UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Teja Tement

Razlikovalni indeks grafa

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Ljubljana, 2016

Podpisana Teja Tement izjavljam:

– da sem magistrsko delo z naslovom *Razlikovalni indeks grafa* izdelala samostojno pod mentorstvom prof. dr. Sandija Klavžarja in

– da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 2016 Podpis: ....

Zahvaljujem se mentorju, prof. dr. Sandiju Klavžarju, za pomoč pri pisanju magistrske naloge, za vse koristne nasvete in razlage.
Iskrena zahvala gre mojim najbližjim - moji družini, starim staršem in Martinu, za spodbude in pomoč tekom celotnega študija.

Kazalo

Program dela

Magistrsko delo naj obravnava nedavno vpeljani koncept razlikovalnega indeksa grafa. Narejen naj bo čim bolj popoln pregled do sedaj dobljenih rezultatov o tej algebraični grafovski invarianti. Ker je razlikovalni indeks grafa tesno povezan z razlikovalnim številom, naj bo ustrezno obravnavana tudi slednja invarianta.

Razlikovalni indeks grafa

Povzetek

Preprost problem Franka Rubina iz leta 1979 išče odgovor na vprašanje, katero je najmanjše potrebno število barv, da bi lahko pobarvali in med sabo razlikovali n navidezno enakih in simetričnih ključev. V jeziku teorije grafov to pomeni, da si ključe predstavljamo kot vozlišča grafa, kot rešitev problema pa iščemo razlikovalno število grafa, $D(G)$. V magistrskem delu se bomo namesto označenju vozlišč posvetili označenju povezav. Razlikovalni indeks grafa G, $D'(G)$, je definiran kot najmanjši tak k, da obstaja označenje grafa G s k oznakami, ki ga ohranja le trivialen avtomorfizem. Spoznali bomo lastnosti razlikovalnega indeksa grafov, njegove vrednosti v primerih nekaterih družin grafov ter splošne zgornje meje za povezane grafe. Če dodamo še zahtevo, da so označenja dobra, se pravi, da imata povezavi, incidenčni z istim vozliščem, različni oznaki, dobimo razlikovalni kromatični indeks grafa G, $\chi'_D(G)$. Tudi zanj bomo spoznali njegove lastnosti, vrednosti ter zgornje meje.

Distinguishing index of a graph

Abstract

A simple problem due to Frank Rubin from the year 1979 is looking for an answer to the following question: given n seemingly identical and symmetric keys, what is the minimum number of colors we need to color them, in order to distinguish between them? In the language of graph theory, this means seeing keys as vertices of a graph. The answer to the problem is distinguishing number of a graph, $D(G)$. Instead of coloring the vertices, in this thesis we will discuss labelings of the edges. The distinguishing index of a graph G, $D'(G)$, is defined as the smallest k, such that there exists a labeling of a graph G with k labels that is preserved only by the trivial automorphism. We will study the properties of the distinguishing index of a graph, some values for standard families of graphs and general upper bounds for connected graphs. If the labeling is proper (edges, incident to the same vertex, have different labels), we get distinguishing chromatic index of a graph G, $\chi'_D(G)$. Also in this case we will study its properties, values and upper bounds.

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C25, 05C63, 05C76

Ključne besede: razlikovalno število, razlikovalni indeks, označenje povezav, avtomorfizem

Keywords: distinguishing number, distinguishing index, edge labeling, automorphism

Poglavje 1

Uvod

Motivacijo za razlikovanja grafov najdemo v preprostem problemu, ki ga je postavil Frank Rubin leta 1979. Predstavljajmo si, da imamo na obročku n navidezno enakih in simetričnih ključev. Da bi med njimi lahko razlikovali, jih pobarvamo z različnimi barvami. Najmanj koliko barv potrebujemo, da pobarvamo vse ključe na način, da bomo točno vedeli, kateri ključ odpira katera vrata?

Odgovor na vprašanje lahko najdemo precej hitro; izkaže se, da zadostujejo tri (v primerih, ko je $n = 3, 4, 5$) ali celo samo dve barvi (vsi ostali primeri). V jeziku teorije grafov si lahko ključe predstavljamo kot vozlišča grafa, kjer sta dve vozlišči povezani, kadar sta ključa sosednja. V tej terminologiji odgovor na naše vprašanje imenujemo razlikovalno število cikla z n vozlišči in ga označimo z $D(C_n)$. Seveda si lahko zamislimo tudi obeske za ključe drugačnih oblik in tako hitro razširimo problem iz ciklov na poljubne grafe.

Lahko določimo še dodatne zahteve, kot je na primer ta, da sosedni vozlišči ne smeta biti iste barve. V tem primeru, ko želimo, da je označenje vozlišč hkrati tudi dobro, nam rešitev poda razlikovalno kromatično število grafa, ki ga označimo s $\chi_D(G)$. Takšne zahteve so pogoste v primerih, kjer povezava predstavlja konflikt, npr. ure sestankov, shranjevanje kemikalij in podobno.

Pojem razlikovalnega števila sta vpeljala avtorja Albertson in Collins v članku iz leta 1996 [1], razlikovalno kromatično število pa je predstavljeno v članku avtorjev Collins in Trenk iz leta 2005 [5].

V tej magistrski nalogi se bomo posvetili zelo podobnemu, vendar novejšemu konceptu. Leta 2015 sta avtorja Kalinowski in Pilśnak v članku [9] predstavila drugačen pogled na problem razlikovanja grafov, tokrat z označenjem povezav. V ta namen podobno kot zgoraj spoznamo dva pojma, razlikovalni indeks in razlikovalni kromatični indeks grafa. Videli bomo, da ima ta način razlikovanja grafov kar nekaj stičnih točk s prvotnim, hkrati pa tudi nekaj razlik. Ogledali si bomo tudi nekatere povezave med obema.

Pojem razlikovalnega števila grafa ima tudi posplošitev v algebri. Naj bo Γ permutacijska grupa, ki deluje na množici X. Podobno kot pri označenjih vozlišč grafov, elementom X priredimo oznake z označenjem $c : X \to \{1, \ldots, k\}$. Takšno označenje se imenuje razlikovalno, če za vsak od identitete različen $g \in \Gamma$ obstaja $x \in X$, da je $c(x) \neq c(g(x))$. Razlikovalno število delovanja Γ na X je najmanjši k, da obstaja razlikovalno k-označenje.

Osnovni pojmi in oznake. Uporabili bomo standardne oznake teorije grafov: ponavadi bo z G označen *graf*, ki je podan z množico *vozlišč* $V(G)$ in množico *povezav* $E(G)$. Vozlišča bomo označili s črkami $u, v, \ldots$, povezave pa bodo podane s krajišči ali s črko, npr. $e = uv$. Če sta vozlišči u in v sosedni, to označimo z $u{\sim}v$. *Stopnjo vozlišča* u, ki je definirana kot število povezav s krajiščem v danem vozlišču, označimo z $d(u)$. Minimalno in maksimalno stopnjo v grafu G označimo z oznakama $\delta(G)$ in $\Delta(G)$. Kadar je očitno, o katerem grafu govorimo, uporabimo skrajšan zapis δ ter Δ. Če so vsa vozlišča grafa iste stopnje, rečemo, da je graf *regularen*. *Soseščino* vozlišča u, torej vozlišča, ki so skupaj z u krajišče katere povezave, označimo z $N(u)$. Z oznako $d(u, v)$, kjer sta $u, v \in V(G)$, označimo *razdaljo med vozliščema* u in v, ki je definirana kot dolžina najkrajše poti med njima. Analogno definiramo in označujemo tudi razdaljo med vozliščem in povezavo.

Grafi, ki jih obravnavamo, so enostavni, kar pomeni, da so brez vzporednih povezav in zank.

Bijektivna preslikava $\phi : V(G) \to V(H)$ je *izomorfizem* grafov G in H, če ohranja sosednost in nesosednost vozlišč; torej natanko takrat, ko velja $uv \in E(G) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(H)$. V primeru, ko je $G = H$, tako preslikavo imenujemo *avtomorfizem* grafa.

Vsi avtomorfizmi danega grafa tvorijo grupo. Imenujemo jo *grupa avtomorfizmov* grafa G in jo označimo z $\mathrm{Aut}(G)$.

Preslikavo $c : V(G) \to [k]$, ki vsakemu vozlišču priredi naravno število med 1 in k, imenujemo *k-označenje povezav*. Označenje vozlišč c je *dobro*, če imata poljubni sosedni vozlišči različni barvi. Najmanjše tako število k, da obstaja dobro k-označenje vozlišč grafa G, imenujemo *kromatično število grafa* in ga označimo s $\chi(G)$.

Namesto množice prvih k naravnih števil bi lahko uporabili tudi katerokoli drugo množico s k elementi. V nadaljevanju bomo zaradi enostavnosti uporabljali $[k] = \{1, \ldots, k\}$, razen če bo posebej definirano, v katero množico slika označenje.

Čeprav pri označenjih grafov najprej pomislimo na označenja vozlišč, nas bo tukaj zanimal predvsem analogen pojem, ki ga definiramo za povezave. Preslikava $c' : E(G) \to [k]$ je *k-označenje povezav* grafa G. Označenje povezav c' je *dobro*, če imata povezavi s skupnim krajiščem različni oznaki. Tudi tukaj lahko izberemo poljubno množico s k elementi. V uporabi je tudi izraz "barvanje povezav", vendar bomo zaradi lažjega razlikovanja v nadaljevanju uporabljali le izraz "označenje povezav". Najmanjše tako število k, da obstaja dobro k-označenje povezav grafa G, imenujemo *kromatični indeks grafa* in ga označimo s $\chi'(G)$.

Poglavje 2

Razlikovalno število in razlikovalno kromatično število

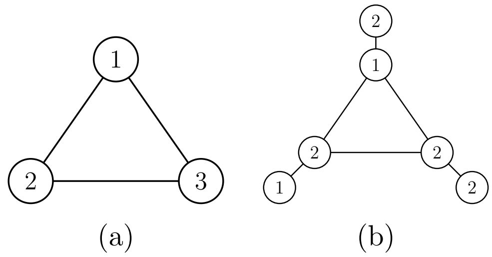
Razlikovalno število grafa, $D(G)$, je najmanjše tako število k, da obstaja k-označenje vozlišč grafa G, ki ga ohranja le trivialni avtomorfizem. Takšno označenje vozlišč imenujemo *razlikovalno označenje vozlišč*.

Z označenjem vozlišč torej želimo uničiti vse simetrije grafa. Cilj je narediti grupo avtomorfizmov označenega grafa trivialno. V nadaljevanju tega poglavja bomo opisali nekaj lastnosti razlikovalnega števila, njegove vrednosti za nekatere družine grafov ter zgornjo mejo za povezane grafe.

Grafi z isto grupo avtomorfizmov imajo lahko različna razlikovalna števila.

Primer. Oglejmo si naslednja dva grafa: cikel C_3 in graf, ki ga dobimo tako, da k vsakemu vozlišču C_3 pripnemo še eno vozlišče stopnje 1.

Zlahka se lahko prepričamo, da imata oba grafa grupo avtomorfizmov enako S_3. Kljub temu za razlikovalno označenje vozlišč prvega rabimo tri oznake, medtem ko pri drugem zadoščata že dve, kot je prikazano na sliki.



(a) (b)

Slika 2.1: Grafa z enako grupo avtomorfizmov

Če bi namreč v grafu (a) označili dve vozlišči z enako oznako, bi obstajal netrivialen avtomorfizem, ki bi ju zamenjal. Oglejmo si še graf (b): vemo, da avtomorfizem ohranja stopnje vozlišč, zato je vozlišče stopnje 1, označeno z oznako 1, fiksirano. Zaradi ohranjanja sosednosti je potem fiksirano tudi njemu sosednje vozlišče. Preostali vozlišči stopnje 3 imata različni oznaki, zato ju ne moremo zamenjati. Potem sta zaradi ohranjanja sosednosti fiksirani tudi vozlišči stopnje 1 z oznako 2.

Kljub temu pojma razlikovalnega števila in grupe avtomorfizmov nista neodvisna. V [1] lahko najdemo dokaz, da je $D(G) = \mathcal{O}(\log|\mathrm{Aut}(G)|)$.
Hitro lahko opazimo nekatere lastnosti razlikovalnega števila.

- Grafe, ki imajo samo en avtomorfizem, torej id, imenujemo *asimetrični grafi*. Za njih seveda očitno velja, da je $D(G) = 1$. Takšnih grafov je zelo veliko, kljub temu pa se bomo v nadaljevanju bolj posvetili preostalim, za katere velja, da je $D(G) \geq 2$.

- Graf G in njegov komplement $\overline{G}$ (graf z isto množico vozlišč, kjer sta vozlišči sosedni natanko takrat, ko nista sosedni v prvotnem grafu) imata enako razlikovalno število. To sledi iz dejstva, da je avtomorfizem grafa G hkrati tudi avtomorfizem grafa $\overline{G}$ in obratno.

Razlikovalno kromatično število grafa G, $\chi_D(G)$, je najmanjše tako število k, da obstaja dobro k-označenje vozlišč grafa G, ki ga ohranja le trivialni avtomorfizem. Takšno označenje vozlišč imenujemo *dobro razlikovalno označenje vozlišč.*
Tudi tukaj lahko naštejemo nekaj preprostih lastnosti.

- Za asimetričen graf G velja $\chi_D(G) = \chi(G)$.
- Za poljuben graf velja $\chi_D(G) \geq \max\{\chi(G), D(G)\}$, saj mora biti dobro razlikovalno označenje vozlišč očitno tako dobro kot tudi razlikovalno.

Z grafovskima invariantama, omenjenima v prejšnji lastnosti, lahko konstruiramo tudi zgornjo mejo za razlikovalno kromatično število.

Trditev 2.1. *Za poljuben graf* G *velja* $\chi_D(G) \leq \chi(G)D(G)$.

Dokaz. Naj bo c dobro označenje vozlišč grafa G s $\chi(G)$ oznakami in naj bo d razlikovalno označenje vozlišč grafa G z $D(G)$ oznakami. Potem je označenje vozlišč $c' : V(G) \to [\chi(G)] \times [D(G)]$, ki vozlišču u priredi urejen par $(c(u), d(u))$, dobro razlikovalno označenje vozlišč; prvi element v paru poskrbi, da sosednji vozlišči nimata enake oznake, drugi pa, da je označenje vozlišč razlikovalno. Za označenje vozlišč c' potrebujemo $\chi(G)D(G)$ oznak. □

Za začetek si oglejmo nekaj družin grafov, katerim je precej enostavno določiti razlikovalno ter razlikovalno kromatično število.

Trditev 2.2. *Velja:*

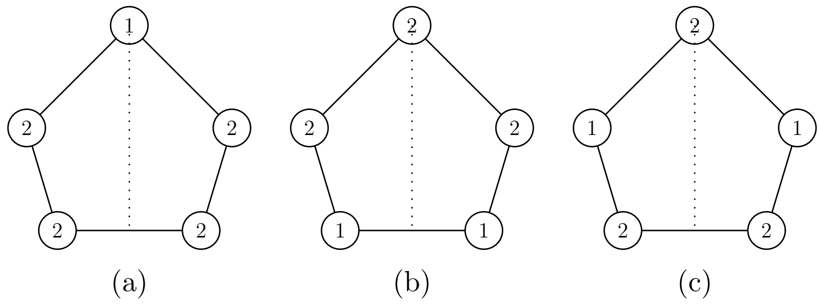
Graf	$D(G)$	$\chi_D(G)$
$K_n, n \geq 1$	n	n
$K_{m,n} (m \neq n)$	$\max\{m, n\}$	$m + n$
$K_{n,n}$	$n + 1$	$2n$
$P_n, n \geq 2$	2	2, *če je* n *sod* 3, *če je* n *lih*
$C_n, n \geq 3$	2, *če* $n \geq 6$ 3, *če* $n = 3, 4, 5$	4, *če* $n = 4$ *ali* $n = 6$ 3, *če* $n = 3, n = 5$ *ali* $n \geq 7$

Dokaz. Polni grafi. Vozlišča polnega grafa moramo označiti vsakega z drugo oznako, saj bi sicer obstajal avtomofrizem, ki bi zamenjal vozlišči z enakima oznakama. Od tod sledi $D(K_n) = n$. Tako označenje vozlišč je tudi dobro, zato je tudi razlikovalno kromatično število enako $\chi_D(K_n) = n$.

Polni dvodelni grafi. Avtomorfizem polnega dvodelnega grafa, ki ima partitni množici različnih velikosti, lahko zamenja vozlišči iz iste partitne množice. Ne more pa zamenjati vozlišč iz različnih partitnih množic, saj imajo taka vozlišča različne stopnje. Ker moramo torej razlikovati samo vozlišča znotraj posamezne partitne množice, zadošča toliko oznak, kolikor jih potrebujemo za večjo partitno množico, torej $D(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$. Takšno označenje vozlišč seveda ni dobro. Pri dobrem označenju vozlišč moramo upoštevati, da vozlišči iz različnih partitnih množic nimata enake oznake. Skupaj s pogojem od prej, da moramo razlikovati tudi vsa vozlišča znotraj posamezne partitne množice, lahko torej vidimo, da mora imeti vsako vozlišče drugačno oznako: $\chi_D(K_{m,n}) = m + n$.
Ko imamo poln dvodelni graf s partitnima množicama enake velikosti, moramo biti pozorni tudi na razlikovanje med njima. Tako poleg n oznak, ki jih potrebujemo znotraj ene izmed njiju, potrebujemo še eno dodatno oznako, da ločimo partitni množici med sabo. Tako je $D(K_{n,n}) = n + 1$. Enako kot v prejšnjem primeru pa mora za dobro označenje vozlišč imeti vsako vozlišče drugačno oznako, torej $\chi_D(K_{n,n}) = 2n$.

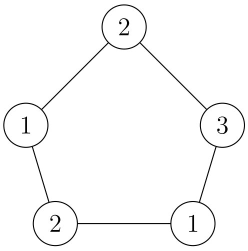
Poti. Pri poteh zadostuje, da označimo začetek poti s prvo oznako, vsa ostala vozlišča pa z drugo. Tako dobimo $D(P_n) = 2$. Če želimo, da je označenje povezav dobro, moramo ločiti poti s sodim in lihim številom vozlišč. Če pot s sodim številom vozlišč dobro označimo z dvema oznakama, že dobimo dobro označenje vozlišč, ki ga ohranja le identiteta, saj imata krajišči poti različni oznaki; $\chi_D(P_{2k}) = 2$. V primeru, da ima pot liho število vozlišč, pa temu ni tako; takrat imata namreč krajišči enaki oznaki in ju lahko avtomorfizem zamenja. Ker je to edino možno dobro označenje z dvema oznakama, torej razlikovalno kromatično število ne more biti 2. Če pa uporabimo še eno dodatno oznako, lahko z njo fiksiramo eno izmed krajišč in s tem fiksiramo tudi celotno pot, preostala vozlišča pa izmenjaje označimo z ostalima dvema oznakama. Velja torej $\chi_D(P_{2k+1}) = 3$.

Cikli. Najprej si oglejmo majhne cikle. Za C_3 hitro ugotovimo, da mora veljati $D(C_3) = \chi_D(C_3) = 3$, saj je izomorfen polnemu grafu K_3 in lahko rezultat razberemo iz prve vrstice tabele. Podobno je C_4 enak polnemu dvodelnemu grafu $K_{2,2}$, torej je res $D(C_4) = 3$ in $\chi_D(C_4) = 4$. Za C_5 moramo preveriti nekaj možnosti; vemo že, da bomo potrebovali vsaj dve oznaki. Poskusimo torej z dvema:



Slika 2.2: Označenja vozlišč cikla C_5 z dvema oznakama

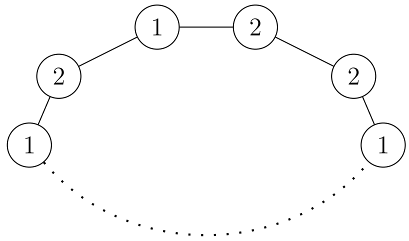
Če poskusimo s prvo oznako označiti samo eno vozlišče, hitro vidimo, da takšno označenje vozlišč ne bo razlikovalno; na sliki (a) vidimo, da ima ta graf netrivialen avtomorfizem, ki ohranja označenje vozlišč. To je avtomorfizem, ki prezrcali vozlišča preko črtkane simetrale. Poskusimo torej s prvo oznako označiti dve vozlišči. Če sta ti vozlišči sosedni, na drugi sliki (b) spet vidimo možno zrcaljenje. Tako preostane samo še možnost, da sta ti vozlišči na razdalji 2, vendar iz slike (c) vidimo, da tudi to označenje vozlišč ni razlikovalno. S tem smo tudi preverili vsa možna 2-označenja vozlišč (če bi namreč hoteli s prvo oznako označiti tri ali štiri vozlišča, na prejšnjih primerih samo zamenjamo oznaki 1 in 2). Sedaj vemo, da potrebujemo vsaj tri oznake, ki tudi zadostujejo:



Slika 2.3: Razlikovalno označenje vozlišč C_5

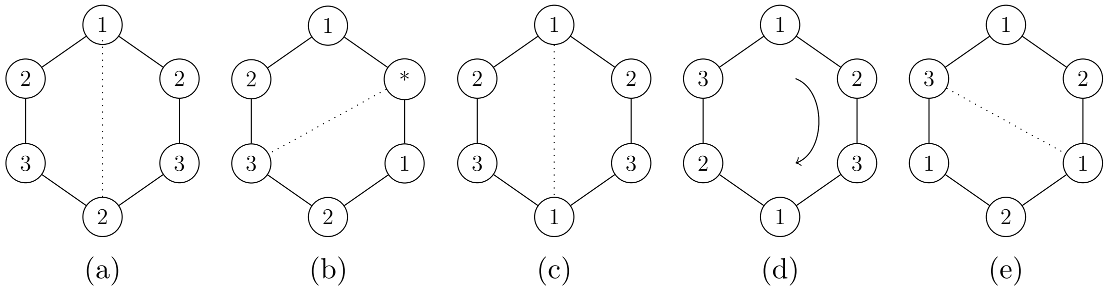
S tem označenjem vozlišč fiksiramo vozlišče z oznako 3; ker imata njegova soseda različni oznaki, sta tudi ona fiksirana. S tem sta fiksirani tudi preostali vozlišči, torej je označenje vozlišč res razlikovalno. Opazimo, da je to označenje vozlišč tudi dobro, torej je $D(C_5) = \chi_D(C_5) = 3$.

