UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Luka Nerad

Totalni in Cayleyjev graf kolobarja

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. David Dolžan

Ljubljana, 2015

Podpisani Luka Nerad izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom Totalni in Cayleyjev graf kolobarja izdelal samostojno pod mentorstvom izr. prof. dr. Davida Dolžana in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 29. 10. 2015 Podpis: ....

Kazalo

Program dela

V delu si oglejte definicijo in lastnosti totalnega in Cayleyjevega grafa kolobarja. Opišite njune lastnosti v povezavi z lastnostmi kolobarja.

Osnovna literatura:

D.F. Anderson, A. Badawi, *The total graph of a commutative ring*, J. Algebra 300 (2008), 2706-2719.

G. Aalipour, S. Akbari, *On the Cayley graph of a commutative ring with respect to its zero divisors*, Cornell University library (2013).

Mentor: izr. prof. dr. David Dolžan Podpis: ....

Totalni in Cayleyjev graf kolobarja

POVZETEK

Naj bo R netrivialni kolobar z enico in naj bo $Z(R)$ množica deliteljev niča kolobarja R. Obravnavamo totalni in Cayleyjev graf kolobarja R, ter njuna regularna podgrafa. Vozlišča totalnega grafa $T(R)$ in Cayleyjevega grafa $C(R)$ so elementi kolobarja R, poljubni vozlišči x in y totalnega grafa $T(R)$ sta povezani natanko tedaj, ko velja $x+y \in Z(R)$, poljubni vozlišči x in y Cayleyjevega grafa $C(R)$ sta povezani natanko tedaj, ko velja $x-y \in Z(R)$. Regularni podgraf totalnega oziroma Cayleyjevega grafa je podgraf, induciran z regularnimi elementi kolobarja R. Ogledamo si strukturo totalnega in Cayleyjevega grafa kolobarja R, ko velja $Z(R) < (R,+)$. Pokažemo, da sta totalni in Cayleyejev graf končnega kolobarja R hamiltonska natanko tedaj, ko sta povezana, kar velja natanko tedaj, ko je $(R,+) = \langle Z(R) \rangle$. Dokažemo, da je regularni podgraf totalnega grafa reduciranega levega noetherskega kolobarja R, $2 \notin Z(R)$, šibko popoln, ter da je regularni podgraf Cayleyjevega grafa končnega komutativnega kolobarja šibko popoln.

The total graph and the Cayley graph of a ring

ABSTRACT

Let R be a nontrivial ring with unity and let $Z(R)$ be the set of zero divisors of R. We study the total graph and the Cayley graph of R, as well as their regular subgraphs. The vertices of the total graph $T(R)$ and the Cayley graph $C(R)$ are the elements of R, two vertices x and y of the total graph $T(R)$ are adjacent if and only if $x+y \in Z(R)$, two vertices x and y of the Cayley graph $C(R)$ are adjacent if and only if $x-y \in Z(R)$. The regular subgraph of the total graph or the Cayley graph is a subgraph, induced with regular elements of R. We determine the structure of the total graph and the Cayley graph of R, when $Z(R) < (R,+)$. We show that the total graph and the Cayley graph of a finite ring R are hamiltonian if and only if they are connected, which holds if and only if $(R,+) = \langle Z(R) \rangle$. We prove that the regular subgraph of the total graph of a reduced left noetherian ring R, $2 \notin Z(R)$, is weakly perfect, and that the regular subgraph of the Cayley graph of a finite commutative ring is weakly perfect.

Math. Subj. Class. (2010): 05C25, 05C45

Ključne besede: totalni graf, Cayleyjev graf, delitelji niča, klično število, kromatično število.

Keywords: total graph, Cayley graph, zero-divisors, clique number, chromatic number.

1. Uvod

V algebri se velikokrat zgodi, da se neki zapleteni problem izjemno poenostavi, če ga pogledamo z drugega zornega kota. Pri reševanju problemov zapletenim algebrajskim strukturam prirejamo strukture, ki so nam bolj znane in domače. V tem delu bomo kolobarjem prirejali grafe. Osnovna motivacija je, da bi nam lastnosti prirejenega grafa, ki sledijo iz lastnosti kolobarja, s pomočjo teorije grafov implicirale kake druge lastnosti grafa, ki bi jih nato lahko prevedli na lastnosti obravnavanega kolobarja. Mi bomo obravnavali predvsem začetni korak tega procesa, tj. določali bomo lastnosti prirejenih grafov glede na lastnosti kolobarjev.
Tekom celotnega dela naj bo R netrivialni kolobar z enico. Leve oziroma desne delitelje niča kolobarja R označimo zaporedoma $Z_l(R)$ in $Z_d(R)$, k deliteljem niča prištevamo tudi element 0. Element je delitelj niča, če je levi ali desni delitelj niča, delitelje niča označimo $Z(R) = Z_l(R) \cup Z_d(R)$. V komutativnem kolobarju je množica $Z(R)$ očitno zaprta za množenje z elementi kolobarja R, zato je $Z(R)$ ideal natanko tedaj, ko so delitelji niča zaprti za seštevanje. V nekomutativnih kolobarjih nimamo niti zaprtosti za množenje. Če je l levi delitelj niča in r neki element nekomutativnega kolobarja R, produkt lr ni nujno delitelj niča. Regularni elementi $\mathrm{Reg}(R) := R \backslash Z(R)$ so vsi tisti elementi, ki niso delitelji niča. Množico obrnljivih elementov kolobarja R označimo R^*.
Totalni graf kolobarja R označimo $T(R)$. Njegova vozlišča so elementi kolobarja R in vozlišči $x, y \in R$ sta v grafu $T(R)$ povezani natanko tedaj, ko velja $x + y \in Z(R)$. Podgraf grafa $T(R)$, induciran z delitelji niča kolobarja R, označimo $Z(T(R))$, imenujemo pa ga *graf deliteljev niča* kolobarja R. Pomembnejši je podgraf grafa $T(R)$, induciran z regularnimi elementi kolobarja R, imenujemo ga *regularni graf* kolobarja R in označimo $\mathrm{Reg}(T(R))$.
Cayleyjev graf kolobarja R označimo $C(R)$. Njegova vozlišča so elementi kolobarja R in vozlišči $x, y \in R$ sta v grafu $C(R)$ povezani natanko tedaj, ko velja $x - y \in Z(R)$. Če je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, sta poljubna elementa v isti komponenti za povezanost (ki je poln graf) grafa $C(R)$ očitno natanko tedaj, ko sta v istem odseku aditivne grupe $(R, +)$ nad podgrupo $Z(R)$. Podobno kot pri totalnem grafu bomo obravnavali tudi podgraf Cayleyjevega grafa, induciranega z regularnimi elementi kolobarja R, označimo ga $\mathrm{Reg}(C(R))$.
Obravnavali bomo lastnosti totalnega in Cayleyjevega grafa $T(R)$ in $C(R)$ ob različnih predpostavkah o lastnostih kolobarja R in obratno. Navedimo nekaj lastnosti in definicij iz teorij kolobarjev in grafov, ki jih bomo potrebovali. Nekatere izreke bomo dokazali, druge bomo navedli brez dokaza.

Izrek 1.1. *Naj bo I števna množica, $\{R_i, i \in I\}$ družina kolobarjev in $R = \Pi_{i \in I} R_i$. Potem je element $x = (x_1, x_2, \ldots) \in R$ regularen natanko tedaj, ko so vse njegove komponente regularne.*

Dokaz. Naj bo $x = (x_1, x_2, \ldots) \in Z(R)$. Potem obstaja tak $y = (y_1, y_2, \ldots) \in R, y \neq 0$, da je $xy = 0$ (ali $yx = 0$). Torej obstaja tak $i \in I$, da je $y_i \neq 0 \in R_i$ in $x_i y_i = 0$, zato je $x_i \in Z(R_i)$. Obratno, če je $x_i \in Z(R_i)$, za neki i, potem je $x_i y_i = 0$ (ali $y_i x_i = 0$) za neki $y_i \neq 0 \in R_i$ in $xy = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots)(0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots) = 0$, zato je $x \in Z(R)$. Torej velja $\mathrm{Reg}(\Pi_{i \in I} R_i) = \Pi_{i \in I} \mathrm{Reg}(R_i)$. □

Z $\mathrm{Min}(R)$ in $\mathrm{Max}(R)$ označimo zaporedoma množice vseh minimalnih in maksimalnih idealov kolobarja R. Kolobar je *reduciran*, če nima neničelnih nilpotentov. *Jacobsonov radikal* $J(R)$ je presek vseh maksimalnih levih idealov kolobarja

R. Izkaže se, da je $J(R)$ hkrati presek vseh maksimalnih desnih idealov, zato je $J(R)$ ideal. Velja tudi, da ima R natanko en maksimalni levi ideal, če in samo če ima natanko en maksimalni desni ideal. V tem primeru pravimo, da je R *lokalni kolobar*. Kolobar je *levi (desni) artinski*, če izpolnjuje *pogoj padajočih verig* na levih (desnih) idealih, tj. vsaka padajoča veriga levih (desnih) idealov $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ je od nekje naprej konstantna. Analogno *levi (desni) noetherski* kolobar izpolnjuje *pogoj naraščajočih verig* na levih (desnih) idealih. Kolobar je *artinski* oziroma *noetherski*, če je hkrati levi in desni artinski oziroma noetherski. Izkaže se, da je vsak (levi) artinski kolobar avtomatično (levi) noetherski kolobar. Končni kolobarji so očitno artinski in noetherski. Pri nekaterih rezultatih v delu obravnavamo leve artinske ali leve noetherske kolobarje, za desne artinske in desne noetherske kolobarje so dokazi analogni.
V delu bomo nekajkrat potrebovali naslednjo trditev.

Trditev 1.2. *Naj bo R kolobar. Potem velja:*

(1) Vsak pravi levi ideal kolobarja R je vsebovan v nekem maksimalnem levem idealu kolobarja R.

(2) Naj $x \in R$ nima levega inverza. Potem je x vsebovan v nekem maksimalnem levem idealu kolobarja R.

Najprej dokažimo pomožno lemo.

Lema 1.3. *Vsak netrivialni končno generirani modul premore neki maksimalni podmodul.*

Dokaz. Naj bo M netrivialni končno generirani R-modul in naj bo $\Sigma = \{N < M, N \neq M\}$ družina njegovih pravih podmodulov. Le-ta je neprazna, saj vsebuje ničelni modul. Naj bo $\{N_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ veriga modulov iz Σ. Dokažimo, da je $N := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ njena zgornja meja v Σ. To je očitno modul, dokazati moramo le, da je pravi podmodul modula M. Denimo, da velja $N = M$. Tedaj N vsebuje vse generatorje modula M in ker je teh končno mnogo, obstaja neki $N_\lambda, \lambda \in \Lambda$, ki vsebuje vse generatorje modula M, iz česar sledi $N_\lambda = M$, kar je protislovje. Zato Σ po Zornovi lemi vsebuje neki maksimalni element, ki je iskani maksimalni podmodul modula M. $\square$

Dokaz trditve. (1) Naj bo I pravi levi ideal kolobarja R. Tedaj je R/I netrivialni končno generirani levi R-modul. Po pomožni lemi vsebuje neki maksimalni podmodul, zato po bijektivni korespondenci kolobar R vsebuje neki maksimalni levi ideal, ki vsebuje I.

(2) Velja $Rx \neq R$, saj x nima levega inverza. Rezultat sledi po prvi točki.

$\square$

Opomba 1.4. Analogna trditev velja za desne ideale oziroma elemente brez desnega inverza.

Naj bodo $P_0, \ldots, P_n$ praideali komutativnega kolobarja R. Tedaj je $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ *veriga praidealov v R dolžine n*. *Dimenzija* $\dim(R)$ je supremum dolžin vseh takih verig, označimo jo $\dim(R)$. Če je dimenzija kolobarja enaka 0, je vsak praideal maksimalni ideal, saj je po trditvi 1.2 vsak pravi ideal vsebovan v nekem maksimalnem idealu. Komutativni kolobar je artinski natanko tedaj, ko je noetherski in ima dimenzijo 0 [9, izrek 8.5]. Ideala I in J kolobarja R sta si *tuja*, če velja $I + J = R$. Brez dokaza navedimo naslednji izrek.

Izrek 1.5 (Kitajski izrek o ostankih)**.** *Naj bo R kolobar in $I_1, \dots, I_n$ ideali R. Definirajmo homomorfizem:*

$$\phi\colon R \to \Pi_{i=1}^n R/I_i$$

s predpisom $\phi(x) = (x + I_1, x + I_2, \dots, x + I_n)$. Velja:

(1) ϕ je surjektiven $\Leftrightarrow$ ideali I_i so si paroma tuji,

(2) ϕ je injektiven $\Leftrightarrow$ $\bigcap_{i=1}^n I_i = 0$.

Opomba 1.6. Enaki sklepi veljajo, če homomorfizem ϕ gledamo kot homomorfizem levih R-modulov R in $\Pi_{i=1}^n R/I_i$.

Povejmo še nekaj o modulih, saj z njihovo pomočjo lažje uvedemo nekatere lasnosti kolobarjev. Podobno kot kolobar je modul *artinski (noetherski)*, če je vsaka padajoča (naraščajoča) veriga njegovih podmodulov od nekje naprej konstantna. Modul je *enostaven*, če nima pravih netrivialnih podmodulov in je *polenostaven*, če je direktna vsota enostavnih modulov, kar je očitno natanko tedaj, ko je notranja direktna vsota enostavnih podmodulov.

Izrek 1.7. *Podmodul polenostavnega modula je polenostaven.*

Dokaz. Naj bo M polenostavni modul. Naj bo N poljubni podmodul modula M in naj bo $\mathcal{D}$ družina enostavnih podmodulov modula M, ki nastopajo v notranji direktni vsoti modula M, in netrivialno sekajo N. Tedaj za vsak $D \in \mathcal{D}$ velja $D \cap N = D$, saj je D enostaven. Sledi $N = \bigoplus_{D \in \mathcal{D}} D$, torej je N polenostaven. □

Naj bodo $N_0, \dots, N_n$ podmoduli modula M. Tedaj je $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_n$ *veriga podmodulov v M dolžine n*. *Dolžina* modula M je supremum dolžin vseh takih verig.

Izrek 1.8. *Polenostavni končno generirani modul M ima končno dolžino.*

Dokaz. Velja $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ za neke enostavne module M_i. Vsak generator modula M je linearna kombinacija končno mnogo elementov $x_i \in M_i$. Ker je generatorjev končno mnogo, obstaja taka končna podmnožica J indeksne množice I, da modul $\bigoplus_{i \in J} M_i$ vsebuje vse generatorje modula M. Torej je $M = \bigoplus_{i \in J} M_i$. Ker so moduli M_i enostavni, obstaja le končno mnogo verig podmodulov modula M, zato ima ta končno dolžino. □

Opomba 1.9. Modul s končno dolžino je očitno artinski in noetherski.

Izrek 1.10. *(1) Vsak podmodul artinskega modula je artinski.*

(2) Faktorski modul artinskega modula je artinski.

(3) Naj bo M modul, N njegov artinski podmodul in M/N artinski modul. Potem je M artinski.

Dokaz. (1) Naj bo M artinski modul in N njegov podmodul. Vsak podmodul N je hkrati podmodul modula M, zato je vsaka veriga podmodulov N hkrati veriga podmodulov M.

(2) Naj bo M artinski modul in N njegov podmodul. Vsak podmodul modula M/N je oblike L/N, kjer je L podmodul M, ki vsebuje N. Naj bo $L_1/N \supseteq L_2/N \supseteq \dots$ padajoča veriga podmodulov M/N. Potem je $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$ padajoča veriga podmodulov M. Obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $L_i = L_n$ za vsak $i \geq n$, torej je $L_i/N = L_n/N$ za vsak $i \geq n$.

(3) Naj bosta N in M/N artinska modula in naj bo $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ padajoča veriga podmodulov M. Tedaj je $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \ldots$ padajoča veriga podmodulov N in obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da velja $M_i + N = M_k + N$ za vsak $i \geq k$. Hkrati je $(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq \ldots$ padajoča veriga podmodulov M/N in obstaja tak $l \in \mathbb{N}$, da velja $(M_i + N)/N = (M_l + N)/N$ za vsak $i \geq l$. Naj bo $n = \max\{k, l\}$. Tedaj za vsak $i \geq n$ velja $M_i/(M_i \cap N) \cong (M_i + N)/N = (M_n + N)/N \cong M_n/(M_n \cap N) = M_n/(M_i + N)$. Iz $M_n \supseteq M_i$ sledi $M_i = M_n$ za vsak $i \geq n$.

$\square$

Opomba 1.11. Enake lastnosti veljajo za noetherske module. Podobno sklepamo, da je vsak ideal levega artinskega kolobarja levi artinski (kot kolobar) in da je faktorski kolobar levega artinskega kolobarja tudi levi artinski.

Kolobar je *polenostaven*, če je polenostaven kot modul nad samim seboj. Presenetljivo je kolobar polenostaven kot levi modul nad samim seboj natanko tedaj, ko je polenostaven kot desni modul nad samim seboj.

Izrek 1.12. *Kolobar R je polenostaven natanko tedaj, ko je levi artinski in je $J(R) = 0$.*

Dokaz. Naj bo R polenostaven. Kolobar kot modul nad samim seboj je končno generiran, torej ima po izreku 1.8 končno dolžino, zato je artinski. Ker je R polenostaven, velja $R = \bigoplus_{i \in I} M_i$, kjer so M_i enostavni podmoduli kolobarja R. Naj bo $x \in R$ poljubni neničelni element. Za vsaka $i, j \in I$ velja $M_i \cap M_j = 0$, zato je x vsebovan v natanko enem od podmodulov $M_i, i \in I$, recimo M_k. Torej je $\bigoplus_{i \in I, i \neq k} M_i$ podmodul, ki ne vsebuje x. Ta je očitno maksimalen, torej za vsak neničelni $x \in R$ obstaja maksimalni levi ideal kolobarja R, ki ne vsebuje x, zato je $J(R) = 0$.
Obratno, naj bo R levi artinski in $J(R) = 0$. Naj bo Σ družina vseh maksimalnih levih idealov kolobarja R. Trdimo, da obstaja končna podmnožica $\Phi \subseteq \Sigma$, za katero velja $\bigcap_{M \in \Phi} M = 0$. Za vsako končno podmnožico $\Phi \subseteq \Sigma$ definirajmo levi ideal

$$I_\Phi := \bigcap_{M \in \Phi} M.$$

Ker je kolobar R levi artinski, ima družina $\{I_\Phi, \Phi \subseteq \Sigma, |\Phi| < \infty\}$ minimalni element, označimo ga I_Φ. Denimo da obstaja neničelni $x \in I_\Phi$. Ker je $J(R) = 0$, obstaja tak $M \in \Sigma$, da velja $x \notin M$. Toda tedaj je $I_\Phi \cap M$ strogo vsebovan v I_Φ, kar je v protislovju z njegovo minimalnostjo, torej je $I_\Phi = 0$. Po Kitajskem izreku o ostankih lahko R vložimo v $\bigoplus_{M \in \Phi} R/M$ kot levi R-modul. Modul $\bigoplus_{i=1}^n R/M_i$ je polenostaven, saj je direktna vsota enostavnih R-modulov. Zato je tudi R polenostavni R-modul oziroma polenostavni kolobar. $\square$

Brez dokaza navedimo naslednji izrek.

Izrek 1.13 (Artin-Wedderburn)**.** *Naj bo R polenostavni kolobar. Potem obstajajo naravna števila $n_1, \ldots, n_r$ in obsegi $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_r$, da velja*

$$R \cong M_{n_1}(\mathbb{F}_1) \times \ldots \times M_{n_r}(\mathbb{F}_r),$$

kjer je $M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ kolobar matrik nad obsegom $\mathbb{F}_i$.

Lema 1.14. *Velja $x \in J(R)$ natanko tedaj, ko ima element $1 - rx$ levi inverz za poljubni $r \in R$.*

Dokaz. Naj bo $x \notin J(R)$. Potem obstaja tak maksimalni levi ideal I, da velja $x \notin I$. Potem je $Rx + I = R$, saj je $Rx + I$ levi ideal in velja $I \subsetneq Rx + I$. Zato obstaja tak $r \in R$, da velja $1 \in rx + I$ oziroma $1 - rx \in I$, torej element $1 - rx$ nima levega inverza.
Obratno, denimo da obstaja tak $r \in R$, da element $1 - rx$ nima levega inverza. Potem je po trditvi 1.2 vsebovan v nekem maksimalnem levem idealu I. Ideal I ne vsebuje elementa rx, saj bi v nasprotnem primeru vseboval 1, torej ne vsebuje niti x. Zato x ni v $J(R)$. □

Izrek 1.15. *Velja $x \in J(R)$ natanko tedaj, ko je element $1-rxs$ obrnljiv za poljubna $r, s \in R$.*

Dokaz. Naj bo element $1 - rxs$ obrnljiv za poljubna $r, s \in R$. Postavimo $s = 1$. Torej je element $1 - rx$ obrnljiv za poljubni $r \in R$, zato je po lemi 1.14 element x v $J(R)$.
Obratno, če je $x \in J(R)$, potem je $xs \in J(R)$ za poljubni $s \in R$, zato ima po lemi 1.14 element $1 - rxs$ levi inverz za poljubni $r \in R$, označimo ga u. Velja $u(1 - rxs) = 1$ oziroma $u = 1 + urxs$. Ker je $rxs \in J(R)$ ima po lemi 1.14 tudi element $u = 1 + urxs$ levi inverz. Torej je u obrnljiv z inverzom $1 - rxs$. □

Izrek 1.16. *Če je kolobar R levi artinski, potem je faktorski kolobar $R/J(R)$ polenostaven.*

Dokaz. Po opombi za izrekom 1.10 je kolobar $R/J(R)$ levi artinski. Naj bo Σ družina vseh maksimalnih levih idealov kolobarja R. Maksimalni levi ideali kolobarja $R/J(R)$ so oblike $M/J(R)$, $M \in \Sigma$. Velja $\bigcap_{M\in\Sigma} M/J(R) = (\bigcap_{M\in\Sigma} M)/J(R) = 0$. Torej je $J(R/J(R)) = 0$. Po izreku 1.12 je kolobar $R/J(R)$ polenostaven. □

Kolobar R je *pollokalen*, če je kolobar $R/J(R)$ polenostaven, torej so levi artinski kolobarji pollokalni. Če ima kolobar končno mnogo levih ali desnih maksimalnih idealov, potem je pollokalen, obratno velja v komutativnih kolobarjih, v splošnem pa ne.
Brez dokaza navedimo še strukturni izrek za komutativne artinske kolobarje.

