmanjšo neskončno normo na intervalu $[-1, 1]$, ki je enaka $\frac{1}{2^{n-1}}$. Polinom p to vrednost doseže natanko $n + 1$, in sicer v točkah $t = \cos \frac{k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n$.*

Iščemo torej najmanjši $K > 0$, da bo

$$x^2(t) + y^2(t) - 1 = K T_{2n}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

kjer je $T_{2n}(t) = \sum_{i=0}^{2n} \tau_i B_i^{2n}(t)$ polinom Čebiševa prvega reda stopnje $2n$.

Določiti moramo koeficiente x_i in y_i , ki so rešitev sistema $2n + 1$ kvadratnih enačb v neznankeh x_i in y_i ,

$$\rho_i = K \tau_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$

Takšna aproksimacija bo lahko imela optimalen red aproksimacije $2n$, saj interpolira krožnico v $2n$ točkah. Upamo pa tudi, da bo to najboljša aproksimacija krožnega loka glede na napako r_{2n} .

Če dodatno zahtevamo, da imata krožni lok in aproksimacija (4.1) v krajiščih geometrijski kontakt določenega reda, potem dobimo dodatne omejitve na izbiro kontrolnih točk in posledično napaka ni več polinom Čebiševa. Še vedno pa se izkaže, da najmanjšo napako pri dodatnih omejitvah dobimo, če napaka enakomerno oscilira okrog ničle v notranjosti intervala. V nadaljevanju si bomo ogledali vse možne primere za aproksimacije stopnje 1, 2 in 3.

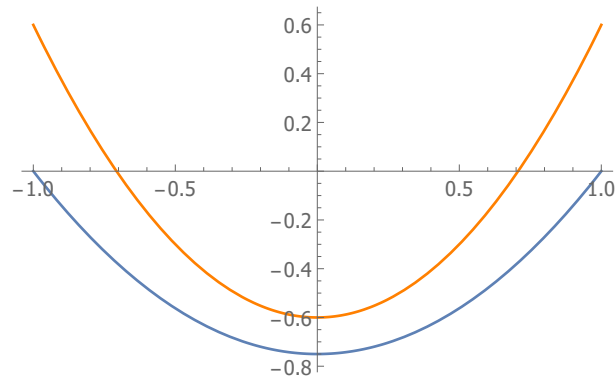
4.1 Linearna aproksimacija

G^0 aproksimacija

Linearna aproksimacija je najpreprostejši primer, s katerim lahko dosežemo največ geometrijski kontakt reda 0. V tem primeru je aproksimacija enolično določena, saj imamo le dve kontrolni točki, ki se morata ujemati s krajišči krožnega loka. Dobimo torej

$$\mathbf{b}_0 = (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \quad \mathbf{b}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top.$$

Maksimalna napaka je dosežena na sredini pri $t = 0$, razvoj pa je oblike $\|r_2\|_\infty = \varphi^2 + \mathcal{O}(\varphi^4)$.



Slika 4.1: Graf napake G^0 (modro) in najboljše linearne aproksimacije (oranžno).

Najboljša linearna aproksimacija

Če ne zahtevamo geometrijskega kontakta v krajiščih, potem lahko kontrolni točki \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_1 skaliramo z nekim faktorjem (radialni premik) tako, da dosežemo po absolutni vrednosti enako napako pri $t \in \{-1, 0, 1\}$. Zaradi simetrije morata biti faktorja d_0 in d_1 enaka. S tem smo za napako dobili skaliran polinom Čebiševa T_2 , ki ga lahko s pomočjo prehodnih matrik za potenčno bazo, zapišemo v Bernsteinovi bazi kot

$$T_2(t) = B_0^2(t) - 3B_1^2(t) + B_2^2(t).$$

Dobimo torej sistem enačb

$$\begin{aligned} K = \rho_0 &= x_0^2 + y_0^2 - 1 = d_0^2 - 1, \\ -3K = \rho_1 &= x_0x_1 + y_0y_1 - 1, \\ K = \rho_2 &= x_1^2 + y_1^2 - 1 = d_1^2 - 1. \end{aligned}$$

Od tu dobimo le eno dopustno rešitev

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sin^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} = \frac{2 \sin^2 \varphi}{3 + \cos(2\varphi)}, \\ d_0 &= \sqrt{K + 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = \frac{2}{\sqrt{3 + \cos(2\varphi)}}, \\ d_1 &= d_0. \end{aligned}$$

Krajši izračun pokaže, da je $\|r_2\|_\infty = 1/2\varphi^2 + \mathcal{O}(\varphi^4)$, ko gre $\varphi \rightarrow 0$.

4.2 Kvadratična aproksimacija

G^1 aproksimacija

Oglejmo si najprej G^1 aproksimacijo. Interpolirati moramo robni točki, zato je

$$\mathbf{b}_0 = (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \quad \mathbf{b}_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top.$$

Ker morata imeti v robnih točkah tangenti Bézierjeve krivulje enako smer kot tangenti krožnice, je preostala kontrolna točka podana z

$$\mathbf{b}_1 = (1/\cos \varphi, 0)^\top,$$

kot smo ugotovili že v (2.1). Točka je določena enolično, prostih parametrov ni. Maksimalna napaka se izraža kot

$$\|r_4\|_\infty = \frac{1}{4}\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^6).$$

G^0 aproksimacija

Pri G^0 aproksimaciji moramo interpolirati robni točki, ki sta kot prej enaki

$$\mathbf{b}_0 = (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \quad \mathbf{b}_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top.$$

Srednjo točko zaradi simetrije zapišemo v obliki $\mathbf{b}_1 = (x_1, 0)^\top$. Najboljšo G^0 aproksimacijo glede na radialno napako dobimo, če napaka enakomerno niha. Zaradi simetrije mora biti to soda funkcija, zaradi interpolacije robnih točk pa je oblike

$$p(t) = at^4 + bt^2 - (a + b).$$

Lokalni ekstremi polinoma p so $t = 0$ in $t = \pm \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{2a}}$, od koder dobimo iz pogoja

$$p(0) = -p\left(\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{2a}}\right)$$

in zahteve $-1 < t < 1$ rešitev, $t = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Prvotna enačba za neznanke x_1 se torej glasi

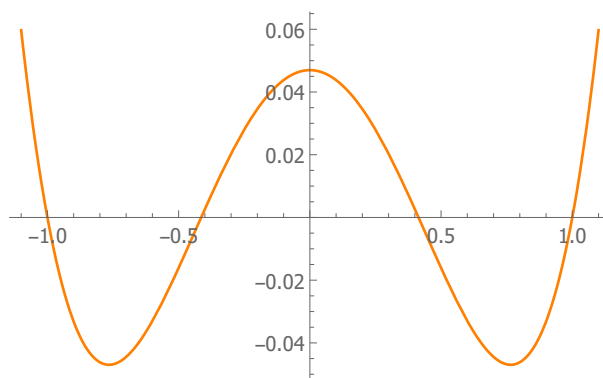
$$r_4(0) = -r_4\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)$$

in od tod rešitev

$$x_1 = \frac{1}{2} \left((\sqrt{2} + 2) \sqrt{(3 - 2\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} \cos \varphi} \right).$$

Ker je

$$(3 - 2\sqrt{2}) \cos(2\varphi) + 2\sqrt{2} - 1 \geq -(3 - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} - 1 = 4\sqrt{2} - 4 > 1$$



Slika 4.2: Najboljša G^0 aproksimacija krožnega loka za kot $\varphi = \pi/3$.

in $\sqrt{2} + 2 > 2\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2} \cos \varphi$, sledi $x_1 > 0$. Slika 4.2 prikazuje napako r_4 za kot $\varphi = \pi/3$. Vidi se, da je napaka v obliki odrezanega polinoma Čebiševa T_4 . Maksimalna napaka ima razvoj

$$\|r_4\|_\infty = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^6).$$

Najboljša kvadratična aproksimacija

Če opustimo še zahtevo po G^0 aproksimaciji, potem mora biti ostanek skaliran polinom Čebiševa. Ker se polinom Čebiševa T_4 v Bernsteinovi bazi izraža kot