Za cikle z $n \geq 6$ vozlišči velja, da jih lahko razlikujemo že z dvema oznakama, in sicer vozlišča označimo na sledeč način:



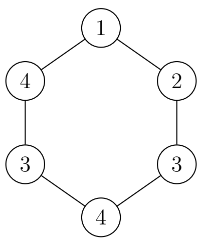
Slika 2.4: Razlikovalno označenje vozlišč $C_n, n \geq 6$

Izberemo poljubno začetno vozlišče. Z oznako 2 označimo samo prvo, tretje in četrto vozlišče, vse ostale označimo z oznako 1. Tako označenje vozlišč seveda ni dobro. Poskusimo najti dobro razlikovalno označenje vozlišč 6-cikla. Dobro 2-označenje vozlišč je do permutacije oznak natančno eno samo in očitno ni razlikovalno, saj ga ohranja npr. avtomorfizem, ki ciklično zamakne vozlišča za dve mesti. Preizkusimo torej dobra 3-označenja vozlišč , ki jih ločimo glede na število vozlišč z oznako 1.



Slika 2.5: Dobra 3-označenja vozlišč cikla C_6

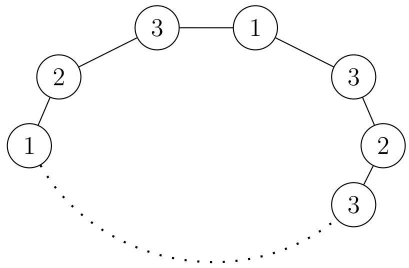
V prvem poskusu (a) je prikazan primer, kjer oznaka 1 nastopi samo enkrat. Potem moramo preostala vozlišča označiti izmenjaje, vendar takšno označenje vozlišč ni razlikovalno, saj ga ohranja avtomorfizem zrcaljenja čez črtkano črto. Naslednji trije poskusi (b), (c) in (d) imajo dve vozlišči z oznako 1. Če sta ti vozlišči na razdalji 2, potem ne glede na to, katera oznaka pripada vozlišču med njima (označenemu z *), lahko zrcalimo čez črtkano črto in hkrati ohranjamo označenje vozlišč. Če sta ti vozlišči na razdalji 3, ločimo dva primera glede na to, kako označimo preostala vozlišča. V (c) lahko spet zrcalimo čez črtkano črto in ohranimo označenje vozlišč. V (d) pa lahko vozlišča ciklično zamaknemo za tri mesta in tako spet najdemo avtomorfizem, ki ohranja označenje vozlišč. V (e) imamo tri vozlišča z oznako 1; v tem primeru nujno obstaja vozlišče, ki ima edino v grafu eno izmed oznak (v primeru na sliki oznako 3). Iskani avtomorfizem je ponovno zrcaljenje čez črtkano črto med tem vozliščem in njemu nasprotnim. Več kot treh vozlišč z isto oznako ne moremo imeti, torej bomo za dobro razlikovalno označenje vozlišč potrebovali vsaj štiri oznake. Takšno tudi zares obstaja:



Slika 2.6: Dobro razlikovalno označenje vozlišč C_6

Vozlišči z oznakama 1 in 2 sta edini, zato sta fiksirani. S tem sta fiksirani tudi njima sosedni vozlišči in posledično celoten cikel. Takšno označenje vozlišč je res dobro in razlikovalno.

Za cikle z $n \geq 7$ vozlišči pa zadostujejo že tri oznake:



Slika 2.7: Dobro razlikovalno označenje vozlišč $C_n, n \geq 7$

Spet izberemo poljubno vozlišče, kjer začnemo. Oznako 1 uporabimo na samo dveh vozliščih, na prvem in četrtem. Preostala vozlišča označimo izmenjaje z oznakama 2 (sodi indeksi vozlišč) in 3 (lihi indeksi). Če označimo na tak način, fiksiramo vozlišči z oznako 1 — ker imata sosede z različnimi oznakami, ju ne moremo zamenjati med sabo, prav tako pa ne obstaja noben netrivialen avtomorfizem, ki bi ju fiksiral. Torej je res $\chi_D(C_6) = 4$ in $\chi_D(C_n) = 3$ za $n \geq 7$. □

V zgornji trditvi smo določili točne vrednosti za nekatere družine grafov. Kaj pa lahko povemo za povezane grafe nasploh? Seveda je v marsikaterem primeru določiti natančno vrednost težak problem, poznamo pa nekatere zgornje meje. V nadaljevanju bomo spoznali dve takšni trditvi.

Lema 2.3. *Naj bo G povezan graf in c neko njegovo označenje vozlišč. Naj bo $X \subseteq V(G)$ takšna, da je vsako vozlišče v X fiksirano z vsakim avtomorfizmom G, ki ohranja c. Naj bo $x \in X$ in označimo $S = N(x) \setminus X$. Če za poljubni vozlišči $u, v \in S$ velja $c(u) \neq c(v)$, potem vsak avtomorfizem G, ki ohranja označenje vozlišč, fiksira vsa vozlišča v S.*

Dokaz. Naj bo ϕ avtomorfizem, ki ohranja c. Ker je $x \in X$, velja $\phi(x) = x$. Ker imajo vsi njegovi sosedi izven množice X različne oznake, jih ϕ očitno ne more med sabo zamenjati, torej so fiksirani. □

Izrek 2.4 ([5, 11])**.** *Naj bo G povezan graf. Potem velja $D(G) \leq \Delta + 1$. Enakost velja natanko v primerih, ko je G enak K_n, $K_{n,n}$ ali C_5.*

Dokaz. Že v trditvi 2.2 smo spoznali točne vrednosti razlikovalnih števil grafov $K_n, K_{n,n}$ in C_5, zato zlahka vidimo, da je v teh primerih zgornja meja res dosežena. Preostane nam pokazati, da za vse ostale povezane grafe velja $D(G) \leq \Delta$.

Predpostavimo torej, da G ni $K_n, K_{n,n}$ ali C_5. Poskusili bomo poiskati razlikovalno označenje vozlišč c.

Primer 1. G ni regularen.

Naj bo vozlišče $u \in V(G)$ takšno, da je $d(u) < \Delta$. Postavimo $c(u) = \Delta$. Te oznake ne bo dobilo nobeno drugo vozlišče, zato je u fiksirano. Preostala vozlišča razvrstimo z BFS algoritmom. Oglejmo si poljubno vozlišče v. Recimo, da nekateri njegovi sosedi še niso označeni. Potem jih označimo z različnimi oznakami iz množice $[\Delta - 1]$. Sedaj smo v situaciji iz leme 2.3, ki jo induktivno uporabljamo, dokler niso fiksirana vsa vozlišča.

Primer 2. G je regularen.

Privzamemo lahko, da je $\Delta \geq 3$, saj je edini povezan graf z $\Delta = 1$ graf K_1 (za katerega že vemo, da je izjema), povezani grafi z $\Delta = 2$ pa so poti in cikli. Tudi zanje že poznamo točne vrednosti iz trditve 2.2, tako da se lahko prepričamo, da zanje trditev, ki jo dokazujemo, res drži.

Ker drevesa (z izjemo K_1) niso regularni grafi, vemo, da ima G vsaj en cikel. Naj bo C poljuben najkrajši cikel v grafu in u, v in z tri zaporedna vozlišča na njem.

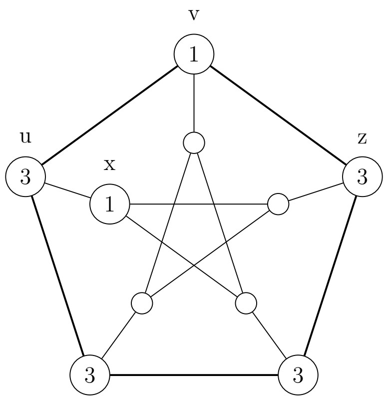
2a. $(N(u) \setminus C) \neq (N(z) \setminus C)$.
Naj bo $x \in N(u) \setminus (C \cup N(z))$. Označimo $c(y) = \Delta$ za vse $y \in C \setminus v$ ter postavimo $c(x) = c(v) = 1$. Nobena druga vozlišča ne bodo dobila oznake Δ in noben drug sosed vozlišč u in z ne bo dobil oznake 1. S tem smo fiksirali vozlišči u in z, saj se razlikujeta v številu sosedov z oznako 1. Spomnimo se, da vozlišče x ni sosednje z z, prav tako pa ne more biti sosednje s katerimkoli drugim vozliščem z oznako Δ na C (to bi nasprotovalo dejstvu, da je C najkrajši). Tako vidimo, da sta vozlišči x in v fiksirani, saj se razlikujeta v številu sosedov z oznako Δ. Po BFS metodi s korenom v v lahko označenje c razširimo na celoten graf in dobimo razlikovalno označenje vozlišč.

2b. Za katerikoli zaporedne u, v in z na najkrajšem ciklu C velja $(N(u) \setminus C) = (N(z) \setminus C)$.

Ker je graf G regularen in torej $|N(u)| = \Delta \geq 3$, vidimo, da je dolžina najkrajšega cikla največ 4. Recimo, da ima G trikotnik. Potem je u soseden z z, od koder sledi, da so za vsak $x \in N(u)$ u, z in x zaporedna vozlišča na nekem trikotniku C', torej spet velja $(N(u) \setminus C') = (N(z) \setminus C')$. Od tod sledi, da je G polni graf, kar je v nasprotju z našo predpostavko.

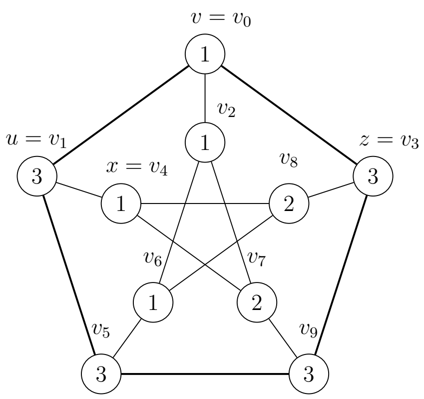
Če G nima trikotnikov, potem so najkrajši cikli dolžine 4. Potem velja tudi $N(u) \cap C = N(z) \cap C$, torej $N(u) = N(z)$. Tedaj za poljubni vozlišči $x, y \in N(u)$ velja, da skupaj z u in z tvorijo 4-cikel, torej mora veljati $N(x) = N(y)$. Od tod vidimo, da imata poljubni nesosednji vozlišči iste sosede. To pomeni, da je G regularen dvodelen graf, kar je spet v nasprotju z našo predpostavko. □

Primer. S postopkom iz zgornjega izreka poiščimo razlikovalno označenje vozlišč Petersenovega grafa.



Slika 2.8: Petersenov graf

Vemo, da je ta graf regularen z $\Delta = 3$. Njegovi najkrajši cikli so dolžine 5. Izberemo si torej en tak cikel (na sliki označen z debelejšimi povezavami) in tri zaporedna vozlišča u, v in z na njem. Kot vidimo, velja $(N(u) \setminus C) \neq (N(z) \setminus C)$, torej smo v situaciji 2a. Kot je opisano, označimo vozlišča z oznakama 1 in 3. Vozlišča u, v, z in x so sedaj fiksirana.

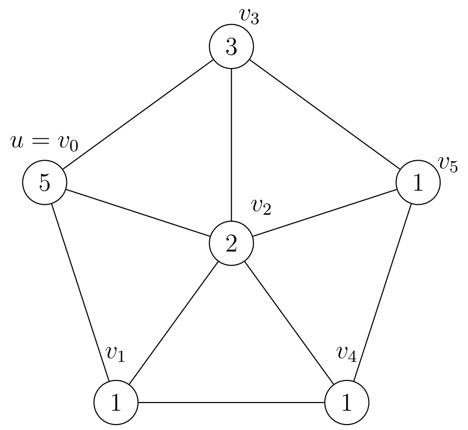


Slika 2.9: Petersenov graf z razlikovalnim označenjem vozlišč

Vozlišča sedaj razvrstimo z BFS algoritmom s korenom v v. Na ostala vozlišča razširimo označenje s pomočjo leme 2.3, ki nam zagotavlja, da bo takšno označenje res razlikovalno. Na ta način dobimo razlikovalno 3-označenje vozlišč Petersenovega grafa. Tako označenje vozlišč je tudi optimalno; v literaturi (npr. [5]) lahko najdemo, da je res $D(P) = 3$.

Primer. Oglejmo si še primer neregularnega grafa. Poskusimo najti razlikovalno označenje povezav grafa W_6. Ta graf dobimo tako, da 5-ciklu pripnemo eno vozlišče, ki je povezano z vsemi ostalimi. Ta graf imenujemo *kolo* na šestih vozliščih. Analogno lahko konstruiramo kolesa W_n na večih vozliščih: $(n-1)$-ciklu dodamo eno vozlišče in ga povežemo z vsemi ostalimi.

Največja stopnja v grafu W_6 je 5. Izberemo torej vozlišče u in ga označimo z oznako 5. Preostala vozlišča razvrstimo z BFS algoritmom in spet s pomočjo leme 2.3 razširimo označenje vozlišč na celoten graf. V tem primeru nikjer nismo uporabili oznake 4, zato smo v resnici konstruirali razlikovalno 4-označenje vozlišč. Kljub temu pa to ni optimalno, saj bi v resnici zadoščale že tri oznake: vozlišče stopnje 5 je fiksirano in ima zato poljubno oznako, ostala vozlišča pa ležijo na 5-ciklu, za katerega vemo, da je $D(C_5) = 3$.



Slika 2.10: Graf W_6 z neoptimalnim razlikovalnim označenjem vozlišč

Posledica 2.5. *Za povezan graf G je $D(G) = |V(G)|$ natanko tedaj, ko je G polni graf K_n.*

Dokaz. Za implikacijo v levo že vemo, da drži. Oglejmo si torej implikacijo v desno. Očitno velja $\Delta + 1 \leq |V(G)|$. Po prejšnjem izreku velja $|V(G)| \leq D(G) \leq \Delta + 1$. Če obe neenakosti združimo, dobimo $\Delta + 1 \leq |V(G)| \leq \Delta + 1$, torej $|V(G)| = \Delta + 1 = D(G)$. Iz prejšnjega izreka sledi, da je G enak $K_n, K_{n,n}$ ali C_6. Toda $2 = D(C_6) \neq |V(C_6)| = 6$ ter $n + 1 = D(K_{n,n}) \neq |V(K_{n,n})| = 2n$ za $n \geq 2$. Pri $n = 1$ je $K_{1,1} = K_2$. Torej je res G enak K_n, saj je $D(K_n) = n = |V(K_n)|$. □

Največja stopnja vozlišča v grafu nastopa tudi v zgornji meji za razlikovalno kromatično število grafa.

Izrek 2.6 ([5])**.** *Naj bo G povezan graf. Potem velja $\chi_D(G) \leq 2\Delta$. Enakost velja natanko v primerih, ko je G enak $K_{n,n}$ ali C_6.*

Dokaz bomo na tem mestu zaradi dolžine izpustili. Ideja dokaza je sicer podobna kot v dokazu izreka 2.4; spet ločimo na primer, ko je graf regularen, in na primer, ko ni. V obeh primerih izberemo vozlišče v, uporabimo BFS algoritem in konstruiramo dobro razlikovalno označenje vozlišč.

Poglavje 3

Razlikovalni indeks

V tem poglavju bomo spoznali že omenjenemu razlikovalnemu številu analogen pojem. Recimo, da ne želimo označiti vozlišč, ampak želimo oznake prirediti povezavam. Razlikovalni indeks $D'(G)$ grafa G je najmanjše tako število k, da obstaja označenje povezav s k oznakami, ki ga ohranja le trivialni avtomorfizem.

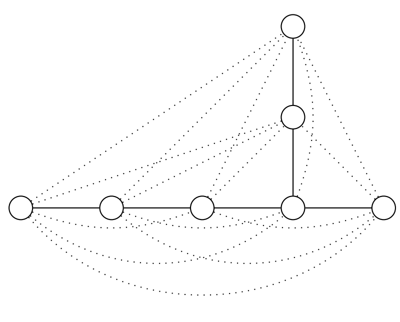
Seveda lahko tudi tukaj hitro opazimo, da za asimetričen graf velja $D'(G) = 1$, za vse ostale povezane grafe pa je $D'(G) \geq 2$. Velja še omeniti, da za graf K_2 razlikovalni indeks ni definiran, saj ne glede na to, kako označimo edino povezavo, avtomorfizem, ki zamenja krajišči, ohranja označenje povezave.

V veliko primerih se izkaže, da velja tudi $D'(G) \leq 2$, kar nam pove naslednja lema.

Lema 3.1. *Naj bo G graf z asimetričnim vpetim podgrafom. Potem velja $D'(G) \leq 2$.*

Dokaz. Naj bo ϕ poljuben avtomorfizem grafa G in naj bo H asimetričen vpet podgraf grafa G. Povezave asimetričnega vpetega podgrafa označimo z oznako 1, vse ostale povezave grafa G (če obstajajo) pa z oznako 2. Če želimo, da ϕ ohranja označenje povezav, se morajo povezave podgrafa H preslikati v povezave podgrafa H. Ker vemo, da ne obstaja netrivialen avtomorfizem H, je podgraf H fiksiran. Sledi, da je ϕ trivialen avtomorfizem, konstruirano označenje povezav pa 2-razlikovalno. □

Primer. Razlikovalni indeks polnega grafa K_7 je 2, saj K_7 ni asimetričen, ima pa vpet asimetričen podgraf H. Na sliki so povezave grafa H označene s polno črto, preostale povezave grafa K_7 pa s črtkano.



Slika 3.1: Graf K_7 z vpetim asimetričnim podgrafom H

Za vozlišče u definiramo *paleto vozlišča u* kot multimnožico oznak povezav s krajiščem v u. Očitno noben avtomorfizem, ki ohranja označenje, ne more zamenjati vozlišč z različnima paletama.

V nadaljevanju bomo poiskali točne vrednosti ali vsaj meje za razlikovalne indekse različnih družin grafov.

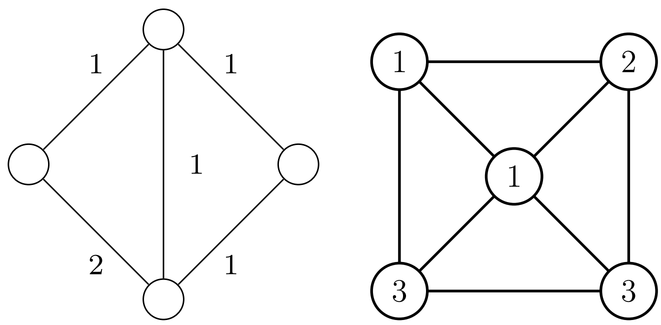
3.1 Cikli in poti

Naj bo G graf. Potem je njegov *graf povezav*, $L(G)$, graf z $V(L(G)) = E(G)$, povezavi $e, f \in V(L(G))$ pa sta sosedni v $L(G)$, če imata skupno krajišče v G.

Trditev 3.2. *Za poti velja $D'(P_n) = 2$ za $n \geq 3$, za cikle pa velja $D'(C_3) = D'(C_4) = D'(C_5) = 3$ ter $D'(C_n) = 2$ za $n \geq 6$.*

Dokaz. Iz prejšnjega poglavja (iz trditve 2.2) že poznamo razlikovalna števila ciklov in poti. Oglejmo si njihove grafe povezav. Vidimo, da velja $L(P_n) \cong P_{n-1}$ in $L(C_n) \cong C_n$. Optimalno razlikovalno označenje vozlišč grafa povezav bo tudi optimalno razlikovalno označenje povezav prvotnega grafa. □

Opomba. V splošnem $D'(G)$ ni enak $D(L(G))$. Oglejmo si primer $K_4 - e$.



(a) $K_4 - e$ (b) $L(K_4 - e)$

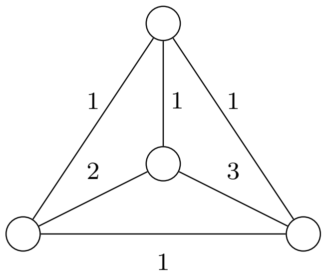
Slika 3.2: Graf $K_4 - e$ in njegov graf povezav

Našli smo razlikovalno 2-označenje povezav grafa $K_4 - e$. To označenje povezav je res razlikovalno, saj imajo vozlišča enakih stopenj različne palete. Vendar je $D(L(K_4 - e)) = 3$, saj je vozlišče stopnje 4 fiksirano, ostala štiri vozlišča pa razlikujemo enako kot 4-cikel, torej potrebujemo vsaj tri oznake.

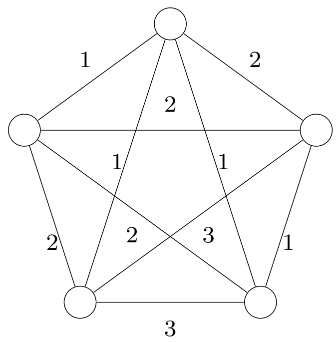
3.2 Polni (dvodelni) grafi

Trditev 3.3. *Velja $D'(K_n) = 3$ za $n = 3, 4, 5$ in $D'(K_n) = 2$ za $n \geq 6$.*

Dokaz. Preverimo najprej, da velja $D'(K_n) > 2$ za $n = 3, 4, 5$. Grupa avtomorfizmov polnega grafa je S_n, kar pomeni, da lahko avtomorfizem zamenja poljubni vozlišči. Edini način, da vozlišča med seboj razlikujemo, je torej, da imajo vsa vozlišča različne palete. V primeru $n = 3$ imamo možne palete $11, 12$ in 22, vendar v istem grafu nista možni 11 in 22 hkrati (saj bi morali biti vozlišči sosedni, povezava med njima pa bi morala hkrati imeti oznako 1 in 2). Imamo torej tri vozlišča in dve različni možni paleti. Po Dirichletovem principu imata dve vozlišči enako paleto, torej obstaja netrivialen avtomorfizem, ki ju zamenja. Enak argument velja za $n = 4$ (tri možne palete, štiri vozlišča) in $n = 5$ (štiri možne palete, pet vozlišč). Sedaj poiščimo označitve povezav, ki potrjujejo, da za $n = 3, 4, 5$ tri oznake tudi zadostujejo. To je očitno v primeru $n = 3$, saj vsaka povezava dobi različno oznako. V primerih $n = 4$ in $n = 5$ je primer razlikovalnega označenja povezav sledeč:



(a) K_4

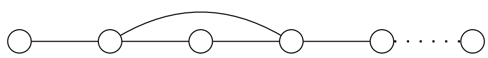


(b) K_5

Slika 3.3: Grafa K_4 in K_5 z razlikovalnim označenjem povezav

V obeh primerih imajo vozlišča različne palete, zato je označenje povezav razlikovalno.

Za $n \geq 6$ lahko najdemo vpet podgraf G grafa K_n, ki je asimetričen, na naslednji način: vozlišča grafa poljubno razvrstimo in dodamo povezave, da tvorijo pot dolžine n. Dodamo še eno povezavo med drugim in četrtim vozliščem.