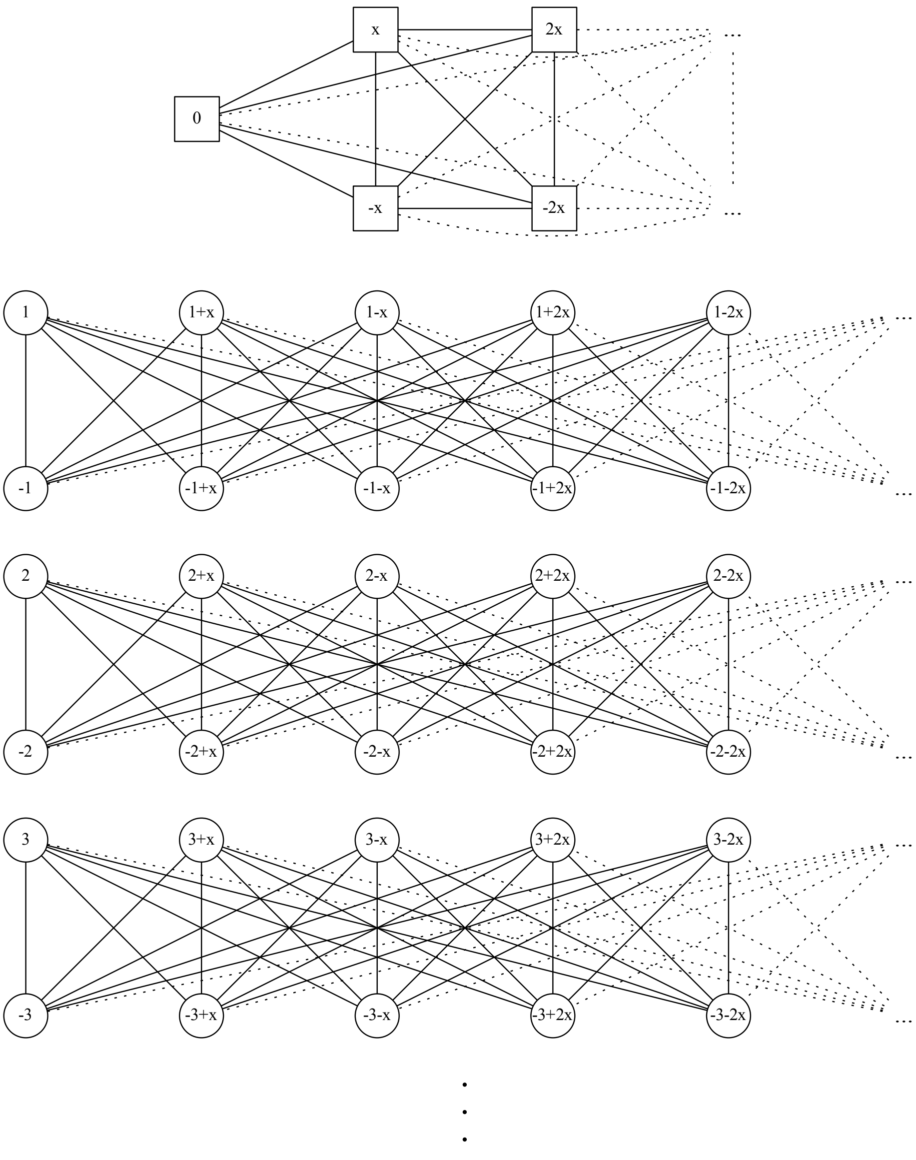
Izrek 1.17. *Komutativni artinski kolobar je izomorfen direktnemu produktu končno mnogo lokalnih artinskih kolobarjev.*

Obravnavali bomo grafe, ki imajo v splošnem neskončno mnogo vozlišč. Zaradi tega je potrebno biti pri nekaterih lastnostih grafa pazljiv. Naj bo $G = (V(G), E(G))$ poljubni graf. Glede na to, da ima graf G v splošnem neskončno mnogo vozlišč, se naravno porajajo vprašanja o morebitnih neskončnih poteh in ciklih v grafu G. *Pot* v grafu G je po definiciji zaporedje med seboj različnih vozlišč $v_1, v_2, \ldots$, kjer sta vozlišči v_i in v_{i+1} sosednji za $i = 1, 2, \ldots$. *Cikel* v grafu G je pot, katere prvo in zadnje vozlišče sta enaki. Po tej definiciji je cikel vedno končen. Obstajajo tudi definicije neskončnih ciklov, vendar se mi z njimi ne bomo ukvarjali. Prav tako je pot *med* dvema vozliščema grafa vedno končna.
Sprehod v grafu G je zaporedje vozlišč $v_1, v_2, \ldots$, kjer sta vozlišči v_i in v_{i+1} sosednji za $i = 1, 2, \ldots$, vozlišča se lahko ponavljajo. *Ožina* $\mathrm{gr}(G)$ grafa G je dolžina najkrajšega cikla v grafu G, če graf G nima cikla, je $\mathrm{gr}(G) = \infty$. Dolžino najkrajše poti med vozliščema u in v označimo $d(u, v)$, če pot med u in v ne obstaja, je $d(u, v) = \infty$. *Premer* $\mathrm{diam}(G)$ povezanega grafa G je dolžina najdaljše najkrajše poti med poljubnima vozliščema grafa G, $\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v\in V(G)} d(u, v)$, če maksimum obstaja. Če

maksimum ne obstaja ali pa graf G ni povezan, velja $\mathrm{diam}(G) = \infty$. Spoznali bomo, da je premer povezanega totalnega grafa komutativnega kolobarja vedno končen.
Izomorfizem grafov G in H je bijekcija $f\colon V(G) \to V(H)$, za katero velja: Vozlišči $u, v \in V(G)$ sta povezani natanko tedaj, ko sta vozlišči $f(u), f(v)$ povezani. Komplement grafa G bomo označili $\overline{G}$. Končni graf je *regularen*, če imajo vsa njegova vozlišča enako stopnjo, in je k-*regularen*, če imajo vsa njegova vozlišča stopnjo k. Tega ne smemo mešati z regularnim grafom kolobarja, tj. podgrafom totalnega grafa, induciranim z regularnimi elementi kolobarja. Izkaže pa se, da je regularni graf končnega kolobarja regularen.
Nekatere preostale definicije in lastnosti grafov in kolobarjev bomo sproti navajali skozi delo.

2. Totalni graf

Začnimo s primerom, oglejmo si kolobar $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$. Njegovi delitelji niča so $Z(\mathbb{Z}[x]/(x^2)) = (x)/(x^2)$. Oglejmo si njegov totalni graf.



Slika 1. Totalni graf $T(\mathbb{Z}[x]/(x^2))$.

Vozlišča, ki predstavljajo delitelje niča, bomo vedno označevali s kvadrati, vozlišča, ki predstavljajo regularne elemente, pa s krogi. Opazimo, da je graf nepovezan, graf deliteljev niča in regularni graf sta disjunktna, delitelji niča inducirajo polni podgraf, regularni elementi pa so razdeljeni v disjunktne polne dvodelne grafe. Spoznali bomo, da sta pomembni ločnici, ki določata lastnosti totalnega grafa kolobarja R, ali je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$ in ali je element 2 delitelj niča. V našem primeru so delitelji niča zaprti za seštevanje in 2 ni delitelj niča.
V primeru, ko je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, velja naslednji izrek.

Izrek 2.1. *Naj bo R kolobar in $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R,+)$. Graf $Z(T(R))$ je polni podgraf grafa $T(R)$ in disjunkten podgrafu $\mathrm{Reg}(T(R))$ grafa $T(R)$.*

Dokaz. Poljubna elementa $x, y \in Z(R)$ sta povezana in nobena elementa $z \in Z(R)$ in $w \in \mathrm{Reg}(R)$ nista povezana, saj so delitelji niča zaprti za seštevanje. $\square$

Oglejmo si strukturo grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$, ko so delitelji niča zaprti za seštevanje.

Izrek 2.2. *Naj bo R kolobar in $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R,+)$.*

(1) Če velja $2 \in Z(R)$, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija polnih grafov. Če je R končen, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija $|R/Z(R)| - 1$ polnih grafov $K_{|Z(R)|}$.

(2) Če velja $2 \notin Z(R)$, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija polnih dvodelnih grafov. Če je R končen, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija $(|R/Z(R)| - 1)/2$ polnih dvodelnih grafov $K_{|Z(R)|,|Z(R)|}$.

Dokaz. (1) Naj bo $x \in \mathrm{Reg}(R)$. Oglejmo si odsek $x + Z(R)$. Očitno so njegovi elementi regularni. Izberimo $z, z' \in Z(R)$. Velja $(x + z) + (x + z') = 2x + z + z' \in Z(R)$, saj so delitelji niča zaprti za seštevanje in $2 \in Z(R)$. Ker so bili elementi x, z, z' poljubni, elementi odseka $x + Z(R)$ tvorijo polni podgraf grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$. Izberimo take elemente $x, y \in \mathrm{Reg}(R)$ in $z, z' \in Z(R)$, da sta elementa $x + z$ in $y + z'$ povezana. Tedaj velja $x + y = (x + z) + (y + z') - z - z' \in Z(R)$ in sledi $x - y = (x + y) - 2y \in Z(R)$. To pomeni $x + Z(R) = y + Z(R)$. Dokazali smo, da odseki $x + Z(R)$, $x \in \mathrm{Reg}(R)$, inducirajo med seboj disjunktne polne podgrafe grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$. Če je R končen, je takih odsekov $|R/Z(R)| - 1$ in njihova moč je enaka $|Z(R)|$.

(2) Naj bo $x \in \mathrm{Reg}(R)$ in $z, z' \in Z(R)$. Ker je $2 \notin Z(R)$, velja $(x+z)+(x+z') = 2x + z + z' \notin Z(R)$, torej je odsek $x + Z(R)$ neodvisna množica grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$ za vsak $x \in \mathrm{Reg}(R)$. Očitno za $x \in \mathrm{Reg}(R)$ velja, da je vsak element odseka $x + Z(R)$ povezan z vsakim elementom odseka $-x + Z(R)$. Vidimo, da množica $(x + Z(R)) \cup (-x + Z(R))$ inducira polni dvodelni podgraf. Pokazati moramo še, da so ti dvodelni podgrafi med seboj disjunktni. Denimo, da sta $x + z$ in $y + z'$ povezana za neke $x, y \in \mathrm{Reg}(R)$ in $z, z' \in Z(R)$. Sledi $(x + z) + (y + z') \in Z(R)$ in $x + y \in Z(R)$, kar pomeni $y + Z(R) = -x + Z(R)$ in izrek je dokazan.

$\square$

Po izrekih 2.1 in 2.2 takoj sledi struktura totalnega grafa.

Posledica 2.3. *Naj bo R kolobar in $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R,+)$.*

(1) Če velja $2 \in Z(R)$, potem je graf $T(R)$ disjunktna unija polnih grafov. Če je R končen, potem je graf $T(R)$ disjunktna unija $|R/Z(R)|$ polnih grafov $K_{|Z(R)|}$.

(2) Če velja $2 \notin Z(R)$, potem je graf $T(R)$ disjunktna unija polnega grafa in polnih dvodelnih grafov. Če je R končen, potem je graf $T(R)$ disjunktna unija polnega grafa $K_{|Z(R)|}$ in $(|R/Z(R)|-1)/2$ polnih dvodelnih grafov $K_{|Z(R)|,|Z(R)|}$.

Če je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R,+)$, očitno velja $\mathrm{diam}(T(R)) = \infty$ in $\mathrm{gr}(T(R)) \in \{3, 4, \infty\}$. V nasprotnem primeru obstajata vsaj dva različna neničelna delitelja niča, recimo x in y. Če velja $x \neq -x$ ali $y \neq -y$, potem je bodisi

0—x—$(-x)$—0 bodisi 0—y—$(-y)$—0 3-cikel v grafu $T(R)$. Če pa velja $x = -x$ in $y = -y$, potem je 0—x—$(x+y)$—y—0 4-cikel v grafu $T(R)$. Dokazali smo naslednji izrek.

Izrek 2.4. *Naj bo R kolobar. Tedaj je* $\mathrm{gr}(T(R)) \in \{3, 4, \infty\}$.

V primeru, ko je R končen in je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, je po posledici 2.3 graf $T(R)$ bodisi $(|Z(R)| - 1)$-regularen, če je 2 delitelj niča, bodisi je stopnja poljubnega vozlišča grafa $T(R)$ enaka $|Z(R)| - 1$ ali $|Z(R)|$, če 2 ni delitelj niča. To velja tudi v splošnem.

Izrek 2.5. *Naj bo R končni kolobar.*

(1) Če velja $2 \in Z(R)$, potem je graf $T(R)$ $(|Z(R)| - 1)$-regularen.

(2) Če velja $2 \notin Z(R)$, potem je stopnja deliteljev niča kolobarja R v grafu $T(R)$ enaka $|Z(R)| - 1$ in stopnja regularnih elementov kolobarja R v grafu $T(R)$ enaka $|Z(R)|$.

Dokaz. (1) Naj bo $x \in R$. Za vsak $z \in Z(R)$ je x povezan z elementom $z - x \in R$, razen za $z = 2x \in Z(R)$, saj x ni povezan sam s seboj. Zato je $\deg(x) = |Z(R)| - 1$. Ker je bil x poljuben, je graf $T(R)$ res $(|Z(R)| - 1)$-regularen.

(2) Če je x delitelj niča, sklepamo enako kot v prejšnji točki in dobimo $\deg(x) = |Z(R)| - 1$. Če pa je x regularen, potem $2x$ ni delitelj niča in je x povezan z $z - x$ za vsak $z \in Z(R)$, torej je $\deg(x) = |Z(R)|$.

□

Naj bo R končni kolobar. Če je R sode moči, po Cauchyevem izreku obstaja element aditivne grupe $(R, +)$ reda 2, kar pomeni, da je 2 delitelj niča kolobarja R. Obratno, če je $2 \in Z(R)$ in $x \in R$ tak element, da je $2x = 0$, tedaj je $(\{0, x\}, +)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, zato je kolobar R sode moči. Dokazali smo naslednjo lemo.

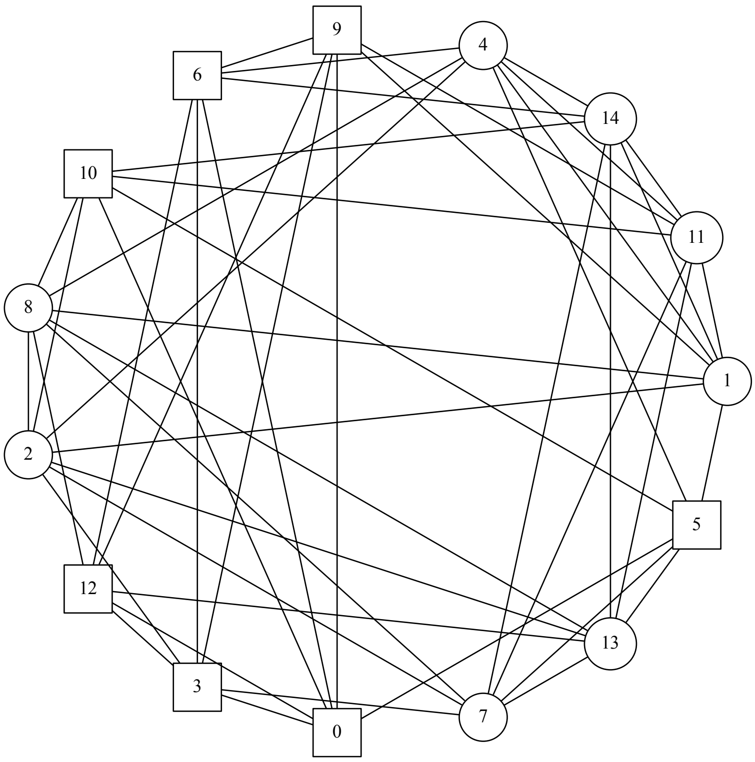
Lema 2.6. *Naj bo R končni kolobar. Potem je $2 \in Z(R)$ natanko tedaj, ko je R sode moči.*

Opazimo, da elementa 0 in 1 nista povezana v grafu $T(R)$, zato $T(R)$ ni nikoli poln. Če je R končen in je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, potem je po posledici 2.3 graf $T(R)$ prazen natanko tedaj, ko je cel in ima karakteristiko 2. Če $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, potem obstajata taka elementa $x, y \in Z(R)$, da velja $x + y \in \mathrm{Reg}(R)$. Sledi $-x \neq x + y$ in $-x + (x + y) = y \in Z(R)$, torej $T(R)$ ni prazen.

Trditev 2.7. *Naj bo R končni kolobar. Graf $T(R)$ je prazen natanko tedaj, ko je R cel s karakteristiko 2.*

Graf $T(R)$ ne more biti lih cikel. Če je $T(R)$ cikel, je namreč $\deg(0) = \deg(1) = 2$. Po izreku 2.5 sledi $2 \in Z(R)$ in po lemi 2.6 je R sode moči.
Če $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, totalni graf $T(R)$ nima nujno tako lepe strukture. Oglejmo si na primer kolobar $\mathbb{Z}_{15}$. Delitelji niča so $Z(\mathbb{Z}_{15}) = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}$ in regularni elementi so $\mathrm{Reg}(\mathbb{Z}_{15}) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. Množica $Z(\mathbb{Z}_{15})$ ni zaprta za seštevanje. Na sliki 2 vidimo, da je graf $T(\mathbb{Z}_{15})$ povezan.
Oglejmo si nekaj lastnosti grafa $T(R)$, ko $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$.

SLIKA 2. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{15})$.



Izrek 2.8. *Naj bo R kolobar in naj velja $Z(R) \not< (R, +)$.*

(1) Graf $Z(T(R))$ je povezan in $\operatorname{diam}(Z(T(R))) = 2$.

(2) Podgrafa $Z(T(R))$ in $\operatorname{Reg}(T(R))$ grafa $T(R)$ nista disjunktna.

(3) Če je graf $\operatorname{Reg}(T(R))$ povezan, potem je graf $T(R)$ povezan.

Dokaz. (1) Vsak neničelni delitelj niča je povezan z 0. Ker $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, obstajata vsaj dva različna neničelna delitelja niča, ki nista povezana. Naj bosta x, y poljubna različna neničelna delitelja niča. Potem je x—0—y pot dolžine 2 med x in y, torej je $\operatorname{diam}(Z(T(R))) = 2$.

(2) Ker $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, obstajata neničelna delitelja niča $x \neq y$, da velja $x + y \in \operatorname{Reg}(R)$. Potem sta elementa $-x \in Z(R)$ in $x+y \in \operatorname{Reg}(R)$ povezana, torej grafa $Z(T(R))$ in $\operatorname{Reg}(T(R))$ nista disjunktna.

(3) Naj bo graf $\operatorname{Reg}(T(R))$ povezan. Po (1) je $Z(T(R))$ povezan. Po (2) grafa $Z(T(R))$ in $\operatorname{Reg}(T(R))$ nista disjunktna in rezultat sledi.

□

V nadaljevanju bomo velikokrat potrebovali dejstvo, da je v končnem kolobarju vsak regularni element obrnljiv. Dokažimo še nekoliko splošnejšo trditev.

Trditev 2.9. *Naj bo R levi artinski kolobar. Tedaj je vsak regularni element obrnljiv in velja $Z(R) = Z_d(R)$.*

Dokaz. Izberimo $x \notin Z_d(R)$ in konstruirajmo padajočo verigo levih idealov $Rx \supseteq Rx^2 \supseteq Rx^3 \ldots$. Ker je R levi artinski, obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $Rx^n = Rx^{n+1}$.

Zato je $x^n = yx^{n+1}$ za neki $y \in R$ in $(1 - yx)x^n = 0$. Element x^n ni desni delitelj niča, zato je $1 - yx = 0$, torej je y levi inverz elementa x. Zdaj konstruirajmo verigo levih idealov $Ry \supseteq Ry^2 \supseteq Ry^3 \ldots$. Podobno kot prej velja $y^m = zy^{m+1}$ za neki $z \in R$ in neko naravno število m. Sledi $(1 - zy)y^n = 0$. Enačbo pomnožimo z x^n z desne in dobimo $1 - zy = 0$, torej je z levi inverz elementa y. Ker ima y levi in desni inverz, sta ta enaka, $y = x^{-1}$. Ugotovili smo, da je element x obrnljiv, zato očitno ni levi delitelj niča. Ker je bil x poljuben, velja $Z_l(R) \subseteq Z_d(R)$ in $Z(R) = Z_d(R)$. □

Opomba 2.10. Če je kolobar R desni artinski, analogno dobimo $Z(R) = Z_l(R)$. Končni kolobar je levi in desni artinski, zato zanj velja $Z(R) = Z_l(R) = Z_d(R)$ in vsak njegov regularni element je obrnljiv.

Posledica 2.11. *Levi artinski kolobar R je lokalen natanko takrat, ko je $Z(R)$ ideal v R.*

Dokaz. Naj bo (R, M) lokalni kolobar. Tedaj velja $M \subseteq Z(R)$, saj je vsak regularni element kolobarja R obrnljiv. Po trditvi 1.2 vsak element brez levega inverza leži v nekem maksimalnem levem idealu. Denimo, da velja $M \subsetneq Z(R)$. Potem obstaja neki $z \in Z(R) \backslash M$, brez škode za splošnost je z levi delitelj niča. Zato z nima levega inverza in po trditvi 1.2 leži v nekem maksimalnem levem idealu M'. Ker je R lokalen, je $M' = M$, kar je protislovje. Zato velja $Z(R) = M$ in je $Z(R)$ ideal.
Če je $Z(R)$ ideal, je edini maksimalni levi ideal, saj vsebuje vse neobrnljive elemente. □

Spoznali smo že, da v primeru, ko so delitelji niča zaprti za seštevanje, graf $T(R)$ ni nikoli povezan. Oglejmo si naslednjo karakterizacijo kolobarjev, katerih totalni grafi so povezani.

Izrek 2.12. *Naj bo R kolobar. Graf $T(R)$ je povezan natanko tedaj, ko je $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$.*

Opomba 2.13. Če velja $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$, je $1 = z_1 + \cdots + z_n$ za neke $z_i \in Z(R)$. Zato velja $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$ natanko tedaj, ko je $(R, +) = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ za neke $z_i \in Z(R)$.

Dokaz. Naj bo graf $T(R)$ povezan. Potem obstaja pot $0 — a_1 — a_2 — \cdots — a_n — 1$ od 0 do 1 v $T(R)$. To pomeni, da so $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + 1 \in Z(R)$. Iz $1 = (1 + a_n) - (a_n + a_{n-1}) + \cdots \pm a_1$ sledi $1 \in \langle a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + 1 \rangle$, torej je $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$.
Obratno, naj bo $R = \langle Z(R) \rangle$ in naj bo $x \in R$ poljubni neničelni element. Pokažimo, da obstaja pot od 0 do x. Velja $x = z_1 + \cdots + z_n$ za neke $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Naj bo $a_0 = 0$ in $a_k = (-1)^{n+k}(z_1 + \cdots + z_k)$ za $1 \leq k \leq n$. Potem je $a_k + a_{k+1} = (-1)^{n+k+1} z_{k+1} \in Z(R)$ za $1 \leq k \leq n - 1$, torej je $0 — a_1 — a_2 — \cdots — a_n = x$ sprehod od 0 do x v $T(R)$ (nekateri elementi a_i so lahko med seboj enaki). Ker je bil element x poljuben, je graf $T(R)$ povezan. □

Izrek 2.14. *Naj bo R kolobar, naj velja $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$ in $Z(R) = Z_d(R)$. Naj bo $n \geq 2$ najmanjše tako naravno število, da je $(R, +) = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ za neke $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Potem je* $\operatorname{diam}(T(R)) = n = d(0, 1)$.

Dokaz. Po izreku 2.12 je graf $T(R)$ povezan. Najprej pokažimo, da je vsaka pot od 0 do 1 dolžine vsaj n. Naj bo $0 — a_1 — \cdots — a_{m-1} — 1$ pot od 0 do 1 dolžine m. Tedaj velja $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{m-1} + 1 \in Z(R)$, sledi $1 \in \langle a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{m-1} + 1 \rangle$, torej

$(R,+) = \langle a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{m-1} + 1\rangle$. Iz minimalnosti n sledi $m \geq n$.
Naj bosta $x \neq y$ poljubna elementa kolobarja R. Pokažimo da med njima obstaja pot dolžine največ n. Naj bo $1 = z_1 + \cdots + z_n$ za neke $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$ in naj bo $z := y + (-1)^{n+1}x$. Definirajmo $d_0 := x$ in $d_k := (-1)^{n+k}(z_1 + \cdots + z_k)z + (-1)^k x$ za $0 \leq k \leq n$. Tedaj je $d_k + d_{k+1} = (-1)^{n+k+1}z_{k+1}z \in Z(R)$ za vsak $1 \leq k \leq n-1$ in $d_n = z + (-1)^n x = y$. Torej je $x = d_0 — d_1 — \cdots — d_{n-1} — d_n = y$ sprehod od x do y dolžine največ n. Sledi $\operatorname{diam}(T(R)) = n = d(0,1)$.

$\square$

Vemo že, da $Z(R) = Z_d(R)$ velja v levih artinskih kolobarjih, očitno velja tudi v komutativnih kolobarjih. Hitro vidimo, da temu pogoju zadoščajo tudi reducirani kolobarji.