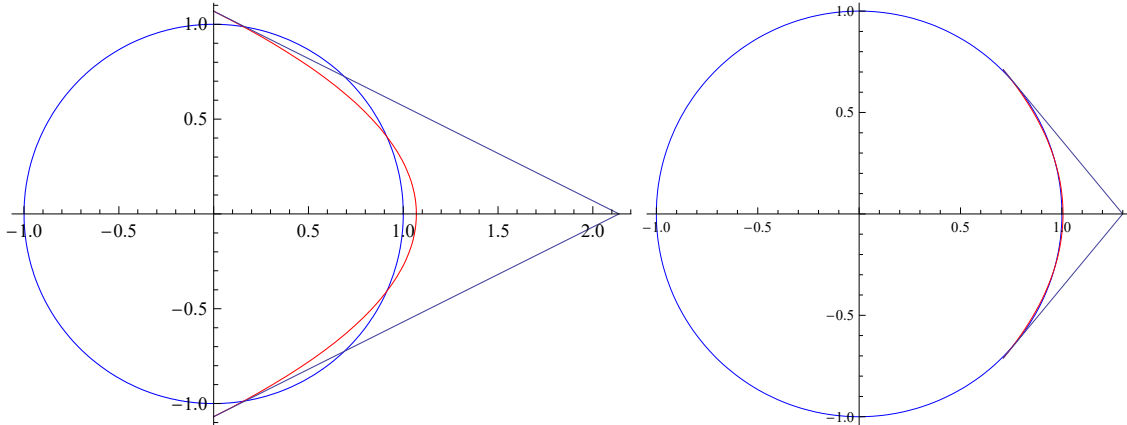
$$T_4(t) = B_0^4(t) - 7B_1^4(t) + \frac{35}{3}B_2^4(t) - 7B_3^4(t) + B_4^4(t),$$

se sistem enačb glasi

$$\begin{aligned} K &= \rho_0 = x_0^2 + y_0^2 - 1 = d_0^2 - 1, \\ -7K &= \rho_1 = x_0x_1 + y_0y_1 - 1, \\ \frac{35}{3}K &= \rho_2 = \frac{1}{3}(x_0x_2 + y_0y_2) + \frac{2}{3}(x_1^2 + y_1^2) - 1, \\ -7K &= \rho_3 = x_1x_2 + y_1y_2 - 1, \\ K &= \rho_4 = x_2^2 + y_2^2 - 1 = d_2^2 - 1. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem rešitev prve in zadnje enačbe se sistem poenostavi v

$$\begin{aligned} 1 - 7K - \sqrt{K+1}(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) &= 0 \\ 3 + 35K - 2(x_1^2 + y_1^2) - (K+1) \cos(2\varphi) &= 0 \\ 1 - 7K - \sqrt{K+1}(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi) &= 0. \end{aligned}$$



Slika 4.3: Najboljša kvadratična aproksimacija polovice in četrtine krožnice.

Če od prve enačbe odštejemo zadnjo, dobimo $y_1\sqrt{K+1} = 0$. Za $K = -1$ bi moralo veljati $x_1^2 + y_1^2 = -16$, kar pa nima realnih rešitev. To pomeni, da je $y_1 = 0$, kar sledi že iz simetrije. Iz prve enačbe tako dobimo

$$x_1 = \frac{1 - 7K}{\sqrt{K+1} \cos \varphi}.$$

Vstavljanje v drugo enačbo nam da kvadratično enačbo

$$(323 - 68 \cos(2\varphi) + \cos(4\varphi)) Q^2 + 128 (\cos^2 \varphi - 7) + 512 = 0$$

za $Q := K + 1$. Od tu dobimo optimalno rešitev

$$K = \frac{16}{13 + 4 \cos \varphi - \cos(2\varphi)} - 1.$$

Z uporabo trigonometričnih enakosti dobimo

$$16 - (13 + 4 \cos \varphi - \cos(2\varphi)) = 3 - 4 \cos \varphi + \cos(2\varphi) = 8 \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

in posledično

$$K = \frac{\sin^4(\frac{\varphi}{2})}{2 - \sin^4(\frac{\varphi}{2})},$$

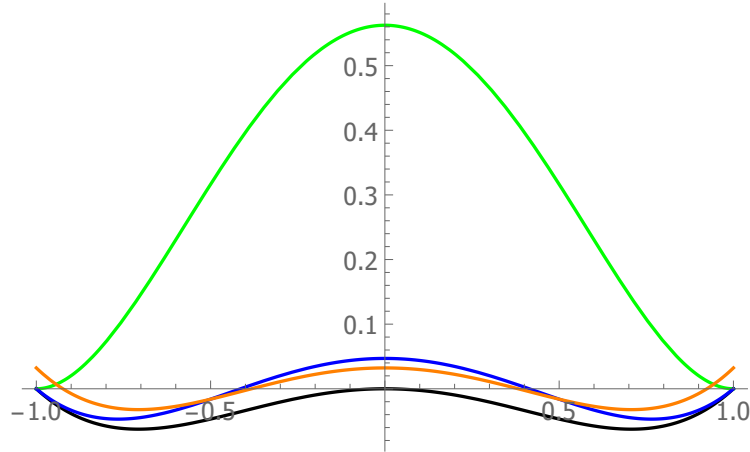
kar dokazuje, da je $\|r_4\|_\infty = \frac{1}{32}\varphi^4 + \mathcal{O}(\varphi^6)$, ko gre $\varphi \rightarrow 0$.

4.3 Kubična aproksimacija

G^2 aproksimacija

Največ, kar lahko dosežemo s kubično aproksimacijo, je G^2 aproksimant. Vemo, da moramo za G^0 aproksimacijo interpolirati robne točke, torej je

$$\mathbf{b}_0 = (\cos \varphi, -\sin \varphi)^\top, \quad \mathbf{b}_3 = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top.$$



Slika 4.4: Graf napake G^1 (zeleno), enostranske G^0 (črno), G^0 (modro) in najboljše kvadratične aproksimacije (oranžno).

Ker morata imeti za G^1 aproksimacijo v robnih točkah tangenti Bézierjeve krivulje enako smer kot tangenti krožnice in ker iščemo rešitev le med simetričnimi krivuljami, sta preostali dve kontrolni točki podani z

$$\mathbf{b}_1 = (\cos \varphi + d \sin \varphi, -\sin \varphi + d \cos \varphi)^\top, \quad \mathbf{b}_2 = (\cos \varphi + d \sin \varphi, \sin \varphi - d \cos \varphi)^\top,$$

kjer je $d > 0$.

Alternativna funkcija napake je tedaj oblike

$$r_6(t) = (t+1)^2(t-1)^2 P_2(t), \quad (4.3)$$

kjer je P_2 polinom stopnje 2 v spremenljivki t (in tudi d).

Če želimo na robu doseči G^2 aproksimacijo, moramo po lemi 1.7 imeti v robnih točkah trojno ničlo, kar pomeni, da mora veljati

$$P_2(-1) = P_2(1) = \frac{9d^2 + 6d \sin(2\varphi) - 6(1 - \cos(2\varphi))}{16} = 0.$$

Od tod dobimo rešitev

$$d = \frac{-\sin(2\varphi) \pm \sqrt{12 \sin^2 \varphi + \sin^2(2\varphi)}}{3}.$$

Zaradi zahteve $d > 0$, je ustrezna rešitev tista, kjer pred korenem vzamemo pozitivni predznak, saj je $\sqrt{12 \sin^2 \varphi + \sin^2(2\varphi)} \geq \sin(2\varphi)$. Asimptotična napaka se izraža kot

$$\|r_6\|_\infty = \frac{1}{64} \varphi^6 + \mathcal{O}(\varphi^8),$$

ko gre $\varphi \rightarrow 0$.