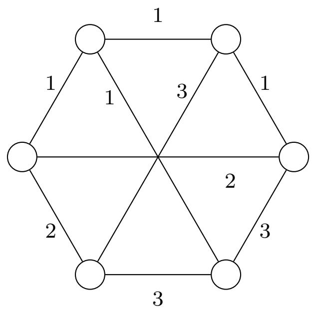
Slika 3.4: Asimetričen vpet podgraf grafov $K_n, n \geq 6$

Označimo povezave grafa G z oznako 1, preostale povezave K_n pa z oznako 2. Po lemi 3.1 dobimo razlikovalno 2-označenje povezav. □

Trditev 3.4. *Velja* $D'(K_{n,n}) = 3$ *za* $n = 2, 3$ *in* $D'(K_{n,n}) = 2$ *za* $n \geq 4$.

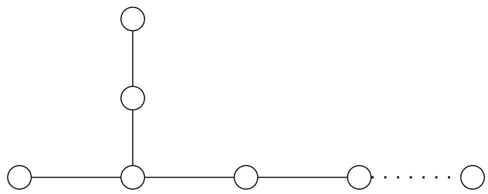
Dokaz. Za $K_{2,2} \cong C_4$ vrednost že poznamo. Za primer $n = 3$ je primer razlikovalnega 3-označenja povezav prikazan na sliki 3.5. Vozlišča imajo različne palete, torej je označenje povezav res razlikovalno. Sedaj dokažimo, da je $D'(K_{3,3}) \geq 3$. Hitro vidimo, da dve oznaki ne bi zadostovali: če želimo razlikovati med vozlišči znotraj posamezne partitne množice, mora vsako vozlišče imeti drugačno paleto. Razlikovati se morajo palete partitnih množic. Če bi namreč vozlišča prve partitne množice imela enake palete kot vozlišča druge partitne množice, bi obstajal netrivialen avtomorfizem, ki bi zamenjal množici. Možne palete so štiri: $111, 112, 122$ in 222. Če v prvi partitni množici obstajata vozlišči s paletama 111 in 222, v drugi partitni množici zagotovo obstajata dve vozlišči z enako paleto $12x$ (kjer x označuje eno izmed oznak). Ti dve vozlišči lahko netrivialen avtomorfizem zamenja. Če v prvi partitni množici manjka ena izmed palet 111 in 222, potem manjka tudi v drugi.

Sledi, da ima druga partitna množica enake palete kot prva, ali pa ima dve vozlišči z enako paleto. V obeh primerih obstaja netrivialen avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav.



Slika 3.5: Graf $K_{3,3}$ z razlikovalnim označenjem povezav

V primeru, ko je $n \geq 4$, ima graf vsaj osem vozlišč. Za vsak $n \geq 7$ obstaja asimetrično drevo reda n, ki ga konstruiramo na sledeč način: poti dolžine $n-2$ dodamo pot dolžine 2 tako, da dodamo povezavo med drugim vozliščem poti P_{n-2} ter enim izmed vozlišč poti P_2.



Slika 3.6: Asimetrično drevo reda $n, n \geq 7$

Vsa drevesa so dvodelni grafi. Zato za poljubno drevo T velja, da je vpet podgraf nekega polnega dvodelnega grafa. Zgoraj opisana drevesa so asimetrična in imajo v primeru sodega števila vozlišč partitni množici enake velikosti. Torej vsak $K_{n,n}$ za $n \geq 4$ vsebuje asimetrično vpeto drevo. Po lemi 3.1 sklepamo, da je potem $D'(K_{n,n}) = 2$. $\square$

3.3 Drevesa

Center grafa G, ki ga označimo s $C(G)$, je množica vozlišč $u \in V(G)$, za katera velja, da je $\max\{d(u,v); v \in V(G)\}$ najmanjši možen. Ker avtomorfizmi ohranjajo razdalje med vozlišči, mora vsak avtomorfizem fiksirati $C(G)$.

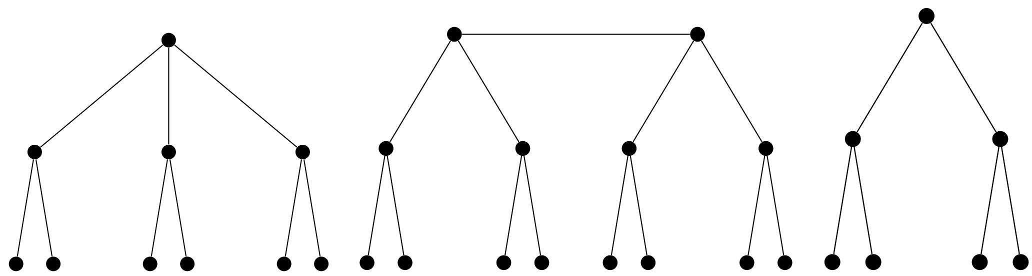
Oglejmo si, kakšen je center v primeru, ko je G drevo. Če drevesu odstranimo vsa vozlišča stopnje 1 in postopek ponavljamo, nam na koncu ostane eno ali dve vozlišči. Drevo T je *centralno*, če je $|C(T)| = 1$, in *bicentralno*, če je $|C(T)| = 2$. Vsako drevo ima torej ali centralno vozlišče u ali centralno povezavo $e = uv$. V prvem primeru je $C(T) = \{u\}$, v drugem pa velja $C(T) = \{u, v\}$.

Za $k \geq 0$ definiramo *k-ti nivo* drevesa kot množico vseh tistih vozlišč, ki so na razdalji k od centralnega vozlišča oz. povezave. Največji h, za katerega je h-ti nivo neprazen, imenujemu *višina drevesa.*

Simetrično drevo je centralno drevo s centralnim vozliščem v_0, za katerega velja, da so vsi listi na fiksni razdalji h od v_0, vsa vozlišča razen listov pa so stopnje d. Označimo ga s $T_{h,d}$.

Bisimetrično drevo je bicentralno drevo s centralno povezavo e_0, za katero velja, da so vsi listi na fiksni razdalji h od e_0, vsa vozlišča razen listov pa so stopnje d. Označimo ga s $T''_{h,d}$.

Skoraj simetrično drevo, $T'_{h,d}$, je centralno drevo s centralnim vozliščem v_0 stopnje $d-1$. Vsa ostala vozlišča so stopnje d, ali pa so listi. Vsi listi so na enaki razdalji h od v_0. Opazimo, da če dve skoraj simetrični drevesi povežemo s povezavo med njunima centralnima vozliščema, dobimo bisimetrično drevo.



(a) $T_{2,3}$ (b) $T''_{2,3}$ (c) $T'_{2,3}$

Slika 3.7: Primer simetričnega, bisimetričnega in skoraj simetričnega drevesa

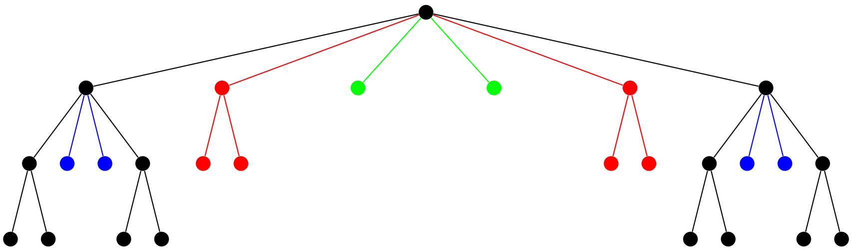
V tem poglavju bomo spoznali, da se razlikovalni indeks drevesa T razlikuje od $D(T)$ kvečjemu za ena. Iz zgornje meje za povezane grafe že vemo, da je $D(T) \leq \Delta(T)$. V [5] je pokazano, da je enakost dosežena natanko v primerih, ko je T simetrično drevo ali pot lihe dožine.

Za začetek definirajmo poseben razred dreves, ki bodo imela pomembno vlogo pri zgornji meji razlikovalnega števila ter razlikovalnega indeksa dreves.

Definirajmo razred dreves $\mathcal{B}(h,d)$, $h \geq 0$, $d \geq 2$, na sledeč način. Najprej vzamemo skoraj simetrično drevo $T'_{h,d}$ in izberemo l njegovih (ne nujno različnih) nivojev h_i, za katere velja $0 \leq h_i \leq h-2$, $i \in [l]$. Za vsak $i \in [l]$ izberemo še k_i, za katerega velja $1 \leq k_i \leq h - h_i - 1$ ter konstruiramo skoraj simetrično drevo $T'_{k_i,d}$. Za vsak $i \in [l]$ prvotnemu drevesu $T'_{h,d}$ pripnemo drevo $T'_{k_i,d}$ na vsako vozlišče nivoja h_i. Pripenjanje drevesa tukaj pomeni, da enačimo koren drevesa $T'_{k_i,d}$ z vozliščem, na katerega ga pripenjamo. Predpostavljamo, da za $h_i \neq h_j$ velja, da drevesi $T'_{k_i,d}$ in $T'_{k_j,d}$ nista izomorfni. Dobljeno drevo označimo s $T'_{h,d}([T'_{k_1,d}]h_1, \ldots, [T'_{k_l,d}]h_l)$. Postopek lahko ponavljamo še na drevesih, ki smo jih pripeli; za izbran $T'_{k_i,d}$ spet izberemo ustrezne nivoje in višine, konstruiramo nova skoraj simetrična drevesa in jih pripnemo na ustrezni nivo vseh kopij $T'_{k_i,d}$. Na ta način dobimo drevo T_0. Če vzamemo dve kopiji tega drevesa in njuni centralni vozlišči povežemo s povezavo, dobimo drevo T iz razreda $\mathcal{B}(h,d)$.

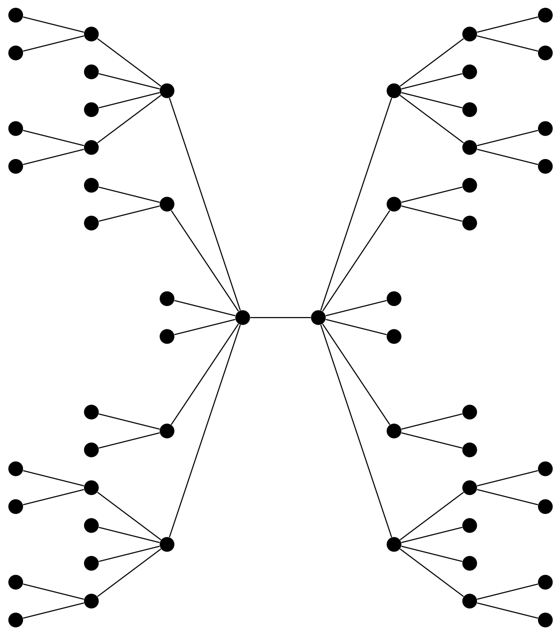
Primer. Konstruirajmo drevo iz razreda $\mathcal{B}(3,3)$. Začnimo z drevesom $T'_{3,3}([T'_{2,3}([T'_{1,3}]0)]0, [T'_{1,3}]1)$. Izbrana nivoja naj bosta $h_1 = 0$ in $h_2 = 1$, izbrani višini pa $k_1 = 2$ ter $k_2 = 1$.

Prvotno drevo $T'_{3,3}$ je prikazano v črni barvi. Pripnemo $T'_{2,3}$ na nivoju 0 (rdeča barva) in $T'_{1,3}$ na nivoju 1 (modra barva). Ponovimo postopek še na rdečem poddre-



Slika 3.8: Drevo $T'_{3,3}([T'_{2,3}([T'_{1,3}]0)]0, [T'_{1,3}]1)$

vesu; izberemo nivo 0 in višino 1. Pripeto drevo $T'_{1,3}$ je obarvano zeleno. Če sedaj povežemo centralni vozlišči dveh kopij zgornjega drevesa s povezavo, dobimo drevo iz razreda $\mathcal{B}(3,3)$.



Slika 3.9: Drevo iz razreda $\mathcal{B}(3,3)$

Iz konstrukcije sledi, da ima vsako drevo iz razreda $\mathcal{B}(h,d)$ centralno povezavo. Tudi bisimetrično drevo $T''_{h,d}$ se nahaja v tem razredu, saj lahko izberemo $l = 0$ (ne izberemo nobenega nivoja za pripenjanje dreves).

Naj bo $T \in \mathcal{B}(h,d)$ in naj bo $x \in V(T)$ poljubno vozlišče. Če to vozlišče odstranimo, drevo razpade na $s+1$ povezanih komponent ($s \geq 0$). Označimo s $T^1, \ldots, T^s$ tiste povezane komponente $T - x$, ki ne vsebujejo centralne povezave drevesa T. Naj bo x_i tisto vozlišče v T^i, ki je v T sosednje z x. Potem drevo $T_{x_i} = T^i + x_i x$ imenujemo *veja s korenom v x drevesa T.*

Naj bo $x \in V(T)$, kjer je $T \in \mathcal{B}(h,d)$. Naj bo T_x veja s korenom v x. Ker smo v konstrukciji dreves iz razreda $\mathcal{B}(h,d)$ predpostavili, da na isti nivo ne pripenjamo izomorfnih dreves, velja, da obstaja natanko $d-1$ vej s korenom v x, ki so izomorfne T_x (šteto vključno s T_x). Velja tudi obrat, in sicer vsako drevo T, za katerega velja prej opisana lastnost, pripada razredu $\mathcal{B}(h,d)$.

Za ta razred najprej določimo razlikovalno število.

Trditev 3.5. *Za drevo $T \in \mathcal{B}(h,d)$, kjer je $d \geq 3$, velja $D(T) = d - 1$. Za drevo $T \in \mathcal{B}(h,2)$ velja $D(T) = 2$.*

Dokaz. Naj bo $d \geq 3$. Najprej označimo obe krajišči centralne povezave z različnima oznakama in ju s tem fiksiramo. Po prejšnji lastnosti ima vsako od njiju $d-1$ izomorfnih vej. Njihova vozlišča, ki so sosedna z že označenim vozliščem, označimo vsako z drugo oznako. Vsakič torej potrebujemo $d-1$ oznak. Postopek nadaljujemo vse do listov. Opazimo tudi, da potrebujemo vsaj $d-1$ oznak, saj za vsak list obstaja še $d-2$ listov z istim staršem. Listi z istim staršem morajo imeti med sabo različne oznake, saj bi sicer lahko zamenjali dva lista z enako oznako. Naj bo sedaj $d = 2$. V tem primeru potrebujemo samo dve oznaki. Z oznako 1 označimo eno izmed krajišč centralne povezave, z oznako 2 pa vsa ostala vozlišča drevesa. S tem smo fiksirali vsa vozlišča, saj bi edini možen netrivialen avtomorfizem zamenjal krajišči centralne povezave. Seveda potrebujemo vsaj dve oznaki, saj drevo iz razreda $T \in \mathcal{B}(h,2)$ ni asimetrično; primer netrivialnega avtomorfizma je avtomorfizem, ki zamenja krajišči centralne povezave. □

S pomočjo te trditve sedaj poiščimo razlikovalni indeks dreves. Za drevo $T \in \mathcal{B}(h,2)$ lahko podobno kot v prejšnjem dokazu sklepamo, da velja $D'(T) = 2$, saj v tem primeru z oznako 1 označimo eno izmed povezav, ki ima s centralno skupno krajišče. Ostale povezave dobijo oznako 2, zaradi česar sta krajišči centralne povezave fiksirani, s tem pa tudi vsa ostala vozlišča.

Razlikovalni indeks vseh ostalih dreves nam podaja sledeč izrek.

Izrek 3.6 ([9])**.** *Naj bo T drevo reda $n \geq 3$. Potem velja $D'(T) = D(T) + 1$, če je $T \in \mathcal{B}(h,d)$ za $h \geq 1$ in $d \geq 3$, ter $D'(T) = D(T)$ za vsa ostala drevesa.*

Dokaz. Za drevesa T iz razreda $\mathcal{B}(h,d)$ za $h \geq 1$ in $d \geq 3$ brez težav razmislimo, da velja $D'(T) = d = D(T) + 1$. Povezave s krajiščem v poljubnem vozlišču x, ki imajo drugo krajišče v eni izmed $d-1$ izomorfnih vej s korenom v x, moramo označiti z $d-1$ različnimi oznakami. Vendar moramo tudi razlikovati med obema povezanima komponentama $T - e_0$, saj bi ju sicer netrivialen avtomorfizem lahko zamenjal. V ta namen označimo eno od povezav (recimo takšno, ki ima eno skupno krajišče z e_0) z dodatno oznako d in tako konstruiramo razlikovalno d-označenje povezav.

Pokažimo sedaj, da za vsa drevesa velja $D'(T) \leq D(T) + 1$. Naj bo $c : V(T) \to [D(T)]$ razlikovalno označenje vozlišč. Konstruirajmo razlikovalno označenje povezav $c' : E(T) \to [D(T) + 1]$.

Primer 1. T ima centralno vozlišče v.

Naj bo xy povezava v T, za katero velja $d(x,v) = d(y,v) + 1$. Tej povezavi priredimo oznako $c'(xy) = c(x)$. Recimo, da obstaja netrivialen avtomorfizem ϕ drevesa T, ki ohranja označenje povezav c'. Vemo, da mora fiksirati centralno vozlišče v_0, zato posledično ohranja tudi razdalje posameznih vozlišč od v_0. Od tod za poljuben $x \in V(G)$ sledi $c(\phi(x)) = c'(\phi(x)\phi(y)) = c'(xy) = c(x)$, kar je v nasprotju s predpostavko, da je c razlikovalno označenje vozlišč.

Primer 2. T ima centralno povezavo $e_0 = a_1a_2$.

Naj bo T_1 tista povezana komponenta $T - e_0$, ki vsebuje a_1, T_2 pa tista, ki vsebuje a_2. Naj bo $xy \in E(T - e_0)$ takšna, da velja $d(x,e_0) = d(y,e_0) + 1$. Priredimo ji oznako

$c'(xy) = c(x)$. Povezavi e_0 priredimo poljubno oznako. Recimo, da obstaja obstaja netrivialen avtomorfizem ϕ drevesa T, ki ohranja označenje povezav c'. Potem obstajata povezavi x_1y_1 in x_2y_2, ki imata enako oznako, ϕ pa eno preslika v drugo. Zanju torej velja $\phi(x_1)\phi(y_1) = x_2y_2$. Vemo, da ϕ fiksira povezavo e_0, zato mora ohrajati tudi razdalje od vozlišč do e_0. Od tod sledi, da velja $d(x_1, e_0) = d(x_2, e_0)$ in $c(x_1) = c(x_2)$.

2a. Recimo, da sta x_1y_1 in x_2y_2 v isti povezani komponenti $T - e_0$. Potem po definiciji označenja povezav c' avtomorfizem ϕ ohranja označenje vozlišč c, kar je v nasprotju s predpostavko.

2b. Recimo, da sta x_1y_1 in x_2y_2 v različnih povezanih komponentah $T - e_0$. Potem ϕ zamenja krajišči e_0 in porodi izomorfizem med poddrevesoma T_1 in T_2. Za $T \in \mathcal{B}(h, 2)$ smo že pokazali $D'(T) = 2$, prav tako tudi za $T \in \mathcal{B}(h, d)(d \geq 3)$ vemo, da velja $D'(T) = D(T) + 1$. Če T ne spada v nobenega od teh primerov, obstaja vozlišče $x \in V(T)$ z manj kot $D(T)$ izomorfnimi vejami s korenom v x. Potem lahko eni izmed njihovih povezav s krajiščem v x priredimo eno izmed $D(T)$ oznak in s tem fiksiramo celotno drevo.

Pokazali smo, da za vsako drevo T velja $D'(T) \leq D(T) + 1$ ter da je enakost dosežena natanko v primeru, ko je $T \in \mathcal{B}(h, d)$, kjer je $d \geq 3$. Pokazati moramo še, da velja $D(T) \leq D'(T)$.

Naj bo c' razlikovalno označenje povezav drevesa T z $D'(T)$ oznakami. Obratno kot v zgornjem primeru definiramo označenje vozlišč c na sledeč način: če ima drevo centralno povezavo e_0, označimo njeni krajišči z oznako $c'(e_0)$. Ostala vozlišča označimo na način $c(x) = c'(xy)$, kjer je xy povezava, za katero velja $d(x, v_0) = d(y, v_0)+1$ (v primeru centralnega vozlišča) oziroma $d(x, e_0) = d(y, e_0)+1$ (v primeru centralne povezave). Ker označenja vozlišč c ne more ohranjati noben netrivialen avtomorfizem T, vidimo, da res velja $D(T) \leq D'(T)$. □

Posledica 3.7. *Naj bo T drevo reda $n \geq 3$. Potem velja $D'(T) \leq \Delta(T)$. Enakost je dosežena natanko tedaj, ko je T simetrično ali bisimetrično drevo.*

Dokaz. Posledica sledi iz trditve 3.5 in izreka 3.6. Če je drevo T simetrično ali bisimetrično, velja $D'(T) = D(T) = \Delta(T)$. Če je drevo T iz razreda $\mathcal{B}(h, d)$, velja $D'(T) = D(T) + 1 \leq \Delta(T) - 1 + 1 = \Delta(T)$. Za poljubno drugo drevo T velja $D'(T) = D(T) \leq \Delta(T)$. □

3.4 Povezani grafi

Sedaj si oglejmo še zgornjo mejo za razlikovalni indeks poljubnega povezanega grafa. Izkaže se, da je enaka kot zgornja meja razlikovalnega indeksa dreves.

Izrek 3.8 ([9]). *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$. Potem je $D'(G) \leq D(G) + 1$.*

Dokaz. V primeru, da je G drevo, izrek drži po izreku 3.6. Predpostavimo torej, da G vsebuje vsaj en cikel. V primeru, da je G cikel, že poznamo točno vrednost $D'(G)$ in se zlahka prepričamo, da izrek velja tudi v tem primeru. Naj bo torej $c : V(G) \to [D(G)]$ razlikovalno označenje vozlišč. Predpostavimo, da je $D(G) \geq 2$, saj je sicer G asimetričen in velja $D'(G) = D(G) = 1$.

Konstruirajmo razlikovalno označenje povezav $c' : E(G) \to \{0, 1, \dots, D(G)\}$ na sledeč način: s C označimo nek najkrajši cikel v grafu G. Označimo ga s tremi oznakami: dvema sosednjima povezavama priredimo oznaki 1 in 2, vse ostale povezave na C dobijo oznako 0. V tem primeru C ne more imeti netrivialnega avtomorfizma. Ker oznake 0 ne bomo uporabili nikjer drugje, je C fiksiran. Vse ostale povezave xy označimo takole:

- $c'(xy) = c(x)$, če je $d(x, C) = d(y, C) + 1$,
- $c'(xy) = 1$, če je $d(x, C) = d(y, C)$.