Trditev 2.15. *Če je kolobar R reduciran, potem velja $Z(R) = Z_l(R) = Z_d(R)$.*

Dokaz. Naj bo R reducirani kolobar in naj velja $zx = 0$ za neki $z \in Z_l(R)$ in neki neničelni $x \in R$. Potem je $(xz)^2 = xzxz = 0$. Ker je R reduciran, je $xz = 0$, torej velja $Z_l(R) \subseteq Z_d(R)$. Podobno vidimo, da velja $Z_d(R) \subseteq Z_l(R)$. $\square$

Posledica 2.16. *Naj bo R levi artinski kolobar in $Z(R) \not< (R,+)$. Potem je graf $T(R)$ povezan z diametrom 2.*

Dokaz. Če je R levi artinski in delitelji niča niso zaprti za seštevanje, obstajata taka elementa $x, y \in Z(R)$, da velja $x + y \in \operatorname{Reg}(R)$. V levem artinskem kolobarju so vsi regularni elementi obrnljivi, zato je $(R,+) = \langle x, y\rangle$ in rezultat sledi po izreku 2.14. $\square$

Posledica 2.17. *Naj bo R kolobar, za katerega velja $Z(R) = Z_d(R)$, naj bo graf $T(R)$ povezan in naj bo* $\operatorname{diam}(T(R)) = n$. *Potem je* $\operatorname{diam}(\operatorname{Reg}(T(R))) \geq n-2$.

Dokaz. Po izreku 2.14 velja $\operatorname{diam}(T(R)) = n = d(0,1)$. Naj bo $0 — a_1 — \cdots — a_{n-1} — 1$ najkrajša pot od 0 do 1. Očitno je $a_1 \in Z(R)$. Če je $a_i \in Z(R)$ za neki i, $2 \leq i \leq n$, potem je pot $0 — a_i — a_{i+1} — \cdots — a_{n-1} — 1$ krajša od n, kar je protislovje. Zato je $a_i \in \operatorname{Reg}(R)$ za vsak i, $2 \leq i \leq n$. Torej je $a_2 — \cdots — a_{n-1} — 1$ pot od a_2 do 1 v grafu $\operatorname{Reg}(T(R))$ dolžine $n-2$. Če bi obstajala kaka krajša pot $a_2 — a'_3 — \cdots — a'_k — 1$ od a_2 do 1 v grafu $\operatorname{Reg}(T(R))$, $k < n-1$, bi bila v grafu $T(R)$ pot $0 — a_1 — a_2 — a'_3 — \cdots — a'_k — 1$ krajša od n, kar je protislovje. Torej je $a_2 — \cdots — a_{n-1} — 1$ najkrajša pot od a_2 do 1 v grafu $\operatorname{Reg}(T(R))$. Sledi $\operatorname{diam}(\operatorname{Reg}(T(R))) \geq n-2$. $\square$

Posledica 2.18. *Naj bo R kolobar, za katerega velja $Z(R) = Z_d(R)$ in naj bo $e \in R$ netrivialni idempotent. Potem je graf $T(R)$ povezan z diametrom 2.*

Dokaz. Iz $e + (1-e) = 1$ sledi $(R,+) = \langle e, 1-e\rangle$. Velja $e(1-e) = e - e = 0$, torej sta elementa e in $1-e$ delitelja niča in rezultat sledi po izreku 2.14. $\square$

Posledica 2.19. *Naj bo I števna množica, $|I| \geq 2$, $\{R_i, i \in I\}$ družina kolobarjev, za katere velja $Z(R_i) = Z_d(R_i)$, in $R = \Pi_{i\in I} R_i$. Potem je graf $T(R)$ povezan z diametrom 2.*

Dokaz. Ker je element $(1, 0, \ldots, 0)$ netrivialni idempotent kolobarja R, rezultat sledi po posledici 2.18. $\square$

Naj bo R komutativni kolobar in M R-modul. *Idealizacija* modula M nad kolobarjem R je komutativni kolobar na množici $R \times M$ z operacijama $(r, m) + (s, n) =$

$(r+s, m+n)$ in $(r,m)(s,n) = (rs, rn+sm)$, označimo ga $R(+)M$. Idealizacije bomo uporabljali za konstrukcije primerov. V izreku 2.8 smo spoznali, da je v primeru, ko $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R,+)$, graf $T(R)$ povezan, če je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ povezan. Pokažimo s protiprimerom, da obratno v splošnem ne drži.

Primer 2.20. Naj bo $R = \mathbb{Q}[x](+)(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}[x])$, kjer je $\mathbb{Q}[x]$ kolobar polinomov nad $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(x)$ obseg ulomkov nad $\mathbb{Q}[x]$. Gledamo ju kot $\mathbb{Q}[x]$-modula z običajnim množenjem, torej je $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}[x]$ faktorski $\mathbb{Q}[x]$-modul vseh racionalnih funkcij, ki imajo v imenovalcu nekonstantni polinom. Pokažimo, da je $Z(R) = (\mathbb{Q}[x]\backslash\mathbb{Q}^*)(+)(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}[x])$. Označimo $S := (\mathbb{Q}[x]\backslash\mathbb{Q}^*)(+)(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}[x])$. Izberimo $(r,m) \in Z(R)$, velja $(r,m)(s,n) = (rs, rn+sm) = 0$ za neki neničelni $(s,n) \in R$. Kolobar $\mathbb{Q}[x]$ je celostno polje, zato mora biti vsaj en od elementov r in s enak 0. Če je $r = 0$, je $(r,s) \in S$. Sicer je $s = 0$ in velja $rn = 0$. Iz $n = \frac{a}{b} + \mathbb{Q}[x] \neq 0$ sledi $b \in \mathbb{Q}[x]\backslash\mathbb{Q}$. Ker velja $rn = 0$, je $r = bc$ za neki $c \in \mathbb{Q}[x]$, zato je $r \in \mathbb{Q}[x]\backslash\mathbb{Q}^*$ in je $(r,m) \in S$.
Obratno, naj bo $(r,m) \in S$, brez škode za splošnost r ni enak nič. Postavimo $s := 0$ in $n := \frac{a}{r} + \mathbb{Q}[x]$ za poljubni neničelni $a \in \mathbb{Q}[x]$. Sledi $(r,m)(s,n) = (0, rn) = (0, r(\frac{a}{r} + \mathbb{Q}[x])) = (0, a + \mathbb{Q}[x]) = 0$.
Množica $Z(R)$ očitno ni zaprta za seštevanje. Iz $(1,0) = -(x,0) + (x+1,0)$ sledi $(R,+) = \langle (x,0), (x+1,0) \rangle$. Elementa $(x,0)$ in $(x+1,0)$ sta po prejšnjem delitelja niča, zato je po izreku 2.14 graf $T(R)$ povezan z diametrom 2. Iz $\mathrm{Reg}(R) = R\backslash Z(R)$ sledi $\mathrm{Reg}(R) = \mathbb{Q}^*(+)(\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}[x])$. Graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ je očitno prazen z več kot enim vozliščem, zato ni povezan.

Naj bo R komutativni kolobar. Če je graf $T(R)$ povezan, po posledici 2.17 iz $\mathrm{diam}(T(R)) = n$ sledi $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R))) \geq n-2$. V primeru 2.20 smo imeli $\mathrm{diam}(T(R)) < \infty$ in $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R))) = \infty$. Naslednja primera pokažeta, da je lahko tudi $\mathrm{diam}(T(R)) = \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R)))$ ali $\mathrm{diam}(T(R)) > \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R)))$.

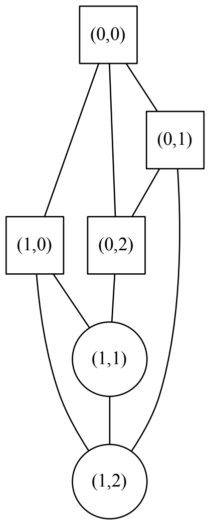
Primer 2.21.
(1) Naj bo $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$. Tedaj je po posledici 2.19 graf $T(R)$ povezan z diametrom 2. Naj bosta (x_1, y_1) in (x_2, y_2) poljubna regularna elementa kolobarja R. Element $(-x_1, -y_2)$ je očitno regularen in povezan z (x_1, y_1) in (x_2, y_2). Torej je $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R))) \leq 2$. Elementa $(1,1)$ in $(2,2)$ nista povezana, zato je $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R))) = 2 = \mathrm{diam}(T(R))$.
(2) Naj bo $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Tedaj je po posledici 2.19 graf $T(R)$ povezan z diametrom 2. Regularna elementa sta $(1,1)$ in $(1,2)$, ki sta povezana, zato je $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R))) = 1$ in $\mathrm{diam}(T(R)) > \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R)))$.

2.1. **Totalni graf kolobarja ulomkov.** Naj bo R komutativni kolobar in $S \subseteq R\backslash\{0\}$ *multiplikativna* množica, tj. množica, zaprta za množenje. Na množici $R \times S$ vpeljimo ekvivalenčno relacijo $(r,s) \sim (t,u) \iff \exists x \in S, x(ru - st) = 0$. Konstruirajmo množico ekvivalenčnih razredov $R \times S/_\sim$ in ekvivalenčni razred s predstavnikom (r,s) označimo $\frac{r}{s}$. Kolobar ulomkov kolobarja R glede na množico S je množica $R \times S/_\sim$ z operacijama:

$$\frac{r}{s} + \frac{t}{u} = \frac{ru + ts}{su},$$

$$\frac{r}{s}\frac{t}{u} = \frac{rt}{su},$$

SLIKA 3. $T(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$.



označimo ga $S^{-1}R$. Da je to res kolobar in ostale lastnosti kolobarjev ulomkov si lahko bralec ogleda v [9, str. 36]. Mi si bomo ogledali nekaj lastnosti totalnih grafov kolobarjev ulomkov.

Izrek 2.22. *Naj bo R komutativni kolobar in $Z(R) \not< (R,+)$. Potem je graf $T(\mathrm{Reg}(R)^{-1}R)$ povezan z diametrom 2.*

Dokaz. Ker $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R,+)$, obstajata taka elementa $z_1, z_2 \in Z(R)$, da je $s := z_1 + z_2 \in \mathrm{Reg}(R)$. Velja $z_1 z_1' = 0$ in $z_2 z_2' = 0$ za neka neničelna $z_1', z_2' \in R$. Sledi $\frac{z_1}{s}\frac{z_1'}{1} = \frac{0}{s} = 0$ in $\frac{z_2}{s}\frac{z_2'}{1} = \frac{0}{s} = 0$. Denimo, da je $\frac{z_1'}{1} = 0$. Potem velja $\frac{z_1'}{1} \sim \frac{0}{1}$, iz česar sledi $xz_1' = 0$ za neki regularni x, kar je protislovje. Enako vidimo, da je element $\frac{z_2'}{1}$ različen od nič, zato sta elementa $\frac{z_1}{s}$ in $\frac{z_2}{s}$ delitelja niča kolobarja $\mathrm{Reg}(R)^{-1}R$. Velja $\frac{z_1}{s} + \frac{z_2}{s} = 1$, zato je $\mathrm{Reg}(R)^{-1}R = (\frac{z_1}{s}, \frac{z_2}{s})$ in je po izreku 2.14 graf $T(\mathrm{Reg}(R)^{-1}R)$ povezan z diametrom 2. □

Izrek 2.23. *Naj bosta P_1 in P_2 taka praideala komutativnega kolobarja R, da velja $xy = 0$ za neka $x \in P_1 \backslash P_2$ in $y \in P_2 \backslash P_1$ in naj bo $S := R \backslash (P_1 \cup P_2)$. Tedaj je graf $T(S^{-1}R)$ povezan z diametrom 2.*

Dokaz. Iz $x \notin P_2$, $y \notin P_1$ in $s \notin P_1 \cup P_2$ sledi $sx \neq 0$ in $sy \neq 0$ za vsak $s \in S$. Torej sta elementa $\frac{x}{s}$ in $\frac{y}{s}$ delitelja niča kolobarja $S^{-1}R$ za vsak $s \in S$. Velja $x + y \in S$ in $S^{-1}R = (\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y})$, zato je po izreku 2.14 graf $T(S^{-1}R)$ povezan z diametrom 2. □

Oglejmo si primer komutativnega kolobarja R, za katerega noben od grafov $T(R)$ in $\mathrm{Reg}(T(R))$ ni povezan, a je graf $T(S^{-1}R)$ povezan za neko multiplikativno podmnožico S kolobarja R, $S \neq \mathrm{Reg}(R)$.

Primer 2.24. Naj bo $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]/(x_1x_2x_3)$. Potem je $P_i = (x_i)$ praideal kolobarja R za $i = 1, 2$, saj je kolobar $R/P_i = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]/(x_i)$ celostno polje. Naj bo $u = x_1$ in $v = x_2x_3$. Tedaj je $uv = 0$ in $u \in P_1 \backslash P_2$ in $v \in P_2 \backslash P_1$. Naj bo $S := R \backslash (P_1 \cup P_2)$. Po izreku 2.23 je graf $T(S^{-1}R)$ povezan z diametrom 2. Ker je

x_3 delitelj niča v kolobarju R in $x_3 \notin P_1 \cup P_2$, velja $S \neq \mathrm{Reg}(R)$. Očitno $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R,+)$ in velja $\langle Z(R)\rangle = (x_1, x_2, x_3) \subsetneq R$, zato po izreku 2.12 graf $T(R)$ ni povezan. Po izreku 2.8 sledi, da tudi graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ ni povezan.

Če je totalni graf komutativnega kolobarja povezan, po izreku 2.14 velja $2 \leq \mathrm{diam}(T(R)) < \infty$. V naslednjem primeru bomo za vsak $n \geq 2$ skonstruirali komutativni kolobar R_n, $Z(R_n) \not< (R_n,+)$, da bo graf $T(R_n)$ povezan z diametrom n.

Primer 2.25. Naj bo $n \geq 2$, $R := \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ kolobar polinomov nad $\mathbb{Z}$, $K := \mathbb{Z}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ obseg ulomkov nad R, $P_0 = (x_1 + \cdots + x_{n-1})$, $P_i = (x_i)$ za $i = 1, \ldots, n-2$ in $P_{n-1} = (x_{n-1} + 1)$. Potem so $P_0, \ldots, P_{n-1}$ različni praideali kolobarja R. Naj bo $F := \bigcup_{i=0}^{n-1} P_i$. Tedaj je $S := R \backslash F$ multiplikativna podmnožica kolobarja R. Definirajmo $R_n := R(+)(K/S^{-1}R)$, pri tem gledamo K in $S^{-1}R$ kot R-modula z običajnim množenjem, torej je $K/S^{-1}R$ faktorski R-modul vseh racionalnih funkcij, ki imajo v imenovalcu polinom iz F. Pokažimo, da je $Z(R_n) = F(+)(K/S^{-1}R)$. Postopamo podobno, kot v primeru 2.20. Izberimo $(r_1, m_1) \in Z(R_n)$, velja $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + r_2m_1) = 0$ za neki neničelni $(r_2, m_2) \in R_n$. Kolobar R je celostno polje, zato mora biti vsaj en od elementov r_1 in r_2 enak 0. Če je $r_1 = 0$, je $(r_1, m_1) \in F(+)(K/S^{-1}R)$. Sicer je $r_2 = 0$ in velja $r_1m_2 = 0$. Ker velja $m_2 \neq 0$, je $m_2 = \frac{a}{b} + S^{-1}R$ za neka $a \in R$ in $b \in F$. Iz pogoja $r_1m_2 = 0$ sledi $r_1 = bc$ za neki $c \in R$, zato velja $r_1 \in F$ in je $(r_1, m_1) \in F(+)(K/S^{-1}R)$.
Obratno, naj bo $(r_1, m_1) \in F(+)(K/S^{-1}R)$, brez škode za splošnost r_1 ni enak nič. Postavimo $r_2 := 0$ in $m_2 := \frac{a}{r_1} + S^{-1}R$ za poljubni tak $a \in R$, da velja $\frac{a}{r_1} \notin S^{-1}R$. Sledi $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (0, r_1m_2) = (0, r_1(\frac{a}{r_1} + S^{-1}R)) = (0, \frac{a}{1} + S^{-1}R) = 0$.
Velja $(1, 0) = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}, 0) + (x_1, 0) + (x_2, 0) + \cdots + (x_{n-1} + 1, 0)$, zato je $(R_n, +) = \langle (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}, 0), (x_1, 0), \ldots, (x_{n-1} + 1, 0)\rangle$. Iz konstrukcije je razvidno, da je n najmanše tako naravno število, da je aditivna grupa $(R_n, +)$ generirana z n delitelji niča, zato je po izreku 2.14 graf $T(R_n)$ povezan z diametrom n.

Naj bo R komutativni kolobar in M R-modul. Oglejmo si še nekaj lastnosti totalnega grafa idealizacije $R(+)M$. Najprej pokažimo, da vedno velja $Z(R)(+)M \subseteq Z(R(+)M)$. Naj bo $(z, m) \in Z(R)(+)M$, potem je $zz' = 0$ za neki neničelni $z' \in R$. Če obstaja tak $n \in M$ da velja $z'n \neq 0$, potem je $(z, m)(0, z'n) = 0$. Sicer za vsak $n \in M$ velja $z'n = 0$ in je $(z, m)(z', 0) = 0$, torej je $(z, m) \in Z(R(+)M)$.
S protiprimerom pokažimo, da obratna inkluzija v splošnem ne drži. Oglejmo si kolobar $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2$. Dokažimo, da velja $Z(\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2) = 2\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2$. Naj bo $(a, b) \in Z(\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2)$. Tedaj je $(a, b)(c, d) = (ac, ad + cb) = 0$ za neki neničelni $(c, d) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2$. Če je $a = 0$, je $(a, b) \in 2\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2$. Sicer je $c = 0$ in sledi $ad = 0$. Ker velja $d \neq 0$, sledi $a \in 2\mathbb{Z}$. Obratno, naj bo $(a, b) \in 2\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2$. Potem je $(a, b)(0, 1) = 0$, torej je (a, b) delitelj niča kolobarja $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_2$.

Definicija 2.26. Naj bo R komutativni kolobar in M R-modul. Element $m \in M$ je *torzijski*, če obstaja tak regularni element $r \in \mathrm{Reg}(R)$, da je $rm = 0$. Modul M je *brez torzije*, če je 0 njegov edini torzijski element.

Izrek 2.27. *Naj bo R komutativni kolobar in M R-modul. Modul M je brez torzije natanko tedaj, ko velja $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$.*

Dokaz. Naj bo modul M brez torzije. Pokazali smo že, da vedno velja $Z(R)(+)M \subseteq Z(R(+)M)$. Naj bo $(r_1, m_1) \in Z(R(+)M)$. Tedaj je $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + r_2m_1) = 0$ za neki neničelni element $(r_2, m_2) \in R(+)M$. Če je $r_2 \neq 0$, je $r_1 \in Z(R)$ in velja $(r_1, m_1) \in Z(R)(+)M$. Sicer je $m_2 \neq 0$ in $r_1m_2 = 0$. Ker je modul M brez torzije, je $r_1 \in Z(R)$ in je $(r_1, m_1) \in Z(R)(+)M$.
Obratno, naj velja $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$ in denimo, da je $rm = 0$ za neka $r \in \operatorname{Reg}(R)$ in $0 \neq m \in M$. Sledi $(r, 0)(0, m) = 0$, torej je $(r, 0) \in Z(R(+)M) = Z(R)(+)M$ oziroma $r \in Z(R)$, kar je protislovje. □

Za R-modul M brez torzije torej velja $Z(R(+)M) < (R(+)M, +)$ natanko tedaj, ko je $Z(R) < (R, +)$.

Izrek 2.28. *Naj bo R komutativni kolobar in naj bo M R-modul brez torzije. Graf $T(R(+)M)$ je povezan natanko tedaj, ko je graf $T(R)$ povezan. Velja* $\operatorname{diam}(T(R(+)M)) = \operatorname{diam}(T(R))$.

Dokaz. Naj bo graf $T(R(+)M)$ povezan in naj bosta x, y različna elementa kolobarja R. Tedaj obstaja pot $(x, 0)$—(s_1, t_1)—$\cdots$—(s_n, t_n)—$(y, 0)$ med elementoma $(x, 0)$ in $(y, 0)$ v grafu $T(R(+)M)$. Ker je modul M brez torzije, po izreku 2.27 velja $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$, zato je x—s_1—$\cdots$—s_n—y sprehod med elementoma x in y v grafu $T(R)$. Torej je graf $T(R)$ povezan in velja $\operatorname{diam}(T(R(+)M)) = d((0, 0), (1, 0)) \geq d(0, 1) = \operatorname{diam}(T(R))$.
Obratno, naj bo graf $T(R)$ povezan in naj bosta (x, a) in (y, b) različna elementa kolobarja $R(+)M$. Če je $x = y$, potem je (x, a)—$(-x, 0)$—(y, b) pot med (x, a) in (y, b) v grafu $T(R(+)M)$. Sicer obstaja pot x—s_1—$\cdots$—s_n—y v grafu $T(R)$. Iz $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$ sledi, da je (x, a)—$(s_1, 0)$—$\cdots$—$(s_n, 0)$—(y, b) pot med (x, a) in (y, b) v grafu $T(R(+)M)$, torej je graf $T(R(+)M)$ povezan in velja $\operatorname{diam}(T(R)) = d(0, 1) \geq d((0, 0), (1, 0)) = \operatorname{diam}(T(R(+)M))$. □

Oglejmo si primer komutativnega kolobarja R, kjer sta grafa $T(R)$ in $T(R(+)M)$ povezana in velja $\operatorname{diam}(T(R(+)M)) < \operatorname{diam}(T(R))$. Torej je predpostavka, da je modul M brez torzije, v izreku 2.28 potrebna.

Primer 2.29. Naj bo $R := R_3$ kolobar iz primera 2.25 in $M := \operatorname{Reg}(R)^{-1}R/R$. Velja $(R(+)M, +) = \langle((x_2, 0), 0), ((x_2 + 1, 0), 0)\rangle$, saj je $((1, 0), 0) = -((x_2, 0), 0) + ((x_2 + 1, 0), 0)$. Dokažimo, da sta elementa $((x_2, 0), 0)$ in $((x_2 + 1, 0), 0)$ delitelja niča kolobarja $R(+)M$. Po primeru 2.25 vemo, da je $(x_2 + 1, 0) \in Z(R)$, zato je $((x_2 + 1, 0), 0) \in Z(R)(+)M \subseteq Z(R(+)M)$. Element $(x_2, 0)$ pa ni delitelj niča kolobarja R, zato tu ne moremo sklepati enako. Velja $((x_2, 0), 0)((0, 0), \frac{a}{(x_2,0)} + R) = ((0, 0), (x_2, 0)(\frac{a}{(x_2,0)} + R)) = ((0, 0), a + R) = 0$, kjer je $a \in R$ poljubni tak element, da velja $\frac{a}{(x_2,0)} \notin R$. Zato je $((x_2, 0), 0) \in Z(R(+)M)$. Med drugim smo pokazali, da je v tem primeru inkluzija $Z(R)(+)M \subset Z(R(+)M)$ stroga in modul M ni brez torzije.
Po izreku 2.14 je $\operatorname{diam}(T(R(+)M)) = 2$. Po drugi strani je po primeru 2.25 $\operatorname{diam}(T(R)) = 3$, zato je $\operatorname{diam}(T(R(+)M)) < \operatorname{diam}(T(R))$.

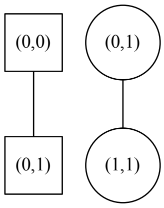
V nadaljevanju obravnavamo ožino grafa $T(R(+)M)$ in njegovih podgrafov $Z(T(R(+)M))$ in $\operatorname{Reg}(T(R(+)M))$.

Izrek 2.30. *Naj bo R komutativni kolobar in M neničelni R-modul. Potem velja:*

(1) $\operatorname{gr}(\operatorname{Reg}(T(R(+)M))) \in \{3, 4, \infty\}$.

(2) $\operatorname{gr}(Z(T((\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{Z}_2))) = \operatorname{gr}(T(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{Z}_2)) = \operatorname{gr}(\operatorname{Reg}(T(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{Z}_2))) = \infty$.

SLIKA 4. $T(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{Z}_2)$.



(3) *Če velja* $M \neq \mathbb{Z}_2$, *potem je* $\mathrm{gr}(Z(T(R(+)M))) = \mathrm{gr}(T(R(+)M)) = 3$ *in* $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)M))) \in \{3,4\}$.