G^1 aproksimacija

Če pogledamo zgolj G^1 aproksimacijo, potem namesto pogoja (4.3) za funkcijo napake r_6 zahtevamo, da je oblike

$$p(t) = C(t+1)^2(t-1)^2(t-a)(t+a),$$

kjer sta a in C konstanti, $0 \leq a \leq 1$.

Ekstreme funkcije p poiščemo z odvajanjem in poleg $t_{1,2} = \pm 1$ dobimo še

$$t_3 = 0, \quad t_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{2a^2 + 1}{3}}.$$

Če želimo, da p na intervalu $[-1, 1]$ enakomerno niha okrog ničle, potem je dovolj zahtevati

$$-p(t_3) = p(t_4),$$

torej

$$C a^2 = \frac{4}{27} C (1 - a^2)^3,$$

od koder dobimo rešitev

$$a = \sqrt{1 - \frac{3}{2(\sqrt{2} - 1)^{1/3}} + \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)^{1/3}} \approx 0,3254.$$

Parametra $\pm a$ sta ničli polinoma P_2 . Za $P_2(a) = 0$ dobimo enačbo

$$9(1 + a^2 + (-1 + a^2) \cos(2\varphi))d^2 - 12(-2 + a^2) \sin(2\varphi)d + 8(-4 + a^2) \sin^2 \varphi = 0$$

in od tod rešitvi

$$d_{+,-} = \frac{\pm 2\sqrt{2}\sqrt{(8 - a^2 + a^2 \cos(2\varphi)) \sin^2 \varphi} + 2(-2 + a^2) \sin(2\varphi)}{3(1 + a^2 + (-1 + a^2) \cos(2\varphi))}.$$

Ker je imenovalec pozitiven za $0 < \varphi \leq \pi/2$ in velja

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\sqrt{(8 - a^2 + a^2 \cos(2\varphi)) \sin^2 \varphi} + 2(-2 + a^2) \sin(2\varphi) &\geq \\ 2\sqrt{2}\sqrt{(8 - a^2) \sin \varphi} + 2(-2 + a^2)2 \sin(\varphi) &= \\ \sin \varphi(2\sqrt{2}\sqrt{(8 - a^2) + 4(-2 + a^2)}) &> \frac{1}{4} \sin \varphi, \end{aligned}$$

dobimo nenegativno rešitev z izbiro d_+ .

Asimptotična napaka zgornje rešitve je

$$\|r_6\|_\infty = -\frac{1}{128} \left(3\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}} - 2 \right) \varphi^6 + \mathcal{O}(\varphi^8) \approx 0,00165\varphi^6 + \mathcal{O}(\varphi^8),$$

ko gre $\varphi \rightarrow 0$.

G^0 aproksimacija

Pri G^0 aproksimaciji še vedno interpoliramo robni točki, srednji točki pa izberemo simetrično, vendar prosto. Tako dobimo

$$\mathbf{b}_1 = (x_1, y_1)^\top = (x_2, -y_2)^\top, \quad \mathbf{b}_2 = (x_2, y_2)^\top, \quad x_2, y_2 \geq 0.$$

Poiskati želimo aproksimacijo, katere napaka bo imela obliko

$$p(t) = at^6 + bt^4 + ct^2 - (a + b + c), \quad (4.4)$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ prosti parametri. Oblika polinoma že upošteva simetrijo in interpolacijo robnih točk, sistem enačb pa dobimo z zahtevo, da ekstremne vrednosti enakomerno nihajo okrog ničle. Z odvajanjem (4.4) ugotovimo, da so lokalni ekstremi doseženi pri $t_1 = 0$, $t_{2,3,4,5} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}}$, zato se sistem enačb glasi

$$p(0) = -p \left(\pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}} \right),$$

$$p(0) = p \left(\pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}} \right).$$

Od tod dobimo tri rešitve za parametra a in b kot funkcije parametra c .

$$a_1 = \frac{4c}{9}, \quad b_1 = -\frac{4c}{3},$$

$$a_2 = \frac{c(7 - 4\sqrt{3})}{9}, \quad b_2 = -\frac{2c(15\sqrt{3} - 26)}{3(4\sqrt{3} - 7)},$$

$$a_3 = \frac{c(4\sqrt{3} + 7)}{9}, \quad b_3 = -\frac{2c(15\sqrt{3} + 26)}{3(4\sqrt{3} + 7)}.$$

Izbire nam določajo polinom p do multiplikativnega faktorja c natančno. Med temi rešitvami izberemo tisto, ki ima najmanjšo napako pri isti konstanti c , to je izbira a_3 , b_3 , kar nam določa

$$p(t) = \frac{1}{9}c \left((7 - 4\sqrt{3})t^6 + 6(\sqrt{3} - 2)t^4 + 9t^2 - 2(\sqrt{3} + 2) \right).$$

Z odvajanjem ugotovimo, da so lokalni ekstremi doseženi pri

$$t = 0, \pm \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \pm \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}.$$

Sistem enačb se zato glasi

$$-r_6(0) = r_6 \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right),$$

$$r_6(0) = r_6 \left(\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \right), \quad (4.5)$$

oziroma

$$16 - (3x_2 + \cos \varphi)^2 = -18 \left(\sqrt{3} - 2 \right) x_2^2 + 12 \left(5\sqrt{3} - 8 \right) x_2 \cos \varphi + \\ 18 \left(7 - 4\sqrt{3} \right) y_2^2 + 12 \left(10\sqrt{3} - 17 \right) y_2 \sin \varphi + \\ \left(3\sqrt{3} - 5 \right) \cos(2\varphi) - 45\sqrt{3} + 65, \quad (4.6)$$

$$(3x_2 + \cos \varphi)^2 - 16 = 18 \left(26 - 15\sqrt{3} \right) x_2^2 + 12 \left(51\sqrt{3} - 88 \right) x_2 \cos \varphi + \\ 54 \left(97 - 56\sqrt{3} \right) y_2^2 + 108 \left(26\sqrt{3} - 45 \right) y_2 \sin \varphi + \\ \left(153\sqrt{3} - 265 \right) \cos(2\varphi) - 495\sqrt{3} + 853. \quad (4.7)$$

Sistem je nelinearen in eksplicitno izražavo rešitve je težko dobiti. Eksistenco rešitve za vse kote lahko pokažemo s homotopijo po kotu.

Izrek 4.2 *V notranjosti območja $D = [1, 2] \times [0, 1]$ obstaja vsaj ena rešitev $(x_2, y_2)^\top$ sistema (4.5) za vsak kot $\varphi \in (0, \pi/2]$.*

Dokaz. Po izreku o homotopiji 2.2 je dovolj preveriti, da obstaja liho število rešitev sistema za nek kot φ z neničelnim Jacobianom, ter da ne obstaja rešitev sistema na robu območja D za noben kot φ .