Recimo, da obstaja netrivialen avtomorfizem ϕ, ki ohranja to označenje povezav. Opazimo, da za $u, v \in V(C)$ velja, da če imata skupnega soseda z zunaj C, potem je $c'(uz) = c'(vz)$. Vemo, da mora ϕ ohranjati razdalje med posameznimi vozlišči in ciklom C. Za vsak $x \notin V(C)$ obstaja povezava xy, za katero velja $d(x, C) = d(y, C) + 1$. Za vsako tako povezavo velja $c'(\phi(x)\phi(y)) = c'(xy)$. Dobimo torej $c(\phi(x)) = c'(\phi(x)\phi(y)) = c'(xy) = c(x)$. Ker je C fiksiran, ϕ ohranja tudi oznake vozlišč na C, torej ohranja oznake vseh vozlišč G. To je v nasprotju s predpostavko, da je c razlikovalno označenje vozlišč. □

Posledica 3.9. *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$. Potem je $D'(G) \leq \Delta + 1$.*

Dokaz. Za grafe $K_n, K_{n,n}$ in C_5 že poznamo točne vrednosti razlikovalnega indeksa, tako da se lahko prepričamo, da posledica zanje res drži. Za vse ostale povezane grafe G trditev 2.4 pravi, da je $D(G) \leq \Delta$, torej je res $D'(G) \leq D(G) + 1 = \Delta + 1$. □

Dobljena zgornja meja je za 1 višja, kot analogna zgornja meja za drevesa. Tudi v primeru ostalih povezanih grafov lahko z izjemo treh majhnih grafov mejo še nekoliko izboljšamo.

Izrek 3.10 ([9])**.** *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$. Potem je $D'(G) \leq \Delta$, razen v primeru, ko je G enak C_3, C_4 ali C_5.*

Dokaz. Razlikovalni indeks poti in ciklov že poznamo. Razen za naštete izjeme zgornja meja $D'(G) \leq \Delta$ res velja. Ker so poti in cikli edini povezani grafi z $\Delta = 2$, v nadaljevanju predpostavimo, da je $\Delta \geq 3$.
Označimo z $N_r(\xi) = \{v \in V(G) : d(v, \xi) = r\}$. Pri tem lahko ξ predstavlja tako vozlišče kot povezavo.

Primer 1. G ni regularen.

Naj bo $xy \in E(G)$ taka povezava, da velja $d(x) = \delta$. Tej povezavi priredimo oznako 1. Povezavam s krajiščem v x priredimo različne oznake iz množice $\{2, \dots, \delta\}$, povezavam s krajiščem v y pa iz množice $\{\Delta - d(y) + 2, \dots, \Delta\}$. Ker je graf iregularen, velja $\delta \neq \Delta$, zato sta ti množici različni. Oznake 1 ne uporabimo nikjer drugje v grafu. Ker imata krajišči povezave xy različni paleti, sta torej fiksirani. Tudi vsa krajišča iz $N_1(xy)$ so fiksirana, saj imajo povezave, incidenčne z vozliščem x oziroma y, različne oznake. Podobno nadaljujemo: za $r \geq 1$ izberemo vozlišče u. Vseh povezav oblike uv, kjer je $v \in N_{r+1}(xy)$, je največ $\Delta - 1$. Označimo jih z različnimi oznakami iz množice $\{2, \dots, \Delta\}$. Na ta način fiksiramo vsa vozlišča grafa G. Neoznačene ostanejo povezave oblike uv, kjer sta obe krajišči iz množice $N_r(xy)$

za nek $r \geq 1$. Tem povezavam lahko priredimo poljubno oznako, npr. 2. Na ta način dobimo razlikovalno Δ-označenje povezav.

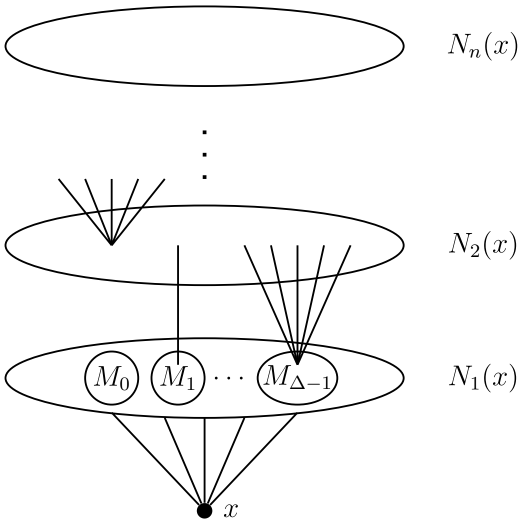
Primer 2. G je regularen.

Naj bo $x \in V(G)$ poljubno vozlišče. Vse njegove incidenčne povezave označimo z 1. To bo edino vozlišče v G s paleto $\{1, 1, \ldots, 1\}$, zato je fiksirano. Množico $N_1(x)$ razdelimo na podmnožice $M_0, M_1, \ldots, M_{\Delta-1}$, ki so definirane kot

$$M_k = \{v \in N_1(x) : |N_1(v) \cap N_2(x)| = k\}.$$

Z drugimi besedami, v M_k so tista vozlišča, ki imajo k sosedov v $N_2(x)$. Očitno velja $|M_0|+|M_1|+\cdots+|M_{\Delta-1}| = \Delta$. Če je $|M_0| = \Delta$, potem so vsi sosedi vozlišč iz $N_1(x)$ tudi sosedi vozlišča x, kar pomeni, da je G poln graf $K_{\Delta+1}$, katerega razlikovalni indeks že poznamo. Sicer velja $1 \leq |M_0| \leq \Delta - 1$. Vozlišča množice $|M_0|$ razvrstimo v poljubno zaporedje $v_0^1, v_0^2, \ldots, v_0^l$. Povezave s krajišči v M_0 označimo z oznakama 2 in 3 tako, da paleta vozlišča v_0^i vsebuje natanko $|M_0| + 1 - i$ povezav z oznako 2. Na ta način fiksiramo tudi vsa vozlišča iz M_0.
Ker avtomorfizmi ohranjajo sosednost, lahko poljuben avtomorfizem zamenja samo vozlišči znotraj množice M_k za nek $k \in [\Delta - 1]$. Naj bo $k \geq 1$. Spet razvrstimo vozlišča množice M_k v neko poljubno zaporedje $v_k^1, v_k^2, \ldots, v_k^m$. Vsako od teh vozlišč ima največ $\Delta - 1$ sosedov v množici $N_2(x)$. Za $i \in [m]$ označimo povezave oblike $v_k^i u$, kjer je $u \in N_2(x)$, z različnimi oznakami iz množice $[k+1] - \{i\}$. Vse ostale povezave s krajiščem v v_k^i označimo z 2. Sedaj so fiksirana vsa vozlišča iz $N_1(x) \cup N_2(x)$.

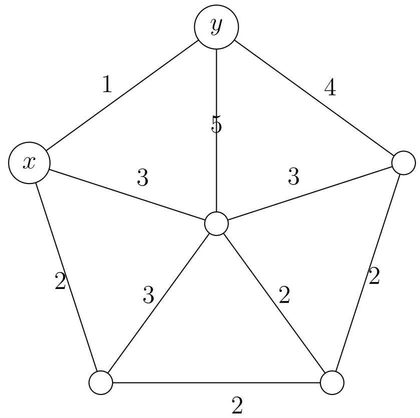
Recimo sedaj, da je fiksiran $N_j(x)$ za nek $j \geq 2$. Vsak $v \in N_j(x)$ ima največ $\Delta - 1$ sosedov v $N_{j+1}(x)$. Označimo povezave oblike vu za $u \in N_{j+1}(x)$ z različnimi oznakami iz množice $\{2, \ldots, \Delta\}$ in na ta način zaradi ohranjanja sosednosti fiksiramo krajišča. Ker ima vsako vozlišče iz $N_{j+1}(x)$ vsaj enega soseda iz $N_j(x)$, na ta način fiksiramo celotno množico $N_{j+1}(x)$. Preostale neoznačene povezave označimo s poljubno oznako, recimo z 2.
Na ta način fiksiramo vsa vozlišča grafa G, torej je konstruirano označenje povezav res Δ-razlikovalno.



Slika 3.10: Skica grafa G s prikazanimi množicami $N_r(x)$ in M_i

□

Primer. Poskusimo najti razlikovalno označenje povezav grafa W_6. Ta graf ni regularen, zato sledimo prvemu delu dokaza. Velja $\delta = 3$ in $\Delta = 5$. Izberemo torej vozlišče x stopnje δ ter njegovo sosednje vozlišče y ter označimo povezavo med njima z 1. Ostalima povezavama s krajiščem v x priredimo oznaki 2 in 3. Neoznačenima povezavama s krajiščem v y priredimo oznaki 5 in 4. Sedaj so fiksirana vozlišča v $\{x\} \cup N_1(xy)$. Preostanejo še tri povezave med različnimi vozlišči iz $N_1(xy)$ in $N_2(xy)$. Vsem lahko priredimo oznako 2. Tako smo dobili razlikovalno 3-označenje povezav. To ni optimalno, saj že iz izreka 3.8 vidimo, da je $D'(G) \leq 3 + 1 = 4$.



Slika 3.11: Graf W_6 z neoptimalnim razlikovalnim označenjem povezav

Da je razlikovalni indeks grafa W_6 manjši od 4, bi lahko ugotovili tudi brez izreka 3.8. Hitro namreč opazimo, kakšna je točna vrednost, saj je $D'(W_n) = 2$ za vsa kolesa na $n \geq 4$ vozliščih. Res, zadošča, da z oznako 1 označimo eno povezavo e na zunanjem ciklu C_{n-1} ter eno izmed povezav, ki krajišče e povezujejo z vozliščem stopnje $n-1$. Vse ostale povezave dobijo oznako 2. Vsa tri vozlišča, ki so incidenčna s povezavo z oznako 1, imajo različne palete, zato so fiksirana v vsakem avtomorfizmu ϕ, ki ohranja označenje povezav. Zaradi ohranjanja sosednosti mora ϕ fiksirati tudi vsa ostala vozlišča, torej je res ϕ res trivialen avtomorfizem, označenje povezav pa razlikovalno.

Poglavje 4

Razlikovalni kromatični indeks

Kot v primeru označenja vozlišč sedaj predpostavimo, da želimo, da označenje povezav ni le razlikovalno, ampak da je hkrati tudi dobro. *Razlikovalni kromatični indeks* grafa G, $\chi'_D(G)$, je najmanjše tako število k, da obstaja dobro označenje povezav grafa G s k oznakami, ki se ohranja le s trivialnim avtomorfizmom.

Iz definicije razlikovalnega kromatičnega indeksa sledi, da veljata naslednji preprosti lastnosti:

- $\chi'_D(G) \geq \max\{\chi'(G), D'(G)\}$,
- $\chi'_D(G) = \chi'(G)$ za asimetrične grafe.

V nadaljevanju nam bo v veliko pomoč Vizingov izrek, ki grafe razdeli v dva razreda.

Izrek 4.1 (Vizing, [2])**.** *Naj bo G enostaven graf. Potem velja $\chi'(G) = \Delta$ ali $\chi'(G) = \Delta + 1$.*

Dokaz izreka lahko najdemo npr. v [2]. Za grafe G z lastnostjo $\chi'(G) = \Delta$ pravimo, da spadajo v *razred 1*, medtem ko grafi z lastnostjo $\chi'(G) = \Delta + 1$ pripadajo *razredu 2*. Ogledali si bomo, kakšne so vrednosti razlikovalnega kromatičnega indeksa za oba razreda grafov. Videli bomo, da se razlikovalni kromatični indeks ne razlikuje dosti od kromatičnega indeksa.

4.1 Razlikovalni indeks barvnih sprehodov

Eden izmed možnih načinov, da razlikujemo med posameznimi vozlišči grafa, je označenje povezav, ki vsakemu vozlišču priredi drugačno paleto. Dobro označenje povezav, za katerega velja, da imata poljubni različni vozlišči tudi različni paleti, imenujemo *vozliščno-razlikovalno* označenje povezav. Najmanjši tak k, da obstaja dobro vozliščno-razlikovalno k-označenje povezav, imenujemo *vozliščno-razlikovalni indeks* in ga označimo z $\mathrm{vdi}(G)$. V [10] je pokazano, da je $n + 1$ zgornja meja za vozliščno-razlikovalni indeks grafa G z n vozlišči, $\mathrm{vdi}(G) \leq n + 1$. Ta zgornja meja je tudi dosežena za polne grafe.

Vsako vozliščno-razlikovalno označenje povezav je tudi razlikovalno, vendar pa vsako razlikovalno označenje povezav ni nujno vozliščno-razlikovalno. Zato za razlikovalni kromatični indeks velja $\chi'_D(G) \leq \mathrm{vdi}(G)$. To zgornjo mejo bi želeli izboljšati.

V ta namen ne zahtevamo več, da imajo vsa vozlišča različne palete, ampak različne množice barvnih sprehodov, kot jih bomo definirali v nadaljevanju.

Naj bo c' dobro označenje povezav grafa G. Za $x \in V(G)$ vsak sprehod, ki se začne v x in konča v poljubnem vozlišču grafa G, definira zaporedje oznak povezav (α_i). To zaporedje imenujemo *barvni sprehod*. Množico vseh barvnih sprehodov z začetkom v x označimo z $W_{c'}(x)$.

Najmanjši tak k, da obstaja dobro k-označenje c grafa G z lastnostjo $W_c(x) \neq W_c(y)$ za vsak par $x \neq y$, imenujemo *razlikovalni indeks barvnih sprehodov*. Označimo ga z $\mu(G)$.

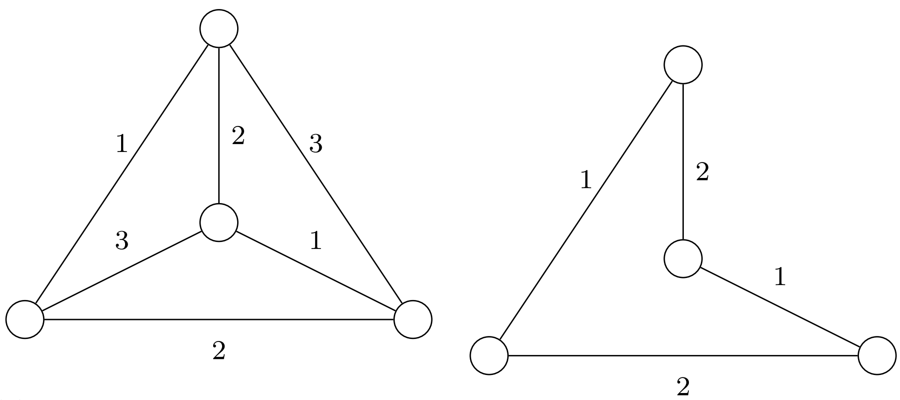
Lema 4.2. *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$. Potem velja $\chi'_D(G) \leq \mu(G)$.*

Dokaz. Naj bo c' označenje povezav grafa G, za katerega velja $W_{c'}(x) \neq W_{c'}(y)$ za $x \neq y$, $x, y \in V(G)$. Recimo, da obstaja netrivialen avtomorfizem ϕ, ki ohranja c'. Potem obstaja vozlišče $x \in V(G)$, za katerega velja $x \neq \phi(x)$. Ker ϕ ohranja označenje povezav, za barvni sprehod $(\alpha_i) \in W_{c'}(x)$ velja tudi $(\alpha_i) \in W_{c'}(\phi(x))$. Tudi za barvni sprehod $(\beta_i) \in W_{c'}(\phi(x))$ velja $(\beta_i) \in W_{c'}(x)$. Od tod sledi, da je $W_{c'}(x) = W_{c'}(\phi(x))$, kar je v nasprotju s predpostavko, da je $W_{c'}(x) \neq W_{c'}(y)$ za $x \neq y$. $\square$

V nadaljevanju bomo spoznali zgornje meje za $\mu(G)$. Pred tem naštejmo še nekaj pojmov in oznak, ki jih bomo pri tem potrebovali.

Naj bo G graf, c' njegovo dobro označenje povezav in α ter β dve izmed možnih oznak. Maksimalni povezan podgraf grafa G, ki ga sestavljajo le povezave z oznakama α in β, imenujemo (α, β)-*Kempejev podgraf*. Ker posamezno vozlišče ne more imeti več kot ene incidenčne povezave s posamezno oznako, so vsa vozlišča (α, β)-Kempejevega podgrafa stopnje največ 2. Od tod sledi, da je (α, β)-Kempejev podgraf vedno pot ali sod cikel (lihi cikli ne premorejo dobrega 2-označenja). Uporabimo lahko izraza (α, β)-*Kempejeva pot* in (α, β)-*Kempejev cikel*.

Primer. Oglejmo si primer dobrega označenja povezav polnega grafa K_4 in primer Kempejevega podgrafa.



(a) K_4 z dobrim označenjem povezav

(b) $(1, 2)$-Kempejev cikel

Slika 4.1: Primer Kempejevega cikla v dobrem označenju povezav grafa K_4

Prirejanje M grafa G je množica neodvisnih povezav grafa G, tj. množica povezav, v kateri nobeni dve povezavi iz M nimata skupnega krajišča. Vozlišča, ki so incidenčna s povezavami iz prirejanja M, so M-zasičena. Če prirejanje M zasiči vsa vozlišča grafa, rečemo, da je *popolno*.

Množica $S \subset V(G)$ je *prerezna množica* grafa G, če ima $G - S$ več kot eno komponento. *Povezanost grafa*, $\kappa(G)$, je moč najmanjše množice S, da je $G - S$ nepovezan ali K_1. Graf G je k*-povezan*, če je $k \leq \kappa(G)$.

Hamiltonov cikel grafa G je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa G. Če graf G premore Hamiltonov cikel, pravimo, da je *Hamiltonov*.

Naj bo C nek poljuben cikel grafa G. Določimo mu lahko eno izmed dveh možnih orientacij. Če je $x \in V(G)$ poljubno vozlišče cikla C, potem z x^- označimo njegovega predhodnika glede na izbrano orientacijo, z x^+ pa njegovega naslednika. Enake oznake uporabljamo tudi pri poteh; če izberemo eno izmed krajišč poti P za prvo, poti določimo orientacijo. Glede na to orientacijo spet z x^- označujemo predhodnika vozlišča x, z x^+ pa naslednika.

4.1.1 Grafi razreda 1

Kot smo že omenili, si bomo ogledali zgornje meje za $\mu(G)$ ter $\chi'_D(G)$. V tem razdelku si najprej oglejmo grafe razreda 1. V nadaljevanju bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 4.3. *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 8$ z dobrim označenjem povezav. Predpostavimo, da je za poljubni oznaki α in β (α, β)-Kempejev podgraf cikel dolžine* 4 *ali* 6*. Potem obstaja takšno označenje povezav grafa G z istim številom oznak, da je vsaj en Kempejev podgraf cikel dolžine vsaj* 8*.*

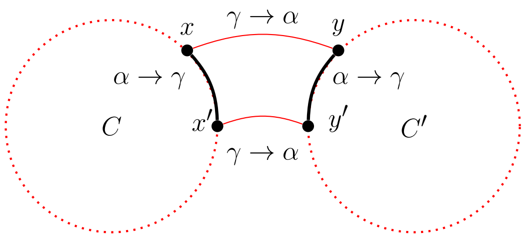
Preden se lotimo dokaza, najprej opazimo dve lastnosti, ki veljata ob predpostavkah leme 4.3:

- Vsaka oznaka inducira popolno prirejanje grafa G.

  Res, predpostavimo, da obstaja $x \in V(G)$, ki v paleti nima oznake α. Ker je G povezan, paleta vozlišča x ni prazna, torej vsebuje neko oznako β. (α, β)-Kempejev podgraf, ki vsebuje x, je torej pot: začne se v vozlišču x s povezavo z oznako β. To je v nasprotju predpostavko. Sledi, da je poljubno vozlišče grafa G incidenčno z natanko eno povezavo z oznako α, kar inducira popolno prirejanje.

- Če sta dve zaporedni vozlišči x, x' na (α, β)-Kempejevem ciklu C povezani z dvema zaporednima vozliščema y, y' na (α, β)-Kempejevem ciklu C' ($xy, x'y' \in E(G)$), povezavi pa imata isto oznako γ, potem obstaja označenje G z istim številom oznak, ki premore (α, β)-Kempejev cikel dolžine $|C| + |C'|$.

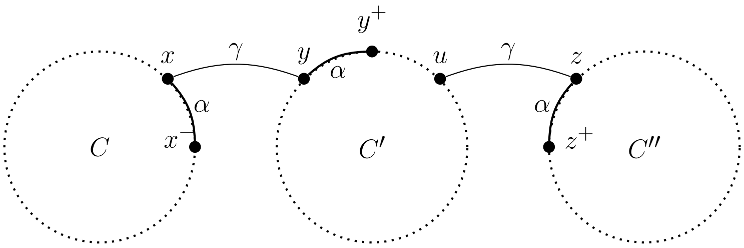
  Če imata povezavi xx' in yy' enako oznako, brez škode za splošnost recimo α, označenje povezav spremenimo na sledeč način: povezavama xx' in yy' priredimo oznako γ, povezavama xy ter $x'y'$ pa oznako α. S tem še vedno ohranimo dobro označenje povezav, cikla pa združimo v en (α, β)-Kempejev cikel dolžine $|C| + |C'|$. Če imata povezavi xx' in yy' različni oznaki, lahko zamenjamo oznaki α in β na ciklu C in nadaljujemo po prejšnjem postopku.



Slika 4.2: (α, β)-Kempejev cikel dolžine $|C| + |C'|$ (rdeč)

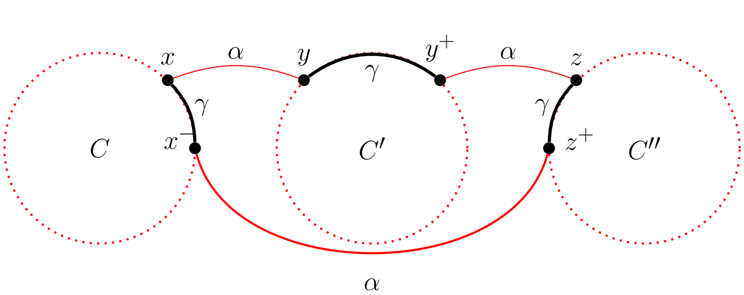
Dokaz (leme 4.3). Ločili bomo dva primera.

Primer 1. Obstajajo vsaj trije (α, β)-Kempejevi cikli C, C' in C''. Obstaja takšna oznaka γ, da obstaja povezava s to oznako med C in C' ter med C' in C''.
Naj bo $x \in C$, $y, u \in C'$ ter $z \in C''$. Naj bosta xy in uz zgoraj omenjeni povezavi z oznako γ. Cikle orientiramo tako, da imajo povezave x^-x, yy^+ in zz^+ oznako α.



Slika 4.3: Skica treh Kempejevih ciklov

Glede na razdaljo med y in u ločimo tri podprimere.
1a. Naj bo $u = y^+$ ali $u = y^-$.
Zaradi simetrije lahko obravnavamo samo primer, ko je $u = y^+$. Potem je $x^-xyy^+zz^+$ (α, γ)-Kempejeva pot dolžine 5. Po predpostavki so vsi (α, γ)-Kempejevi podgrafi cikli dolžine največ 6. Od tod sledi, da obstaja povezava z^+x^-, ki ima oznako γ. Na dobljenem (α, γ)-6-ciklu lahko zamenjamo oznaki α in γ ter tako dobimo novo dobro označenje povezav grafa G z enakim številom oznak. To označenje povezav ima (α, β)-Kempejev cikel dolžine $|C| + |C'| + |C''|$.