(4) *Če velja* $R \neq \mathbb{Z}_2$, *potem je* $\mathrm{gr}(Z(T(R(+)\mathbb{Z}_2))) = \mathrm{gr}(T(R(+)\mathbb{Z}_2)) = 3$ *in* $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)\mathbb{Z}_2))) \in \{3,\infty\}$.

Dokaz. (1) To bomo dokazali v splošnejši obliki v poglavju o regularnem grafu.

(2) Ker je modul $\mathbb{Z}_2$ brez torzije, po izreku 2.27 velja $Z(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{Z}_2) = Z(\mathbb{Z}_2)(+)\mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1)\}$ in $\mathrm{Reg}(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{Z}_2) = \{(1,0),(1,1)\}$. Rezultat sledi.

(3) Naj bosta a in b različna neničelna elementa modula M. Vemo, da vedno velja $Z(R)(+)M \subseteq Z(R(+)M)$, zato je $(0,0)$—$(0,a)$—$(0,b)$—$(0,0)$ 3-cikel v grafu $Z(T(R(+)M))$ in je $\mathrm{gr}(Z(T(R(+)M))) = \mathrm{gr}(T(R(+)M)) = 3$. Iz $(\pm 1, m)(r,n) = 0$ sledi $r = 0$ in $n = 0$, zato so elementi oblike $(\pm 1, m)$ za $m \in M$ regularni. Če je karakteristika kolobarja R enaka 2, potem je $(1,0)$—$(1,a)$—$(1,b)$—$(1,0)$ 3-cikel grafa $\mathrm{Reg}(T(R(+)M))$, sicer je $(1,0)$—$(-1,0)$—$(1,a)$—$(-1,a)$—$(1,0)$ 4-cikel grafa $\mathrm{Reg}(T(R(+)M))$, torej je $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)M))) \in \{3,4\}$.

(4) Naj bo $I = \{i \in R, i1 = 0\}$ anihilator elementa 1, vemo, da je I ideal v kolobarju R. Velja $(i,n)(0,1) = 0$ za poljubni $i \in I$ in $n \in \mathbb{Z}_2$, zato je $I(+)\mathbb{Z}_2 \subseteq Z(R(+)\mathbb{Z}_2)$. Naj bo $f : R \to \mathbb{Z}_2$, $f(r) = r1$ homomorfizem R-modulov. Ta je očitno surjektiven z jedrom I, torej je $R/I \cong \mathbb{Z}_2$. Ker velja $R \neq \mathbb{Z}_2$, obstaja neničelni $r \in I$ in je $(0,0)$—$(r,0)$—$(0,1)$—$(0,0)$ 3-cikel grafa $Z(T(R(+)\mathbb{Z}_2))$, zato je $\mathrm{gr}(Z(T(R(+)\mathbb{Z}_2))) = \mathrm{gr}(T(R(+)\mathbb{Z}_2)) = 3$. Denimo, da graf $\mathrm{Reg}(T(R(+)\mathbb{Z}_2))$ vsebuje cikel C. Potem C vsebuje 3 različne elemente $x := (r_1,a), y := (r_2,b), z := (r_3,c) \in \mathrm{Reg}(R(+)\mathbb{Z}_2)$. Velja $r_1, r_2, r_3 \notin I$, zato je $r_1 + I = r_2 + I = r_3 + I = 1 + I$, iz česar sledi $r_1 + r_2, r_1 + r_3, r_2 + r_3 \in I$ in $x + y, x + z, y + z \in Z(R(+)\mathbb{Z}_2)$. Torej je x—y—z—x 3-cikel grafa $\mathrm{Reg}(T(R(+)\mathbb{Z}_2))$ in je $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)\mathbb{Z}_2))) = 3$. □

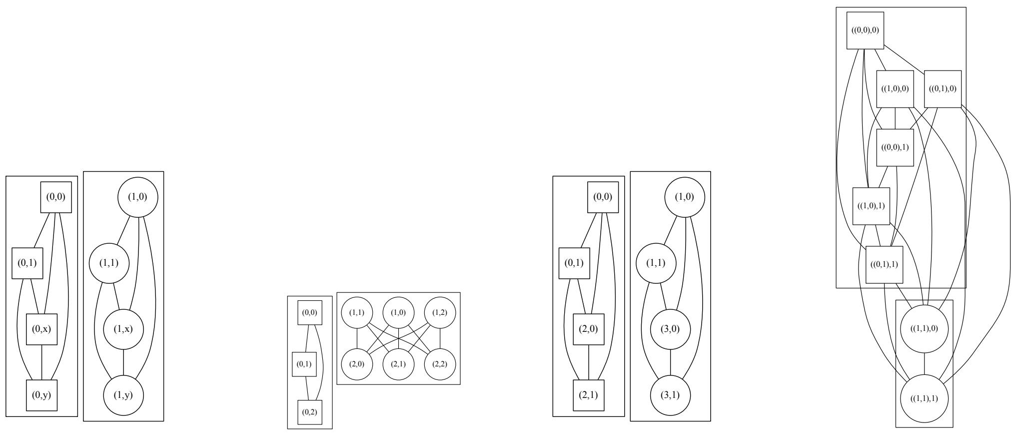
Vedno velja $Z(R)(+)M \subseteq Z(R(+)M)$, iz česar sledi $\mathrm{gr}(T(R(+)M)) \leq \mathrm{gr}(T(R))$, $\mathrm{gr}(Z(T(R(+)M))) \leq \mathrm{gr}(Z(T(R)))$ in $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)M))) \leq \mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R)))$. Neenakosti so lahko stroge, tudi če velja $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$, kot kažejo naslednji primeri.

Primer 2.31. Naj bo $R = M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Graf $T(R)$ je 4-cikel, zato je povezan. Modul M je brez torzije , zato po izreku 2.28 velja $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$. Po izreku 2.30 je $\mathrm{gr}(T(R(+)M)) = 3$, torej $\mathrm{gr}(T(R(+)M)) < \mathrm{gr}(T(R))$.

Primer 2.32. Izberimo $R = M = \mathbb{Z}_3$, M naj bo R-modul z običajnim množenjem. Modul M je brez torzije in velja $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = \mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R))) = \infty$, po izreku 2.30 pa je $\mathrm{gr}(Z(T(R(+)M))) = 3$ in $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)M))) \in \{3, 4\}$.

Primer 2.33. Če velja $M \neq \mathbb{Z}_2$, potem po izreku 2.30 velja $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)M))) \in \{3, 4\}$. Obe vrednosti sta mogoči. Oglejmo si na primer kolobarja $\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{F}_4$ in $\mathbb{Z}_3(+)\mathbb{Z}_3$, kjer je $\mathbb{F}_4$ obseg moči 4, modulska množenja so običajna. Modula $\mathbb{F}_4$ in $\mathbb{Z}_3$ sta brez torzije in velja $Z(\mathbb{Z}_2) < (\mathbb{Z}_2, +)$ ter $Z(\mathbb{Z}_3) < (\mathbb{Z}_3, +)$, zato so delitelji niča zaprti za seštevanje tudi v idealizacijah. Velja $2 \in Z(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{F}_4)$ in $2 \notin Z(\mathbb{Z}_3(+)\mathbb{Z}_3)$, zato po izreku 2.2 velja $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{F}_4))) = 3$ in $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(\mathbb{Z}_3(+)\mathbb{Z}_3))) = 4$.

Primer 2.34. Če $R \neq \mathbb{Z}_2$, potem po izreku 2.30 velja $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R(+)\mathbb{Z}_2))) \in \{3, \infty\}$. Obe vrednosti sta mogoči. Oglejmo si na primer kolobarja $\mathbb{Z}_4(+)\mathbb{Z}_2$ in $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)(+)\mathbb{Z}_2$ (modul $\mathbb{Z}_2$ gledamo kot modul $\mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ nad kolobarjem $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Hitro vidimo, da velja $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(\mathbb{Z}_4(+)\mathbb{Z}_2))) = 3$. Edina regularna elementa kolobarja $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)(+)\mathbb{Z}_2$ sta $((1, 1), 0)$ in $((1, 1), 1)$, zato je $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)(+)\mathbb{Z}_2))) = \infty$.



(a) $T(\mathbb{Z}_2(+)\mathbb{F}_4)$. (b) $T(\mathbb{Z}_3(+)\mathbb{Z}_3)$. (c) $T(\mathbb{Z}_4(+)\mathbb{Z}_2)$. (d) $T((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)(+)\mathbb{Z}_2)$.

Lema 2.35. *Naj bo R kolobar in $Z(R) \not< (R, +)$. Potem je karakteristika kolobarja R enaka 2 natanko tedaj, ko je $2Z(R) = 0$.*

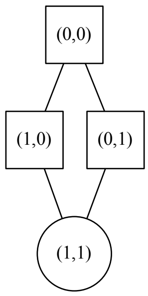
Dokaz. Če je karakterstika kolobarja R enaka 2, potem je očitno $2Z(R) = 0$. Obratno, naj bo $2z = 0$ za vsak $z \in Z(R)$. Ker delitelji niča niso zaprti za seštevanje, obstajata taka elementa $x, y \in Z(R)$, da je $x+y \in \mathrm{Reg}(R)$. Iz $2(x+y) = 2x+2y = 0$ sledi $2 = 0$, saj je element $x + y$ regularen. □

Izrek 2.36. *Naj ima kolobar R končno mnogo levih deliteljev niča in naj vsebuje vsaj en neničelni levi delitelj niča. Potem je R končen.*

Dokaz. Naj bo z neničelni levi delitelj niča kolobarja R in naj bo $A := \{x \in R, xz = 0\}$. Množica A je očitno podgrupa aditivne grupe $(R, +)$ in velja $A \subseteq Z_l(R)$, zato je A končna. Za poljubna elementa $r, s \in R$ očitno velja $r \equiv s (\mathrm{mod} A)$ natanko tedaj, ko je $rz = sz$. Torej obstaja bijekcija med odseki $r + A$ faktorske grupe $(R, +)/A$ in levimi delitelji niča oblike rz. Ker je levih deliteljev niča končno mnogo, je indeks podgrupe A v grupi $(R, +)$ končen, zato je tudi R končen. □

Opomba 2.37. Isto velja, če ima R končno mnogo desnih deliteljev niča.

SLIKA 5. $T(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.



Izrek 2.38. *Naj bo R komutativni kolobar in $Z(R) \not< (R,+)$.*

(1) $\mathrm{gr}(Z(T(R))) \in \{3, \infty\}$. *V primeru* $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = \infty$ *je* $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *in* $Z(T(R)) = K_{1,2}$.

(2) $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = 3$ *natanko tedaj, ko je* $\mathrm{gr}(T(R)) = 3$.

(3) $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = \infty$ *natanko tedaj, ko je* $\mathrm{gr}(T(R)) = 4$.

Dokaz. (1) Če je $x + y \in Z(R)$ za neka $x, y \in Z(R)$, potem je 0—x—y—0 3-cikel v grafu $Z(T(R))$, torej je $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = 3$. V nasprotnem primeru nobena neničelna delitelja niča nista povezana, vsak neničelni delitelj niča pa je očitno povezan z 0, torej je $Z(T(R)) = K_{1,|Z(R)|-1}$ in $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = \infty$. Naj bo $Z(R) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$, kjer so P_α praideali kolobarja R [7, str. 3, primer 2]. Velja $|\Lambda| \geq 2$, saj delitelji niča niso zaprti za seštevanje. Naj bo $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = \infty$. Potem je element $x + y$ regularen za vsaka neničelna delitelja niča x in y, zato je $|P_\alpha| = 2$ za vsak $\alpha \in \Lambda$. Torej je presek dveh poljubnih različnih idealov P_α enak 0. Denimo, da je $|\Lambda| \geq 3$ in naj bodo $P_\alpha = \{0, x\}, P_\beta = \{0, y\}, P_\gamma = \{0, z\}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, različni praideali. Tedaj velja $xy \in P_1 \cap P_2$ in $xz \in P_1 \cap P_3$, iz česar sledi $xy = xz = 0$ in $x(y+z) = 0$. Ker x ni enak 0, je $y+z$ delitelj niča, kar je protislovje s predpostavko. Zato je $|\Lambda| = 2$. Ugotovili smo, da je $Z(R) = P_1 \cup P_2$ za neka praideala P_1 in P_2, $P_1 \cap P_2 = 0$ in $|P_1| = |P_2| = 2$. Sledi $|Z(R)| = 3$ in po izreku 2.36 je R končen. Ker so v končnem kolobarju vsi regularni elementi obrnljivi, sta P_1 in P_2 edina praideala, po Kitajskem izreku o ostankih sledi $R \cong R/P_1 \times R/P_2$. Ker velja $|Z(R)| = 3$, je edina možnost $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ in velja $Z(T(R)) = K_{1,2}$.

(2) Če je $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = 3$ je očitno $\mathrm{gr}(T(R)) = 3$. Obratno, naj bo $\mathrm{gr}(T(R)) = 3$. Če je $2z \neq 0$ za neki $z \in Z(R)$, potem je 0—z—$(-z)$—0 3-cikel v grafu $Z(T(R))$. V nasprotnem primeru je $2z = 0$ za vsak $z \in Z(R)$ in po lemi 2.35 je karakteristika kolobarja R enaka 2. Naj bo a—b—c—a 3-cikel v grafu $T(R)$. Tedaj so elementi $z := a + b, w := a + c, b + c \in Z(R)$. Hkrati je $z + w = 2a + (b + c) = b + c \in Z(R)$, torej je 0—z—w—0 3-cikel v grafu $Z(T(R))$.

(3) Naj bo $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = \infty$. Potem je po (1) $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ in je $\mathrm{gr}(T(R)) = 4$. Obratno, naj bo $\mathrm{gr}(T(R)) = 4$. Potem po (1) in (2) sledi $\mathrm{gr}(Z(T(R))) = \infty$. □

2.2. **Eulerjevost, hamiltonskost in dominantno število totalnega grafa.** V tem razdelku se omejimo na končne kolobarje. Graf je *Eulerjev*, če vsebuje *Eulerjev cikel*, tj. cikel, ki vsebuje vse povezave grafa. Znan izrek iz teorije grafov pravi, da je graf Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa njegova vozlišča sode stopnje in vsa vozlišča z neničelno stopnjo ležijo v isti komponenti za povezanost. Če je kolobar R cel s karakteristiko 2, je po trditvi 2.7 graf $T(R)$ prazen, torej Eulerjev. Če je cel in nima karakteristike 2, potem ima vsaj 3 elemente in po posledici 2.3 ni Eulerjev.

Lema 2.39. *Naj bo R končni kolobar, ki ni cel. Naslednji pogoji so potrebni in zadostni, da je graf $T(R)$ Eulerjev:*

(1) $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R,+)$,

(2) $Z(R)$ je lihe moči,

(3) 2 je delitelj niča.

Dokaz. Naj bo $T(R)$ Eulerjev. Potem je po izreku 2.5 graf $T(R)$ $(Z(R)-1)$-regularen in $2 \in Z(R)$, torej sta izpolnjena drugi in tretji pogoj. Ker R ni cel, imajo vsa vozlišča stopnjo vsaj 1. Če je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R,+)$, potem sta po izreku 2.1 podgrafa $Z(T(R))$ in $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna, torej vsa vozlišča z neničelno stopnjo ne ležijo v isti komponenti za povezanost in $T(R)$ ni Eulerjev. Ugotovili smo, da so ti pogoji potrebni, da je graf $T(R)$ Eulerjev.
Naj veljajo pogoji iz leme. Po izreku 2.5 iz pogojev (2) in (3) sledi, da imajo vsa vozlišča grafa $T(R)$ sodo stopnjo, po posledici 2.16 pa iz pogoja (1) sledi, da je $T(R)$ povezan, torej je graf $T(R)$ Eulerjev. □

Opomba 2.40. Če držita pogoja (1) in (2) iz prejšnje leme, je pogoj (3) ekvivalenten pogoju, da ima kolobar R karakteristiko 2. Če je namreč 2 delitelj niča, je po lemi 2.6 R sode moči. Ker je po predpostavki $Z(R)$ lihe moči, je tudi R^* lihe moči, saj je $|R^*| = |R| - |Z(R)|$. Zato obstaja tak $x \in R^*$, da je $x = -x$. Sledi $1 = xx^{-1} = -xx^{-1} = -1$ oziroma $2 = 0$.

Izrek 2.41. *Naj bo R končni komutativni kolobar, ki ni celostno polje. Graf $T(R)$ je Eulerjev natanko tedaj, ko je R izomorfen direktemu produktu dveh ali več končnih obsegov sode moči, tj. $R \cong \Pi_{i=1}^n \mathbb{F}_{2^{t_i}}$, za neki $n \geq 2$ in neka naravna števila $t_1, \ldots, t_n$.*

Dokaz. Naj bo $R \cong \Pi_{i=1}^n \mathbb{F}_{2^{t_i}}$ za $n \geq 2$. Pogoja (1) in (3) iz leme 2.39 sta očitno izpolnjena. Izračunajmo moč množice $Z(R)$. Element $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Pi_{i=1}^n \mathbb{F}_{2^{t_i}}$ je regularen natanko tedaj, ko so vse njegove komponente različne od 0, torej je regularnih elementov liho mnogo. Ker je R sode moči, je tudi deliteljev niča liho mnogo in je izpolnjena tudi točka (2) iz leme 2.39.
Predpostavimo sedaj, da je graf $T(R)$ Eulerjev. Po strukturnem izreku za komutativne artinske kolobarje velja $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$, kjer so R_i lokalni kolobarji in n neko naravno število. Po lemi 2.39 $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R,+)$, zato po posledici 2.11 kolobar R ni lokalen in velja $n \geq 2$. Točka (3) iz leme 2.39 je po opombi 2.40 ekvivalentna temu, da je $2 = 0$ v kolobarju R, kar pomeni $2_{R_i} = 0$ za vsak i, torej so vsi kolobarji R_i sodih moči. Če je $|Z(R_i)| \geq 2$ za neki i, potem je $Z(R_i)$ sode moči, saj je po posledici 2.11 $Z(R_i)$ podgrupa aditivne grupe $(R_i,+)$, zato je tudi R_i^* sode moči. Iz $|R^*| = |R_1^*| \cdots |R_n^*|$ sledi, da je R^* sode moči in je zato tudi $Z(R)$ sode moči, to pa je protislovje z lemo 2.39. Zato je $|Z(R_i)| = 1$ za vsak $i = 1, \ldots, n$ in velja $R \cong \Pi_{i=1}^n \mathbb{F}_{2^{t_i}}$ za neka naravna števila $t_1, \ldots, t_n$. □

Graf G je *hamiltonski*, če vsebuje hamiltonski cikel, tj. cikel, ki gre skozi vsako točko grafa. Obravnavajmo hamiltonskost totalnega grafa končnega kolobarja R. Če je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R,+)$, graf $T(R)$ očitno ni hamiltonski, saj po izreku 2.1 ni povezan. Pokazali bomo, da v nasprotnem primeru graf $T(R)$ končnega kolobarja R *je* hamiltonski.

Lema 2.42. *Naj bo R končni kolobar in $J := J(R)$ njegov Jacobsonov radikal. Velja $x \in Z(R)$ natanko tedaj, ko je $x + J \in Z(R/J)$.*

Dokaz. Naj bo $x \in Z(R)$ in denimo, da je element $x + J$ obrnljiv. Tedaj obstaja tak $y \in R$, da velja $(x+J)(y+J) = 1 + J$ oziroma $xy \in 1 + J$. Po izreku 1.15 sledi, da je element xy obrnljiv, kar je protislovje, saj je x delitelj niča. Ker so v končnem kolobarju vsi regularni elementi obrnljivi, je element $x + J$ delitelj niča.
Obratno, naj bo $x + J \in Z(R/J)$. Torej je $(x + J)(w + J) = J$ za neki $w \in R\backslash J$ in velja $xw \in J$. Denimo, da je element x obrnljiv. Tedaj je $yx = 1$ za neki $y \in R$. Sledi $yxw = w \in J$, kar je protislovje. □

Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k, l \leq n$ in $\mathbb{F}$ poljubni obseg. Definirajmo indeksni množici

$$\mathcal{I}_{k,l} := \{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2; i = k \text{ in } j < l, \text{ ali } i < k\}$$

in

$$\overline{\mathcal{I}_{k,l}} := \mathcal{I}_{k,l} \cup \{(k,l)\}.$$

Definirajmo množice matrik, ki ustrezajo tem indeksnim množicam,

$$\mathcal{A}_{k,l} := \{[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F}), a_{ij} = 0, \text{če } (i,j) \notin \mathcal{I}_{k,l}\}$$

in

$$\overline{\mathcal{A}_{k,l}} := \{[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F}), a_{ij} = 0, \text{če } (i,j) \notin \overline{\mathcal{I}_{k,l}}\}.$$

Velja $\{0\} = \mathcal{A}_{1,1} \subseteq \overline{\mathcal{A}_{1,1}} = \mathcal{A}_{1,2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_{n,n} \subseteq \overline{\mathcal{A}_{n,n}} = M_n(\mathbb{F})$. Za poljubni $c \in \mathbb{F}$ definirajmo še

$$\mathcal{C}_{k,l}(c) := \{[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F}), a_{ij} = c, \text{če } (i,j) \in \mathcal{I}_{k,l}\}$$

in

$$\overline{\mathcal{C}_{k,l}(c)} := \{[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F}), a_{ij} = c, \text{če } (i,j) \in \overline{\mathcal{I}_{k,l}}\}.$$

Lema 2.43. *Naj bo $n \geq 2$, $1 \leq k, l \leq n$ in $R = M_n(\mathbb{F})$, kjer je $\mathbb{F}$ končni obseg s karakteristiko 2. Če obstaja hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\mathcal{A}_{k,l}$ z začetnim vozliščem 0, potem obstaja hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\overline{\mathcal{A}_{k,l}}$ z začetnim vozliščem 0.*

Dokaz. Naj bo $\mathbb{F} = \{0, x_1, \ldots, x_m\}$ in naj bo $0 — M_1 — \cdots — M_t$ hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\mathcal{A}_{k,l}$. Očitno je matrika xE_{ij} delitelj niča za poljubni $x \in \mathbb{F}$ in $1 \leq i, j \leq n$, kjer je E_{ij} matrika z 1 na ij-tem mestu in z ničlami drugod. Ker je obseg $\mathbb{F}$ sode moči, je

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & — & M_1 & — & \cdots & — & M_t \\
 & & & & & & | \\
x_1E_{kl} & — & M_1 + x_1E_{kl} & — & \cdots & — & M_t + x_1E_{kl} \\
| & & & & & & \\
x_2E_{kl} & — & M_1 + x_2E_{kl} & — & \cdots & — & M_t + x_2E_{kl} \\
 & & & & & & | \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & | \\
x_mE_{kl} & — & M_1 + x_mE_{kl} & — & \cdots & — & M_t + x_mE_{kl}
\end{array}
$$

hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\overline{\mathcal{A}_{k,l}}$ z začetnim vozliščem 0. $\square$

Lema 2.44. *Naj bo $n \geq 2$, $1 \leq k, l \leq n$ in $R = M_n(\mathbb{F})$, kjer je $\mathbb{F}$ končni obseg s karakteristiko različno od 2. Če obstaja hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\mathcal{A}_{k,l}$ z začetnim vozliščem 0 in končnim vozliščem v množici $\mathcal{C}_{k,l}(c)$ za neki $c \in \mathbb{F}^*$, potem obstaja hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\overline{\mathcal{A}_{k,l}}$ z začetnim vozliščem 0 in končnim vozliščem v množici $\overline{\mathcal{C}_{k,l}(d)}$ za neki $d \in \mathbb{F}^*$.*

Dokaz. Naj bo $0—M_1—\cdots—M_t$ hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\mathcal{A}_{k,l}$ in $M_t \in \mathcal{C}_{k,l}(c)$. Ker ima $\mathbb{F}$ karakteristiko različno od 2, lahko pišemo $\mathbb{F} = \{0, x_1, -x_1, \ldots, x_m, -x_m\}$, kjer je $x_m = (-1)^{m+1}c$. Množica $\mathcal{A}_{k,l}$ je lihe moči, saj je $\mathbb{F}$ lihe moči, zato je