Za kot $\varphi = \pi/2$ dobimo enolično rešitev

$$x_2 = \frac{4}{9} \sqrt{2 + 4\sqrt{3}}, \quad y_2 = \frac{1}{9}(5 + 2\sqrt{3}).$$

Jacobian preslikave pri istem kotu se poenostavi v

$$-\frac{81}{16} x_2 \left(9 \left(56\sqrt{3} - 97 \right) y_2 - 160\sqrt{3} + 277 \right),$$

torej je pri zgornji rešitvi enak

$$9 \sqrt{\sqrt{3} + \frac{1}{2}} \left(37\sqrt{3} - 64 \right) \approx 1,1547 \neq 0.$$

Preverimo sedaj še, da za $(x_2, y_2)^\top$ iz roba območja D ne obstaja rešitev sistema (4.5). Oglejmo si najprej rob, ko je $y_2 = 0$. Iz prve enačbe sistema (4.6) dobimo, ob upoštevanju pogoja $x_2 \geq 0$, rešitev

$$x_2 = \frac{5(-3 + 2\sqrt{3}) \cos \varphi - \sqrt{3} \sqrt{-85 + 58\sqrt{3} + (101 - 58\sqrt{3}) \cos(2\varphi)}}{-15 + 6\sqrt{3}},$$

iz druge enačbe (4.7) pa rešitev

$$x_2 = \frac{(-59 + 34\sqrt{3}) \cos \varphi + \sqrt{-6397 + 3694\sqrt{3} + (6509 - 3758\sqrt{3}) \cos(2\varphi)}}{-51 + 30\sqrt{3}}.$$

Ugotovimo, da ne obstaja takšen kot $\varphi \in (0, \pi/2]$, pri katerem bi se obe rešitvi ujemale, saj je vedno rešitev prve enačbe večja od druge pri istem kotu. Velja namreč, da je razlika

$$\begin{aligned} & -3432 \left(7\sqrt{3} - 12\right) \cos \varphi + \\ & 429 \left(30\sqrt{3} - 51\right) \sqrt{\left(101 - 58\sqrt{3}\right) \cos(2\varphi) + 58\sqrt{3} - 85} - \\ & 429 \left(5\sqrt{3} - 6\right) \sqrt{\left(6509 - 3758\sqrt{3}\right) \cos(2\varphi) + 3694\sqrt{3} - 6397} \end{aligned}$$

nenegativna, kar sledi iz ekvivalence spodnjih neenakosti

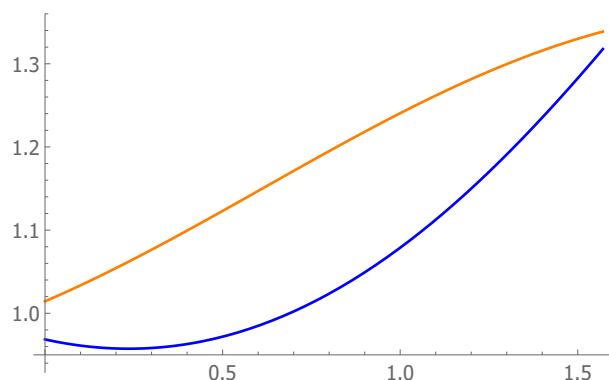
$$\begin{aligned} & 429 \left(30\sqrt{3} - 51\right) \sqrt{\left(101 - 58\sqrt{3}\right) \cos(2\varphi) + 58\sqrt{3} - 85} \geq \\ & 3432 \left(7\sqrt{3} - 12\right) \cos \varphi + 429 \left(5\sqrt{3} - 6\right) \\ & \sqrt{\left(6509 - 3758\sqrt{3}\right) \cos(2\varphi) + 3694\sqrt{3} - 6397}, \\ & \left(\sqrt{3} + 6\right) \sqrt{\left(101 - 58\sqrt{3}\right) \cos(2\varphi) + 58\sqrt{3} - 85} \geq \\ & 8 \cos \varphi + \left(6\sqrt{3} + 11\right) \sqrt{\left(6509 - 3758\sqrt{3}\right) \cos(2\varphi) + 3694\sqrt{3} - 6397}, \\ & \left(172\sqrt{3} - 287\right) \cos(2\varphi) - 140\sqrt{3} + 415 \geq \\ & 8 \left(6\sqrt{3} + 11\right) \cos \varphi \sqrt{\left(6509 - 3758\sqrt{3}\right) \cos(2\varphi) + 3694\sqrt{3} - 6397}, \\ & 6 \sin^2 \varphi \left(55 \left(892\sqrt{3} - 1545\right) \cos(2\varphi) - 152036\sqrt{3} + 263343\right) \geq 0. \end{aligned}$$

V primeru, ko je $y_2 = 1$, je dokaz zelo podoben. Iz prve enačbe (4.6) dobimo rešitev

$$\begin{aligned} x_2 = & \left(-\sqrt{3} \sqrt{-439 + 262\sqrt{3} + (101 - 58\sqrt{3}) \cos(2\varphi) + (580 - 336\sqrt{3}) \sin \varphi} + \right. \\ & \left. 5(-3 + 2\sqrt{3}) \cos \varphi \right) / \left(-15 + 6\sqrt{3} \right), \end{aligned}$$

iz druge enačbe (4.7) pa rešitev

$$\begin{aligned} x_2 = & \left(\sqrt{-66319 + 38290\sqrt{3} + (6509 - 3758\sqrt{3}) \cos(2\varphi) + 36(1545 - 892\sqrt{3}) \sin \varphi} + \right. \\ & \left. (-59 + 34\sqrt{3}) \cos \varphi \right) / \left(-51 + 30\sqrt{3} \right). \end{aligned}$$



Slika 4.5: Prikaz rešitev posameznih enačb sistema za x_2 na robu območja D , ko je $y_2 = 1$.

Tudi tu ne obstaja takšen kot $\varphi \in (0, \pi/2]$, pri katerem bi se obe rešitvi ujemali. Vedno je namreč rešitev prve enačbe manjša od rešitve druge enačbe pri istem kotu kot se lepo vidi na sliki 4.5.

Primeru, ko gledamo fiksen parameter x_2 , sta za obravnavo še preprostejša. V primeru, ko je $x_2 = 1$, dobimo iz druge enačbe (4.7) le negativni rešitvi

$$y_2 = -\frac{(56\sqrt{3} + 97)}{6} \left(6(26\sqrt{3} - 45) \sin \varphi \pm \sqrt{6} \sqrt{(1 - \cos \varphi) \left((12883 - 7438\sqrt{3}) \cos \varphi - 9987 + 5766\sqrt{3} \right)} \right),$$

saj so ekvivalentne neenakosti

$$\begin{aligned} \sqrt{6} (26\sqrt{3} - 45) \sin \varphi &\geq \\ \sqrt{(1 - \cos \varphi) \left((12883 - 7438\sqrt{3}) \cos \varphi - 9987 + 5766\sqrt{3} \right)}, & \\ (24318 - 14040\sqrt{3}) \sin^2 \varphi &\geq \\ (7438\sqrt{3} - 12883) \cos^2 \varphi + (22870 - 13204\sqrt{3}) \cos \varphi - 9987 + 5766\sqrt{3}, & \\ 0 &\geq (11435 - 6602\sqrt{3}) (\cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 3), \\ (1 - \cos \varphi)(3 + \cos \varphi) &\geq 0. \end{aligned}$$

Pri pogoju $x_2 = 2$ dobimo kot rešitev prve enačbe (4.6) le kompleksni rešitvi

$$y_2 = -\frac{(4\sqrt{3} + 7)}{6} \left((20\sqrt{3} - 34) \sin \varphi \pm i \sqrt{149 - 7(86\sqrt{3}) \cos(2\varphi) + 120(26\sqrt{3} - 45) \cos \varphi + 4843 - 2794\sqrt{3}} \right).$$

To pomeni, da na robu območja ni realne rešitve sistema. S tem je dokaz zaključen. ■

Kratek izračun pokaže še, da je r_6 dejansko premaknjen oziroma odrezan polinom Čebiševa. Zanje velja, da je lokacija prve ničle $t_1 = \cos\left(\frac{4n-1}{4n}\pi\right)$ in lokacija zadnje ničle $t_{2n} = \cos\left(\frac{1}{4n}\pi\right) = -t_1$. Za $n = 3$ vidimo, da je

$$\begin{aligned} T_6\left(\frac{t(t_6 - t_1) + t_1 + t_6}{2}\right) &= \\ T_6(-t_1 t) &= \\ k\left(\left(7 - 4\sqrt{3}\right)t^6 + 6\left(\sqrt{3} - 2\right)t^4 + 9t^2 - 2\left(\sqrt{3} + 2\right)\right) &= \\ cr_6(t), \end{aligned}$$

za neke konstante k, c .

Enak tip aproksimacije za splošno stopnjo n je obravnavan v članku [23], kjer so postavili hipotezo, da je najboljša G^0 aproksimacija te oblike.