Slika 4.4: (α, β)-Kempejev cikel dolžine $|C| + |C'| + |C''|$ (rdeč)

1b. Naj bo $u = y^{++}$ ali $u = y^{--}$.
Zaradi simetrije lahko obravnavamo samo primer, ko je $u = y^{++}$. Opazili smo že, da mora obstajati povezava e z oznako γ, ki je incidenčna vozlišču y^+. Če bi

povezava e drugo krajišče imela v katerem od ostalih dveh ciklov, smo v situaciji iz prejšnjega podprimera. Predpostavimo torej, da je drugo krajišče povezave e prav tako na ciklu C'. Recimo, da je drugo krajišče povezave e vozlišče y^{+++}. Potem je pot $x^-xyy^+y^{+++}y^{++}zz^+$ (α,γ)-pot dolžine 7, kar je v protislovju s predpostavko o obliki Kempejevih grafov grafa G. S tem smo tudi izčrpali vse možnosti, ko je C' dolžine 4. Obravnavajmo še primer, ko je C' dolžine 6. Zaradi simetrije lahko izpustimo primer, ko je drugo krajišče povezave e v vozlišču y^-. Predpostavimo torej, da je drugo krajišče v y^{--}. Potem je pot $x^-xyy^+y^{--}y^-$ (α,γ) pot dolžine 5. Po predpostavki torej obstaja povezava y^-x^- z oznako γ. Označimo nastali cikel z oznako C'''. Cikla C''' in C' imata dve zaporedni vozlišči povezani z dvema zaporednima vozliščema s povezavama z isto oznako, od koder že vemo, da sledi, da obstaja (α,β)-Kempejev cikel dolžine $|C'''|+|C'|$.

1c. Naj bo $u=y^{+++}$, C' je dolžine 6.
Z enakim premislekom kot v zgornjem podprimeru lahko zaključimo, da obstajata povezavi z oznako γ, ki imata eno krajišče v vozliščih y^+ oziroma y^{++}, drugo krajišče pa nekje na ciklu C'. Možna sta dva primera; ali sta ti dve povezavi y^+y^- ter $y^{++}y^{--}$, ali pa sta $y^{++}y^-$ in y^+y^{--}. V obeh primerih lahko konstruiramo (α,β) pot dolžine 9: v prvem primeru je to $x^-xyy^+y^-y^{--}y^{++}y^{+++}zz^+$, v drugem pa $x^-xyy^+y^{--}y^-y^{++}y^{+++}zz^+$. V obeh primerih pridemo v protislovje z obliko Kempejevih grafov.

Primer 2. Za poljubne različne oznake α,β in γ velja: če obstaja povezava z oznako γ med poljubnima (α,β)-Kempejevima cikloma C in C', potem imajo vse povezave z oznako γ, ki imajo eno krajišče na $C\cup C'$, tudi drugo krajišče na $C\cup C'$.

Naj bosta C in C' (α,β)-Kempejeva cikla, ki sta povezana s povezavo z oznako γ. Oglejmo si graf G', ki ga inducirajo povezave z oznakami α,β in γ na vozliščih $V(C\cup C')$. Dobljen podgraf je kubičen. Če je G' Hamiltonov, s tem zaključimo dokaz; v tem primeru namreč lahko konstruiramo novo označenje povezav tako, da se na Hamiltonovem ciklu izmenjujeta oznaki α in β, vse ostale povezave pa označimo z γ. V tem označenju obstaja (α,β)-Kempejev cikel dolžine $|C|+|C'|$. Predpostavimo še, da G' ni Hamiltonov. Ker sta oba cikla C in C' sode dolžine, med njima obstaja vsaj še ena povezava z oznako γ. To pomeni, da je G' 2-povezan. V literaturi lahko poiščemo vse možne kubične ne-Hamiltonove 2-povezane grafe reda ≤ 12. Izkaže se, da sta takšna samo dva: Petersenov graf in graf, ki ga dobimo tako, da Petersenovemu grafu vozlišče nadomestimo s trikotnikom. Nobeden od teh dveh ne more biti graf G', saj ne vsebujeta sodih ciklov. Tako lahko zaključimo, da primer, ko G' ni Hamiltonov, ni mogoč. □

Izrek 4.4 ([10])**.** *Naj bo G povezan graf reda $n\geq 3$. Potem velja $\mu(G)\leq\chi'(G)+1$ natanko tedaj, ko $G\notin\{C_4,K_4,C_6,K_{3,3}\}$.*

Dokaz. Naj bo $c: E(G)\to[\chi'(G)]$ minimalno dobro označenje povezav. Konstruirali bomo označenje povezav $c': E(G)\to\{0\}\cup[\chi'(G)]$, ki bo dobro in bo z barvnimi sprehodi razlikovalo vozlišča grafa G.

Primer 1. Obstajata oznaki α in β, da ima graf G (α,β)-Kempejevo pot P dolžine vsaj 2.

Izberimo eno izmed krajišč poti P in ga poimenujmo z x, njemu sosednje vozlišče pa z y. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da ima povezava xy oznako α.

Nadomestimo to oznako z oznako 0. Pokažimo, da novo dobljeno označenje povezav z barvnimi sprehodi razlikuje vozlišča. Predpostavimo, da jih ne, torej da obstajata vozlišči u in v, za kateri velja $W_{c'}(u) = W_{c'}(v)$. S Q označimo najkrajšo pot od vozlišča u do povezave xy. Ta pot skupaj s povezavo xy definira barvni sprehod. Sedaj s Q' označimo barvni sprehod, ki se začne v vozlišču v in ima enako zaporedje oznak kot Q. Tudi Q' ima zadnje vozlišče v x ali y. Zadnji povezavi na Q in Q' imata enaki oznaki, zato se ne moreta oba končati v x oziroma oba v y, saj potem označenje povezav ne bi bilo dobro. Paleti vozlišč x in y se razlikujeta, saj v paleti vozlišča x ni oznake β, v paleti vozlišča y pa je. Samo eno izmed vozlišč u in v torej premore barvni sprehod, ki ga inducirajo oznake na poti Q, katerim dodamo na koncu še oznaki 0 in β. To je v nasprotju s predpostavko, da velja $W_{c'}(u) = W_{c'}(v)$.

Primer 2. Naj bo G graf reda $n \geq 8$ in naj bo za poljubni oznaki α in β vsak (α, β)-Kempejev podgraf cikel.

Po lemi 4.3 lahko za grafe reda $n \geq 8$ izberemo c na tak način, da je vsaj eden izmed (α, β)-Kempejevih ciklov dolžine vsaj 8. Označimo ga s C. Na njem izberemo poljubno vozlišče x in mu določimo poljubno orientacijo. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $c(x^-x) = \alpha$. Potem je $c(x^{++}x^{+++}) = \beta$. Povezavama x^-x in $x^{++}x^{+++}$ spremenimo oznako in ju označimo z oznako 0. Dobljeno označenje povezav razlikuje vozlišča z barvnimi sprehodi. Predpostavimo, da jih ne, torej da obstajata vozlišči u in v, za kateri velja $W_{c'}(u) = W_{c'}(v)$. Podobno kot v prejšnjem primeru s Q označimo najkrajšo pot od vozlišča u do poljubne povezave z oznako 0. Skupaj s to povezavo Q inducira barvni sprehod. S Q' označimo barvni sprehod od vozlišča v do povezave z oznako 0, ki ga inducira zaporedje oznak na Q. Tudi Q' ima torej končno vozlišče v enem izmed krajišč povezav x^-x ali $x^{++}x^{+++}$.

2a. Q in Q' imata končni vozlišči v krajiščih dveh različnih povezav.
Paleti vozlišč x in x' ne vsebujeta oznake α, paleti vozlišč x^{++} in x^{+++} pa jo. Eno izmed vozlišč u in v torej premore barvni sprehod, ki ga inducirajo oznake na poti Q, katerim dodamo na koncu še oznaki 0 in α. Drugo vozlišče tega barvnega sprehoda ne premore, kar je v nasprotju s predpostavko.

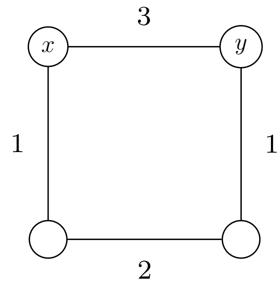
2b. Q in Q' imata končni vozlišči v krajiščih iste povezave.
Ker je označenje povezav dobro, sta končni vozlišči Q in Q' različni krajišči iste povezave. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je ta povezava x^-x. Nadaljujemo barvna sprehoda, inducirana s Q in Q' tako, da se premikamo po ciklu C. Premikamo se po povezavah z oznakama α in β. Sprehod od vozlišča x bo po dveh korakih prišel do povezave z oznako 0, medtem ko bo sprehod od vozlišča x^- do povezave z oznako 0 potreboval vsaj štiri korake. Na ta način smo za vozlišči u in v našli dva različna barvna sprehoda, kar je v nasprotju s predpostavko $W_{c'}(u) = W_{c'}(v)$.

Primer 3. Naj bo graf G reda $n \leq 7$ in naj bo za poljubni oznaki α in β vsak (α, β)-Kempejev podgraf cikel.

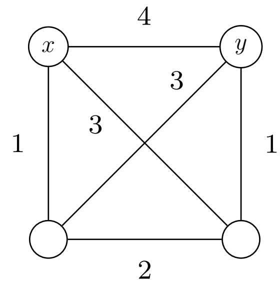
V tem primeru torej poljubni dve oznaki inducirata cikel dolžine 4 ali 6. Videli smo že, da pri teh pogojih poljubna oznaka porodi popolno prirejanje. Od tod sledi, da je red grafa G sodo število. Analizirajmo oba možna primera:

3a. $n = 4$.
Obstajata dva grafa reda 4, za katera velja, da poljubna oznaka njunega minimalnega označenja povezav porodi popolno prirejanje. Oznake minimalnega označenja

povezav grafa C_4 porodijo dve različni popolni prirejanji, oznake grafa K_4 pa tri. Zanju velja $\chi'(C_4) = 2$ ter $\chi'(K_4) = 3$. Hitro se lahko prepričamo, da dodajanje ene dodatne oznake ne razlikuje vozlišč. Zaradi simetrije lahko poljubno izberemo povezavo, ki ji dodelimo dodatno oznako (3):



Slika 4.5: Označenje povezav C_4 s tremi oznakami

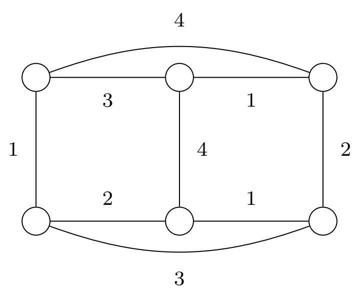


Slika 4.6: Označenje povezav K_4 s štirimi oznakami

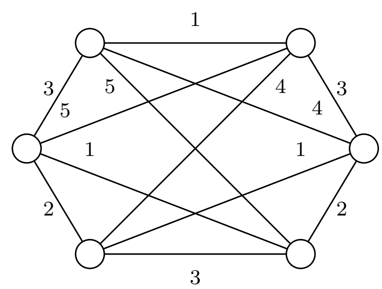
Vidimo, da v obeh primerih dodajanje ene oznake ne zadošča, da bi dobljeno dobro označenje povezav razlikovalo vsa vozlišča. V primeru C_4 vidimo, da je $W_c(x) = W_c(y) = \{3, 1, 31, 12, \dots\}$. Če bi dodali še eno oznako, bi to pomenilo, da so vse povezave različno označene, torej bi bile palete vozlišč različne. Zaradi simetrije v primeru K_4 prav tako hitro vidimo, da je $W_{c'}(x) = W_{c'}(y)$. Tudi tukaj bi za konstrukcijo dobrega označenja povezav, ki vozlišča razlikuje z barvnimi sprehodi, zadoščalo dodati še eno oznako. Če bi namreč eno ozmed oznak 1 spremenili v oznako 5, bi bile palete vozlišč različne.

3b. $n = 6$.

Obstaja pet grafov reda 6, za katere velja, da poljubna oznaka njihovega minimalnega označenja povezav porodi popolno prirejanje. To so: C_6 z dvema popolnima prirejanjema, $K_{3,3}$ ter $K_3 \square K_2$ s tremi popolnimi prirejanji, $K_6 - M$ (kjer je M popolno prirejanje) s štirimi popolnimi prirejanji in K_6 s petimi popolnimi prirejanji. Oglejmo si najprej grafa $K_3 \square K_2$ ter $K_6 - M$. Zanju velja $\chi'(K_3 \square K_2) = 3$ ter $\chi'(K_6 - M) = 4$.



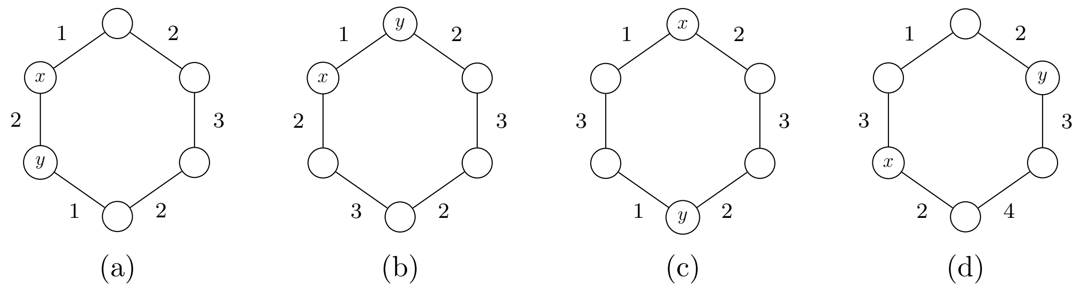
Slika 4.7: Označenje $K_3 \square K_2$ s štirimi oznakami



Slika 4.8: Označenje $K_6 - M$ s petimi oznakami

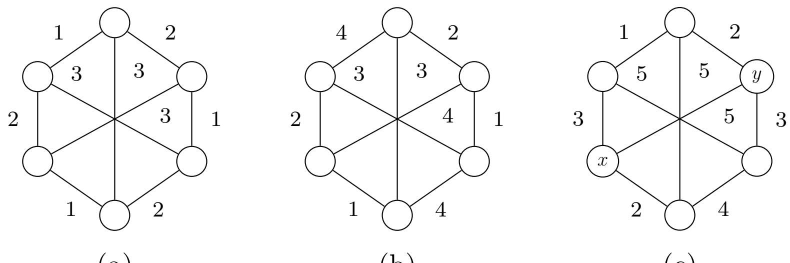
Iz slik je razvidno, da so prikazana dobra označenja povezav. Sicer nima vsako vozlišče enolične palete, vendar hitro opazimo, da se vozlišča z istimi paletami razlikujejo že v barvnih sprehodih dolžine 2. V primeru $K_3 \square K_2$ so to barvni sprehodi z začetno oznako 1, v primeru ter $K_6 - M$ pa takšni z začetno oznako 3. Za oba grafa lahko torej najdemo dobro razlikovalno označenje povezav s $\chi'(G) + 1$ oznakami. Posledično vidimo, da izrek velja tudi za K_6, za katerega velja $\chi'(K_6) = 5$; če namreč $K_6 - M$ dodamo M z novo oznako 6, dobilmo razlikovalno dobro označenje povezav.

Preostaneta še grafa C_6 in $K_{3,3}$, za katera velja $\chi'(C_6) = 2$ ter $\chi'(K_{3,3}) = 3$, pri katerih pa dodajanje ene same oznake ne bo zadostovalo. Ciklu C_6 bi lahko dodatno oznako dodali na eno ali dve povezavi. Na sliki je v prvem primeru (a) prikazana zamenjava ene same oznake, v drugih dveh (b) in (c) pa zamenjava dveh oznak. V vseh treh primerih lahko najdemo vozlišči x in y, za kateri velja $W_c(x) = W_c(y)$. Zadnji primer (d) prikazuje dobro razlikovalno označenje povezav; x in y sta edini vozlišči z isto paleto, vendar se razlikujeta v barvnih sprehodih dolžine 2, npr. vozlišče x premore barvni sprehod 24, vozlišče y pa ne.



Slika 4.9: Dobra označenja povezav cikla C_6

Podobno obravnavamo še graf $K_{3,3}$. Če ga označimo, kot je prikazano na prvi skici (a), opazimo, da v primeru, ko zamenjamo oznako eni ali dvema povezavama, enako kot v primeru C_6 najdemo dve vozlišči z enako množico barvnih sprehodov (vedno lahko namreč narišemo tako, da sta povezavi z zamenjanima oznakama na zunanjem ciklu). Posebej obravnavajmo torej le primer, ko zamenjamo oznake trem stranicam (b). Tudi v tem primeru vidimo, da imata zaradi simetrije krajišči poljubne povezave z novo oznako enaki množici barvnih sprehodov. Potrebujemo torej še eno oznako. V zadnjem primeru (c) vidimo primer dobrega razlikovalnega označenja povezav, kjer imata samo vozlišči x in y enaki paleti. Razlikujeta se v barvnih sprehodih dolžine 2, npr. vozlišče x premore barvni sprehod 24, vozlišče y pa ne.



Slika 4.10: Dobra označenja povezav $K_{3,3}$

$\square$

Izrek 4.5 ([10]). *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$ razreda 1. Potem je $\mu(G) \leq \Delta + 1$, razen če je G enak C_4, K_4, C_6 ali $K_{3,3}$.*

Dokaz. Za grafe razreda 1 velja $\chi'(G) = \Delta$. Ker po izreku 4.4 velja $\mu(G) \leq \chi'(G)+1$, res velja $\mu(G) \leq \Delta + 1$. Za grafe, ki so izjema (C_4, K_4, C_6 in $K_{3,3}$), smo v istem izreku pokazali, da velja $\mu(G) = \chi'(G) + 2$. □

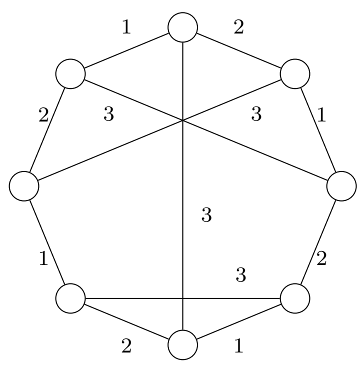
Ta izrek nam skupaj z lemo 4.2 podaja zgornjo mejo za razlikovalni kromatični indeks grafov razreda 1.

Posledica 4.6. *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$ razreda 1. Potem velja $\chi'_D(G) \leq \Delta + 1$, razen če je G enak C_4, K_4, C_6 ali $K_{3,3}$.*

Že na začetku poglavja smo opazili, da velja $\chi'(G) \leq \chi'_D(G)$. Ker v primeru grafov razreda 1 velja $\chi'(G) = \Delta$, torej zanje velja $\Delta \leq \chi'_D(G) \leq \Delta + 1$. Grafi iz razreda 1 imajo torej eno izmed dveh možnih vrednosti za razlikovalni kromatični indeks. Da se prepričamo, da sta obe vrednosti res možni, bomo v nadaljevanju za vsako spoznali nekaj primerov.

V prvem primeru bomo hkrati tudi opazili, da obstajajo grafi G, za katere velja $\chi'_D(G) < \mu(G)$. Za vsak regularen graf G razreda 1 namreč velja $\mu(G) = \Delta + 1$. Res, pri minimalnem dobrem označenju povezav grafa G ima vsako vozlišče isto paleto, saj imajo vsa stopnjo Δ in torej potrebujejo vse možne oznake. To pomeni, da so tudi množice barvnih sprehodov vseh vozlišč enake, saj vsebujejo vse možne kombinacije zaporedij oznak. Če dodamo še eno oznako, dobimo po izreku 4.5 zgornjo mejo, torej res velja $\mu(G) = \Delta + 1$.

Primer. Oglejmo si primer kubičnega grafa G na sliki 4.11. Prikazano je dobro označenje povezav s tremi oznakami, torej je to tudi minimalno dobro označenje povezav. Graf G ima samo en trikotnik, katerega stranice imajo različne oznake. Poljuben avtomorfizem ϕ, ki ohranja označenje povezav, mora torej fiksirati ta trikotnik. Zaradi ohranjanja sosednosti so potem fiksirana tudi vsa ostala vozlišča, kar pomeni, da je označenje povezav res razlikovalno. Našli smo torej primer, za katerega velja $\chi'(G) = \chi'_D(G) = \Delta = 3$ ter $\mu(G) = 4$. Primer lahko posplošimo na višje rede in sicer tako, da vzamemo cikel sode dolžine in dodamo takšno popolno prirejanje, da se v grafu pojavi natanko en trikotnik.



Slika 4.11: Kubičen graf G z dobrim razlikovalnim označenjem povezav

Primer. Preprost primer grafa G, za katerega velja $\chi'_D(G) = \Delta + 1$, je pot lihe dožine. Za P_{2k} obstaja, do zamenjave oznak natančno, samo eno dobro označenje povezav z $\Delta = 2$ oznakama. Toda v tem primeru sta robni povezavi enako označeni, kar pomeni, da obstaja avtomorfizem, ki ju zamenja. Če na eno izmed robnih povezav dodamo tretjo oznako, se to ne more zgoditi. Dobimo torej dobro razlikovalno označenje. Velja $\chi'(P_{2k}) = \Delta = 2$, toda $\chi'_D(P_{2k}) = 3$. Podobno velja tudi za sode cikle C_{2k}, kjer je $k \geq 4$. Tudi takrat je do zamenjave oznak natančno eno samo minimalno dobro označenje povezav, če pa dodamo še dve povezavi s tretjo oznako, dobimo razlikovalno označenje povezav.

4.1.2 Grafi razreda 2

Oglejmo si sedaj še grafe iz razreda 2. Mednje med drugim sodijo lihi cikli C_{2k+1}, polni grafi z lihim številom vozlišč ter Petersenov graf. S pomočjo sledečega izreka jim bomo lahko natančno določili vrednost razlikovalnega kromatičnega indeksa.

Izrek 4.7 ([10])**.** *Naj bo G povezan graf razreda 2. Potem velja $\mu(G) = \chi'(G)$.*

Dokaz. Naj bo $c : V(G) \to [\chi'(G)]$ minimalno dobro označenje povezav grafa G. Naj bo 1 tista oznaka, s katero je označenih najmanj povezav. Označenje povezav c je *biminimalno*, če ima najmanjše število povezav z oznako 1 med vsemi minimalnimi dobrimi označenji povezav G.

Naj bo v nadaljevanju označenje povezav c biminimalno. Najprej opazimo, da potem za paleti vsake povezave $e = xy$ z oznako 1 velja $S(x) \neq S(y)$ in $S(x) \cup S(y) = [\chi'(G)]$. To sledi iz dejstva, da posamezna oznaka ne sme manjkati v obeh paletah, saj bi jo sicer lahko pripisali povezavi e in s tem zmanjšali število povezav z oznako 1.