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & — & M_1 & — & M_2 & — & \cdots & — & M_t \\
 & & & & & & & & | \\
x_1E_{kl} & — & -M_1 - x_1E_{kl} & — & -M_2 + x_1E_{kl} & — & \cdots & — & -M_t + x_1E_{kl} \\
| & & & & & & & & \\
-x_1E_{kl} & — & -M_1 + x_1E_{kl} & — & -M_2 - x_1E_{kl} & — & \cdots & — & -M_t - x_1E_{kl} \\
 & & & & & & & & | \\
x_2E_{kl} & — & M_1 - x_2E_{kl} & — & M_2 + x_2E_{kl} & — & \cdots & — & M_t + x_2E_{kl} \\
| & & & & & & & & \\
-x_2E_{kl} & — & M_1 + x_2E_{kl} & — & M_2 - x_2E_{kl} & — & \cdots & — & M_t - x_2E_{kl} \\
 & & & & & & & & | \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
| & & & & & & & & \\
-x_mE_{kl} & — & (-1)^m M_1 + x_mE_{kl} & — & (-1)^m M_2 - x_mE_{kl} & — & \cdots & — & (-1)^m M_t - x_mE_{kl}
\end{array}
$$

hamiltonska pot v podgrafu grafa $T(R)$ induciranim z množico $\overline{\mathcal{A}_{k,l}}$ z začetnim vozliščem 0 in končnim vozliščem $(-1)^m M_t - x_mE_{kl}$. Ker je M_t po predpostavki iz $\mathcal{C}_{k,l}(c)$, velja $(-1)^m M_t - x_mE_{kl} = (-1)^m(M_t + cE_{kl}) \in \overline{\mathcal{C}_{k,l}(d)}$, kjer je $d = (-1)^m c$. $\square$

Lema 2.45. *Naj bo $n \geq 2$ in $R = M_n(\mathbb{F})$, kjer je $\mathbb{F}$ končni obseg. Potem je graf $T(R)$ hamiltonski.*

Dokaz. Velja $\overline{\mathcal{A}_{k,l}} = \mathcal{A}_{k,l+1}$ za $l < n$ in $\overline{\mathcal{A}_{k,n}} = \mathcal{A}_{k+1,1}$ za $k < n$, ter $\overline{\mathcal{C}_{k,l}(d)} = \mathcal{C}_{k,l+1}(d)$ za $l < n$ in $\overline{\mathcal{C}_{k,n}(d)} = \mathcal{C}_{k+1,1}(d)$ za $k < n$ in za poljubni $d \in \mathbb{F}^*$. Glede na karakteristiko obsega $\mathbb{F}$ s pomočjo leme 2.43 oziroma leme 2.44 po korakih skonstruiramo hamiltonsko pot v grafu $T(R)$ z začetkom v vozlišču 0. V obeh primerih začnemo z množico $\mathcal{A}_{1,1} = \{0\}$ hamiltonska pot je trivialna, vsebuje le matriko 0. Če ima $\mathbb{F}$ karakteristiko 2, je končno vozlišče skonstruirane poti enako $xE_{n,n}$ za neki $x \in \mathbb{F}$. Ta matrika je delitelj niča, zato je povezana z 0, torej je naša hamiltonska pot v bistvu hamiltonski cikel. Če pa ima $\mathbb{F}$ karakteristiko različno od 2, potem pa je zadnje vozlišče dobljene poti iz množice $\overline{\mathcal{C}_{n,n}(d)}$ za neki $d \in F^*$, torej matrika s samimi d-ji. Ta je neobrnljiva, torej delitelj niča, zato je tudi v tem primeru zadnje vozlišče dobljene hamiltonske poti povezano z vozliščem 0 in je ta v bistvu hamiltonski cikel. □

Lema 2.46. *Naj bosta R in S končna kolobarja. Potem je graf $T(R \times S)$ hamiltonski.*

Dokaz. Naj bo $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ in $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Denimo da je karakteristika kolobarja S enaka 2. Potem je n sodo število in je

$$(r_1, s_1)—(r_2, s_1)—\cdots—(r_m, s_1)—(-r_m, s_2)—\cdots—(-r_1, s_2)—\cdots—(-r_1, s_n)—(r_1, s_1)$$

hamiltonski cikel. Podobno sklepamo, če je karakertika kolobarja R enaka 2.
Denimo sedaj, da imata kolobarja R in S karakteristiko različno od 2. Preuredimo elemente kolobarja R tako, da velja $r_m = -r_1$ in elemente kolobarja S tako, da je $S = \{s_1, -s_1, \ldots, s_t, -s_t, s_{t+1}, \ldots, s_n\}$, kjer je $2s_i = 0$ za $t + 1 \leq i \leq n$. Za $i = 1, \ldots, \lceil \frac{t}{2} \rceil$ graf $T(R \times S)$ vsebuje pot

$$(r_1, s_{2i-1})—(r_1, -s_{2i-1})—(r_2, s_{2i-1})—(r_2, -s_{2i-1})—\cdots—(r_m, s_{2i-1})—(r_m, -s_{2i-1})$$

in za $i = 1, \ldots, \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ vsebuje pot

$$(-r_m, s_{2i})—(-r_m, -s_{2i})—(-r_{m-1}, s_{2i})—(-r_{m-1}, -s_{2i})—\cdots—(-r_1, s_{2i})—(-r_1, -s_{2i}).$$

Ker je S lihe moči, graf $T(R \times S)$ vsebuje tudi pot

$$(r_1, s_{t+1})—(r_2, s_{t+1})—\cdots—(r_m, s_{t+1})—(-r_m, s_{t+2})—\cdots—(-r_1, s_{t+2})—\cdots—(r_m, s_n).$$

Te poti lahko združimo v hamiltonski cikel

$$(r_1, s_1)—(r_1, -s_1)—(r_2, s_1)—\cdots—(r_m, -s_1)—(-r_m, s_2)—\cdots—(r_m, s_n)—(r_1, s_1).$$

□

Lema 2.47. *Naj bo R končni kolobar in $J := J(R)$ njegov Jacobsonov radikal. Če je graf $T(R/J)$ hamiltonski, potem je tudi graf $T(R)$ hamiltonski.*

Dokaz. Če je $x \in J$ in $z \in Z(R)$, potem je $x + z \in Z(R)$, saj v nasprotnem primeru iz $x + z = u \in R^*$ sledi $z = u - x = u(1 - u^{-1}x) \in R^*(1 + J) \subseteq R^*$, kar je protislovje. Naj bo $x_1 + J—x_2 + J—\cdots—x_m + J$ hamiltonski cikel v grafu $T(R/J)$. Iz $x_i + x_{i+1} + J \in Z(R/J)$ po lemi 2.42 sledi $x_i + x_{i+1} \in Z(R)$, torej je po prejšnjem razmisleku $x_i + x_{i+1} + j + j' \in Z(R)$ za vsak $i = 1, \ldots, m - 1$ in vsaka $j, j' \in J$. Enako sklepamo, da velja $x_m + x_1 + j + j' \in Z(R)$ za vsaka $j, j' \in J$. Naj bo $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$. Potem je

$$x_1 + j_1—\cdots—x_m + j_1—x_1 + j_2—\cdots—x_m + j_2—\cdots—x_1 + j_k—\cdots—x_m + j_k—x_1 + j_1$$

hamiltonski cikel v grafu $T(R)$. □

Izrek 2.48. *Naj bo R končni kolobar. Graf $T(R)$ je hamiltonski natanko tedaj, ko $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$.*

Dokaz. Če je $Z(R) < (R, +)$, potem po izreku 2.1 graf $T(R)$ ni povezan in zato ni hamiltonski. Naj bo $Z(R) \not< (R, +)$. Po izreku 1.16 je kolobar R/J polenostaven in zato po Artin-Wedderburnovem izreku velja $R/J \cong M_{n_1}(\mathbb{F}_1) \times \ldots \times M_{n_r}(\mathbb{F}_r)$, kjer so $M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ kolobarji matrik nad nekimi obsegi $\mathbb{F}_i$ za neka naravna števila n_i. Ker $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, po lemi 2.42 $Z(R/J)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R/J, +)$, zato je $r \geq 2$ *ali* $r = 1$ in $n_1 \geq 2$. V prvem primeru je graf $T(R/J)$ hamiltonski po lemi 2.46, v drugem primeru pa po lemi 2.45. Zato je po lemi 2.47 tudi graf $T(R)$ hamiltonski. □

Dominantna množica grafa $G = (V(G), E(G))$ je taka podmnožica $D \subseteq V(G)$, da je vsako vozlišče iz $V(G)\backslash D$ povezano z vsaj enim vozliščem iz D. *Dominantno število* $\gamma(G)$ je moč najmanjše dominantne množice grafa G. Obravnavajmo še dominantno število totalnega grafa končnega kolobarja R, najprej za primer, ko je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$.

Trditev 2.49. *Naj bo R končni kolobar in $Z(R) < (R, +)$. Velja $\gamma(T(R)) = |R/Z(R)|$, razen, če je kolobar R cel in $2 \notin Z(R)$, tedaj velja $\gamma(T(R)) = \frac{|R/Z(R)|-1}{2} + 1$.*

Dokaz. Če je $2 \in Z(R)$, je po posledici 2.3 graf $T(R)$ disjunktna unija $|R/Z(R)|$ polnih grafov $K_{|Z(R)|}$. Vsaka najmanjša dominantna množica vsebuje eno vozlišče iz vsake kopije $K_{|Z(R)|}$, zato je $\gamma(T(R)) = |R/Z(R)|$.
Če $2 \notin Z(R)$, potem je graf $T(R)$ disjunktna unija polnega grafa $K_{|Z(R)|}$ in $(|R/Z(R)| - 1)/2$ polnih dvodelnih grafov $K_{|Z(R)|,|Z(R)|}$. V primeru $|Z(R)| = 1$ vsaka najmanjša dominantna množica vsebuje vozlišče 0 in eno vozlišče iz vsake kopije $K_{|Z(R)|,|Z(R)|}$, zato je $\gamma(T(R)) = \frac{|R/Z(R)|-1}{2} + 1$. Če $|Z(R)| \neq 1$, pa vsaka najmanjša dominantna množica vsebuje poljubno vozlišče iz podgrafa $Z(T(R))$, ter dve vozlišči iz vsake kopije $K_{|Z(R)|,|Z(R)|}$, iz vsake delne množice dvodelnega grafa po eno vozlišče. Torej je $\gamma(T(R)) = 2\frac{|R/Z(R)|-1}{2} + 1 = |R/Z(R)|$. $\square$

Sedaj predpostavimo, da $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, in sicer obravnavamo posebej komutativni in nekomutativni primer. Za končni komutativni kolobar velja $R = \Pi_{i=1}^{n} R_i$, kjer so (R_i, M_i) lokalni kolobarji. Naj bodo $\pi_i \colon R_i \to R_i/M_i$ kanonični homomorfizmi in označimo $f_i := \frac{|R_i|}{|M_i|}$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $f_1 \leq \cdots \leq f_n$.

Izrek 2.50. *Naj bo R končni komutativni kolobar in $Z(R) \not< (R, +)$. Tedaj velja $\gamma(T(R)) = f_1$.*

Dokaz. Ker velja $Z(R) \not< (R, +)$, kolobar R ni lokalen. Velja $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$ za neke lokalne kolobarje R_i in neko naravno število $n \geq 2$. Izberimo take elemente $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni}) \in R$ za $i = 1, \ldots, f_1$, da velja $\pi_1(x_{1i}) \neq \pi_1(x_{1i'})$ za $i \neq i'$. Definirajmo množico $S := \{x_i; i = 1, \ldots, f_1\}$ in dokažimo, da dominira graf $T(R)$. Naj bo $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R$ poljuben. Potem obstaja tak i, da je $\pi_1(x_{1i}) = -\pi_1(y_1)$. Sledi $\pi_1(x_{1i}+y_1) = 0$, kar pomeni $x_{1i}+y_1 \in Z(R_i)$, torej sta elementa x_i in y povezana v grafu $T(R)$. Zato S dominira $T(R)$ in je $\gamma(T(R)) \leq |S| = f_1$.
Dokazati moramo še, da je vsaka dominantna množica moči vsaj f_1. Naj bo $A := \{a_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \in R; i = 1, \ldots, t, t < f_1\}$ in dokažimo, da A ne dominira grafa $T(R)$. Ker je $t < f_1 \leq f_j$ za $j = 1, \ldots, n$, za vsak j obstaja $b_j \in R_j$, da velja $\pi_j(b_j) \neq -\pi_j(a_{ji})$ za vsak $i = 1, \ldots, t$. Naj bo $b := (b_1, \ldots, b_n)$. Potem velja $b + a_i \notin Z(R)$ za vsak $i = 1, \ldots, t$, kar pomeni, da vozlišče b nima soseda v množici A in A ni dominantna množica grafa $T(R)$. $\square$

Sedaj si oglejmo še nekomutativni primer. Našli bomo zgornjo mejo za dominantno število poljubnega končnega kolobarja. Še prej potrebujemo naslednji lemi.

Lema 2.51. *Naj bo $\mathbb{F}$ končni obseg. Potem množica*

$$\mathcal{D} = \{xE_{1j}; x \in \mathbb{F}^*, 1 \leq j \leq n\} \cup \{0\}$$

dominira graf $T(M_n(\mathbb{F}))$.

Dokaz. Če je $n = 1$, potem $\mathcal{D} \cong \mathbb{F}$ očitno dominira graf $T(\mathbb{F})$. Naj bo $n \geq 2$. Izberimo $A \in M_n(\mathbb{F})$ in označimo $A(1, j)$ podmatriko matrike A, ki jo dobimo, če matriki A odstranimo prvo vrstico in j-ti stolpec. Če je matrika A delitelj niča, je povezana z matriko 0 v grafu $T(M_n(\mathbb{F}))$. Sicer je A obrnljiva in ima determinanto različno od nič, zato obstaja tak j, $1 \leq j \leq n$, da je tudi determinanta matrike $A(1, j)$ različna od nič. Ker za vsak $x \in \mathbb{F}$ velja $\det(A + xE_{1j}) = \det(A) + x \det(A(1, j))$, lahko postavimo $x := -\det(A(1, j)^{-1}) \det(A)$ in sledi $\det(A + xE_{1j}) = 0$, torej je matrika A povezana z matriko xE_{1j} v grafu $T(M_n(\mathbb{F}))$. □

Lema 2.52. *Naj bo $J := J(R)$ Jacobsonov radikal kolobarja R in naj bodo $a_i \in R$ taki elementi, da velja $a_i + J \in Z(R/J)$ za $i = 1, \ldots, n$. Množica $\{a_1, \ldots, a_n\}$ dominira graf $T(R)$ natanko tedaj, ko množica $\{a_1 + J, \ldots, a_n + J\}$ dominira graf $T(R/J)$.*

Dokaz. Označimo $\mathcal{D} := \{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathcal{D}' := \{a_1 + J, \ldots, a_n + J\}$. Naj množica $\mathcal{D}$ dominira graf $T(R)$ in naj bo $b + J \notin \mathcal{D}'$. Tedaj $b \notin \mathcal{D}$, zato velja $b + a_i \in Z(R)$ za neki i in po lemi 2.42 je $(b + J) + (a_i + J) \in Z(R/J)$. Zato množica $\mathcal{D}'$ dominira graf $T(R/J)$.
Denimo sedaj, da množica $\mathcal{D}'$ dominira graf $T(R/J)$ in naj bo $b \in R \backslash \mathcal{D}$. Denimo, da velja $b \notin \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + J)$. Tedaj $b + J \notin \mathcal{D}'$, zato obstaja tak $i \in \{1, \ldots, n\}$, da je $(b + J) + (a_i + J) \in Z(R/J)$ in po lemi 2.42 sledi $b + a_i \in Z(R)$. Obravnavati moramo še primer, ko je $b + J = a_i + J$ za neki $i \in \{a_1, \ldots, a_n\}$. Tedaj velja $(b + J) + (a_i + J) = 2(a_i + J) \in Z(R/J)$ in po trditvi 2.42 sledi $b + a_i \in Z(R)$, zato množica $\mathcal{D}$ dominira graf $T(R)$. □

Izrek 2.53. *Naj bo R končni kolobar, $J := J(R)$ njegov Jacobsonov radikal, $Z(R) \not< (R, +)$ in naj velja $R/J \cong M_{n_1}(\mathbb{F}_1) \times \cdots \times M_{n_k}(\mathbb{F}_k)$ za neka naravna števila $k, n_1, \ldots, n_k$ in neke končne obsege $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_k$. Potem je*

$$\gamma(T(R)) \leq \min_i \{n_i(|\mathbb{F}_i| - 1) + 1\}.$$

Dokaz. Naj bo $m \in \{1, \ldots, k\}$ tisti indeks, pri katerem je dosežen miminum $\min_i\{n_i(|\mathbb{F}_i| - 1) + 1\}$. Množica $\mathcal{D} := \{xE_{1j}; x \in \mathbb{F}_m^*, 1 \leq j \leq n_m\} \cup \{0\}$ po lemi 2.51 dominira graf $T(M_{n_m}(\mathbb{F}_m))$, velja $|\mathcal{D}| = n_m(|\mathbb{F}_m| - 1) + 1$. Definirajmo množico

$$\mathcal{D}' := \{(0, \ldots, 0, \underset{\uparrow m}{A}, 0, \ldots, 0); A \in \mathcal{D}\}$$

in pokažimo, da dominira graf $T(R/J)$. Če je $n_m = 1$, potem je $\mathcal{D} \cong \mathbb{F}_m$. Torej je v tem primeru poljubni element $(A_1, \ldots, A_{m-1}, f, A_{m+1}, \ldots, A_k) \in R/J, A_i \in M_{n_i}, f \in \mathbb{F}_m$, povezan z elementom $(0, \ldots, 0, -f, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{D}'$. Naj bo sedaj $n_m \geq 2$ in $(A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_k) \in R/J, A_i \in M_{n_i}$, poljubni element. Če velja $A_m \notin \mathcal{D}$, potem obstaja taka matrika $A \in \mathcal{D}$, da je $A_m + A \in Z(M_{n_m}(\mathbb{F}_m))$, zato je $(A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_k)$ povezan z $(0, \ldots, 0, A, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{D}'$. Denimo sedaj, da je $A_m \in \mathcal{D}$. Ker je $n_m \geq 2$, so elementi iz $\mathcal{D}$ delitelji niča, zato velja $2A_m \in Z(M_{n_m}(\mathbb{F}_m))$. Torej je element $(A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_k)$ povezan z $(0, \ldots, 0, A_m, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{D}'$.
Pokažimo, da množico $\mathcal{D}'$ sestavljajo delitelji niča. Če je $k \geq 2$, je očitno $\mathcal{D}' \subseteq Z(R/J)$. V primeru $k = 1$ pa je $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. Ker $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, velja $n_1 \geq 2$, zato množico sestavljajo delitelji niča.
Pišimo $\mathcal{D}' = \{M_1, \ldots, M_{n_m(|\mathbb{F}_m|-1)+1}\}$ in izberimo take elemente $r_i \in R$ za $i = 1, \ldots, n_m(|\mathbb{F}_m| - 1) + 1$, za katere velja $\pi(r_i) = M_i$, kjer je $\pi \colon R \to R/J$ naravni

surmorfizem. Po lemi 2.52 množica $\{r_1, \ldots, r_{n_m(|\mathbb{F}_m|-1)+1}\}$ dominira graf $T(R)$, zato velja $\gamma(T(R)) \leq n_m(|\mathbb{F}_m| - 1) + 1 = \min_i\{n_i(|\mathbb{F}_i| - 1) + 1\}$. $\square$

3. Regularni graf

3.1. Nekomutativni kolobarji. Še enkrat zapišimo izrek, ki smo ga dokazali že v prvem poglavju.

Izrek 2.2. *Naj bo R kolobar in $Z(R) < (R, +)$.*

(1) Če velja $2 \in Z(R)$, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija polnih grafov. Če je R končen, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija $|R/Z(R)| - 1$ polnih grafov $K_{|Z(R)|}$.

(2) Če velja $2 \notin Z(R)$, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija polnih dvodelnih grafov. Če je R končen, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija $(|R/Z(R)| - 1)/2$ polnih dvodelnih grafov $K_{|Z(R)|,|Z(R)|}$.

Različnim kolobarjem seveda ne pripadajo nujno različni regularni grafi, naprimer kolobarja $\mathbb{Z}_3$ in $\mathbb{Z}_4$ imata enak regularni graf K_2. V primeru, ko je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, lahko s pomočjo prejšnjega izreka sklepamo, kdaj je regularni graf poln, povezan ali prazen.

Izrek 3.1. *Naj bo R kolobar in $Z(R) < (R, +)$.*

(1) Graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ je poln natanko tedaj, ko je bodisi $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ bodisi $R \cong \mathbb{Z}_3$.

(2) Graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ je povezan natanko tedaj, ko je bodisi $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ bodisi $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$.

(3) Graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ je prazen natanko tedaj, ko je R cel s karakteristiko 2.

Dokaz. (1) Po izreku 2.2 je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln natanko tedaj, ko je enak bodisi $K_{|Z(R)|}$, če je $2 \in Z(R)$, bodisi $K_{1,1}$, če je $2 \notin Z(R)$. V prvem primeru je $|R/Z(R)| - 1 = 1$, torej $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$. V drugem primeru je $(|R/Z(R)| - 1)/2 = 1$, torej $|R/Z(R)| = 3$, $|Z(R)| = 1$ in $R \cong \mathbb{Z}_3$.

(2) Po izreku 2.2 je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ povezan natanko tedaj, ko je enak $K_{|Z(R)|}$, če je $2 \in Z(R)$, bodisi $K_{|Z(R)|,|Z(R)|}$, če $2 \notin Z(R)$. V prvem primeru velja $|R/Z(R)| - 1 = 1$, torej $|R/Z(R)| = 2$ in $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$. V drugem primeru je $(|R/Z(R)| - 1)/2 = 1$, torej $|R/Z(R)| = 3$ in $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$.

(3) Po izreku 2.2 je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ prazen natanko tedaj, ko je enak disjunktni uniji grafov K_1. Tedaj velja $|Z(R)| = 1$, $2 \in Z(R)$, iz česar sledi $2 = 0$, torej je R cel s karakteristiko 2.

□

Če je $Z(R)$ podgrupa aditivne grupe $(R, +)$, zlahka izračunamo tudi premer in ožino regularnega grafa.

Izrek 3.2. *Naj bo R kolobar in $Z(R) < (R, +)$. Tedaj velja:*

(1) Če je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ povezan, potem je njegov diameter enak 0, 1 ali 2.

(2) Če graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ vsebuje cikel, potem je njegova ožina enaka 3 ali 4.

Dokaz. (1) Naj bo graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ povezan. Vemo, da je v tem primeru graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ bodisi poln bodisi poln dvodelen. Torej je $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(T(R))) \in \{0, 1, 2\}$.

(2) Naj graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ vsebuje cikel. Ker je regularni graf disjunktna unija bodisi polnih grafov, bodisi polnih dvodelnih grafov, je $\mathrm{gr}(\mathrm{Reg}(T(R))) \in \{3,4\}$.

$\square$

Tudi v primeru, ko $Z(R)$ ni podgrupa aditivne grupe $(R,+)$, velja:

Izrek 3.3. *Naj bo R kolobar in naj graf* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *vsebuje cikel. Potem je njegova ožina enaka* 3 *ali* 4.

Preden dokažemo izrek, zapišimo naslednjo trditev.