Najboljša kubična aproksimacija

Poglejmo si sedaj še najboljšo aproksimacijo krožnice, če opustimo tudi zahtevo po interpolaciji robnih točk. Za zapis sistema enačb potrebujemo izražavo polinoma Čebiševa T_6 v Bernsteinovi bazi

$$T_6(t) = B_0^6(t) - 11B_1^6(t) + 33B_2^6(t) - \frac{231}{5}B_3^6(t) + 33B_4^6(t) - 11B_5^6(t) + B_6^6(t).$$

Kot prej, najprej upoštevamo enačbi $K = \rho_0$ in $K = \rho_6$, kjer sta ρ_0 in ρ_6 definirana z (4.2) za $n = 3$. Sistem za koeficiente \mathbf{b} se zato poenostavi v

$$\begin{aligned} 1 - 11K - \sqrt{K+1}(\cos \varphi x_1 - \sin \varphi y_1) &= 0, \\ 5 - 3(x_1^2 + y_1^2) + 165K - 2\sqrt{K+1}(\cos \varphi x_2 - \sin \varphi y_2) &= 0, \\ 10 - 462K - (K+1)\cos(2\varphi) - 9(x_1x_2 + y_1y_2) &= 0, \\ 5 - 3(x_2^2 + y_2^2) + 165K - 2\sqrt{K+1}(\cos \varphi x_1 + \sin \varphi y_1) &= 0, \\ 1 - 11K - \sqrt{K+1}(\cos \varphi x_2 + \sin \varphi y_2) &= 0. \end{aligned}$$

Ker sta krožni lok in polinom Čebiševa T_6 simetrična glede na $\varphi = 0$ oziroma parameter $t = 0$, bo zagotovo tudi optimalna rešitev takšne oblike, zato lahko predpostavimo, da je $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$. Tako dobimo sistem treh enačb in treh neznank

$$\begin{aligned} 1 - 11K - \sqrt{K+1}(\cos \varphi x_1 - \sin \varphi y_1) &= 0, \\ 5 - 3(x_1^2 + y_1^2) + 165K - 2\sqrt{K+1}(\cos \varphi x_1 + \sin \varphi y_1) &= 0, \\ 10 - 462K - (K+1)\cos(2\varphi) - 9(x_1^2 - y_1^2) &= 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Z uporabo Gröbnerjeve baze in eliminacije dobimo enačbo stopnje štiri

$$\begin{aligned}
& (5854563 + 2666664 \cos(2\varphi) + 130780 \cos(4\varphi) + 792 \cos(6\varphi) + \cos(8\varphi))Q^4 \\
& - (29174208 + 9460448 \cos(2\varphi) + 235584 \cos(4\varphi) + 800 \cos(6\varphi))Q^3 \\
& + (54174848 + 10940928 \cos(2\varphi) + 104832 \cos(4\varphi))Q^2 \quad (4.9) \\
& - (44292096 + 4147200 \cos(2\varphi))Q \\
& + 13436928 = 0
\end{aligned}$$

za $Q := K + 1$. Opazimo lahko, da so vsi koeficienti zgornjega polinoma polinomi v $\cos(2\varphi)$. Analitična rešitev za to enačbo obstaja, a je preveč kompleksna, da bi jo lahko analizirali. Poleg tega iščemo le takšno rešitev, da bo $Q \geq 1$.

Ko enkrat izračunamo Q , se ostale rešitve prvotnega sistema izražajo kot

$$x_1 = \left(2 \cos \varphi ((\cos(2\varphi) - 34) Q + 36) \pm \sqrt{2} \sin \varphi \right. \\
\left. \sqrt{(132 \cos(2\varphi) - \cos(4\varphi) - 1187) Q^2 + 48(79 - 3 \cos(2\varphi))Q - 2592} \right) / (6\sqrt{Q}),$$

$$x_2 = x_1,$$

$$y_1 = \frac{-12 + 11Q + \sqrt{Q} \cos \varphi x_1}{\sin \varphi \sqrt{Q}},$$

$$y_2 = -y_1.$$

Izrek 4.3 Za vsak $\varphi \in [0, \pi/2] := I$ ima enačba (4.9) vsaj eno rešitev $Q \geq 1$.

Dokaz. Za $Q = 1$, je leva stran enačbe (4.9) enaka $128 \sin^8 \varphi$, to pomeni, da je nenegativna na celotnem intervalu I . Zadostuje torej poiskati vrednost $Q \geq 1$, ki je lahko odvisna od kota φ tako, da je leva stran enačbe (4.9) nepozitivna. Z razvojem izraza v Maclaurinovo vrsto pri lokalnem minimumu, dobimo idejo za oceno, namreč $Q = 1 + 1/4 \sin^2 \varphi$. Leva stran enačbe tedaj postane

$$\begin{aligned}
& \sin^4 \varphi (124603406 - 292483928 \cos(2\varphi) + 35361519 \cos(4\varphi) \\
& - 1790844 \cos(6\varphi) + 91394 \cos(8\varphi) + 724 \cos(10\varphi) + \cos(12\varphi)) / 4096.
\end{aligned}$$

Z uporabo preprostih ocen velja

$$\begin{aligned}
& \sin^4 \varphi (124603406 - 292483928 \cos(2\varphi) + 35361519 \cos(4\varphi) \\
& - 1790844 \cos(6\varphi) + 91394 \cos(8\varphi) + 724 \cos(10\varphi) + \cos(12\varphi)) / 4096 < \\
& \sin^4 \varphi (161847888 - 292483928 \cos(2\varphi)) / 4096 \leq 0
\end{aligned}$$

vsaj za $\varphi \in [0, \pi/8]$. Z uporabo Taylorjeve vrste pri $\pi/2$ za lokalni minimum danega izraza, pa analogno za $Q = 162/161$ lahko pokažemo, da se izraz razvije v

$$\frac{419904 \cos^2 \varphi (-1262134 + 1319535 \cos(2\varphi) - 33210 \cos(4\varphi) + 6561 \cos(6\varphi))}{671898241},$$

od koder dobimo

$$\frac{419904 \cos^2 \varphi (-1262134 + 1319535 \cos(2\varphi) - 33210 \cos(4\varphi) + 6561 \cos(6\varphi))}{671898241} <$$

$$\frac{419904 \cos^2 \varphi (-1222363 + 1319535 \cos(2\varphi))}{671898241} \leq 0$$

vsaj za $\varphi \in [\pi/8, \pi/2]$.

Od tu lahko zaključimo, da vsaj ena rešitev $Q \geq 1$ vedno obstaja. ■

Izrek 4.3 dokazuje obstoj rešitve $Q \geq 1$ enačbe (4.9), vendar s tem še nismo pokazali, da so sočasno izpolnjeni tudi pogoji za x_1 in y_1 . Za dokaz slednjega bomo zopet uporabili homotopijo. Oglejmo si najprej konkreten primer. Pri kotu $\varphi = \pi/2$ se sistem (4.8) poenostavi v

$$\begin{aligned} 1 - 11K + \sqrt{K+1}y_1 &= 0, \\ 5 - 3(x_1^2 + y_1^2) + 165K - 2\sqrt{K+1}y_1 &= 0, \\ 11 - 461K - 9(x_1^2 - y_1^2) &= 0. \end{aligned}$$

Enolična rešitev, ki ustreza pogojem $K \geq 0$, $x_1 \geq 0$ in $y_1 \leq 0$ je enaka

$$\begin{aligned} K &= 1/161, \\ x_1 &= \frac{16}{3} \sqrt{\frac{10}{161}}, \\ y_1 &= -\frac{25}{3} \sqrt{\frac{2}{161}}. \end{aligned}$$

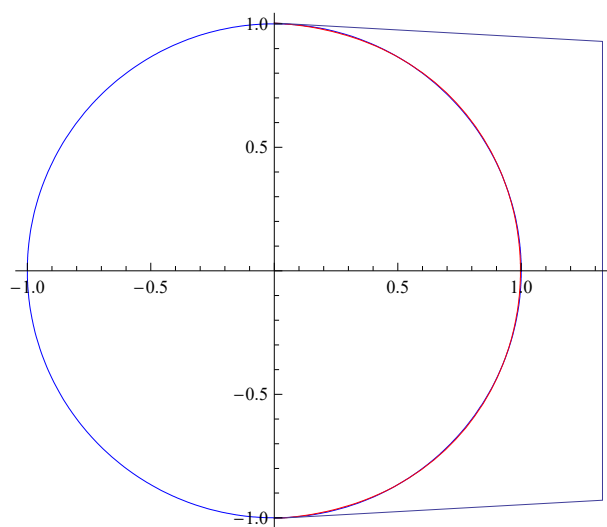
V tem primeru je torej kvadrat razdalje med \mathbf{b} in krožnim lokom največ $1/161 \approx 6,2112 \cdot 10^{-3}$, kar je tudi najboljša možna aproksimacija enotske polkrožnice s kubično polinomske krivuljo glede na napako r_6 .