Vsaki povezavi z oznako 1 pripada par palet $\{S_1, S_2\}$. Recimo, da obstaja povezava $e = xy$ z oznako 1, ki ima v G edina par $\{S_1, S_2\}$. Potem smo zaključili z dokazom izreka. Res, recimo, da obstajata vozlišči u in v, za kateri velja $W_c(u) = W_c(v)$. Naj bo Q najkrajša pot od vozlišča u do povezave e. Potem obstaja tudi barvni sprehod Q', ki se začne v vozlišču v in inducira enak barvni sprehod kot Q. Tudi Q' mora imeti končno vozlišče v enem izmed krajišč povezave e. Ker imata zadnji povezavi Q in Q' enako oznako, se morata oba končati v različnih krajiščih povezave e. Vemo, da velja $S(x) \neq S(y)$; od tod sledi, da imata u in v različni množici barvnih sprehodov.

Predpostavimo torej, da za vsako biminimalno označenje povezav grafa G obstaja par takšnih povezav z oznako 1, da imata enak par palet $\{S_1, S_2\}$. Med vsemi biminimalnimi označenji povezav izberimo takšno, da nek določen par $\{S_1, S_2\}$ nastopi najmanjkrat. Naj bo $e = xy$ neka povezava z oznako 1 in naj bo $S_1 = S(x)$ ter $S_2 = S(y)$. Naj bo α oznaka, ki ne nastopi v S_2, β pa oznaka, ki ne nastopi v S_1. Vemo že, da potem velja $\alpha \in S_1$ ter $\beta \in S_2$.

S P_1 označimo najdaljšo $(\alpha, 1)$-pot, ki se začne z oznako α v vozlišču x. P_1 skupaj s povezavo e tvori $(\alpha, 1)$-Kempejevo pot. P_1 se konča z oznako α, saj bi sicer na $e \cup P_1$ lahko zamenjali oznaki α in 1 ter dobili dobro označenje z manjšim številom povezav z oznako 1, kar je v nasprotju s predpostavko, da je c biminimalno. Naj bo u_1 zadnje vozlišče na P_1. Velja $u_1 \neq x$ ter $u_1 \neq y$, saj $\alpha \notin S_2$.

Konstruirajmo novo označenje povezav c' grafa G tako, da na $P_1 \cup e$ zamenjamo oznaki α in 1. S tem ohranimo število povezav z oznako 1. Prav tako se ohranijo palete vseh vozlišč na P_1 med vozliščema y in u_1, spremeni pa se paleta vozlišč y

in u_1. Ker smo izbrali označenje povezav c na način, da je število parov $\{S_1, S_2\}$ najmanjše možno, moramo ta par v označenju povezav c' dobiti na nekem drugem mestu. Edini možen kandidat je povezava $u_1^- u_1$. V označenju povezav c' imamo $S_{c'}(u_1^-) = S_1$ in $S_{c'}(u_1) = S_2$ (saj v paleti u_1 ne sme biti oznake α), medtem ko je v označenju povezav c veljalo $S_c(u_1^-) = S_1$ in $S_c(u_1) = S^*$, kjer je $S^* = S_2 - \{1\} \cup \{\alpha\}$.

Vrnimo se sedaj k označenju povezav c. Vidimo, da je $\beta \in S^*$, torej obstaja neka maksimalna $(\beta, 1)$ -pot, ki se začne z oznako β v vozlišču u_1. Označimo jo s P_2, njeno zadnje vozlišče pa z u_2. Podobno kot v primeru P_1 sklepamo, da ima zadnja povezava oznako β (saj bi sicer lahko z zamenjavo oznak povečali število povezav z oznako 1). Ponovimo prejšnji postopek in ugotovimo, da ima povezava $u_2^- u_2$ v c oznako β, $u_2 \notin P_2$ (saj 1 ni v paleti vozlišča u_2 ter $u_2 \neq u_1$), ter $S_c(u_2) = S_1 - \{1\} \cup \{\beta\}$.

Če $u_2 \neq y$, lahko postopek nadaljujemo. Dobimo zaporedje poti $P_1, \ldots$ dolžine vsaj 1, kjer velja, da se pot P_i začne v vozlišču $u_{i-1} (u_0 = x)$ in konča v vozlišču u_i. Opazimo, da vozlišča u_i ni med vozlišči, vsebovanimi v množicah vozlišč poti $P_1, \ldots, P_{i-1}$.

Zaradi slednjega razloga se mora postopek nekje končati, saj ima graf končno število vozlišč. Končamo, ko je $u_i = y$. Ker $\alpha \notin S(y)$, je zadnja pot $(\beta, 1)$-pot, ki se konča v vozlišču y. Označimo število teh poti s k, velja torej, da je $u_k = y$. Če vse te poti združimo, dobimo sprehod od x do y, ki ga imenujemo *ključni sprehod*. Lastnosti ključnega sprehoda so sledeče:

- P_i je za lihe vrednosti i $(\alpha, 1)$-pot, ki ima obe robni povezavi označeni z α;
- P_i je za sode vrednosti i $(\beta, 1)$-pot, ki ima obe robni povezavi označeni z β;
- za lihe vrednosti i velja $S(u_i) = S^* = S_2 - \{1\} \cup \{\alpha\}$;
- za sode vrednosti i velja $S(u_i) = S^{**} = S_1 - \{1\} \cup \{\beta\}$.

Isti ključni sprehod bi dobili tudi v obratnem vrstem redu, torej če bi začeli z oznako β v vozlišču y; v lastnostih ključnega sprehoda bi le zamenjali besedi "lihe" in "sode". Pri tem bi se za lihe vrednosti indeksov i na poteh P_i izmenjevali oznaki β in 1, za sode vrednosti pa α in 1. V tem primeru bi vozlišča, ki so prej imela lih indeks, imela tudi sedaj lihega; zanje bi torej veljalo $S(u_i) = S^{**} = S_1 - \{1\} \cup \{\beta\}$. Vidimo, da ima glede na to, v katerem vrstnem redu začenemo, vsako vozlišče enkrat paleto S^*, enkrat pa S^{**}. Seveda smer ključnega sprehoda ne vpliva na paleto posameznega vozlišča, od koder lahko sklepamo, da je $S^* = S^{**}$.

Od tod sledi, da je $S_1 = S^* - \{\beta\} \cup \{1\}$ in $S_2 = S^* - \{\alpha\} \cup \{1\}$. Ker velja tudi $S(x) \cup S(y) = [\chi'(G)]$, velja, da se paleti razlikujeta le za eno oznako; S_1 vsebuje α in ne vsebuje β, S_2 pa obratno, vsebuje β in ne vsebuje α.

Naj bo $\hat{S} = [\chi'(G)] \backslash \{1, \alpha, \beta\}$. Potem je $S_1 = \hat{S} \cup \{1, \alpha\}, S_2 = \hat{S} \cup \{1, \beta\}$ in $S^* = \hat{S} \cup \{\alpha, \beta\}$. Opazimo še, da ker v paleti vozlišč x in y manjka le ena oznaka, je torej $d(x) = d(y) = \Delta$.

Preostanek dokaza bomo ločili na tri primere, in sicer glede na to, koliko povezav z oznako 1 vsebuje ključni sprehod.

Primer 1. Kjučni sprehod vsebuje vsaj dve povezavi z oznako 1.

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da ena takšna povezava pripada poti P_1, saj lahko v nasprotnem primeru zamenjamo oznaki 1 in α ali β v začetnih poteh ključnega sprehoda. Oglejmo si podsprehod med vozliščem u_1^- in vozliščem v, prvim vozliščem naslednje povezave z oznako 1. Potem je $v = u_i^+$ za nek i. Ker paleta vozlišča u_1^- ne vsebuje oznake β, paleta vozlišča v pa ne vsebuje ene izmed oznak α ali β (odvisno od oznake povezave $u_i u_i^+$), je opazovani podsprehod v bistvu (α, β)-Kempejeva pot. Če na njej zamenjamo oznaki α in β, vsaj eno povezavo z oznako α zamenjamo s povezavo z oznako β. Potem se $(1, \alpha)$-Kempejeva pot, ki se začne v y in konča v u_1^- (del poti $xy \cup P_1$), konča s povezavo z oznako 1, kar je v nasprotju s predpostavko, da je število povezav z oznako 1 najmanjše možno; na njej bi lahko zamenjali oznaki in to število še zmanjšali.

Primer 2. Ključni sprehod vsebuje natanko eno povezavo z oznako 1.

Spet lahko enako kot v prvem primeru predpostavimo, da ta povezava pripada poti P_1. Podsprehod, ki povezuje vozlišči y in u_1^-, je (α, β)-Kempejeva pot. Če na njej zamenjamo oznaki α in β, dobimo novo dobro označenje povezav, v katerem imata x in y enaki paleto (S_1). To bi pomenilo, da bi povezavi xy lahko priredili novo oznako, različno od 1. Ponovno pridemo v nasprotje s predpostavko, da je število povezav z oznako 1 najmanjše možno.

Primer 3. Ključni sprehod ne vsebuje povezav z oznako 1.

Če ključni sprehod ne vsebuje nobene povezave z oznako 1, se na njem izmenjujeta oznaki α in β, torej v bistvu tvori (α, β)-Kempejevo pot sode dolžine. Ločimo dva podprimera glede na njeno dolžino.

3a. Dolžina poti je vsaj 4.

Vsa vozlišča ključnega sprehoda, z izjemo vozlišč x in y, imajo paleto S^*. To med drugim pomeni, da nobeno od njih ni incidenčno s povezavo z oznako 1. Povezavi $u_1 u_2$ spremenimo oznako iz β na 1. Dobimo novo dobro označenje, prav tako minimalno. Označimo ga s c'. V tem označenju povezav je povezava $u_1 u_2$ edina v grafu, ki ima oznako 1 ter par palet $\{S_1, S_1\}$. Preverimo, da je to označenje povezav res razlikovalno, na analogen način, kot smo ga že spoznali. Recimo, da imata vozlišči u in v enaki množici barvnih sprehodov. Konstruiramo najkrajšo pot od vozlišča u do povezave $u_1 u_2$, ter poiščemo barvni sprehod, ki se začne v vozlišču v in inducira isto zaporedje oznak. Vemo, da se morata sprehoda končati v različnih krajiščih $u_1 u_2$. Če bi od tod nadaljevali barvni sprehod po povezavi z oznako α, bi v enem primeru prispeli v vozlišče x s paleto S_1, v drugem primeru pa v vozlišče u_3 s paleto S^*. Ker sta paleti različni, bi torej lahko našli barvni sprehod, ki pripada le enemu od vozlišč u, v. To pomeni, da ne more veljati $W_{c'}(u) = W_{c'}(v)$.

3b. Dolžina ključnega sprehoda poljubne povezave z oznako 1 je 2.

V tem primeru za vsako povezavo z oznako 1 trojica povezav z oznakami 1, α in β tvori trikotnik, katerega vozlišča imajo palete S_1, S^* in S_2. V G se takšen trikotnik pojavi vsaj dvakrat, saj smo predpostavili, da obstajata vsaj dve povezavi z oznako 1 in parom palet $\{S_1, S_2\}$. Izberimo torej en tak trikotnik, katerega vozlišča poimenujmo z x, u_1 in y. Izberimo poljubno oznako $\gamma \in S_2 \setminus \{1, \alpha, \beta\}$.

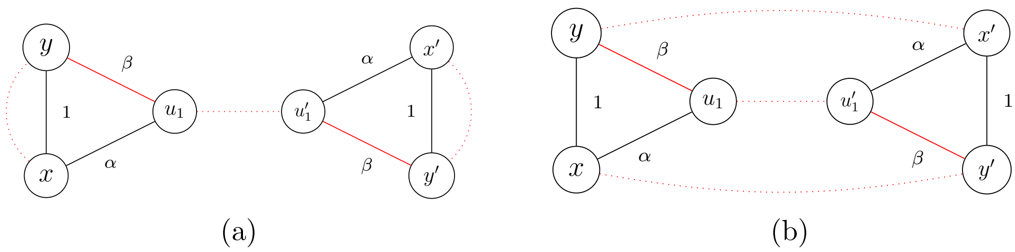
Oglejmo si (β, γ)-Kempejevo pot, ki vsebuje povezavo $u_1 y$. Označimo jo s $\tilde{P}$. Na njej zamenjajmo oznaki β in γ. Seveda to ne vpliva na število povezav z oznako 1, novo dobljeno označenje povezav pa je še vedno dobro. Tudi paleta vozlišča y se ne spremeni.

Če se paleta vozlišča x po tej konstrukciji ne spremeni, smo končali. V tem primeru ima namreč novo označenje povezav enako število povezav z oznako 1 in parom palet $\{S_1, S_2\}$, vendar povezave z oznakami α, β in 1 ne tvorijo trikotnika. Potem smo v enem izmed prejšnjih primerov.

Predpostavimo torej, da se vozlišču x paleta spremeni. To je možno le v primeru, ko je x začetno oziroma končno vozlišče poti $\tilde{P}$. V novem označenju povezav je njegova paleta enaka $S(x) = S_1 \backslash \{\gamma\} \cup \{\beta\}$, kar označimo s S'. Povezava xy ima torej sedaj par palet enak $\{S_1, S'\}$.

Spomnimo se, da obstaja še vsaj ena povezava z oznako 1. Če ima ta še vedno par palet $\{S_1, S_2\}$, smo z novim označenjem povezav zmanjšali število pojavitev tega para, kar je v nasprotju z našo predpostavko. Ker se lahko paleta spremeni le robnim vozliščem poti $\tilde{P}$, lahko spremenimo pare palet največ dvema povezavama. Če torej obstajajo vsaj tri povezave z oznako 0 in parom palet $\{S_1, S_2\}$, pridemo v protislovje, saj se vsaj eni izmed njih par palet ohrani.

Preostane torej le situacija, ko obstajata natanko dve povezavi z oznako 1 in parom palet $\{S_1, S_2\}$, ki sta vsebovani v trikotnikih z oznakami povezav $1, \alpha, \beta$. Označimo vozlišča obeh trikotnikov z x, u_1, y ter x', u_1', y'. Za vsako oznako $\gamma \in S_2 \backslash \{1, \alpha, \beta\}$ obstaja (β, γ)-Kempejeva pot $\tilde{P}$, ki povezuje vozlišči x in x' in vsebuje povezavi z oznako β, ki se nahajata na trikotnikih. Možna sta dva primera.



Slika 4.12: Skica dveh možnih primerov poti $\tilde{P}$

V obeh primerih je pot $\tilde{P}$ prikazana z rdečo barvo. Če v prvem primeru (a) na trikotniku xu_1y zamenjamo oznaki 1 in β, pot $\tilde{P}$ razpade na dva dela. Dobimo eno (β, γ)-Kempejevo pot med vozliščema u_1 in x', in en (β, γ)-Kempejev cikel (ki vsebuje povezavo xy). Sedaj na slednjem ciklu zamenjajmo oznaki β in γ. Dobimo novo označenje, ki je še vedno dobro, ter ima enako število povezav z oznako 1 in parom palet $\{S_1, S_2\}$. Opazimo pa, da povezava u_1y, ki ima oznako 1, ne pripada nobenemu trikotniku z oznakami $1, \alpha, \beta$. To pomeni, da se nahajamo v enem izmed prejšnjih primerov.

Tudi v drugem primeru (b) lahko uporabimo podoben argument. Če na trikotniku $x'y'u_1'$ zamenjamo oznaki α in β, pot $\tilde{P}$ razpade na dva dela. Dobimo eno (β, γ)-Kempejevo pot med vozliščema x in y', in en (β, γ)-Kempejev cikel (ki vsebuje povezavo $u_1'x'$). Na tem ciklu spet zamenjamo oznaki β in γ in s tem uničimo trikotnik z oznakami $1, \alpha, \beta$, torej smo spet v enem izmed prejšnjih primerov. □

Izrek 4.8 ([10])**.** *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$ razreda 2. Potem je $\mu(G) \leq \Delta + 1$.*

Dokaz. Za grafe razreda 2 velja $\chi'(G) = \Delta + 1$. Ker po ravnokar dokazanem izreku 4.7 velja $\mu(G) = \chi'(G)$, torej res velja $\mu(G) = \Delta + 1$. □

Če uporabimo še lemo 4.2, dobimo zgornjo mejo za razlikovalni kromatični indeks grafov razreda 2.

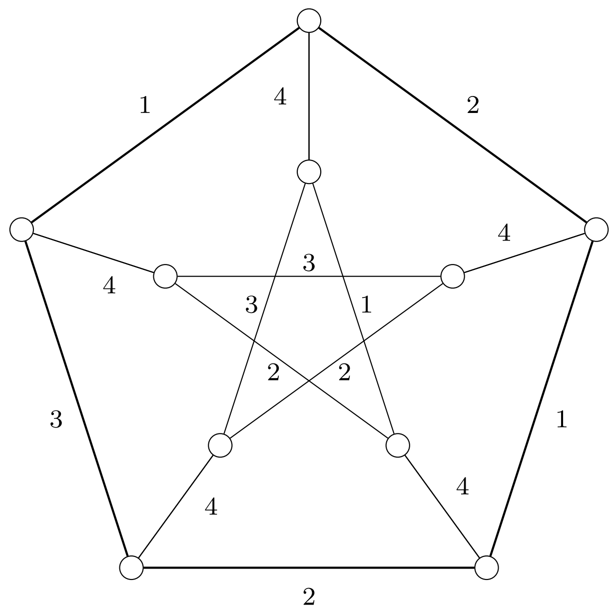
Posledica 4.9. *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$ razreda 2. Potem velja $\chi'_D(G) \leq \Delta + 1$.*

Ker seveda mora veljati tudi $\chi'(G) \leq \chi'_D(G)$, lahko upoštevamo še, da za grafe razreda 2 velja $\chi'(G) = \Delta + 1$. Zaradi neenakosti $\Delta + 1 \leq \chi'_D(G) \leq \Delta + 1$ dobimo naslednjo posledico.

Posledica 4.10. *Naj bo G povezan graf reda $n \geq 3$ razreda 2. Potem velja $\chi'_D(G) = \Delta + 1$.*

Za grafe iz razreda 2 je torej razlikovalni kromatični indeks natančno določen. Vsak graf iz tega razreda dopušča minimalno označenje povezav, ki ga ne ohranja noben trivialni avtomorfizem.

Primer. Primer grafa razreda 2 je Petersenov graf, P. V to se hitro prepričamo, če poskusimo P označiti s tremi oznakami: ker je "zunanji" cikel lihe dolžine, potrebujemo vse tri oznake. Potem so oznake povezav med "zunanjim" in "notranjim" ciklom natančno določene, vendar pa za povezave "notranjega" cikla potrebujemo eno dodatno oznako.
Poiščimo dobro označenje povezav s štirimi oznakami, ki je hkrati tudi razlikovalno.



Slika 4.13: Petersenov graf z dobrim razlikovalnim označenjem povezav

To označenje povezav je res razlikovalno. Recimo, da ni; obstaja torej netrivialen avtomorfizem ϕ, ki ga ohranja. Oglejmo si povezave z oznako 4; takšnih je 5. Če ϕ ohranja označenje povezav, se te povezave preslikajo ena v drugo. Pri tem se ohranjanjo tudi palete krajišč posamezne povezave. Toda vsaka izmed petih povezav ima enoličen par palet: $\{124, 134\}$, $\{124, 234\}$, $\{124, 124\}$, $\{134, 234\}$ ter $\{234, 234\}$. Od tod sledi, da ϕ fiksira vseh pet povezav z oznako 4 in s tem tudi vsa vozlišča Petersenovega grafa, kar je v nasprotju s predpostavko, da je ϕ netrivialen avtomorfizem.

4.2 Drevesa

S pomočjo razlikovalnega indeksa barvnih sprehodov smo za grafe razreda 1 spoznali dve možni vrednosti za razlikovalni kromatični indeks. Primer grafov razreda 1 so recimo drevesa T; zanje lahko vrednost $\chi'_D(T)$ točno določimo.

Spomnimo se definicije bisimetričnega drevesa iz razdelka 3.3. To je bicentralno drevo s centralno povezavo, za katerega velja, da so vsi listi na enaki (fiksni) razdalji od centralne povezave, vsa vozlišča razen listov pa imajo enako stopnjo.

Izrek 4.11 ([9])**.** *Naj bo T drevo reda $n \geq 3$. Potem velja $\chi'_D(T) = \Delta + 1$ natanko tedaj, ko je T bisimetrično drevo.*

Dokaz. Naj bo T drevo ter $c : E(T) \to [\Delta]$ dobro označenje povezav. Glede na obliko drevesa ločimo dva primera.

Primer 1. T ima centralno vozlišče v_0.

Naj bo ϕ avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav c. Vemo, da vsak avtomorfizem ohranja centralno vozlišče. Ker je označenje povezav dobro, imajo vse povezave, incidenčne z v_0, različne oznake. Zaradi ohranjanja sosednosti zato ϕ fiksira tudi vse potomce od v_0. To lahko induktivno nadaljujemo vse do listov in vidimo, da ϕ fiksira vsa vozlišča, torej je trivialen avtomorfizem. Označenje povezav c je razlikovalno.

Primer 2. T ima centralno povezavo e_0.

Naj bo ϕ avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav c. Vemo, da mora ohranjati centralno povezavo. S T_1 in T_2 označimo poddrevesi, ki ju dobimo, če odstranimo povezavo e_0. Če T_1 in T_2 nista izomorfni, ϕ ne more zamenjati krajišč povezave e_0. Tako sta T_1 in T_2 drevesi s fiksiranima centralnima vozliščema. Po prejšnjem primeru ϕ fiksira vsa njuna vozlišča, torej je trivialen avtomorfizem, c pa razlikovalno označenje povezav.

Predpostavimo torej, da sta T_1 in T_2 izomorfni.

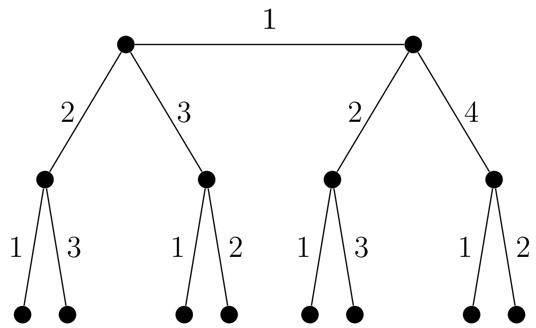
2a. Recimo, da obstajata vozlišči $x_1 \in V(T_1)$ in $x_2 \in V(T_2)$, ki nista lista in imata stopnjo strogo manjšo od Δ. Če imata različni množici oznak incidenčnih povezav, je identiteta edini avtomorfizem, ki ohranja to označenje povezav. Recimo torej, da imata enaki množici oznak, ter z 0 označimo oznako, ki je ni v paleti vozlišča x_2. Izberemo poljubno povezavo s krajiščem v x_2 in ji zamenjamo staro oznako, recimo α, z novo oznako 0. Po potrebi še zamenjamo oznaki na $(\alpha, 0)$-Kempejevi poti skozi x_2, da je novo označenje res dobro. Sedaj imata x_1 in x_2 različni paleti, torej ju noben avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav, ne more zamenjati. Dobili smo novo dobro označenje povezav z istim številom oznak, ki je tudi razlikovalno.