Dokaz. Ločili bomo veliko različnih primerov. Najprej privzemimo, da ima kolobar R karakteristiko različno od 2 in graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ vsebuje cikel C. Ker cikel C vsebuje vsaj tri elemente, v njem obstajata različna elementa $x, y \in \mathrm{Reg}(R)$, da velja $y \neq -x$ in $x + y \in Z(R)$. Torej je x—y—$(-y)$—$(-x)$—x 4-cikel.
Denimo sedaj, da ima R karakteristiko 2 in graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ vsebuje cikel C. Ločimo primera:

(1) V kolobarju R obstaja neničelni nilpotent w, brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $w^2 = 0$. Cikel C vsebuje različna elementa $x, y \in \mathrm{Reg}(R)$, $x, y \neq 1$ in $x + y \in Z(R)$. Če velja $w = wx = wy$, potem sta elementa $1 + x$ in $1 + y$ delitelja niča in je 1—x—y—1 3-cikel.
Sedaj predpostavimo $w \neq wx$ (za $w \neq wy$ je dokaz podoben). Najprej pokažimo, da je element $1 + w$ regularen. Naj bo $z \in R$ tak, da velja $(1 + w)z = 0$. Enačbo z leve pomnožimo z w in dobimo $wz + w^2z = 0 = wz = z$. Podobno iz $z(1+w) = 0$ sledi $z = 0$, torej je element $1+w$ regularen.
Oglejmo si primer, ko velja $wxw \notin \{0, w\}$. Če je $(1+wxw)z = 0$, pomnožimo enačbo z leve z wxw in dobimo $wxwz+wxw^2xwz = 0 = wxwz = z$, podobno za $z(1 + wxw) = 0$. Torej je element $1 + wxw$ regularen. Vsote parov elementov $1, 1+w, 1+wxw$ so očitno v $Z(R)$, zato ti elementi tvorijo 3-cikel grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$.
Naj velja $wxw = 0$. Če enačbo $(1 + wx)z = 0$ pomnožimo z wx z leve, dobimo $wxz + wxwxz = 0 = wxz = z$, podobno za enačbo $z(1 + wx) = 0$, Torej je element $1 + wx$ regularen, 1—$(1 + w)$—$(1 + wx)$—1 je 3-cikel, saj so vsote parov elementov delitelji niča.
Ostane možnost, da je $wxw = w$. Sledi $wx \neq xw$, saj je $w^2 = 0$. Iz $w \neq wx$ sklepamo $x \neq 1 + w$. Če je $wx + xw \in Z(R)$, potem je x—$(x + wx)$—$(x + xw)$—x 3-cikel (elementa $x + wx = (1 + w)x$ in $x + xw = x(1 + w)$ sta regularna, saj je množica $\mathrm{Reg}(R)$ zaprta za množenje). Predpostavimo, da velja $wx + xw \notin Z(R)$. Če je $x + wx + xw \in \mathrm{Reg}(R)$, potem je x—$(x + wx)$—$(x+wx+xw)$—$(x+xw)$—x 4-cikel. Zato predpostavimo $x+wx+xw \in Z(R)$. Ločimo primere:

  (a) Velja $wx + xw \neq 1, 1 + w$. Potem je 1—$(1 + w)$—$(wx + xw)$—1 3-cikel v grafu $\mathrm{Reg}(T(R))$, saj je $w(1 + w + wx + xw) = 0$.

  (b) Velja $wx+xw = 1$. Tedaj je element $x+1 = x+wx+xw$ po predpostavki delitelj niča. Če je ta levi delitelj niča, potem je tudi $(x+wx)+(1+w) = (1 + w)(x + 1)$ delitelj niča. Iz $w \neq wx$ sledi $x + wx \neq 1 + w$, zato je x—1—$(1 + w)$—$(x + wx)$—x 4-cikel v grafu $\mathrm{Reg}(T(R))$. Če pa je element $x + 1$ desni delitelj niča, potem je po podobnem premisleku x—1—$(1 + w)$—$(x + xw)$—x 4-cikel v grafu $\mathrm{Reg}(T(R))$.

(c) Velja $wx+xw = 1+w$. Element $1+w+x = wx+xw+x$ je delitelj niča po predpostavki. Če je $x+w \in \mathrm{Reg}(R)$, potem je x—$(1+w)$—1—$(x+w)$—x 4-cikel. Predpostavimo, da velja $x + w \in Z(R)$. Če je $x + 1 \in Z(R)$, tedaj je x—$(1 + w)$—1—x 3-cikel v $\mathrm{Reg}(T(R))$. Zdaj privzemimo, da $x+1 \in \mathrm{Reg}(R)$. Ker velja $(1+wx)w = 0$, je element $1+wx$ delitelj niča. Zato je x—$(1 + w)$—$(x + 1)$—$(x + wx)$—x 4-cikel v grafu $\mathrm{Reg}(T(R))$.

(2) Kolobar R je reduciran. V ciklu C obstajata $x, y \in \mathrm{Reg}(R)$, $x \neq y$ in $x + y \in Z(R)$. Ker je R reduciran, po trditvi 2.15 velja $Z(R) = Z_l(R) = Z_d(R)$. Če je $xy = yx$, sledi $(x + y)^2 = x^2 + y^2 \neq 0$, torej $x^2 \neq y^2$ in je x^2—xy—y^2—x^2 3-cikel v $\mathrm{Reg}(T(R))$. Predpostavimo, da $xy \neq yx$. Če velja $x^2 \neq y^2$, potem je x^2—xy—y^2—yx—x^2 4-cikel, v primeru $x^2 = y^2$ pa je $xy + yx = (x + y)^2 \in Z(R)$ in je x^2—xy—yx—x^2 3-cikel v grafu $\mathrm{Reg}(T(R))$.

□

Iz dokaza prejšnjega izreka sledi:

Posledica 3.4. *Če je* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *gozd, potem je* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *bodisi prazen bodisi disjunktna unija grafov* K_2.

Skica dokaza. Naj bo $\mathrm{Reg}(T(R))$ gozd. Iz dokaza izreka 3.3 je razvidno, da je v primeru, ko ima kolobar R karakteristiko različno od 2, vsak $x \in \mathrm{Reg}(R)$ povezan le z $-x$, saj v nasprotnem primeru lahko skonstruiramo cikel. Torej je v tem primeru graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ disjunktna unija grafov K_2.
Naj bo R reduciran s karakteristiko 2. Iz dokaza izreka 3.3 sklepamo, da tedaj nobeni vozlišči grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$ nista povezani, torej je v tem primeru ta prazen.
Zdaj predpostavimo, da ima R karakteristiko 2 in vsebuje neničelni nilpotentni element w, $w^2 = 0$. Iz dokaza izreka 3.3 razberemo, da v tem primeru nobena elementa iz množice $\mathrm{Reg}(R)\backslash\{1\}$ nista povezana. Pokažimo, da ima graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ v tem primeru le dva elementa, $\mathrm{Reg}(R) = \{1, 1 + w\}$. Denimo, da obstaja $x \in \mathrm{Reg}(R)\backslash\{1, 1 + w\}$. Ker sta elementa x in $x + xw$ povezana, velja $x + xw = 1$, iz česar sledi $x + (1 + w) = x + (x + xw + w) = wx + w \in Z(R)$. To pomeni, da sta elementa x in $1+w$ povezana, kar je protislovje, sa je tedaj x—$1+w$—1—x 3-cikel. Torej v tem primeru velja $\mathrm{Reg}(T(R)) = K_2$. □

Pokažimo, da je regularni graf končnega kolobarja regularen.

Izrek 3.5. *Naj bo* R *končni kolobar. Potem je graf* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *regularen.*

Dokaz. Naj bodo $t_1, \ldots, t_n$ vsi sosedi elementa 1 v grafu $\mathrm{Reg}(T(R))$. Tedaj velja $1 + t_i \in Z(R)$, za $i = 1, \ldots, n$. Izberimo $x \in \mathrm{Reg}(R)$. V končnem kolobarju velja $Z(R) = Z_l(R) = Z_d(R)$, zato so $xt_1, \ldots, xt_n$ različni sosedi elementa x, saj je $x + xt_i = x(1 + t_i) \in Z(R)$. Naj bo y poljubni sosed elementa x. Tedaj velja $x + y = x(1 + x^{-1}y) \in Z(R)$. Ker je x regularen, je $1 + x^{-1}y \in Z(R)$, torej je $x^{-1}y = t_i$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$ in $y = xt_i$. □

Oglejmo si nekaj primerov, ko je regularni graf poln.

Izrek 3.6. *Naj bo* R *levi artinski kolobar in naj graf* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *vsebuje vozlišče, ki je sosednje vsem ostalim vozliščem. Potem je graf* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *poln.*

Dokaz. Naj bo element $x \in \mathrm{Reg}(R)$ povezan z vsemi ostalimi vozlišči grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$. Izberimo $y, t \in \mathrm{Reg}(R)$, $y \neq t$. Denimo, da velja $x = ty^{-1}x$. Sledi $(1 - ty^{-1})x = 0$. Ker je x regularen, je $1 - ty^{-1} = 0$ in $y = t$, kar je protislovje.

Zato velja $x \neq ty^{-1}x$, torej je x povezan z $ty^{-1}x$, kar pomeni $x + ty^{-1}x \in Z(R)$. Po trditvi 2.9 je $Z(R) = Z_d(R)$, iz česar sledi $(x + ty^{-1}x)x^{-1}y = y + t \in Z(R)$, torej je y povezan s t in izrek je dokazan. □

Lema 3.7. *Naj bo I števna množica, $\{R_i, i \in I\}$ družina kolobarjev in $R = \Pi_{i\in I}R_i$. Potem velja:*

(1) Če je graf $\mathrm{Reg}(T(R_i))$ poln in $2 \in Z(R_i)$ za neki i, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln.

(2) Če je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln in $2 \notin Z(R)$, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R_i))$ poln za vsak i.

Dokaz. (1) Izberimo $x, y \in \mathrm{Reg}(R)$, $x \neq y$. Če je $x_i \neq y_i$, potem je $x_i + y_i \in Z(R_i)$, saj je graf $Reg(T(R_i))$ poln, če pa je $x_i = y_i$, pa spet velja $x_i + y_i = 2x_i \in Z(R_i)$, saj je $2 \in Z(R_i)$ po predpostavki. Torej je $x + y \in Z(R)$.

(2) Izberimo $i \in I$ in naj bosta $x_i \neq y_i$ poljubna elementa iz $\mathrm{Reg}(R_i)$. Elementa $x = (1, \ldots, 1, x_i, 1, \ldots)$ in $y = (1, \ldots, 1, y_i, 1, \ldots)$ sta regularna, saj so vse komponente regularne. Ker je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln, velja $x + y = (2, 2, \ldots, 2, x_i + y_i, 2, \ldots) \in Z(R)$. Po predpostavki je $2 = (2, 2, \ldots) \in \mathrm{Reg}(R)$, torej je $2 \in \mathrm{Reg}(R_j)$ za vsak j, zato mora biti $x_i + y_i \in Z(R_i)$, torej sta x_i in y_i povezana. Iz tega sledi, da je graf $Reg(T(R_i))$ poln. □

Naslednji izrek nam pove, pod katerim pogojem je regularni graf direktnega produkta kolobarjev R_i poln, kjer so delitelji niča zaprti za seštevanje za vsak i.

Izrek 3.8. *Naj bo I števna množica, $\{R_i, i \in I\}$ družina kolobarjev, za katero velja $Z(R_i) < (R_i, +)$ za vsak $i \in I$ in $R = \Pi_{i\in I}R_i$. Potem velja:*

(1) Če velja $2 \in Z(R)$, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln natanko tedaj, ko je $R_i/Z(R_i) \cong \mathbb{Z}_2$, za neki $i \in I$.

(2) Če velja $2 \notin Z(R)$, potem je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln natanko tedaj, ko je $R_i \cong \mathbb{Z}_3$, za vsak $i \in I$.

Dokaz. (1) Naj bo graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln in naj bo $I = I_1 \cup I_2$, kjer je $I_1 = \{i \in I, 2 \in Z(R_i)\}$ in $I_2 = \{i \in I, 2 \notin Z(R_i)\}$. Ker je $2 \in Z(R)$, je I_1 neprazna množica. Denimo, da velja $R_i/Z(R_i) \ncong \mathbb{Z}_2$ za vsak $i \in I_1$. Hkrati velja $R_i \ncong \mathbb{Z}_3$ za vsak $i \in I_1$, saj po definiciji množice I_1 velja $2 \in Z(R_i)$ za vsak $i \in I_1$. Po izreku 3.1 graf $Reg(T(R_i))$ ni poln za noben $i \in I_1$, torej za vsak $i \in I_1$ obstajata taka $a_i, b_i \in \mathrm{Reg}(R_i)$, $a_i \neq b_i$, da velja $a_i + b_i \notin Z(R_i)$. Naj bo $x_i = a_i$ in $y_i = b_i$, za $i \in I_1$ in $x_i = y_i = 1$ za $i \in I_2$, ter $x := (x_1, x_2, \ldots)$ in $y := (x_1, x_2, \ldots)$. Potem velja $x + y \notin Z(R)$, kar je protislovje, saj je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln.
Obratno, če je $R_i/Z(R_i) \cong \mathbb{Z}_2$ za neki i, potem je po izreku 3.1 graf $Reg(T(R_i))$ poln. Velja $R_i/Z(R_i) = \{Z(R_i), 1 + Z(R_i)\}$. Denimo, da je $2 \in 1 + Z(R_i)$. Sledi, da je $1 \in Z(R_i)$, kar je protislovje. Torej je $2 \in Z(R_i)$ in po lemi 3.7 je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln.

(2) Če je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln, je po lemi 3.7 graf $Reg(T(R_i))$ poln za vsak i. Po izreku 3.1 za vsak i velja $R_i/Z(R_i) \cong \mathbb{Z}_2$ ali $R_i \cong \mathbb{Z}_3$. Denimo, da za neki i velja $R_i/Z(R_i) \cong \mathbb{Z}_2$. Potem je $R_i/Z(R_i) = \{Z(R_i), 1 + Z(R_i)\}$. Po predpostavki $2 \notin Z(R_i)$, hkrati pa vemo, da $2 \notin 1 + Z(R_i)$, kar nam da

protislovje.
Obratno, naj bo $R = \Pi_{i\in I}\mathbb{Z}_3$. Izberimo $x, y \in \mathrm{Reg}(R), x \neq y$. Obstaja tak i, da je $x_i \neq y_i$. Ker sta elementa x_i in y_i regularna, sta lahko enaka samo 1 ali 2. Sledi $x_i + y_i = 0 \in Z(R_i)$ in $x + y \in Z(R)$.

□

Lema 3.9. *Naj bo R kolobar, $2 \notin Z(R)$ in naj bo graf* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *poln. Potem je $J(R) = 0$.*

Dokaz. Denimo, da obstaja $u \neq 0 \in J(R)$. Ker $2 \notin Z(R)$, $u \neq -u$. Elementa $1+u$ in $1-u$ sta po izreku 1.15 obrnljiva, torej regularna. Dobimo $1+u+(1-u) = 2 \in Z(R)$, kar je protislovje. □

Izrek 3.10. *Naj bo R levi artinski kolobar in $2 \notin Z(R)$. Graf* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *je poln natanko tedaj, ko velja $R \cong \mathbb{Z}_3^r$ za neko naravno število r.*

Dokaz. Naj bo graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln. Po lemi 3.9 je $J(R) = 0$, zato je po izreku 1.12 kolobar R polenostaven. Po Wedderburn-Artinovem izreku sledi $R \cong \Pi_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ za neke obsege $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_r$ in neka naravna števila $r, n_1, \ldots, n_r$. Po lemi 3.7 je graf $\mathrm{Reg}(T(M_{n_i}(\mathbb{F}_i))$ poln za vsak $i = 1, \ldots, r$. Ker 2 ni delitelj niča, je za vsak i karakteristika obsega $\mathbb{F}_i$ različna od 2. Denimo, da je $n_j \geq 2$ za neki j. Tedaj sta matriki I in $I + E_{n_j 1}$ regularna elementa kolobarja $M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$, saj sta obrnljivi. Toda tudi matrika $I + (I + E_{n_j 1})$ je obrnljiva in regularna, zato elementa I in $I + E_{n_j 1}$ nista povezana v grafu $\mathrm{Reg}(T(M_{n_j}(\mathbb{F}_j))$, kar je protislovje. Zato je $n_i = 1$ za vsak $i = 1, \ldots, r$. Denimo, da je $|\mathbb{F}_j| > 3$ za neki j. Potem obstaja tak $x \in \mathbb{F}_j$, da velja $x \neq 0, 1, -1$. Ker je 0 edini delitelj niča v $\mathbb{F}_j$, je x regularen in ni povezan z elementom 1, kar je protislovje, saj je graf $\mathrm{Reg}(T(M_{n_j}(\mathbb{F}_j))$ poln. Obrat velja po izreku 3.8. □

Ideal P kolobarja R je *praideal*, če za poljubna ideala I in J kolobarja R velja: če je $IJ \subseteq P$, potem je $I \subseteq P$ ali $J \subseteq P$. Idealu P kolobarja R bomo rekli *krepki praideal*, če za poljubna elementa $x, y \in R$ velja: če je $xy \in P$, potem je $x \in P$ ali $y \in P$. Krepki praideali so hkrati praideali, obratno velja v komutativnih kolobarjih, v splošnem pa ne.

Trditev 3.11. *Ideal P kolobarja R je praideal natanko takrat, ko za vsaka elementa $x, y \in R$, za katera je $xRy \subseteq P$, velja bodisi $x \in P$ bodisi $y \in P$.*

Dokaz. Naj bo P praideal in $xRy \subseteq P$ za neka $x, y \in R$. Velja $(x)(y) = (RxR)(RyR) = RxRyR \subseteq P$, zato je $x \in P$ oziroma $y \in P$. Obratno, naj iz $xRy \subseteq P$ sledi bodisi $x \in P$ bodisi $y \in P$ za poljubna $x, y \in R$. Naj bosta I, J taka ideala kolobarja R, da velja $IJ \subseteq P$ in $I \nsubseteq P$. Fiksirajmo $x \in I \backslash P$ in izberimo $y \in J$. Velja $xRy \subseteq IJ \subseteq P$ iz česar sledi $y \in P$. Ker je bil y poljuben velja $J \subseteq P$. □

Izrek 3.12. *Levi noetherski kolobar ima končno mnogo minimalnih praidealov.*

Dokaz. Naj bo R levi noetherski kolobar in naj bo Σ množica vseh takih idealov kolobarja R, ki ne vsebujejo produkta končno mnogo praidealov. Denimo, da velja $\Sigma \neq \emptyset$. Ker je R levi noetherski, ima množica Σ maksimalni element, označimo ga H. Ideal H očitno ni praideal in ni enak R, saj R po Zornovi lemi vsebuje neki maksimalni ideal. Torej obstajata taka ideala $I, J \nsubseteq H$, da velja $IJ \subseteq H$. Ker sta ideala $I + H$ in $J + H$ strogo večja od H, nista v množici Σ, zato vsebujeta produkt končno mnogo praidealov. Zato tudi njun produkt $(I + H)(J + H) =$

$IJ+IH+JH+H=H$ vsebuje končni produkt nekih praidealov, kar je protislovje. Torej velja $\Sigma=\emptyset$ in med drugim je ničelni ideal produkt končno mnogo praidealov. Ničelni ideal je vsebovan v vsakem minimalnem praidealu, zato poljubni minimalni praideal nastopa v tem produktu. Torej je minimalnih praidealov končno mnogo. □

Opomba 3.13. V dokazu smo potrebovali, da R izpolnjuje pogoj naraščajočih verig le za dvostranske ideale in ne nujno tudi za leve ideale.

Lema 3.14. *Naj bo R kolobar in $S\subseteq R$ multiplikativna množica, ki ne vsebuje 0. Potem obstaja praideal, ki ne seka S.*

Dokaz. Naj bo $\Sigma=\{I\lhd R; I\cap S=\emptyset\}$ družina idealov kolobarja R, delno urejena z inkluzijo. Velja $\{0\}\in\Sigma$, zato Σ ni prazna. Naj bo $\{I_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ veriga idealov v Σ. Tedaj je $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$ njena zgornja meja v družini Σ. Po Zornovi lemi družina Σ premore neki maksimalni element P. Denimo, da P ni praideal. Naj bosta $I\nsubseteq P$ in $J\nsubseteq P$ taka ideala, da velja $IJ\subseteq P$. Tedaj $I+P$ in $J+P$ nista v Σ, torej obstajata neka $s_1\in S\cap(I+P)$ in $s_2\in S\cap(J+P)$. Velja $s_1s_2\in(I+P)(J+P)=IJ+IP+PJ+P\subseteq P$, kar je protislovje, saj je S zaprta za množenje in P ne seka S. □

Lema 3.15. *Vsak praideal vsebuje neki minimalni praideal.*

Dokaz. Naj bo P praideal in Σ družina vseh praidealov, vsebovanih v P, urejena z obratno inkluzijo. Družina Σ ni prazna, saj vsebuje P. Naj bo $\{P_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ veriga praidealov iz Σ. Tedaj je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$ njena zgornja meja. Po Zornovi lemi Σ vsebuje neki maksimalni element, ta je iskani minimalni praideal, vsebovan v P. □

Lema 3.16. *Če je kolobar R reduciran, potem je presek njegovih minimalnih praidealov enak 0.*

Dokaz. Izberimo $0\neq x\in R$. Ker je R reduciran, velja $x^n\neq 0$ za vsak $n\in\mathbb{N}$. Naj bo $S:=\{x^n,n\in\mathbb{N}\}$. Množica S je zaprta za množenje in ne vsebuje 0, zato po lemi 3.14 obstaja praideal P, ki ne seka S. Torej P ne vsebuje x. Ker po lemi 3.15 vsak praideal vsebuje neki minimalni praideal, rezultat sledi. □

Neprazna podmnožica S kolobarja R je *m-sistem*, če za vsaka $x,y\in S$ obstaja tak $r\in R$, da velja $xry\in S$. Po trditvi 3.11 je P praideal kolobarja R natanko tedaj, ko je množica $R\backslash P$ m-sistem. Naj bo $S'\supseteq S$ multiplikativna polgrupa, generirana z množico S in naj bosta $x,y\in S'$ poljubna. Tedaj velja $x=\Pi_{i=1}^m x_i$ in $y=\Pi_{i=1}^n y_i$ za neke $x_i,y_i\in S$. Ker je S m-sistem, obstaja tak $r\in S$, da velja $x_mry_1\in S$, zato je $xry\in S'$ in je tudi S' m-sistem.

Lema 3.17. *Vsak minimalni praideal reduciranega kolobarja je krepki praideal.*

Dokaz. Naj bo P minimalni praideal kolobarja R in naj bo $S:=R\backslash P$. Naj bo $S'\supseteq S$ multiplikativna polgrupa, generirana z množico S. Trdimo, da 0 ni v S'. Sicer naj bo n najmanjše tako naravno število, da je $s_1\cdots s_n=0$ za neke $s_i\in S$. Velja $n\geq 2$, saj S ne vsebuje 0. Ker je R reduciran in je $(s_nRs_1\cdots s_{n-1})^2=0$, velja $s_nRs_1\cdots s_{n-1}=0$. Toda S je m-sistem, zato obstaja tak $r\in R$, da velja $s:=s_nrs_1\in S$. Sledi $ss_2\cdots s_{n-1}=0$, kar je protislovje z minimalnostjo n. Zato velja $0\notin S'$ in po lemi 3.14 obstaja praideal P', ki ne seka S'. Iz minimalnosti P sledi $P'=P$ in $S'=S$. Ker je S' multiplikativno zaprta, je P krepki praideal. □

Izrek 3.18. *Naj bo R reducirani levi noetherski kolobar. Potem velja $Z(R)=\bigcup_{i=1}^n P_i$, kjer so $P_i, i=1,\dots,n$, vsi minimalni praideali kolobarja R.*

Dokaz. Po lemi 3.12 ima R končno mnogo minimalnih praidealov $P_1, \ldots, P_n$. Naj bo $x \in \bigcup_{i=1}^n P_i$, brez škode za splošnost velja $x \in P_1$. Za vsak $i = 2, \ldots, n$ obstaja $x_i \in P_2 \backslash P_1$. Po lemi 3.17 je P_1 krepki praideal, zato velja $x_2 \cdots x_n \notin P_1$, torej $x_2 \cdots x_n \neq 0$. Po lemi 3.16 velja $xx_2 \cdots x_n \in P_1 P_2 \cdots P_n \subseteq \bigcap_{i=1}^n P_i = 0$, torej je x delitelj niča in velja $\bigcup_{i=1}^n P_i \subseteq Z(R)$.
Naj bo $x \in Z(R)$ in $y \neq 0$ tak element, da je $xy = 0$. Ker velja $\bigcap_{i=1}^n P_i = 0$, obstaja tak j, da y ni iz P_j. Ker je $xy = 0 \in P_j$ in je P_j krepki praideal, sledi $x \in P_j$. Torej velja tudi $Z(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$ in izrek je dokazan. □

Oglejmo si še *izrek o praidealskem izogibu*, ki je en osrednjih izrekov komutativne algebre. Dokažimo, da velja tudi v nekomutativnih kolobarjih. Še prej zapišimo naslednjo definicijo.