Za dokaz obstoja rešitve za splošen kot $\varphi \in I$ si najprej oglejmo enostransko aproksimacijo, s pomočjo katere bomo potem pokazali obstoj.

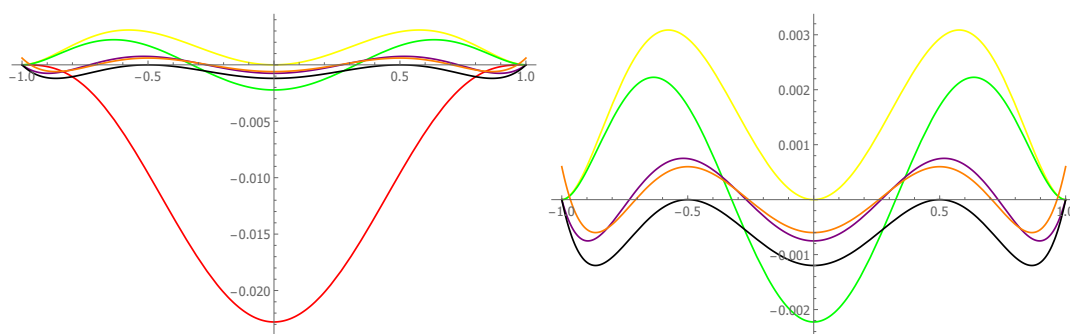
Enostranska aproksimacija z interpolacijo robnih točk

Do sedaj smo si ogledali že nekaj aproksimacij, pri katerih interpoliramo določene točke na krožnici. Še ena možnost za interpolacijo je enostranska aproksimacija. To je aproksimacija, pri kateri aproksimant nikoli ne seka aproksimirane krivulje (lahko pa se je dotakne). Vemo, da dobimo tem boljšo aproksimacijo (višji aproksimacijski red) čim večje število kontaktov med krožnim lokom in iskano aproksimacijo imamo. Poleg tega dobimo čim manjšo napako, če so vsi ekstremi enake velikosti.

Kot (4.4) pri G^0 aproksimaciji, dobimo ekstremne vrednosti polinoma z zahtevo, da so ekstremi izmenično enaki 0 oziroma so med seboj enako veliki



Slika 4.6: Kubična aproksimacija polkrožnice.

Slika 4.7: Graf napake G^2 (rdeče), enostranske G^1 (rumeno), G^1 (zeleno), enostranske G^0 (črno), G^0 (vijolično) in najboljše kubične aproksimacije (oranžno).

$$0 = p \left(\pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}} \right),$$

$$p(0) = p \left(\pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}} \right).$$

Od tod dobimo dve rešitvi za a in b kot funkciji parametra c , ki se glasita

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{16c}{9}, \quad b_1 = -\frac{8c}{3}, \\ a_2 &= \frac{c}{9}, \quad b_2 = -\frac{2c}{3}. \end{aligned}$$

Pri istem parametru c dobimo z izbiro a_1, b_1 manjšo napako. Lokacije ekstremov so tedaj

$$t \in \{-1, -\sqrt{3}/2, -1/2, 0, 1/2, \sqrt{3}/2, 1\}.$$

Zaradi $d_0 = d_n = 1$ in zaradi simetrije $y_1 = -y_2, x_1 = x_2$, nam ostaneta le še dva parametra x_2 in y_2 . Pri enostranski aproksimaciji sta zaradi simetrije torej potrebna le dva pogoja. Sistem enačb se glasi

$$\begin{aligned} r_6(1/2) &= 0, \\ r_6(0) &= r_6(\sqrt{3}/2), \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} 72x_2^2 + 112x_2 \cos \varphi + 18y_2^2 + 52y_2 \sin \varphi + 3 \cos(2\varphi) - 187 &= 0, \\ 120x_2^2 + 16x_2 \cos \varphi - 6y_2^2 - 60y_2 \sin \varphi + 7 \cos(2\varphi) - 143 &= 0. \end{aligned}$$

Z izražanjem in vstavljanjem ene spremenljivke iz prve v drugo enačbo, lahko z uporabo Ferrarijeve metode dobimo eksplicitno rešitev, ki pa je za nadaljnjo analizo preveč kompleksna. Tu bomo zato podali samo dokaz obstoja realne rešitve. Uporabili bomo dokaz s homotopijo.

Rešitev sistema enačb lahko predstavimo kot množico ničel preslikave

$$\mathbf{H} : [0, \infty)^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

kjer je $I := [\varepsilon, \pi/2]$ in $0 < \varepsilon < \pi/2$. Bolj natančno definiramo \mathbf{H} kot

$$\mathbf{H}(x_2, y_2; \varphi) = \left(r_6(1/2), r_6(0) - r_6(\sqrt{3}/2) \right)^\top.$$

Numerični primeri kažejo, da ima lahko sistem $\mathbf{H}(x_2, y_2; \varphi) = \mathbf{0}$ nekaj rešitev, nekatere morda celo ne zadostijo pogojem $x_2, y_2 \geq 0$. Zato omejimo \mathbf{H} na $D \times I$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$ zaprto kvadratno območje $D = [1, 2] \times [0, 1]$.

Izrek 4.4 *Sistem $\mathbf{H}(x_2, y_2; \varphi) = \mathbf{0}$ ima v notranjosti območja $D = [1, 2] \times [0, 1]$ vsaj eno rešitev $(x_2, y_2)^\top$ za vsak kot $\varphi \in I$.*

Dokaz. Za $\varphi = \pi/2$ dobimo le eno rešitev

$$x_2 = \frac{16\sqrt{5}}{27}, \quad y_2 = \frac{25}{27}.$$

Jacobian preslikave je enak

$$-384x_2(27y_2 + 55)$$

in je za zgornjo rešitev enak $-\frac{163840\sqrt{5}}{9} \neq 0$.