2b. Preostane še primer, ko sta drevesi T_1 in T_2 izomorfni, vsa vozlišča razen listov pa imajo stopnjo Δ. To so natanko bisimetrična drevesa. V tem primeru so palete vseh vozlišč (razen listov) enake in vsebujejo vse možne oznake. Takšno označenje povezav seveda ne more biti razlikovalno, saj ga npr. ohranja avtomorfizem, ki zamenja krajišči centralne povezave. Velja torej $\chi'_D(T) > \Delta$. Z dodajanjem ene dodatne oznake lahko konstruiramo razlikovalno označenje povezav: v enem izmed krajišč e_0 izberemo poljubno incidenčno povezavo in ji dodelimo novo oznako. V tem primeru imata krajišči povezave e_0 različni paleti, torej ju ϕ ne more zamenjati. Spet imata

T_1 in T_2 fiksirani centralni vozlišči, torej po prvem primeru ϕ fiksira vsa njuna vozlišča. Konstruirali smo dobro razlikovalno označenje povezav z $\Delta + 1$ oznakami; $\chi'_D(T) = \Delta + 1$ za bisimetrična drevesa. $\square$

Primer. Oglejmo si dobro razlikovalno označenje dveh dreves, enega s centralno povezavo in enega s centralnim vozliščem. Izberimo bisimetrično drevo $T''_{2,3}$ in simetrično drevo $T_{2,3}$.

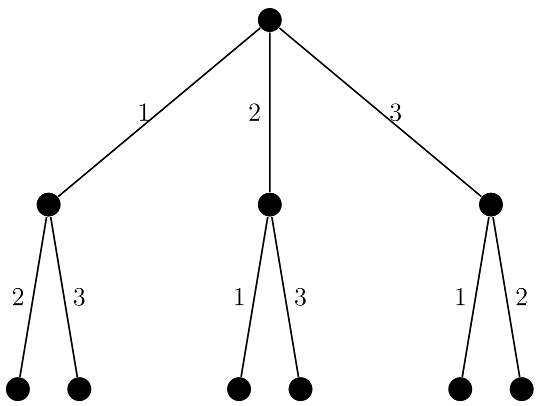
Bisimetrično drevo $T''_{2,3}$ ima največjo stopnjo enako $\Delta = 3$. Po izreku 4.11 velja $\chi'_D(T''_{2,3}) = \Delta + 1 = 4$, torej potrebujemo štiri oznake.



Slika 4.14: $T''_{2,3}$ z dobrim razlikovalnim označenjem povezav

Krajišči centralne povezave imata različni paleti, zato sta fiksirani. Začnimo recimo v levem krajišču. Povezave, s katerimi so z njim povezavi njegovi potomci, imajo različne oznake, torej so tudi potomci fiksirani. Tako nadaljujemo vse do listov. Enak argument uporabimo za desno poddrevo in vidimo, da so fiksirana vsa vozlišča drevesa.

Tudi simetrično drevo $T_{2,3}$ ima največjo stopnjo enako $\Delta = 3$. Ker ni bisimetrično, po izreku 4.11 za dobro razlikovalno označenje povezav zadostujejo tri oznake.



Slika 4.15: $T_{2,3}$ z dobrim razlikovalnim označenjem povezav

Poljuben avtomorfizem fiksira centralno vozlišče. Povezave, s katerimi so z njim povezani njegovi potomci, imajo različne oznake, od koder sledi, da so tudi njegovi potomci fiksirani. Postopek induktivno nadaljujemo vse do listov. Vidimo, da so fiksirana vsa vozlišča drevesa.

Poglavje 5

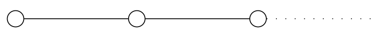
Neskončni grafi

V prejšnjih poglavjih smo se ukvarjali s končnimi grafi, tj. grafi s končnima množicama vozlišč in povezav. Čeprav večina literature obravnava razlikovanja končnih grafov, lahko pojem razširimo na neskončne grafe. V [8] je obravnavano razlikovalno število neskončnih grafov. Izkaže se, da za neskončen povezan graf G, katerega vozlišča imajo stopnjo največ Δ, velja $D(G) \leq \Delta$.

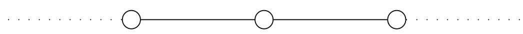
V nadaljevanju tega poglavja bomo najprej spoznali osnovne definicije in primere neskončnih grafov, nato pa se bomo posvetili njihovemu razlikovalnemu indeksu, ki je obravnavan v [3]. Na podoben način kot v [8] za razlikovalno število je pokazano, da tudi za razlikovalni indeks neskončnega povezanega grafa G velja $D'(G) \leq \Delta$.

Graf G je *neskončen*, če je moč njegove množice vozlišč in/ali moč množice povezav neskončna. Če sta obe množici, $V(G)$ in $E(G)$, števni množici, rečemo, da je G *števen* graf.

Preprosta primera neskončnega števnega grafa sta *žarek* in *neskončna pot*. Oba si lahko predstavljamo kot posplošitev končne poti; prvi ima začetno vozlišče, vendar pa nima končnega. Neskončna pot nima ne začetnega ne končnega vozlišča.

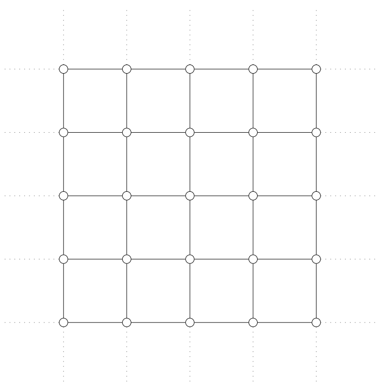


Slika 5.1: Žarek

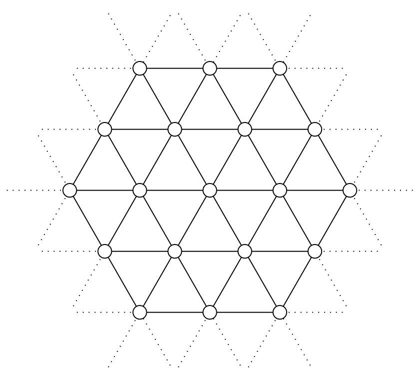


Slika 5.2: Neskončna pot

Drugi pogosti primeri neskončnih grafov so *mreže*. Na slikah 5.3 in 5.4 sta prikazana dva primera mrež, kvadratna in trikotna mreža.



Slika 5.3: Kvadratna mreža



Slika 5.4: Trikotna mreža

Osnovne trditve, ki držijo za razlikovalni indeks končnih grafov, veljajo tudi v primeru neskončnih; tako recimo še vedno velja, da za asimetričen graf G velja $D'(G) = 1$. Velja tudi lema 3.1, ki trdi, da za graf G z asimetričnim vpetim podgrafom velja $D'(G) \leq 2$. Na podlagi tega že lahko sklepamo, da ima veliko grafov razlikovalni indeks 1 ali 2. Enako nakazuje tudi naslednja lema.

Lema 5.1. *Naj bo G povezan, neskončen graf. Če obstaja označenje vozlišč c grafa G z dvema oznakama, tako da noben avtomorfizem teh oznak ne zamenja ter označenje vozlišč ohranja le trivialen avtomorfizem, potem velja $D'(G) \leq 2$.*

Dokaz. Naj bo $c : V(G) \to \{1, 2\}$ omenjeno označenje vozlišč grafa G. Konstruirajmo razlikovalno označenje povezav $c' : E(G) \to \{1, 2\}$ na sledeč način: povezavam med vozliščema z enakima oznakama priredimo oznako 1, povezavam med vozliščema z različnima oznakama pa oznako 2. Za poljubno vozlišče v torej velja, da imajo sosedi, s katerimi je povezano s povezavo z oznako 1, enako oznako kot v, ostali sosedi pa različno. Če imamo torej podano le konstruirano označenje povezav in določimo oznako enega samega vozlišča, lahko rekonstruiramo označenje vozlišč celotnega grafa. Naj bo ϕ avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav. Prva možnost je, da zamenja oznaki vozlišč (kar je v nasprotju s predpostavko), druga možnost pa je, da ohranja označenje vozlišč c. Po predpostavki ima to lastnost le trivialen avtomorfizem, torej je označenje povezav razlikovalno in velja $D'(G) \leq 2$. □

5.1 Povezani neskončni grafi

V tem razdelku si bomo ogledali zgornjo mejo za razlikovalni indeks povezanih neskončnih grafov. Za začetek bomo spoznali dva nova pojma, ki ju bomo potrebovali v nadaljevanju.

Sfera s središčem x in radijem r je množica vseh tistih vozlišč grafa G, ki so od vozlišča x oddaljene za natanko k. Označimo jo s $S_x(k)$.

Krogla s središčem x in radijem r je množica vseh tistih vozlišč grafa G, ki so od vozlišča x oddaljene za največ k. Označimo jo z $B_x(k)$.

Izrek 5.2 ([3])**.** *Naj bo G povezan neskončen graf, za katerega velja, da je stopnja vsakega izmed vozlišč največ Δ. Potem velja $D'(G) \leq \Delta$.*

Dokaz. Dokaz bomo ločili glede na to, ali je Δ končen kardinal ali neskončen. V obeh primerih bomo konstruirali razlikovalno označenje povezav $c' : E(G) \to [\Delta]$. Predpostavimo, da je ϕ avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav c'.

Primer 1. Naj bo Δ končen kardinal.

V tem primeru je G neskončen graf, njegova vozlišča pa imajo omejeno, končno stopnjo. Sledi, da G vsebuje kot podgraf vsaj en žarek, ki ga označimo z R. Z x označimo začetno vozlišče žarka R. Vsem povezavam R priredimo oznako Δ, ki je ne uporabimo nikjer drugje v grafu G. S tem je R fiksiran: vozlišče x je edino vozlišče z eno incidenčno povezavo z oznako Δ (vsa ostala vozlišča na R so incidenčna z dvema Δ-povezavama). Sledi, da je x fiksiran, zaradi ohranjanja sosednosti pa tudi vsa ostala vozlišča na R.

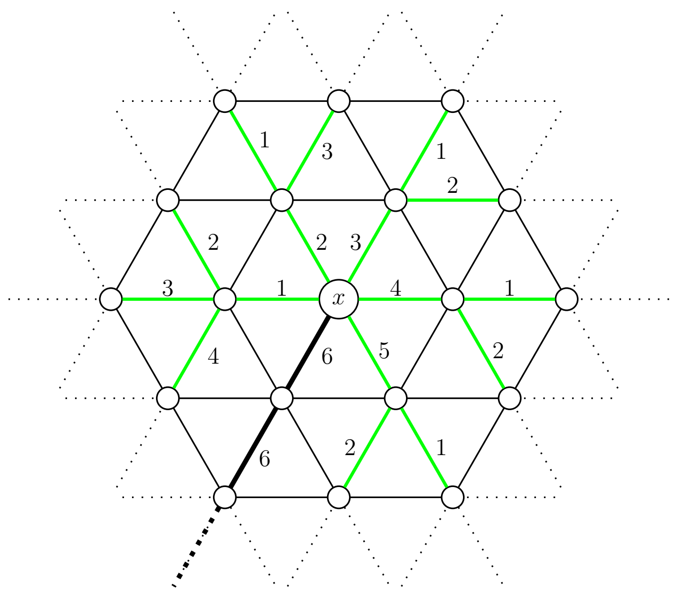
Konstruirajmo BFS drevo s korenom v x in ga označimo s T, in označimo njegove povezave. Najprej označimo še neoznačene povezave, incidenčne z x (teh je največ

$\Delta - 1$), z različnimi oznakami iz množice $[\Delta - 1]$. Ker je x fiksiran, so sedaj zaradi ohranjanja sosednosti fiksirana tudi sosednja vozlišča. Postopek nadaljujemo v naslednjem nivoju T: vsako vozlišče bo imelo eno že označeno povezavo e ter največ $\Delta - 1$ neoznačenih. Slednjim priredimo različne oznake iz množice $[\Delta] - \{c'(e)\}$ in jih s tem fiksiramo. Na ta način fiksiramo vsa vozlišča grafa T oziroma G. Vsem povezavam G, ki niso povezave T, lahko priredimo poljubno oznako, recimo 1. Dobili smo označenje povezav c', ki ga ohranja le trivialen avtomorfizem.

Primer 2. Naj bo Δ neskončen.

V tem primeru je množica vozlišč unija vozlišč v sferah $S_x(k)$; $V(G) = \bigcup_k S_x(k)$. V vsaki sferi je največ Δ vozlišč; od tod sledi, da je tudi $|V(G)| \leq \Delta$. Od tod sledi tudi $|E(G)| \leq \Delta$, torej lahko G označimo tako, da vsako oznako uporabimo največ enkrat. Takšno označenje povezav je seveda razlikovalno, torej res velja $D'(G) \leq \Delta$. $\square$

Primer. Oglejmo si primer povezanega neskončnega grafa s končno maksimalno stopnjo, recimo trikotno mrežo. V tem primeru je $\Delta = 6$. Po pravkar dokazanem izreku obstaja razlikovalno označenje povezav s šestimi oznakami.



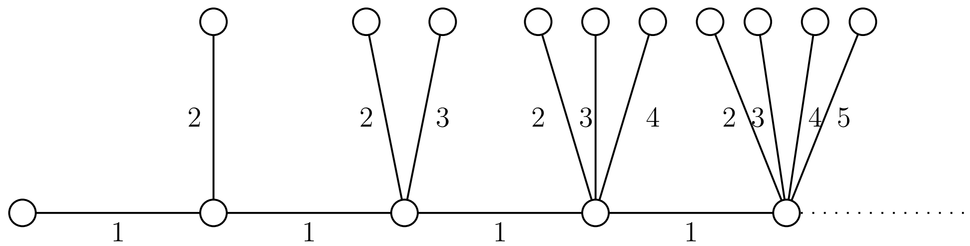
Slika 5.5: Trikotna mreža z razlikovalnim označenjem povezav

Izberemo vozlišče x in žarek R, prikazan z odebeljenimi povezavami. Njegovim povezavam priredimo oznako 6. Ker so to edine povezave z oznako 6, je R fiksiran. Nato označimo povezave na BFS drevesu s korenom v x (povezave zelene barve) na način, kot je opisan v dokazu izreka. Sedaj so fiksirana vsa vozlišča grafa. Povezave, ki niso na BFS drevesu (črne barve), imajo lahko poljubne oznake, npr. vsa oznako 1.

Primer. Konstruirajmo še primer neskončnega povezanega grafa G z neskončnim Δ. Začnimo z žarkom R, katerega vozlišča označimo z $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots$ Nato vsakemu izmed vozlišč, v_i, pripnemo i novih vozlišč. Za dobljen graf velja $d(v_0) = 1$ ter

$d(v_i) = i + 2$ za $i > 1$. Ker je torej $\Delta = \aleph_0$, bomo tudi za označenje povezav potrebovali največ $\aleph_0$ oznak.

Žarku R priredimo oznako 1, ki je potem ne uporabimo več nikjer drugje na grafu, zato je fiksiran. V vsakem vozlišču $v_i, i > 1$ potrebujemo še natanko i dodatnih oznak, da razlikujemo med pripetimi vozlišči. Neoznačene povezave, incidenčne z vozliščem v_i, označimo z različnimi oznakami iz množice $\{2, 3, ..., i + 1\}$. Dobljeno označenje povezav je razlikovalno, torej je res $D'(G) \leq \aleph_0$.

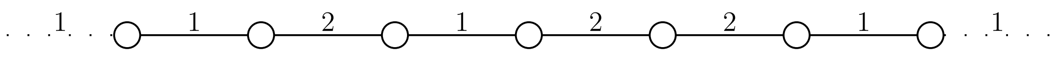


Slika 5.6: Neskončen graf G z neskončnim Δ z razlikovalnim označenjem povezav

5.2 Drevesa in drevesom podobni grafi

Dva preprosta primera neskončnega drevesa, žarek in neskončno pot, smo že spoznali. Njuna razlikovalna indeksa lahko hitro določimo. Žarek je asimetričen graf, saj ima samo eno vozlišče stopnje 1, in sicer začetno vozlišče. To pomeni, da ga ohranja vsak avtomorfizem. Zaradi ohranjanja sosednosti mora posledično poljuben avtomorfizem ohranjati tudi vsa ostala vozlišča. Razlikovalni indeks žarka je torej enak 1.

Neskončna pot ni asimetričen graf, saj lahko najdemo veliko netrivialnih avtomorfizmov; preprost primer je avtomorfizem, ki zamakne vsako vozlišče za eno mesto v izbrani smeri. Velja torej $D'(P_\infty) \geq 2$. Konstruirajmo razlikovalno označenje povezav z dvema oznakama: priredimo poljubnima incidenčnima povezavama oznako 2. Izberimo še eno povezavo, e, ki ni incidenčna z nobeno izmed že označenih povezav in ji dodelimo oznako 2. Vse ostale povezave naj bodo označene z oznako 1. Recimo, da obstaja avtomorfizem ϕ, ki ohranja to označenje povezav. Ker obstaja samo eno vozlišče, ki je incidenčno z dvema povezavama z oznako 2, ga ϕ fiksira. Ker mora ϕ ohranjati tudi razdalji od njegovih sosedov do povezave e, ki je prav tako fiksirana, sta tudi soseda fiksirana. Zaradi ohranjanja sosednosti so potem fiksirana vsa vozlišča grafa P_∞; ϕ je trivialen avtomorfizem in velja $D'(P_\infty) = 2$.

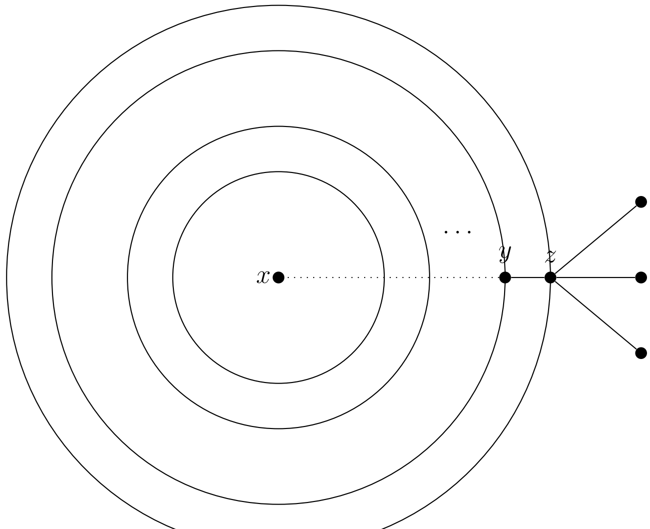


Slika 5.7: Neskončna pot z razlikovalnim označenjem povezav

Hitro lahko opazimo, da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ obstaja neskončno, lokalno končno drevo T, za katerega velja $D'(T) = n$. Dobimo ga tako, da spet začnemo z žarkom z vozlišči $v_0, v_1, v_2, \ldots$, nato pa vsakemu vozlišču v_i $(i \geq 1)$ pripnemo $n - 1$ dodatnih vozlišč. Na enak način lahko najdemo tudi drevesa z neskončnim razlikovalnim indeksom, saj lahko izberemo neskončen d.

Če torej želimo čim manjši razlikovalni indeks, se torej posvetimo drevesom brez ali z največ enim listom ter njihovi posplošitvi, drevesom podobnim grafom.

Drevesu podoben graf je povezan graf G, ki vsebuje neko vozlišče x, za katerega velja: za poljubno vozlišče $y \neq x$ obstaja vozlišče z, tako da $\{y\} = N(z) \cap B_x(d(x, z) - 1)$. Vozlišče y je torej edini sosed vozlišča z, ki je na razdalji $d(x, z) - 1$ ali manj od vozlišča x. Vozlišče x imenujemo *centralno vozlišče* grafa G.



Slika 5.8: Drevesu podoben graf

Iz definicije sledi, da za vsako vozlišče v_0 drevesu podobnega grafa G s centralnim vozliščem x obstaja žarek, ki se začne v v_0, z vozlišči $v_0, v_1, v_2, \ldots$. Zanj velja $d(x, v_i) = d(x, v_0) + i$.

Velja, da je drevo T drevesu podoben graf natanko tedaj, ko ima največ en list.

Izrek 5.3 ([3])**.** *Naj bo G drevesu podoben graf. Vsa vozlišča G naj imajo stopnjo manjšo ali enako $2^{\aleph_0}$. Potem velja $D'(G) \leq 2$.*

Dokaz. Razlikovalno označenje povezav bomo konstruirali s pomočjo razlikovalnega označenja vozlišč. Naj bo $c : V(G) \to \{1, 2\}$ razlikovalno označenje vozlišč, ki je definirano in dokazano, da obstaja, v izreku 4.2 v [8]. Za to označenje vozlišč velja, da je centralno vozlišče x edino, katerega vsi sosedi imajo oznako 1.

Naj bo F vpeti podgraf grafa G, za katerega velja: $uv \in E(F) \iff \{u\} = N(v) \cap B_x(d(x, v) - 1)$ ali $\{v\} = N(u) \cap B_x(d(x, u) - 1)$. Graf F je enolično določen gozd, katerega vse komponente so neskončne. Označimo jih z F_i. Vseh komponent je največ $2^{\aleph_0}$.

Lastnosti označenja vozlišč c so:

- Za povezano komponento F_0 grafa F (komponenta, ki vsebuje x), velja: $c(x) = 1$ in $c(v) = 1$ za vsak $v \in N_F(x)$. Opazimo, da F_0 vsebuje vse sosede vozlišča x v F, ki so hkrati tudi vsi sosedi vozlišča x v G.

- Za vse ostale povezane komponente F_i, $i \neq 0$, velja: obstaja enolično določeno vozlišče x_{F_i}, za katerega velja $c(x_{F_i}) = 2$ ter $c(v) = 1$ za vsak $v \in N_{F_i}(x_{F_i})$. Vozlišče x_{F_i} je edino vozlišče v komponenti F_i, katerega vsi sosedi imajo oznako 1.

- Za $i \neq j$ sta drevesi F_i in F_j, skupaj z njunimi označenji vozlišč, neizomorfni.

S pomočjo označenja vozlišč c sedaj definirajmo označenje povezav $c' : E(G) \to \{1, 2\}$ in dokažimo, da je razlikovalno. Naj bo $uv \in E(G)$.