Definicija 3.19. Naj bo R kolobar, $I_1, \ldots, I_n$ ideali kolobarja R in $S \subseteq R$ taka podmnožica, da velja $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$. Če velja $S \subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^n I_i$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$, potem je vsebovanost (enakost) $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ *reducibilna*, sicer je *ireducibilna*.

Izrek 3.20 (Praidealski izogib)**.** *Naj bo R kolobar.*

(1) Naj bo I ideal v R, $n \in \mathbb{N}$, $P_1, \ldots, P_n$ praideali v R in $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$. Potem je $I \subseteq P_j$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(2) Naj bo P praideal v R, $n \in \mathbb{N}$, $I_1, \ldots, I_n$ ideali v R in $\bigcap_{i=1}^n I_i \subseteq P$. Potem je $I_j \subseteq P$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Dokaz. (1) Če je $n = 1$, ni kaj dokazovati. Privzemimo $n \geq 2$. Naj bo $Q_i := I \cap P_i$. Denimo, da je vsebovanost $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$ ireducibilna. Pokažimo, da je tedaj enakost $I = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ ireducibilna. Če bi veljalo $I = \bigcup_{i=1, i \neq j}^n Q_i$, za neki j, potem bi sledilo $I \cap P_j = Q_j \subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^n Q_i = \bigcup_{i=1, i \neq j}^n (I \cap P_i) = I \cap \bigcup_{i=1, i \neq j}^n P_i$ in $I = (I \cap P_j) \cup (I \cap \bigcup_{i=1, i \neq j}^n P_i) = I \cap \bigcup_{i=1, i \neq j}^n P_i \subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^n P_i$, kar je protislovje s ireducibilnostjo vsebovanosti $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$. Torej obstaja neki $x \in Q_1 \backslash \bigcup_{i=2}^n Q_i$. Recimo, da velja $Q_i Q_j \subseteq Q_k \subseteq P_k$, za neke i, j in k. Ker je P_k praideal, je brez škode za splošnost $Q_i \subseteq P_k$, iz česar sledi $Q_i \subseteq Q_k$. Zato je $Q_2 Q_3 \ldots Q_n \nsubseteq Q_1$, sicer bi veljalo $Q_i \subseteq Q_1$ za neki $i \in \{2, \ldots, n\}$, kar je protislovje z ireducibilnostjo enakosti $I = \bigcup_{i=1}^n Q_i$. Zato obstaja neki $y \in Q_2 Q_3 \ldots Q_n \backslash Q_1$. Toda tedaj sledi $x + y \in I \backslash \bigcup_{i=1}^n Q_i$, kar je protislovje. Torej je vsebovanost $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$ reducibilna in velja $I \subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^n P_i$ za neki j. Postopek nadaljujemo in dobimo želeni rezultat.

(2) Velja $I_1 \cdots I_n \subseteq \bigcap_{i=1}^n I_i \subseteq P$. Ker je P praideal, velja $I_j \subseteq P$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$.

□

Izrek 3.21. *Levi artinski kolobar s končno mnogo obrnljivimi elementi je končen.*

Dokaz. Naj bo R levi artinski kolobar in $|R^*| < \infty$. Po izreku 1.15 velja $1 + J(R) \subseteq R^*$, torej je $|J(R)| < \infty$. Po izreku 1.12 je kolobar $R/J(R)$ polenostaven, zato je po Artin-Wedderburnovem izreku izomorfen direktnemu produktu kolobarjev matrik $M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ nad nekimi obsegi $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_r$ za neka naravna števila $r, n_1, \ldots, n_r$. Če bi bil kak obseg $\mathbb{F}_j$ neskončen, bi imel kolobar matrik $M_{n_j}(\mathbb{F}_j)$ neskončno mnogo obrnljivih elementov, kar je v nasprotju s predpostavko. Zato so obsegi $\mathbb{F}_i$ končni za vsak $i = 1, \ldots, n$ in posledično je kolobar $R/J(R)$ končen. Ker velja $|J(R)| < \infty$, je tudi kolobar R končen in izrek je dokazan. □

Izrek 3.22. *Naj bo R kolobar in I_i poljubni pravi levi ideali kolobarja R za $i = 1, \ldots, n$. Če je $|R \backslash \bigcup_{i=1}^n I_i| < \infty$, potem je $|R| < \infty$.*

Dokaz. Vsak pravi levi ideal je vsebovan v nekem maksimalnem levem idealu, zato lahko privzamemo, da so levi ideali I_i maksimalni. Oglejmo si homomorfizem levih R-modulov $\phi\colon R/\bigcap_{i=1}^n I_i \to \Pi_{i=1}^n R/I_i$ s predpisom $\phi(x + \bigcap_{i_1}^n I_i) = (x + I_1, x + I_2, \ldots, x+I_n)$. Levi R-modul $\Pi_{i=1}^n R/I_i$ je direktni produkt končno mnogo enostavnih levih R-modulov R/I_i, zato je artinski. Po Kitajskem izreku o ostankih je ϕ vložitev, torej je tudi $R/\bigcap_{i=1}^n I_i$ artinski levi R-modul. Definirajmo množico $X = \{1 + a; a \in \bigcap_{i=1}^n I_i\}$. Velja $X \subseteq R \backslash \bigcup_{i=1}^n I_i$, torej je X končna množica. Zato je tudi levi R-modul $\bigcap_{i=1}^n I_i$ končen, torej artinski. Sledi, da je R artinski levi R-modul, torej levi artinski kolobar. Ker je $R^* \subseteq R \backslash \bigcup_{i=1}^n I_i$, velja $|R^*| < \infty$, zato po izreku 3.21 sledi $|R| < \infty$. □

Posledica 3.23. *Naj bo R reducirani levi noetherski kolobar in $|\mathrm{Reg}(R)| < \infty$. Potem je $|R| < \infty$.*

Dokaz. Vemo, da v R obstajajo taki praideali $P_1, \ldots, P_n$, da je $Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$. Po prejšnjem izreku rezultat sledi. □

Naj bo $G = (V(G), E(G))$ poljubni graf. Preslikavi $c\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ pravimo *k-barvanje* grafa G. Barvanje c je pravilno, če za vsak $xy \in E(G)$ velja $c(x) \neq c(y)$. *Kromatično število* $\chi(G)$ grafa G je najmanjše tako naravno število k, za katero obstaja pravilno k-barvanje grafa G, če tak k ne obstaja, je $\chi(G) = \infty$. *Klika* grafa G je podmnožica $K \subseteq V(G)$, ki inducira polni podgraf. *Klično število* $\omega(G)$ je moč največje klike grafa G.
Pri pravilnem barvanju grafa G morajo biti vozlišča poljubne klike grafa G pobarvana z različnimi barvami, zato velja $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Izrek 3.24. *Naj bo R kolobar, naj velja $2 \notin Z(R)$ in naj bo $Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$ ireducibilna enakost, kjer so P_i krepki praideali kolobarja R. Potem velja $\omega(\mathrm{Reg}(T(R))) = \chi(\mathrm{Reg}(T(R))) = 2^n$.*

Dokaz. Ker so P_i krepki praideali, je za vsak i kolobar R/P_i cel. Ker je 0 edini delitelj niča, so v grafu $\mathrm{Reg}(T(R/P_i))$ paroma povezani le nasprotni si elementi, drugih povezav ni. Zato lahko graf $\mathrm{Reg}(T(R/P_i))$ pobarvamo z dvema barvama, recimo 0 in 1. Naj bo $c\colon \mathrm{Reg}(R) \to \{0,1\}^n$ barvanje grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$ s predpisom $c(x) = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, kjer je δ_i barva elementa $x + P_i \in R/P_i$. Naj bosta x in y sosednji vozlišči grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$. Potem obstaja tak i, da je $x + y \in P_i$, kar pomeni $(x + P_i) + (y + P_i) = P_i$, torej sta $x + P_i$ in $y + P_i$ sosednji vozlišči v $\mathrm{Reg}(T(R/P_i))$ in zato pobarvani z različnima barvama. Zato velja $c(x) \neq c(y)$ in je c pravilno barvanje grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$. Dokazali smo, da velja $\chi(\mathrm{Reg}(T(R))) \leq 2^n$. Če pokažemo, da graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ vsebuje kliko reda 2^n, smo končali. Ker $2 \notin Z(R)$, ima kolobar R karakteristiko različno od 2. V primeru $n = 1$ po izreku 3.1 zato sledi, da graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ ni prazen, torej velja $\omega(\mathrm{Reg}(T(R))) = \chi(\mathrm{Reg}(T(R))) = 2$. Naj bo $n \geq 2$. Definirajmo $I_j := \Pi_{i \neq j} P_i$, za $j = 1, \ldots, n$. Prepričajmo se, da je za vsak j množica $I_j \backslash P_j$ neprazna. Denimo, da je $I_j \subseteq P_j$, za neki j. Ker je P_j praideal, sledi $P_i \subseteq P_j$ za neki $i \neq j$, kar je protislovje z ireducibilnostjo enakosti $Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$. Torej za vsak j obstaja $x_j \in I_j \backslash P_j$. Definirajmo $W := \{\sum_{j=1}^n r_j x_j; r_j = \pm 1\}$. Trdimo, da je W iskana klika reda 2^n. Najprej s protislovjem pokažimo, da je vsak element iz W enolična kombinacija elementov x_i. Naj bo $\sum_{i=1}^n r_i x_i = \sum_{i=1}^n r'_i x_i$ in recimo, da obtaja tak i, da velja $r_i \neq r'_i$. Brez škode za splošnost obstaja tak k, $1 \leq k \leq n$, da velja $r_i = -r_i'$, za $1 \leq i \leq k$ in $r_i = r_i'$ za $k < i \leq n$. Potem je $2\sum_{i=1}^{k} r_i x_i = 0$ in ker velja $2 \notin Z(R)$, sledi $\sum_{i=1}^{k} r_i x_i = 0$. Dobimo $x_k = \pm\sum_{i=1}^{k-1} r_i x_i \in P_k$, kar je protislovje. To pomeni, da je res $|W| = 2^n$. Denimo, da je $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in Z(R)$. Potem obstaja j, da je $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in P_j$, iz česar enako kot prej sledi $x_j \in P_j$, kar ne drži. Dokazati moramo še, da sta poljubna elementa množice W povezana. Izberimo $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \neq \sum_{i=1}^{n} r_i' x_i$. Brez škode za splošnost obstaja k, $1 \leq k < n$, da velja $r_i = r_i'$, za $1 \leq i \leq k$ in $r_i = -r_i'$ za $k < i \leq n$. Dobimo $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i' x_i = 2\sum_{i=1}^{k} r_i x_i \in P_{k+1} \in Z(R)$, kar zaključi dokaz. $\square$

V primeru, ko za graf G velja $\omega(G) = \chi(G)$, pravimo, da je G *šibko popoln.*

Posledica 3.25. *Naj bo R reducirani levi noetherski kolobar in $2 \notin Z(R)$. Potem velja $\omega(\mathrm{Reg}(T(R))) = \chi(\mathrm{Reg}(T(R))) = 2^n$, kjer je n število minimalnih praidealov kolobarja R.*

Dokaz. Ker je kolobar R reduciran levi noetherski, po izreku 3.18 velja $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, kjer si P_i vsi minimalni praideali kolobarja R. Po lemi 3.17 so praideali P_i krepki in rezultat sledi po izreku 3.24. $\square$

Izrek 3.26. *Naj bo R reducirani levi artinski kolobar in $2 \notin Z(R)$. Potem velja $\omega(\mathrm{Reg}(T(R))) = \chi(\mathrm{Reg}(T(R))) = 2^n$, kjer je n število maksimalnih idealov kolobarja R.*

Dokaz. Ker je vsak levi artinski kolobar tudi levi noetherski, velja $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, kjer so P_i minimalni praideali kolobarja R. Naj bo M poljubni maksimalni ideal v R. Iz $\mathrm{Reg}(R) = R^*$ sledi $M \subseteq Z(R)$ in po praidealskem izogibu je $M \subseteq P_j$, za neki j. Toda M je maksimalen, zato je $M = P_j$. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ obstaja maksimalni ideal, recimo M_i, da je $P_i \subseteq M_i$. Po prejšnjem je $M_i = P_j$, za neki j. Če je $i \neq j$, sledi $P_i \subsetneq P_j$, kar je protislovje. Zato so P_i za $i = 1, \ldots, n$ vsi maksimalni ideali kolobarja R in po izreku 3.24 sledi $\omega(R) = \chi(R) = 2^n$. $\square$

V prejšnjem podrazdelku smo spoznali, da je za levi artinski kolobar R, za katerega velja $2 \notin Z(R)$, graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln natanko tedaj, ko velja $R \cong \mathbb{Z}_3^r$ za neko naravno število r.

Posledica 3.27. *Naj bo R reducirani levi noetherski kolobar in $2 \notin Z(R)$. Graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ je poln natanko tedaj, ko velja $R \cong \mathbb{Z}_3^r$ za neko naravno število r.*

Dokaz. Naj bo graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln. Po posledici 3.25 je $|\omega(\mathrm{Reg}(T(R)))| < \infty$. Ker je graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln, velja $\omega(\mathrm{Reg}(T(R))) = |\mathrm{Reg}(R)|$, zato po posledici 3.23 sledi $|R| < \infty$. Torej je R levi artinski in rezultat sledi po izreku 3.10. Obrat velja po izreku 3.8. $\square$

Če povežemo izreka 3.1 in 3.10, ter posledico 3.27, dobimo naslednji rezultat.

Izrek 3.28. *Naj bo R kolobar, $2 \notin Z(R)$ in r neko naravno število. Graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ je poln natanko tedaj, ko je:*

- *$R \cong \mathbb{Z}_3$, če je $Z(R) < (R, +)$.*
- *$R \cong \mathbb{Z}_3^r$, če je R levi artinski.*
- *$R \cong \mathbb{Z}_3^r$, če je R reducirani levi noetherski.*

Neodvisna množica grafa $G = (V(G), E(G))$ je podmnožica $K \subseteq V(G)$, ki inducira prazni podgraf. *Neodvisnostno število* $\alpha(G)$ je moč največje neodvisne množice grafa G. Naj bosta k in l poljubni naravni števili. Potem obstaja tako naravno število m, da ima vsak graf z m vozlišči kliko reda k ali neodvisno množico reda l. Poljubni graf G z m vozlišči si lahko predstavljamo kot 2-barvanje povezav polnega grafa K_m z barvama 0 in 1. Povezave iz grafa G so pobarvane z barvo 1, manjkajoče povezave pa z barvo 0. Torej za vsako 2-barvanje povezav polnega grafa K_m z barvama 0 in 1 obstaja klika reda k, ki ima vse povezave barve 1, ali klika reda l, ki ima vse povezave barve 0. Velja še splošnejši *Ramseyev izrek* [10, str. 104, izrek 7.4]:

Izrek 3.29. *Naj bodo $k_1, \ldots, k_n$ naravna števila. Potem obstaja naravno število $r(k_1, \ldots, k_n)$, da za vsako n-barvanje povezav polnega grafa $K_{r(k_1,\ldots,k_n)}$ obstaja klika velikosti k_i za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$, ki ima vse povezave barve i.*

Izrek 3.30. *Naj bo R kolobar, naj velja $2 \notin Z(R)$, naj bo $Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$ ireducibilna enakost, kjer so P_i krepki praideali kolobarja R in naj bo $\alpha(\mathrm{Reg}(T(R))) < \infty$. Potem je R končen.*

Dokaz. Označimo $k = \omega(\mathrm{Reg}(T(R)))$ in $l = \alpha(\mathrm{Reg}(T(R)))$. Po izreku 3.24 je k končen. Denimo, da je R neskončen. Potem ima po Ramseyevem izreku kliko reda $k+1$ ali neodvisno množico reda $l+1$, kar je protislovje. $\square$

Posledica 3.31. *Naj bo R reducirani levi noetherski kolobar, $2 \notin Z(R)$ in $\alpha(\mathrm{Reg}(T(R))) < \infty$. Potem je R končen.*

3.2. **Komutativni kolobarji.** V tem razdelku privzemimo, da je R komutativen. Z $\mathrm{Nil}(R)$ označimo *nilradikal* kolobarja R, tj, ideal vseh nilpotentnih elementov kolobarja R. Nilradikal $\mathrm{Nil}(R)$ je presek vseh praidealov kolobarja R, $\mathrm{Nil}(R) = \cap\{P, P \text{ praideal kolobarja } R\}$ [9, posledica 1.8]. Iz tega sledi $\mathrm{Nil}(R) \subseteq J(R)$.

Izrek 3.32. *Naj bo R komutativni pollokalni kolobar in $2 \notin Z(R)$. Graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ je poln natanko tedaj, ko velja $R \cong \mathbb{Z}_3^r$ za neko naravno število r.*

Dokaz. Naj bo graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln. Po lemi 3.9 je $J(R) = \bigcap_{i=1}^r M_i = 0$. Poljubna maksimalna ideala sta si tuja, zato po Kitajskem izreku o ostankih velja $R \cong \Pi_{i=1}^r R/M_i$. Rezultat sledi po izreku 3.8. Obrat velja po izreku 3.8. $\square$

V prejšnjem razdelku smo spoznali, da za reducirani levi noetherski kolobar velja $Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$, kjer so P_i vsi minimalni praideali kolobarja R. V komutativnem noetherskem kolobarju R velja $Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$, kjer so P_i neki praideali [9, str. 53, trditev 4.7, str 83, izrek 7.13]. Po izrekih 3.22 3.24 in 3.30 sledi:

Posledica 3.33. *Naj bo R komutativni noetherski kolobar in $|\mathrm{Reg}(R)| < \infty$. Potem je $|R| < \infty$.*

Posledica 3.34. *Naj bo R komutativni noetherski kolobar in $2 \notin Z(R)$. Potem je $\omega(\mathrm{Reg}(T(R))) = \chi(\mathrm{Reg}(T(R))) = 2^n$, kjer je n najmanjše število takih praidealov, da je njihova unija enaka $Z(R)$.*

Posledica 3.35. *Naj bo R komutativni noetherski kolobar, $2 \notin Z(R)$ in $\alpha(\mathrm{Reg}(T(R))) < \infty$. Potem je R končen.*

Tudi naslednjo posledico smo v podobni obliki srečali v prejšnjem razdelku (3.27), le da v komutativnem primeru ne potrebujemo reduciranosti.

Posledica 3.36. *Naj bo R komutativni noetherski kolobar in $2 \notin Z(R)$. Graf* $\mathrm{Reg}(T(R))$ *je poln natanko tedaj, ko velja $R \cong \mathbb{Z}_3^r$ za neko naravno število r.*

Dokaz. Naj bo graf $\mathrm{Reg}(T(R))$ poln. Po posledici 3.34 je $|\omega(\mathrm{Reg}(T(R)))| = |\mathrm{Reg}(R)| < \infty$. Po posledici 3.33 je R končen, torej pollokalen in rezultat sledi po izreku 3.32. Obrat velja po izreku 3.8. $\square$

Naj bo R komutativni kolobar. Oglejmo si faktorski kolobar $R/\mathrm{Nil}(R)$ in pokažimo, da je reduciran. Izberimo nilpotentni element $x + \mathrm{Nil}(R) \in R/\mathrm{Nil}(R)$, velja $(x + \mathrm{Nil}(R))^n = x^n + \mathrm{Nil}(R) = \mathrm{Nil}(R)$ za neki n, kar pomeni $x^n \in \mathrm{Nil}(R)$ in $x^{mn} = 0$ za neki m, zato je $x \in \mathrm{Nil}(R)$. Dokažimo, da so minimalni praideali kolobarjev R in $R/\mathrm{Nil}(R)$ v bijektivni korespondenci. Naj bo $\pi\colon R \to R/\mathrm{Nil}(R)$ naravni homomorfizem. Vemo, da je homomorfna praslika poljubnega praideala praideal. Pri naravnem homomorfizmu velja tudi obratno. Naj bo P praideal v R in $a = x + \mathrm{Nil}(R), b = y + \mathrm{Nil}(R) \in R/\mathrm{Nil}(R)$ taka elementa, da je $ab = (x+\mathrm{Nil}(R))(y+\mathrm{Nil}(R)) = xy+\mathrm{Nil}(R) \in \pi(P)$. Sledi $xy+\mathrm{Nil}(R) = z+\mathrm{Nil}(R)$ za neki $z \in P$ in $xy = (xy - z) + z \in \mathrm{Nil}(R) + P \subseteq P$. Ker je P praideal, je brez škode za splošnost $x \in P$ in $a = x + \mathrm{Nil}(R) \in \pi(P)$.
Naj bosta $P_1, P_2 \lhd R$ taka praideala kolobarja R, da velja $\pi(P_1) = \pi(P_2)$. Sledi $P_1 + \mathrm{Nil}(R) = P_2 + \mathrm{Nil}(R)$, torej $P_1 = P_2$. Izberimo minimalni praideal $P' \lhd R/\mathrm{Nil}(R)$ in naj bo $I \subseteq \pi^{-1}(P')$ poljubni praideal. Velja $\pi(I) \subseteq \pi(\pi^{-1}(P')) \subseteq P'$, iz česar sledi $\pi(I) = \pi(\pi^{-1}(P')) = P'$, saj je praideal P' minimalen in je $\pi(I)$ praideal. Po prejšnjem razmisleku sledi $I = \pi^{-1}(P')$, torej je praideal $\pi^{-1}(P')$ minimalen. Obratno, naj bo $P \lhd R$ poljubni minimalni praideal. Izberimo praideal $I' \subseteq \pi(P)$ in naj bo $I = \pi^{-1}(I')$, torej $\pi(I) = I'$. Sledi $I + \mathrm{Nil}(R) \subseteq P + \mathrm{Nil}(R)$, torej $I \subseteq P$. Sledi $I = P$, saj je P minimalen. Torej velja $I' = \pi(P)$, $\pi(P)$ je minimalen in bijektivna korespondenca je dokazana.

Posledica 3.37. *Naj bo R komutativni noetherski kolobar in $2 \notin Z(R)$. Potem velja* $\omega(\mathrm{Reg}(T(R/\mathrm{Nil}(R)))) = \chi(\mathrm{Reg}(T(R/\mathrm{Nil}(R)))) = 2^n$*, kjer je n število minimalnih praidealov kolobarja R.*

Dokaz. Vemo, da je kolobar $R/\mathrm{Nil}(R)$ reduciran, da so minimalni praideali kolobarjev R in $R/\mathrm{Nil}(R)$ v bijektivni korespondenci in da je faktorski kolobar noetherskega kolobarja noetherski. Denimo, da je $2 + \mathrm{Nil}(R)$ delitelj niča v faktorskem kolobarju $R/\mathrm{Nil}(R)$. Tedaj obstaja tak $x \in R\backslash\mathrm{Nil}(R)$, da je $2x \in \mathrm{Nil}(R)$. Zato je $(2x)^n = 2^n x^n = 0$ za neko naravno število n. Ker velja $x \notin \mathrm{Nil}(R)$, sledi $x^n \neq 0$. Torej je $2 \in Z(R)$, kar je protislovje. Rezultat sledi po posledici 3.25. $\square$

Videli bomo, da je v primeru, ko je kolobar $R/\mathrm{Nil}(R)$ končen in 2 ni delitelj niča kolobarja R, tudi kromatično število regularnega grafa kolobarja R končno. Preden se lotimo dokaza, potrebujemo naslednjo trditev.