Pokazati moramo še, da na robu območja D ni nobene rešitve. Ko je $y_2 = 0$, dobimo iz prve enačbe sistema, ob upoštevanju pogoja $x_2 \geq 0$, rešitev

$$x_2 = \frac{1}{36} \left(\sqrt{338 \cos(2\varphi) + 3758} - 28 \cos \varphi \right),$$

iz druge enačbe pa rešitev

$$x_2 = \frac{1}{60} \left(\sqrt{4298 - 202 \cos(2\varphi)} - 4 \cos \varphi \right).$$

Ugotovimo, da ne obstaja takšen kot $\varphi \in (0, \pi/2]$, pri katerem bi se obe rešitvi ujemale, saj je vedno rešitev prve enačbe večja od druge pri istem kotu. Razlika

$$\frac{1}{180} \left(-128 \cos \varphi + 5\sqrt{338 \cos(2\varphi) + 3758} - 3\sqrt{4298 - 202 \cos(2\varphi)} \right)$$

je namreč nenegativna, kar sledi iz ekvivalentnosti spodnjih neenakosti

$$\begin{aligned} 5\sqrt{338 \cos(2\varphi) + 3758} &\geq 128 \cos \varphi + 3\sqrt{4298 - 202 \cos(2\varphi)} \\ 173 \cos(2\varphi) + 3923 &\geq 64 \cos \varphi \sqrt{4298 - 202 \cos(2\varphi)} \\ 750(17567 - 1183 \cos(2\varphi)) \sin^2 \varphi &\geq 0. \end{aligned}$$

V primeru, ko je $y_2 = 1$, je dokaz zelo podoben. Iz prve enačbe dobimo rešitev

$$x_2 = \frac{1}{36} \left(\sqrt{-936 \sin \varphi + 338 \cos(2\varphi) + 3434} - 28 \cos \varphi \right),$$

iz druge enačbe pa rešitev

$$x_2 = \frac{1}{60} \left(\sqrt{1800 \sin \varphi - 202 \cos(2\varphi) + 4478} - 4 \cos \varphi \right).$$

Tudi tu ne obstaja takšen kot $\varphi \in (0, \pi/2]$, pri katerem bi se obe rešitvi ujemale. Vedno je namreč rešitev prve enačbe manjša od rešitve druge enačbe pri istem kotu, kot lahko vidimo na sliki 4.8.

Za $x_2 = 1$ sta obe rešitvi za y_2 druge enačbe negativni

$$y_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{4 \cos \varphi - 17 \cos(2\varphi) + 13} - 5 \sin \varphi,$$

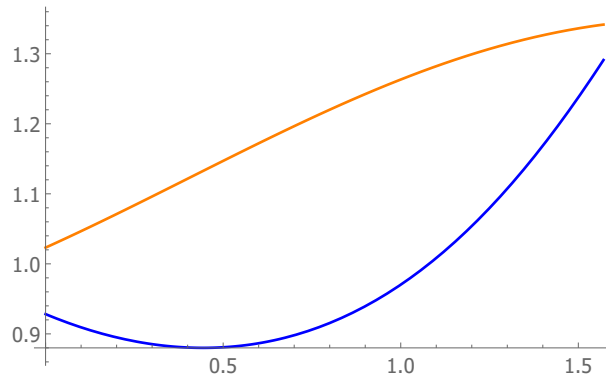
saj je

$$\begin{aligned} 25 \sin^2 \varphi &\geq \frac{2}{3} (4 \cos \varphi - 17 \cos(2\varphi) + 13) \\ \frac{2}{3} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) (7 \cos \varphi + 15) &\geq 0, \end{aligned}$$

zato tu ni ustrezne rešitve. V primeru $x_2 = 2$ pa sta obe rešitvi za y_2 prve enačbe sistema kompleksni

$$y_2 = \frac{1}{9} \left(\pm i\sqrt{2} \sqrt{504 \cos \varphi + 49 \cos(2\varphi) + 185} - 13 \sin \varphi \right).$$

Ker torej ne obstaja rešitev na robu območja D za poljuben $\varphi \in I$, iz izreka 2.2 sledi, da imamo vsaj eno rešitev za vsak $\varphi \in I$. S tem smo pokazali obstoj dopustne realne rešitve. ■



Slika 4.8: Prikaz rešitev posameznih enačb sistema za x_2 na robu območja D , ko je $y_2 = 1$.

Če torej poznamo najboljšo aproksimacijo Čebiševa s funkcijo napake $x^2(t) + y^2(t) - 1 = K T_{2d}(t)$, lahko preprosto dobimo enostranski interpolant s skaliranjem kontrolnih točk v radialni smeri.

Naj bo C faktor skaliranja. Nove kontrolne točke so

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = (C x_i, C y_i), \quad i = 1, \dots, d,$$

funkcija napake pa

$$\tilde{r}_{2n}(t) = \tilde{x}^2(t) + \tilde{y}^2(t) - 1 = C^2(x^2(t) + y^2(t)) - 1 = C^2(K T_{2d}(t)) + C^2 - 1.$$

Za $t = 1$ dobimo enačbo

$$0 = C^2(K T_{2d}(1)) + C^2 - 1 = C^2K + C^2 - 1,$$

od koder sledi

$$C = \frac{1}{\sqrt{K+1}}.$$

Skaliranje vseh kontrolnih točk radialno s faktorjem $C = \frac{1}{\sqrt{K+1}}$, nam da najboljši enostranski interpolant z napako

$$\max_{t \in [-1, 1]} |e(\tilde{\mathbf{p}}(t))| = \frac{2K}{1+K}.$$

Z opisanim postopkom lahko iz enostranske aproksimacije, katere obstoj smo pokazali, dobimo aproksimacijo, ki enakomerno niha okrog ničle. S tem zaključimo dokaz obstoja nenegativne rešitve za parametra x_2 in y_2 pri najboljši kubični aproksimaciji iz razdelka 4.3.

4.4 Zaključek

V tem poglavju je bilo predstavljenih nekaj aproksimacij krožnega loka s parametričnimi polinomskimi krivuljami nizkih stopenj. Poiskati smo želeli optimalne aproksimacije pri nekaterih dodatnih pogojih gladkosti v robnih točkah. Gre dejansko za analogijo s funkcijskim primerom, kjer je aproksimacija z minimalno napako dosežena, če napaka oscilira okrog funkcije in hkrati doseže po absolutni vrednosti enaka odstopanja. Ker določenih rezultatov ni bilo možno dobiti v zaključeni obliki, oziroma je bila njihova nadaljnja analiza preveč kompleksna, smo se poslužili dokazov obstoja iskane rešitve s pomočjo homotopije. Z nekoliko drugačnim pristopom je bila v članku [23] dokazana optimalnost metod opisanih v tem poglavju. Opisan je bil tudi postopek za poljubno stopnjo, a formul v zaključeni obliki ni bilo podanih, saj zahtevajo rešitve zahtevnih algebraičnih enačb višjih stopenj. Prav tako v praksi aproksimacije z višjimi stopnjami niso pretirano zanimive, predvsem zaradi računske zahtevnosti in zaokrožitvenih napak. V članku [17] avtorja dokažeta obstoj G^{m-1} aproksimacije za poljubno stopnjo n . Pri tem uporabita razcep poenostavljene radialne napake v kompleksnem.

Poglavje 5

Zaključki

V tem delu je bilo predstavljenih nekaj različnih pristopov za aproksimacijo krožnega loka s parametričnimi polinomskimi krivuljami nizkih stopenj. Po nekaj začetnih definicijah in pomožnih izrekih, je bila najprej predstavljena geometrijska aproksimacija reda ena (G^1) s polinomske krivuljo stopnje štiri. Aproksimacija je posplošitev že znane metode, predstavljene v članku [15] iz leta 2007. Namesto dotika reda tri v sredinski točki, so kontrolne točke izbrane tako, da se krivulja s krožnim lokom dotika v dveh notranjih točkah z redom ena. Ker je že dotik v robnih točkah reda ena, namreč ni smiselno aproksimacije izbrati tako, da imamo v notranjosti dotik višjega reda. Izkaže se, da je dobljena aproksimacija boljša glede na radialno napako, dobljeno s prvotno metodo. Kljub temu obstajajo metode, ki se s krožnim lokom sekajo ali dotikajo v še več točkah, izbranih tako, da je radialna napaka čim manjša. Optimalna rešitev, kjer se krožni lok in aproksimacija v notranjosti sekajo štirikrat, kontrolne točke pa so izbrane tako, da alternativna radialna napaka enakomerno oscilira, je bila konec leta 2017 poslana v objavo v članku [23]. Kljub temu pa je metoda, obravnavana v disertaciji, asimptotično najboljša enostranska aproksimacija. V praksi, na primer pri robotiki, je namreč včasih pomembno, da ne sekamo aproksimirane krožnice. Izpeljana metoda ima optimalni red aproksimacije 8.