- Če je $d(x, u) = d(x, v) - 1$, naj bo $c'(uv) = c(u)$. Če povezava torej povezuje vozlišči v dveh različnih sferah, dobi enako oznako, kot je oznaka vozlišča, bližjega x.

- Če je $d(x, u) = d(x, v)$, naj bo $c'(uv) = 1$. Povezave, ki povezujejo vozlišča znotraj iste sfere, dobijo oznako 1.

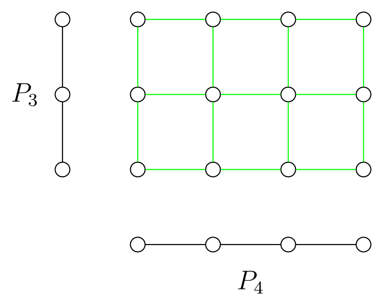
Naj bo ϕ avtomorfizem grafa G, ki ohranja c'. Vozlišče x je edino vozlišče, za katerega imajo vse povezave znotraj krogle $B_x(2)$ oznako 1. To pomeni, da ϕ fiksira x. Recimo, da obstajata enako označeni povezavi uv in zw in velja $\phi(u) = z$ ter $\phi(v) = w$. Ker ϕ ohranja razdalje, obstajata $k, k' \geq 2$, tako da sta $u, z \in S_x(k)$ ter $v, w \in S_x(k')$. Recimo, da je $k \leq k'$. Po definiciji drevesom podobnih grafov obstaja žarek R_v, ki se začne v vozlišču v. Potem ga mora ϕ preslikati v žarek R_w, ki se začne v vozlišču w. Toda zaporedje oznak na žarkih R_v in R_w enolično določa zaporedje oznak vozlišč na istih žarkih, kar pomeni, da ϕ tudi ohranja označenje vozlišč c. Ker je c definirano kot razlikovalno označenje vozlišč, ki ga ohranja le trivialen avtomorfizem, smo pokazali, da je ϕ trivialen, c' razlikovalno označenje povezav in $D'(G) \leq 2$. $\square$

5.3 Kartezični produkt števnih grafov

Obstaja več načinov, kako iz dveh (ali večih) grafov konstruirati nov graf. Primer take konstrukcije so produkti grafov. V tem razdelku bomo spoznali kartezični produkt grafov ter si ogledali zgornje meje za razlikovalni indeks kartezičnega produkta števnih grafov.

Kartezični produkt grafov G in H je graf $G \Box H$, za katerega velja $V(G \Box H) = V(G) \times V(H)$. Vozlišči (u_1, v_1) ter (u_2, v_2) sta sosedni natanko tedaj, ko je $u_1 = u_2$ ter $v_1 v_2 \in E(H)$ ali $u_1 u_2 \in E(G)$ ter $v_1 = v_2$.

Primer. Oglejmo si kartezični produkt poti P_3 in P_4.



Slika 5.9: Graf $P_3 \Box P_4$ (zelen)

Podgrafi kartezičnega produkta $G \Box H$ oblike $G \Box v$ (za poljuben $v \in V(H)$) so izomorfni G. Imenujemo jih G-*sloji* v $G \Box H$. Analogno definiramo tudi H-*sloje* v $G \Box H$.

Za povezan graf G obstaja (glede na kartezični produkt) enolična faktorizacija na prafaktorje, $G \cong G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_t$, kjer za vsak prafaktor v faktorizaciji velja, da je *nerazcepen*: če ga lahko zapišemo kot kartezični produkt dveh grafov, je eden izmed njiju izolirano vozlišče (K_1). Dokaz enoličnosti faktorizacije najdemo v [7]. Grafa G in H sta si *tuja*, če nimata netrivialnih skupnih prafaktorjev.

V [7] je prav tako pokazano, da če je $G = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_t$ povezan graf in ϕ njegov avtomorfizem, potem obstaja permutacija π števil $\{1, 2, \ldots, t\}$ in izomorfizmi $\phi_i : G_{\pi(i)} \to G_i$, da je

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_t) = (\phi_1(x_{\pi(1)}), \phi_2(x_{\pi(2)}), \ldots, \phi_t(x_{\pi(t)})).$$

Če je π identiteta, je vsak ϕ_i avtomorfizem G_i. V temi primeru rečemo, da je ϕ *generiran z avtomorfizmi faktorjev* G_i.

Recimo, da sta dva faktorja, G_r in G_s, izmorfna. Naj bo π transpozicija (r, s). Naj bosta $\phi_r : G_r \to G_s$ in $\phi_s : G_s \to G_r$ izomorfizma. Za vse ostale i naj bo ϕ_i identiteta na $V(G_i)$. Potem je avtomorfizem ϕ *transpozicija dveh izomorfnih faktorjev* G_r in G_s.

Ta dva tipa avtomorfizmov generirata celotno grupo avtomorfizmov grafa G, kar pove naslednji izrek, ki ga navedemo brez dokaza.

Izrek 5.4 ([7]). *Naj bo G povezan graf in $G = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_t$ njegova faktorizacija na prafaktorje. Potem je vsak avtomorfizem G generiran z avtomorfizmi njegovih prafaktorjev ter s transpozicijami izomorfnih faktorjev.*

Očitno so transpozicije možne le v primeru, ko sta v razcepu vsaj dva izomorfna faktorja. V primeru, ko teh ni, je poljuben avtomorfizem grafa G podan z avtomorfizmi njegovih prafaktorjev. V nadaljevanju bomo pogosto uporabili reformulacijo zgornjega izreka za primer, ko je $t = 2$: Naj bo ϕ avtomorfizem kartezičnega produkta tujih si grafov G_1 in G_2. Potem obstajata avtomorfizma ϕ_i grafov G_i ($i = 1, 2$), da velja $\phi(v_1, v_2) = (\phi_1(v_1), \phi_2(v_2))$ za vsak $(v_1, v_2) \in V(G_1 \square G_2)$. Označimo $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. Avtomorfizem ϕ je netrivialen natanko tedaj, ko je netrivialen vsaj eden izmed avtomorfizmov ϕ_1, ϕ_2.

Iz teh lastnosti sledi prva preprosta trditev.

Trditev 5.5. *Naj bo G kartezični produkt grafov G_1 in G_2. Potem je $D'(G) = 1$ natanko tedaj, ko sta G_1 in G_2 asimetrična in tuja.*

Dokaz. Predpostavimo, da velja $D'(G) = 1$. To pomeni, da je $G_1 \square G_2$ asimetričen graf, katerega edini avtomorfizem je identiteta. Recimo, da bi eden izmed faktorjev, recimo G_1, imel netrivialen avtomorfizem ϕ_1. Potem bi bil $\phi = (\phi_1, \mathrm{id})$ netrivialen avtomorfizem grafa G, kar je v nasprotju s predpostavko. Podobno, recimo, da si G_1 in G_2 nista tuja. Potem transpozicija izomorfnih faktorjev spet porodi netrivialen avtomorfizem grafa G, kar nas spet privede v nasprotje s predpostavko.

Predpostavimo sedaj, da sta G_1 in G_2 asimetrična grafa, ki sta si tuja. Sledi, da je vsak avtomorfizem G oblike $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, kjer je ϕ_i avtomorfizem grafa G_i. Ker sta oba G_i asimetrična, je $\phi_i = \mathrm{id}$ za $i = 1, 2$. Torej je res ϕ trivialen avtomorfizem, od koder sledi, da je G asimetričen graf in torej velja $D'(G) = 1$. $\square$

Za graf G označimo *k-to potenco*, kartezični produkt k kopij grafa G, z oznako G^k.

Preden se lotimo produktov števnih grafov, je najprej potrebno omeniti, da je razlikovalni indeks produktov končnih grafov obravnavan v [6]. Eden izmed rezultatov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju, je naslednji izrek, ki ga navedimo brez dokaza.

Izrek 5.6 ([6])**.** *Naj bo G povezan končen graf in $k \geq 2$. Potem velja $D'(G^k) = 2$, z izjemo $D'(K_2^2) = 3$.*

Posvetimo se sedaj neskončnim grafom. Najprej si bomo ogledali kartezični produkt dveh števno neskončnih grafov z neskončnima množicama povezav.

Lema 5.7. *Naj bosta G_1 in G_2 povezana, števno neskončna, tuja si grafa. Potem za njun kartezični produkt velja $D'(G_1 \Box G_2) \leq 2$.*

Dokaz. Poimenujmo povezave grafa G_1 z $e_1, e_2, \ldots$ in povezave grafa G_2 z $f_1, f_2, \ldots$ v poljubnem vrstem redu. To je možno, saj morata biti obe množici povezav števno neskončni. S tem tudi povezavam posameznega grafa določimo vrstni red. Konstruirajmo sedaj razlikovalno označenje povezav grafa $G_1 \Box G_2$ z oznakama 1 in 2. Za $k \geq 1$ označimo prvih k povezav v k-tem G_1-sloju ter prvih k povezav v k-tem G_2-sloju z oznako 1. Vsem ostalim povezavam v omenjenih slojih priredimo oznako 2. Poljubna povezava $G_1 \Box G_2$ leži v nekem G_1-sloju ali v nekem G_2-sloju, torej res označimo vse povezave.

Recimo, da obstaja netrivialen avtomorfizem $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ grafa $G_1 \Box G_2$, ki ohranja konstruirano označenje povezav. Ker imata poljubna G_1-sloja različno število povezav z oznako 1, mora biti ϕ_2 trivialen avtomorfizem. Podobno imata tudi poljubna G_2-sloja različno število povezav z oznako 1, torej je tudi ϕ_1 trivialen. Od tod sledi, da mora ϕ biti trivialen avtomorfizem. □

Vidimo, da je razlikovalni indeks števnega produkta $G_1 \Box G_2$ največ 2, ne glede na razlikovalna indeksa $D'(G_1)$ in $D'(G_2)$. Če sta slednja končni števili, za splošne produkte dobimo naslednji rezultat.

Lema 5.8. *Naj bosta G_1 in G_2 povezana, tuja si grafa s končnima vrednostima $D'(G_1)$ in $D'(G_2)$. Če velja $D'(G_i) \leq k_i$, $i = 1, 2$, potem velja $D'(G_1 \Box G_2) \leq \max\{k_1, k_2\}$.*

Dokaz. Označimo s $k = \max\{k_1, k_2\}$. Ker je $D'(G_i) \leq k_i, i = 1, 2$, obstajata razlikovalni označenji povezav c_1 grafa G_1 in c_2 grafa G_2 s k oznakami.

Poiščimo sedaj razlikovalno označenje povezav c grafa $G_1 \Box G_2$ s k oznakami. Čeprav eksplicitno nismo izbrali vrstnega reda vozlišč, uporabimo poljubno izbrana "prva" sloja obeh grafov. Označenje povezav definiramo na sledeč način:

- $c((v_1, w)(v_2, w)) = c_1(v_1 v_2)$ za povezave prvega G_1-sloja,
- $c((v, w_1)(v, w_2)) = c_2(w_1 w_2)$ za povezave prvega G_2-sloja,
- $c(e) = 1$ za vse ostale povezave e.

Preverimo, da je to označenje povezav res razlikovalno. Naj bo $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ netrivialen avtomorfizem grafa $G_1 \Box G_2$. Potem je ϕ_1 netrivialen avtomorfizem grafa G_1 ali ϕ_2 netrivialen avtomorfizem grafa G_2. Recimo, da drži prvo: ϕ_1 je netrivialen avtomorfizem grafa G_1. Ker je c_1 razlikovalno označenje povezav G_1 (in s tem tudi prvega G_1-sloja v $G_1 \Box G_2$), obstaja povezava e grafa G_1, za katero velja $c_1(e) \neq c_1(\phi_1(e))$.

Predpostavimo najprej, da ϕ_2 ne premakne prvega G_1-sloja. V tem primeru tudi v $G_1 \Box G_2$ velja $c_1(e) \neq c_1(\phi_1(e))$, kar pomeni, da avtomorfizem ϕ ne ohranja označenja povezav.

Sedaj predpostavimo, da ϕ_2 premakne prvi G_1-sloj (in ga preslika v neki drugi G_1-sloj). Toda, ker je $c_1(e) \neq c_1(\phi_1(e))$, lahko sklepamo, da vsaj ena izmed povezav e in $\phi_1(e)$ nima oznake 1. Ker smo označenje povezav konstruirali tako, da imajo razen prvega vsi G_1-sloji vse povezave označene z 1, torej avtomorfizem ϕ ne ohranja označenja povzeav.

Analogno sklepamo tudi, ko je ϕ_2 netrivialen avtomorfizem grafa G_2. V obeh primerih vidimo, da je edini avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav c, trivialen avtomorfizem, torej je c res razlikovalno. $\square$

Naslednja lema obravnava primer, ko je razlikovalni indeks enega izmed faktorjev enak $D'(G_1) = \aleph_0$, drugi faktor pa je končnega reda (torej je tudi $D'(G_2)$ končen).

Lema 5.9. *Naj bosta G_1 in G_2 povezana, tuja si grafa, kjer je $D'(G_1) = \aleph_0$ in je G_2 končen graf. Potem je $D'(G_1 \Box G_2) = \aleph_0$.*

Dokaz. Recimo, da je $D'(G_1 \Box G_2)$ končen. Ker je G_2 končen graf, sta $|E(G_2)|$ in $D'(G_2)$ prav tako končni števili. Obstaja torej pozitivno celo število k, da je $k \geq \max\{D'(G_1 \Box G_2), |E(G_2)|, D'(G_2)\}$. Od tod sledi, da obstaja razlikovalno označenje povezav c grafa $G_1 \Box G_2$ s k oznakami.

Ker je $D'(G_1) = \aleph_0$, za vsako pozitivno celo število t obstaja avtomorfizem ϕ_t, za katerega potrebujemo označenje povezav grafa G_1 z vsaj $t + 1$ oznakami, tako da ϕ_t tega označenja povezav ne ohranja. Če je $t > k$, označenje povezav poljubnega G_1-sloja z oznakami c inducira označenje povzav G_1, ki ga avtomorfizem ϕ_t ohranja. Ker je takih avtomorfizmov neskončno mnogo, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da velja $\phi_s \neq \phi_t$ za $s \neq t$.

Oglejmo si avtomorfizme grafa $G_1 \Box G_2$ oblike $\phi = (\phi_t, \mathrm{id}_{G_1})$ za nek $t \geq k$. Za vsak tak t in vsako povezavo $uv \in E(G_1)$ (kar lahko vidimo tudi kot povezavo v kateremkoli G_1-sloju v $G_1 \Box G_2$) velja $c(uv) = c(\phi_t(u)\phi_t(v))$, torej ti avtomorfizmi ohranjajo oznake povezav znotraj G_1-slojev.

Edina možnost je torej, da ti avtomorfizmi ne ohranjajo nekih povezav znotraj G_2-slojev. Toda to bi pomenilo, da za vsak $t \geq k$ obstaja vsaj ena povezava uv v G_2-sloju (ki je določen z vozliščem $w \in V(G_1)$, za katerega velja, da je $c(uv)$ različen od $c(\phi_t(u), \phi_t(v))$ v G_2-sloju, določenem z vozliščem $\phi_t(w) \in V(G_1)$. Ker je G_2-slojev neskončno mnogo, to zahteva neskončno mnogo različnih označenj povezav G_2. Toda obstaja samo $k^{|E(G)|}$ različnih označenj povezav G_2-slojev, kar je seveda končno število. Od tod sledi, da obstaja vsaj nekaj netrivialnih avtomorfizmov, opisanih zgoraj, ki ohranjajo označenje povezav c, kar je v nasprotju s predpostavko. $\square$

Če združimo vse tri leme, ki smo jih navedli do sedaj, dobimo kot posledico naslednji izrek.

Izrek 5.10 ([4]). *Naj bosta G_1 in G_2 povezana, števna, tuja si grafa. Potem je razlikovalni indeks $D'(G_1 \Box G_2)$ neskončen natanko tedaj, ko je za nek $i \in \{1, 2\}$ razlikovalni indeks $D'(G_i)$ neskončen, za $j \neq i$ pa je G_j končen graf.*

V nadaljevanju si bomo ogledali vrednosti razlikovalnega indeksa $D'(G^k)$.

Lema 5.11. *Naj bo $n \geq 2$ celo število. Če je G povezan, števno neskončen, nerazcepen graf, je $D'(G^n) = 2$.*

Dokaz. Za $n = 2$ je dokaz podoben dokazu leme 5.7. Označimo $G^2 = G_1 \square G_2$, kjer sta G_1 in G_2 izomorfna G. Poimenujmo povezave grafa G_1 z $e_1, e_2, \ldots$ in povezave grafa G_2 z $f_1, f_2, \ldots$ v poljubnem vrstem redu. To je možno, saj morata sta množici povezav števno neskončni.

Konstruirajmo sedaj razlikovalno označenje povezav grafa $G_1 \square G_2$ z oznakama 1 in 2. Za $k \geq 1$ označimo prvih $2k - 1$ povezav v k-tem G_1-sloju ter prvih $2k$ povezav v k-tem G_2-sloju z oznako 1. Vsem ostalim povezavam v omenjenih slojih priredimo oznako 2. Poljubna povezava $G_1 \square G_2$ leži v G_1-sloju ali v G_2-sloju, torej res označimo vse povezave.

Naj bo ϕ_1 avtomorfizem grafa G_1 in ϕ_2 avtomorfizem grafa G_2. Recimo, da obstaja netrivialen avtomorfizem $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ grafa $G_1 \square G_2$, ki ohranja konstruirano označenje povezav. Ker imata poljubna G_1-sloja različno število povezav z oznako 1, mora biti ϕ_2 trivialen avtomorfizem. Podobno imata tudi poljubna G_2-sloja različno število povezav z oznako 1, torej je tudi ϕ_1 trivialen. Od tod sledi, da mora ϕ biti trivialen avtomorfizem.

Preostanejo še avtomorfizmi grafa $G_1 \square G_2$, ki so generirani z izomorfizmom med grafoma G_1 in G_2. Takšni avtomorfizmi bi zamenjali G_1-sloje in G_2-sloje. Toda poljuben G_1-sloj ima liho število povezav z oznako 1, poljuben G_2-sloj pa sodo število. Torej tak avtomorfizem ne more ohranjati označenja povezav. Sledi, da je edini avtomorfizem $G_1 \square G_2$, ki ohranja konstruirano označenje povezav, trivialen avtomorfizem.

Pokažimo sedaj, da je $D'(G \square H) = 2$, če je $D'(H) = 2$, G pa je nerazcepen. Če potem vzamemo $H = G^{n-1}$, bo po indukciji lema dokazana.

Naj bo c razlikovalno označenje povezav grafa H z dvema oznakama. Konstruirajmo označenje povezav c' grafa $G \square H$ na sledeč način. Enemu izmed H-slojev priredimo oznake iz označenja povezav c. Potem je edini možen avtomorfizem tega H-sloja trivialen. Vsem povezavam drugega H-sloja priredimo oznako 1. Vsakemu od preostalih H-slojev označimo različno število povezav z oznako 2 (to število mora biti različno tudi od števila povezav z oznako 2 v prvem H-sloju). Ker ima sedaj vsak H-sloj različno število povezav z oznako 2, noben avtomorfizem G ne more ohranjati označenja povezav.

Če je $G' \cong G$ faktor H, dobimo še dodatne avtomorfizme, ki so generirani z izomorfizmom med G' in G. Označimo vse povezave G-slojev z oznako 2. Potem ima vsak G'-sloj, ki je vsebovan v H-sloju s samimi povezavami z oznako 1, povezave z oznako 1. Torej avtomorfizem, ki bi zamenjal G-sloj in G'-sloj, ne bi mogel ohranjati označenja povezav.

Vidimo, da je edini avtomorfizem, ki ohranja označenje povezav c', trivialen avtomorfizem. Torej je res $D'(G \square H) = 2$. $\square$

Izrek 5.12 ([4])**.** *Naj bo $n \geq 2$ celo število in naj bo G povezan, števno neskončen graf s faktorizacijo $G = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_t$, kjer prafaktorji $G_1, G_2, \ldots G_t$ niso nujno različni. Potem velja $D'(G^n) = 2$.*

Dokaz. Če je G nerazcepen, trditev sledi iz leme 5.11. Če G ni nerazcepen, vzamemo njegovo faktorizacijo na prafaktorje $G = G_1 \Box G_2 \Box \cdots \Box G_t$ in uporabimo lemo 5.11 na vsakem neskončnem prafaktorju (obstaja vsaj en neskončen prafaktor). Za vsak končen prafaktor uporabimo izrek 5.6. Rezultat potem sledi iz leme 5.8, razen v primeru, ko je $G = K_2 \Box H$ in $n = 2$, kjer je H neskončen graf, ki je tuj s K_2. Po zgornjih argumentih že vemo, da je $D'(H^2) = 2$. Naj bo c razlikovalno označenje povezav H^2 z dvema oznakama. Poiščimo razlikovalno označenje povezav c' grafa G^2 tako, da ga definiramo za vsako izmed njegovih štirih H^2-slojev. Enega izmed H^2-slojev označimo z oznakami iz označenja povezav c. S tem dosežemo, da je edini avtomorfizem H, ki ohranja oznake na tem sloju, trivialen. Preostale tri H^2-sloje označimo z različnimi števili oznak 1; vsem ostalim povezavam priredimo oznako 2. Od tod sledi, da noben netrivialen avtomorfizem G^2 ne more ohranjati označenja povezav c', torej je to res razlikovalno. $\Box$

Literatura

[1] M. O. Albertson, K. L. Collins, Symmetry breaking in graphs, *Electron. J. Combin.* **3**, 1996, R18.

[2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer, New York 2008.

[3] I. Broere, M. Pilśniak, The distinguishing index of infinite graphs, *Electron. J. Combin.* **22(1)**, 2015, P1.78.

[4] I. Broere, M. Pilśniak, The distinguishing index of the Cartesian product of countable graphs, *Ars Math. Contemp.* **13**, 2017, 15–21.

[5] K. L Collins, A. N. Trenk, The distinguishing chromatic number, *Electron. J. Combin.* **13**, 2006, R16.

[6] A. Gorzkowska, R. Kalinowski, M. Pilśniak, Distinguishing the Cartesian product of finite graphs, *Ars Math. Contemp.* **12**, 2017, 77–87.

[7] R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar, *Handbook of Product Graphs*, CRC press, 2011.

[8] W. Imrich, S. Klavžar, V. Trofimov, Distinguishing infinite graphs, *Electron. J. Combin.* **14**, 2007, R36.

[9] R. Kalinowski, M. Pilśniak, Distinguishing graphs by edge-colourings, *European J. Combin.* **45**, 2015, 124–131.

[10] R. Kalinowski, M. Pilśniak, J. Przybyło, M. Woźniak, How to personalize the vertices of a graph?, *European J. Combin.* **40**, 2014, 116–123.

[11] S. Klavžar, T.-L. Wong, X. Zhu, Distinguishing labelings of group action on vector spaces and graphs, *J. Algebra* **303**, 2006, 626–641.