Poglavje se nadaljuje z aproksimacijo odsekov stožnic. Metodo lahko namreč posplošimo in jo uporabimo v postopku, pri katerem v subdivizijskem procesu računamo nove delilne točke tako dolgo, da izpolnimo neke dodatne pogoje oziroma dosežemo zahtevano toleranco, na koncu pa z izpeljano metodo vsak odsek tudi aproksimiramo. V literaturi obstaja kar nekaj člankov s to tematiko. Posplošitev smo naredili na podoben način, kot je bilo predstavljeno v [1]. Seveda pa bi lahko kontrolne točke, s pomočjo katerih potem izračunamo aproksimacijo, izbrali tudi na kakšen drugačen način in ne nujno simetrično, saj odseki stožnic niso nujno simetrični. Splošna aproksimacija stožnic, še posebno elipse, kot posplošitev krožnice, je tako še nekoliko kompleksnejši odprt problem.

Drugi del doktorske disertacije je posvečen aproksimaciji krožnega loka, kjer za mero namesto radialne napake uporabimo napako ukrivljenosti. Predstavljenih je nekaj preprostih polinomskih aproksimacij nizkih stopenj. Namesto višjih stopenj smo, zaradi kompleksnosti izračuna napake ukrivljenosti, raje uporabili aproksi-

macijo z dvoloki. Kot pri radialni napaki smo ugotovili, da je optimalna napaka dosežena tedaj, ko so ekstremne vrednosti oziroma robne vrednosti po absolutni vrednosti enako velike. Ugotovili smo še, da zaradi odvodov drugega reda, ki nastopajo pri izračunu ukrivljenosti, optimalni red aproksimacije pade za dva v primerjavi z optimalnim redom aproksimacije glede na radialno napako.

Zadnji odsek tega dela je posvečen optimalni aproksimaciji krožnega loka glede na radialno napako. Ugotovili smo, da vsaj za polinomske aproksimacije nizkih stopenj velja, da dobimo najboljšo znano aproksimacijo natanko tedaj, ko napaka enakomerno oscilira. Predstavljene so polinomske aproksimacije nizkih stopenj, ki imajo v robnih točkah s krožnim lokom geometrijski kontakt reda 0, 1 ali 2, ali pa samo aproksimirajo enak kot kot krožni lok. V slednjem primeru se izkaže, po analogiji s funkcijskim primerom, da dobimo optimalno rešitev takrat, ko je napaka skaliran polinom Čebiševa. V članku [23] so obravnavani opisani primeri in primeri višjih stopenj nekoliko splošneje, kljub temu pa dokaza o optimalnosti še vseeno ni.

Glede na veliko število objavljenih člankov v zadnjem obdobju izgleda, da je to področje še vedno precej zanimivo. Tako je bilo v [17] šele pred kratkim pokazano, s pomočjo razcepa polinoma radialne napake v kompleksnem, kakšna je najboljša G^{n-1} aproksimacija krožnega loka s polinomskimi krivuljami stopnje n glede na napako r_{2n} . Omenjen pristop je morda možno uporabiti še za izpeljavo drugih metod, ki imajo s krožnim lokom kontakt nižjega reda v robnih točkah. Zanimivo bi bilo poiskati tudi razne druge aproksimacije krožnega loka, kjer za napako vzamemo kakšno drugo mero, na primer ločno dolžino, ali pa upoštevati samo določeno družino polinomskih krivulj, denimo krivulje s pitagorejskim hodografom. Prav tako ostaja odprt problem dokaz optimalnosti že izpeljanih metod v splošnem ali pa posplošitev teh metod za aproksimacijo stožnic. To je le nekaj področij, ki jih je vredno vzeti v obzir v prihodnje.

Literatura

- [1] Young Joon Ahn. Approximation of conic sections by curvature continuous quartic Bézier curves. *Comput. Math. Appl.*, 60(7):1986–1993, 2010.
- [2] Young Joon Ahn in Hong Oh Kim. Approximation of circular arcs by Bézier curves. *J. Comput. Appl. Math.*, 81(1):145–163, 1997.
- [3] Melvyn S. Berger. *Nonlinearity and functional analysis*. Academic Press, New York, 1977.
- [4] Tor Dokken, Morten Dæhlen, Tom Lyche in Knut Mørken. Good approximation of circles by curvature-continuous Bézier curves. *Comput. Aided Geom. Design*, 7(1-4):33–41, 1990.
- [5] Lian Fang. Circular arc approximation by quintic polynomial curves. *Comput. Aided Geom. Design*, 15(8):843–861, 1998.
- [6] Lian Fang. G^3 approximation of conic sections by quintic polynomial curves. *Comput. Aided Geom. Design*, 16(8):755–766, 1999.
- [7] Gerald Farin. *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*. Computer Science and Scientific Computing. Academic Press Inc., 4. izd., 1997.
- [8] Michael S. Floater. An $O(h^{2n})$ Hermite approximation for conic sections. *Comput. Aided Geom. Design*, 14(2):135–151, 1997.
- [9] Michael Goldapp. Approximation of circular arcs by cubic polynomials. *Comput. Aided Geom. Design*, 8(3):227–238, 1991.
- [10] Seok Hur in Taewan Kim. The best G^1 cubic and G^2 quartic Bézier approximations of circular arcs. *J. Comput. Appl. Math.*, 236(6):1183–1192, 2011.
- [11] Gašper Jaklič in Jernej Kozak. On parametric polynomial circle approximation. *Numer. Algorithms*, 77:433—450, 2018.
- [12] Gašper Jaklič, Jernej Kozak, Marjeta Krajnc in Emil Žagar. Approximation of circular arcs by parametric polynomial curves. *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 53(2):271–279, 2007.

- [13] Gašper Jaklič. Uniform approximation of a circle by a parametric polynomial curve. *Comput. Aided Geom. Design*, 41:36–46, 2016.
- [14] Gašper Jaklič in Emil Žagar. Curvature variation minimizing cubic hermite interpolants. *Appl. Math. Comput.*, 218(7):3918–3924, 2011.
- [15] Seon-Hong Kim in Young Joon Ahn. An approximation of circular arcs by quartic Bézier curves. *Comput. Aided Design*, 39(6):490–493, 2007.
- [16] Soo Won Kim in Young Joon Ahn. Circle approximation by quartic G^2 spline using alternation of error function. *J. KSIAM*, 17(3):171–179, 2013.
- [17] Marjeta Knez and Emil Žagar. Interpolation of circular arcs by parametric polynomials of maximal geometric smoothness. *poslano v Comput. Aided Geom. Design*, 2017.
- [18] Boštjan Kovač, Martin Reimers in Emil Žagar. Best polynomial circular arc approximations. *v pripravi*, 2017.
- [19] Boštjan Kovač in Emil Žagar. Some new G^1 quartic parametric approximants of circular arcs. *Appl. Math. Comput.*, 239:254–264, 2014.
- [20] Boštjan Kovač in Emil Žagar. Curvature approximation of circular arcs by low-degree parametric polynomials. *J. Numer. Math.*, 24(2):95 – 104, 2016.
- [21] Zhi Liu, Jie-qing Tan, Xiao-yan Chen in Li Zhang. An approximation method to circular arcs. *Appl. Math. Comput.*, 219(3):1306–1311, 2012.
- [22] Knut Mørken. Best approximation of circle segments by quadratic Bézier curves. *Curves and surfaces (Chamonix-Mont-Blanc, 1990)*, strani 331–336. Academic Press, 1991.
- [23] Aleš Vavpetič in Emil Žagar. A general framework for the optimal approximation of circular arcs by parametric polynomial curves. *poslano v J. Comput. Appl. Math.*, 2017.
- [24] Zeng Xiaoming in Chu Licai. Approximation of circular arcs by quartic Bézier curves. *J. Comp.-Aided Design Comp. Graph.*, 22(7):1094–1098, 2010.