Trditev 3.38. *Naj bo R komutativni kolobar, $x \in R$ in $a \in \mathrm{Nil}(R)$. Potem je $x \in Z(R)$ natanko tedaj, ko je $x + a \in Z(R)$.*

Dokaz. Če je $a = 0$, potem trditev očitno drži, zato predpostavimo $a \neq 0$. Naj bo $x \in Z(R)$, n najmanjše tako naravno število, da je $a^n = 0$ in $y \in R$ tak neničelni element, da je $xy = 0$. Definirajmo $m := \max\{i; 0 \leq i \leq n-1, a^i y \neq 0\}$. Sledi $(x + a)a^m y = 0$ in $x + a \in Z(R)$.
Naj bo $x + a \in Z(R)$. Tedaj je po prejšnjem $x = (x + a) - a \in Z(R)$ in trditev je dokazana. $\square$

Izrek 3.39. *Naj bo R komutativni kolobar, $2 \notin Z(R)$ in $|R/\mathrm{Nil}(R)| < \infty$. Potem velja $\chi(\mathrm{Reg}(T(R))) \leq |R/\mathrm{Nil}(R)| - 1$.*

Dokaz. Naj bo $|R/\mathrm{Nil}(R)| = k$ in $R/\mathrm{Nil}(R) = \{\mathrm{Nil}(R), a_1 + \mathrm{Nil}(R), \ldots, a_{k-1} + \mathrm{Nil}(R)\}$. Brez škode za splošnost obstaja tak $s, 1 \leq s \leq k-1$, da je $a_i \in \mathrm{Reg}(R)$ za $1 \leq i \leq s$ in $a_i \in Z(R)$ za $s < i \leq k-1$. Po trditvi 3.38 je $a_i + \mathrm{Nil}(R) \subseteq \mathrm{Reg}(R)$ za $1 \leq i \leq s$ in $a_i + \mathrm{Nil}(R) \subseteq Z(R)$ za $s < i \leq k-1$. Sledi $\mathrm{Reg}(R) = \bigcup_{i=1}^{s}(a_i + \mathrm{Nil}(R))$. Dokažimo, da je $a_i + \mathrm{Nil}(R)$ neodvisna množica grafa $\mathrm{Reg}(T(R))$ za $i = 1, \ldots, s$. Izberimo poljubna elementa $a_i + n, a_i + n' \in a_i + \mathrm{Nil}(R)$ in denimo, da sta povezana. Potem velja $(a_i + n) + (a_i + n') = 2a_i + n + n' \in Z(R)$, iz česar po trditvi 3.38 sledi $2a_i \in Z(R)$, kar je protislovje. Torej velja $\chi(\mathrm{Reg}(T(R))) \leq s \leq k-1$. $\square$

4. Cayleyjev graf

Množico vseh avtomorfizmov grafa G označimo $\mathrm{Aut}(G)$. Graf G je vozliščno tranzitiven, če za poljubni vozlišči $u, v \in V(G)$ obstaja tak avtomorfizem $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, da velja $\sigma(u) = v$.

Lema 4.1. *Naj bo R kolobar. Potem velja:*

(1) Graf $C(R)$ je prazen natanko tedaj, ko je R cel.

(2) Če je R končni kolobar in $Z(R) < (R, +)$, potem je graf $C(R)$ disjunktna unija $|R/Z(R)|$ polnih grafov $K_{|Z(R)|}$.

(3) Graf $C(R)$ ni poln.

(4) Graf $C(R)$ je vozliščno tranzitiven.

(5) Graf $C(R)$ je $(|Z(R)| - 1)$-regularen z izomorfnimi komponentami za povezanost.

Dokaz. (1) Če je $C(R)$ prazen, je R cel, saj je vsak neničelni delitelj niča povezan z elementom 0 v grafu $C(R)$. Če je R cel, iz $x, y \in R, x - y \in Z(R)$ sledi $x = y$, zato je $C(R)$ prazen.

(2) Očitno.

(3) Elementa 0 in 1 nista povezana v grafu $C(R)$.

(4) Izberimo poljubni vozlišči a in b grafa $C(R)$. Postavimo $c := b - a$ in definirajmo preslikavo $\phi\colon V(C(R)) \to V(C(R))$ s predpisom $\phi(x) = x + c$. Preslikava ϕ je očitno bijektivna in velja $\pi(a) = b$. Naj bosta x in y poljubni vozlišči grafa $C(R)$. Velja $\phi(x) - \phi(y) = x - y$, zato je preslikava ϕ avtomorfizem grafa $C(R)$. Ker sta bili vozlišči a in b poljubni, je graf $C(R)$ vozliščno tranzitiven.

(5) Ker je graf $C(R)$ vozliščno tranzitiven, za vsak $x \in R$ velja $\deg(x) = \deg(0) = |Z(R)| - 1$, torej je $(|Z(R)| - 1)$-regularen. Izomorfizem poljubnega grafa vsako komponento za povezanost očitno izomorfno preslika na neko (lahko isto) komponento za povezanost. Za poljubni vozlišči iz različnih komponent za povezanost grafa $C(R)$ zaradi vozliščne tranzitivnosti obstaja izomorfizem, ki prvo vozlišče preslika v drugo. Zato sta poljubni komponenti za povezanost grafa $C(R)$ izomorfni.

□

Lema 4.2. *Naj bo R komutativni kolobar. Potem velja* $\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(R)} P$.

Dokaz. Vemo, da je nilradikal presek vseh praidealov kolobarja R, zato je $\mathrm{Nil}(R) \subseteq \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(R)} P$. Po lemi 3.15 vsak praideal vsebuje neki minimalni praideal, zato velja tudi obratno. □

Lema 4.3. *Naj bo R komutativni kolobar. Potem velja:*

(1) Če je $P \in \mathrm{Min}(R)$ in $a \in P$, potem obstaja tak $b \in R \backslash P$, da je $ba^n = 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Velja $\bigcup_{P \in \mathrm{Min}(R)} P \subseteq Z(R)$.

(2) Če je R reduciran, potem velja $Z(R) = \bigcup_{P \in \mathrm{Min}(R)} P$.

Dokaz. (1) Naj bo $U := R \backslash P$, $V := \{1, a, a^2, \dots\}$ in $S := UV$. Ker je P praideal, je množica U zaprta za množenje. Tudi množica V je zaprta za množenje, zato je množica S zaprta za množenje. Če velja $0 \notin S$, potem po lemi 3.14 obstaja tak praideal Q, da je $Q \cap S = \emptyset$. Sledi $Q \subseteq R \backslash S \subseteq R \backslash U = P$. Ker je $a \in P \cap S$, velja $Q \subsetneq P$, kar je protislovje, saj je praideal P minimalen. Zato je $0 \in S$ in velja $ba^n = 0$ za neki $b \in U$ in $n \in \mathbb{N}$.

(2) Če je R reduciran, po lemi 4.2 velja $\bigcap_{P \in \mathrm{Min}(R)} = \mathrm{Nil}(R) = \{0\}$. Naj bo $x \in Z(R)$ in $y \neq 0$ tak element, da je $xy = 0$. Ker velja $\bigcap_{i=1}^n P_i = 0$, obstaja tak j, da y ni iz P_j. Ker je $xy = 0 \in P_j$ in je P_j praideal, sledi $x \in P_j$. Torej velja $Z(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$. Po točki (1) rezultat sledi.

□

Posledica 4.4. *Naj bo R komutativni kolobar dimenzije 0. Potem je $Z(R) = \bigcup_{P \in \mathrm{Max}(R)} P = \bigcup_{P \in \mathrm{Min}(R)} P$.*

Dokaz. Ker ima R dimenzijo 0, velja $\mathrm{Min}(R) = \mathrm{Max}(R)$. Po točki (1) leme 4.3 velja $\bigcup_{P \in \mathrm{Max}(R)} P \subseteq Z(R)$. Ker je vsak neobrnljiv element vsebovan v nekem maksimalnem idealu, velja $\bigcup_{P \in \mathrm{Max}(R)} P = Z(R)$. □

Izrek 4.5. *Naj bo R kolobar. Graf $C(R)$ je povezan natanko tedaj, ko velja $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$.*

Dokaz. Naj bo graf $C(R)$ povezan. Potem obstaja pot $0 — a_1 — a_2 — \cdots — a_n — 1$ od 0 do 1 v $C(R)$. To pomeni, da so $a_1, a_1 - a_2, \ldots a_{n-1} - a_n, a_n - 1 \in Z(R)$. Iz $1 = (1 - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + a_1$ sledi $1 \in \langle a_1, a_1 - a_2, \ldots, a_{n-1} - a_n, a_n - 1 \rangle$, torej je $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$.
Obratno, naj bo $R = \langle Z(R) \rangle$ in naj bo $x \in R$ poljubni neničelni element. Pokažimo, da obstaja pot od 0 do x. Velja $x = z_1 + \cdots + z_n$ za neke $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Naj bo $a_0 = 0$ in $a_k = z_1 + \cdots + z_k$ za $1 \leq k \leq n$. Potem je $a_k - a_{k+1} = -z_{k+1} \in Z(R)$ za $1 \leq k \leq n - 1$, torej je $0 — a_1 — a_2 — \cdots — a_n = x$ sprehod od 0 do x v $T(R)$ (nekateri elementi a_i so lahko med seboj enaki). Ker je bil element x poljuben, je graf $C(R)$ povezan. □

Izrek 4.6. *Naj bo R kolobar, naj velja $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$ in $Z(R) = Z_d(R)$. Naj bo $n \geq 2$ najmanjše tako naravno število, da je $(R, +) = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ za neke $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Potem je $\mathrm{diam}(C(R)) = n = d(0, 1)$.*

Dokaz. Po izreku 4.5 je graf $C(R)$ povezan. Najprej pokažimo, da je vsaka pot od 0 do 1 dolžine vsaj n. Naj bo $0 — a_1 — \cdots — a_{m-1} — 1$ pot od 0 do 1 dolžine m. Tedaj velja $a_1, a_1 - a_2, \ldots, a_{m-1} - 1 \in Z(R)$, sledi $1 \in \langle a_1, a_1 - a_2, \ldots, a_{m-1} - 1 \rangle$, torej $(R, +) = \langle a_1, a_1 - a_2, \ldots, a_{m-1} - 1 \rangle$. Iz minimalnosti n sledi $m \geq n$.
Naj bosta $x \neq y$ poljubna elementa kolobarja R. Pokažimo da med njima obstaja pot dolžine največ n. Naj bo $1 = z_1 + \cdots + z_n$ za neke $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$ in naj bo $z := y - x$. Definirajmo $d_0 := x$ in $d_k := (z_1 + \cdots + z_k)z + x$ za $0 \leq k \leq n$. Tedaj je $d_k - d_{k+1} = -z_{k+1} z \in Z(R)$ za vsak $1 \leq k \leq n - 1$ in $d_n = z + x = y$. Torej je $x = d_0 — d_1 — \cdots — d_{n-1} — d_n = y$ sprehod od x do y dolžine največ n. Sledi $\mathrm{diam}(C(R)) = n = d(0, 1)$. □

Spomnimo se, da enaki rezultati veljajo za totalni graf $T(R)$ (izreka 2.12 in 2.14). Zato za graf $C(R)$ veljajo tudi identične posledice, ki smo jih dokazali za totalni graf kolobarja R.

Posledica 4.7. *Naj bo R levi artinski kolobar in $Z(R) \not< (R, +)$. Potem je graf $T(R)$ povezan z diametrom 2.*

Posledica 4.8. *Naj bo R kolobar, za katerega velja $Z(R) = Z_d(R)$, in $e \in R$ netrivialni idempotent. Potem je graf $C(R)$ povezan z diametrom 2.*

Posledica 4.9. *Naj bo I števna množica, $|I| \geq 2$, $\{R_i, i \in I\}$ družina kolobarjev, za katere velja $Z(R_i) = Z_d(R_i)$, in $R = \Pi_{i\in I} R_i$. Potem je graf $C(R)$ povezan z diametrom 2.*

Lema 4.10. *Naj bo R komutativni kolobar in $x \in R$. Potem velja:*

(1) Če je $x + \mathrm{Nil}(R) \in Z(R/\mathrm{Nil}(R))$, potem je $x \in Z(R)$. Velja $\mathrm{diam}(C(R)) \leq \mathrm{diam}(C(R/\mathrm{Nil}(R)))$.

(2) Naj velja bodisi $\dim(R) = 0$ bodisi $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, kjer so P_i vsi minimalni praideali kolobarja R. Potem iz $x \in Z(R)$ sledi $x + \mathrm{Nil}(R) \in Z(R/\mathrm{Nil}(R))$ in velja $\mathrm{diam}(C(R)) = \mathrm{diam}(C(R/\mathrm{Nil}(R)))$.

Dokaz. (1) Naj bo $x+\mathrm{Nil}(R) \in Z(R/\mathrm{Nil}(R))$. Potem obstaja tak $y \in R\backslash\mathrm{Nil}(R)$, da je $xy \in \mathrm{Nil}(R)$. Velja $(xy)^n = 0$ za neko naravno število n. Ker je $y \in R\backslash\mathrm{Nil}(R)$, obstaja tak l, $1 \leq l \leq n$ da je $x^l y^n = 0$ in $x^{l-1}y^n \neq 0$, torej je $x \in Z(R)$.
Če je

$$\mathrm{Nil}(R)—x_1 + \mathrm{Nil}(R)— \cdots —x_n + \mathrm{Nil}(R)—1 + \mathrm{Nil}(R)$$

pot od $\mathrm{Nil}(R)$ do $1 + \mathrm{Nil}(R)$ v grafu $C(R/\mathrm{Nil}(R))$, potem je po prejšnjem

$$0—x_1— \cdots —x_n—1$$

pot od 0 do 1 v grafu $C(R)$, zato velja $\mathrm{diam}(C(R)) \leq \mathrm{diam}(C(R/\mathrm{Nil}(R)))$.

(2) Naj bo $x \in Z(R)$ in denimo, da je $\dim(R) = 0$. Tedaj po posledici 4.4 obstaja tak $P \in \mathrm{Min}(R)$, da je $x \in P$. Po prvi točki leme 4.3 obstaja tak $y \in R\backslash P$, da je $xy \in \mathrm{Nil}(R)$. Po lemi 4.2 velja $y \notin \mathrm{Nil}(R)$, zato je $x + \mathrm{Nil}(R) \in Z(R/\mathrm{Nil}(R))$.
Naj bo sedaj $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, kjer so P_i vsi minimalni praideali kolobarja R. Vemo, da so minimalni praideali kolobarjev R in $R/\mathrm{Nil}(R)$ v bijektivni korespondenci. Torej so $P_i/\mathrm{Nil}(R)$, $i = 1, \ldots, n$, vsi minimalni praideali kolobarja $R/\mathrm{Nil}(R)$. Ker je kolobar $R/\mathrm{Nil}(R)$ reduciran, po lemi 4.3 velja $Z(R/\mathrm{Nil}(R)) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i/\mathrm{Nil}(R)$. Zato za vsak $x \in Z(R)$ velja $x + \mathrm{Nil}(R) \in Z(R/\mathrm{Nil}(R))$. Podobno kot v zadnjem delu dokaza točke (1) dobimo $\mathrm{diam}(C(R)) = \mathrm{diam}(C(R/\mathrm{Nil}(R)))$.

□

Opomba 4.11. Denimo, da je $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ unija različnih praidealov, kjer so $P_1, \ldots, P_m$ vsi minimalni praideali kolobarja R za neki $m \leq n$. Denimo, da je $\bigcup_{i=1}^{m} P_i \subsetneq Z(R)$. Tedaj je $m < n$ in po praidealskem izogibu obstaja neki $x \in P_{m+1}\backslash \bigcup_{i=1}^{m} P_i$. Velja $x \in \bigcup_{i=1}^{n} P_i = Z(R)$, toda $x + \mathrm{Nil}(R) \notin \bigcup_{i=1}^{m} P_i/\mathrm{Nil}(R) = Z(R/\mathrm{Nil}(R))$. Zato morajo v prejšnji lemi v uniji $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ nastopati res natanko vsi minimalni praideali.

Definicija 4.12. Kolobar R je *von Neumannovo regularen*, če za vsak $x \in R$ obstaja tak $y \in R$, da velja $xyx = x$.

Lema 4.13. *Naj bo R komutativni reducirani kolobar dimenzije 0. Potem je R von Neumannovo regularen.*

Dokaz. Izberimo poljubni $x \in R$, definirajmo $S := \{x^n - x^{n+1}y, y \in R, n \in \mathbb{N}\}$ in denimo, da $0 \notin S$. Velja $(x^n - x^{n+1}y)(x^m - x^{m+1}z) = x^{n+m} - x^{n+m+1}(y + z - xyz)$, zato je množica S zaprta za množenje, Po lemi 3.14 obstaja praideal P, ki ne seka S. Ker je $\dim(R) = 0$, je P maksimalni ideal in R/P obseg, zato obstaja tak $y \in R$, da velja $(x + P)(y + P) = 1 + P$. Tedaj je $x - x^2y \in P$, kar je protislovje, saj je $P \cap S = \emptyset$. Zato je $0 \in S$ in je $x^{n+1}y - x^n = 0$ za neki $y \in R$ in neko naravno število n. Torej je element $x^2y - x$ nilpotenten in ker je R reduciran, je $x^2y = x$. □

Izrek 4.14. *Naj bo R komutativni kolobar dimenzije 0, ki vsebuje neki neničelni delitelj niča z. Potem je graf $C(R)$ povezan z diametrom 2.*

Dokaz. Po lemi 4.10 lahko predpostavimo, da je R reduciran. Zato je po lemi 4.13 kolobar R von Neumannovo regularen. Torej obstaja tak $y \in R$, da je $yz^2 = z$, zato je element $e := yz$ netrivialni idempotent kolobarja R. Po posledici 4.8 je graf povezan z diametrom 2. □

Naj bo G končni graf. Množica $S \subseteq V(G)$ je *vozliščna prerezna množica* grafa G, če je graf $G \backslash S$ nepovezan ali enak K_1, kjer je $G \backslash S$ graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da mu odstranimo vozlišča iz množice S. Podobno je množica $M \subseteq E(G)$ *povezavna prerezna množica* grafa G, če je graf $G \backslash M$ nepovezan, kjer je $G \backslash M$ graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da mu odstranimo povezave iz množice M. *Vozliščna povezanost grafa G*, označimo jo $\kappa(G)$, je moč najmanjše vozliščne prerezne množice grafa G, podobno je *povezavna povezanost grafa G*, označimo jo $\kappa'(G)$, moč najmanjše povezavne prerezne množice grafa G.
V nadaljevanju bi radi določili $\kappa(C(R))$ za poljubni končni komutativni kolobar R in $\kappa'(C(R))$ za poljubni končni kolobar R. Naj bosta x in y poljubni vozlišči grafa ter p in q poti od x do y. Poti p in q sta *med seboj notranje disjunktni*, če sta njuni edini skupni vozlišči x in y.

Lema 4.15. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_n$ končni obsegi. Potem med poljubnima vozliščema grafa $C(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$ obstaja vsaj $|Z(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti.*

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo. Lema očitno velja za $n = 1$. Naj bo sedaj $n \geq 2$, naj trditev velja za $n - 1$ in naj bosta $x = (x_1, \hat{x})$ in $y = (y_1, \hat{y})$ poljubni različni vozlišči grafa $C(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$, kjer sta $\hat{x}$ in $\hat{y}$ iz $\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n$. Ločimo primera:

(1) Vozlišči x in y imata vsaj eno komponento enako, brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je to prva komponenta, $x = (a, \hat{x}), y = (a, \hat{y})$. Tedaj velja $\hat{x} \neq \hat{y}$. Ločimo različne tipe paroma med seboj notranje disjunktnih poti med x in y.
Tip 1a: Vozlišči x in y sta sosednji, zato imamo pot x—y dolžine 1.

Tip 1b: Poti oblike x—(a, u)—y, kjer je $u \in \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n \backslash \{\hat{x}, \hat{y}\}$, teh je $|\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n| - 2$.
Graf $C(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$ je $(|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1)$-regularen, zato za vsakega soseda u vozlišča $\hat{x}$ obstaja pot p_u od $\hat{x}$ do $\hat{y}$, ki vsebuje u in je enaka eni izmed $|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_{n+1})| - 1$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med $\hat{x}$ in $\hat{y}$ v grafu $C(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$, ki obstajajo po indukcijski predpostavki. Označimo z v_u predzadnje vozlišče poti p_u,

$$p_u\colon \hat{x} — u — \cdots — v_u — \hat{y}.$$

Če sta elementa $\hat{x}$ in $\hat{y}$ sosednja v grafu $C(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_{n+1})$, je ena od teh poti enaka $\hat{x}$—$\hat{y}$. V tem primeru obstajajo v grafu $C(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_{n+1})$ med vozliščema x in y še poti naslednjih dveh tipov:

Tip 1c: Poti oblike x—(b, u)—(b, v_u)—y, kjer je $b \in \mathbb{F}_1 \backslash \{a\}$ in $u \neq \hat{y}$ vozlišče, sosednje vozlišču $\hat{x}$ v grafu $C(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_{n+1})$. Teh je $(|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_{n+1})| - 2)(|\mathbb{F}_1| - 1)$.

Tip 1d: Poti oblike x—$(b, \hat{x})$—y in x—$(b, \hat{y})$—y, kjer je $b \in \mathbb{F}_1 \backslash \{a\}$. Teh je $2(|\mathbb{F}_1| - 1)$.

Če elementa $\hat{x}$ in $\hat{y}$ nista sosednja, pa obstajajo še poti naslednjih dveh tipov:

Tip 1c': Poti oblike x—(b, u)—(b, v_u)—y, kjer je $b \in \mathbb{F}_1 \backslash \{a\}$ in u vozlišče, sosednje vozlišču $\hat{x}$ v grafu $C(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_{n+1})$. Teh je $(|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_{n+1})| - 1)(|\mathbb{F}_1| - 1)$.

Tip 1d': Poti oblike x—$(b, \hat{x})$—$(b, \hat{y})$—y, kjer je $b \in \mathbb{F}_1 \backslash \{a\}$. Teh je $(|\mathbb{F}_1| - 1)$.

Hitro vidimo, da so v obeh primerih te poti paroma med seboj notranje disjunktne, skupaj jih je

$$|\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n| - 1 + (|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)|)(|\mathbb{F}_1| - 1).$$

Ker velja

$$\begin{aligned}
&|Z(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| = \\
&= \{0\} \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n \cup \Big(\bigcup_{x \in \mathbb{F}_1 \backslash \{0\}} \{x\} \times Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n) \Big) \\
&= |\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n| + (|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)|)(|\mathbb{F}_1| - 1),
\end{aligned}$$

rezultat sledi.

(2) Vozlišči x in y imata vse komponente različne, $x_i \neq y_i$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Podobno kot prej najdemo naslednje tipe paroma med seboj notranje disjunktnih poti med x in y v grafu $C(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$.

Tip 2a: Poti oblike x—(b, u)—(b, v_u)—y, kjer je $b \in \mathbb{F}_1 \backslash \{x_1, y_1\}$ in u vozlišče, sosednje vozlišču $\hat{x}$ v grafu $C(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$. Ker so vse komponente elementov x in y različne, elementa $\hat{x}$ in $\hat{y}$ nista sosednja v grafu $C(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$, zato je teh poti $(|\mathbb{F}_1| - 2)(|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1)$.

Tip 2b: Poti oblike x—$(b, \hat{x})$—$(b, \hat{y})$—y, kjer je $b \in \mathbb{F}_1 \backslash \{x_1, y_1\}$. Teh je $(|\mathbb{F}_1| - 2)$.

Poti tipov 2a in 2b so očitno paroma med seboj notranje disjunktne z notranjimi vozlišči iz $\mathbb{F}_1 \backslash \{x_1, y_1\} \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n$, skupaj jih je $k := (|\mathbb{F}_1| - 2)|Z(\mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)|$. Če najdemo še $l := (|Z(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1) - k$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti od x do y z notranjimi vozlišči iz množice $\{x_1, y_1\} \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n$, smo končali. Te poti so očitno v bijektivni korespondenci s paroma med seboj notranje disjunktnimi potmi med vozliščema $(0, \hat{x})$ in $(1, \hat{y})$ v grafu $C(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$. Opazimo, da smo pri poteh tipov 2a in 2b "porabili" vse sosede vozlišča x iz množice $\mathbb{F}_1 \backslash \{x_1, y_1\} \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n$, teh je k. Graf $C(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$ je $(|Z(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1)$-regularen, zato ima vozlišče x še l sosedov iz množice $\{x_1, y_1\} \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n$, kar je očitno enako stopnji vozlišča $(0, \hat{x})$ v grafu $C(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$, torej $\deg((0, \hat{x})) = l$. Graf $C(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)$ je $(|Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1)$-regularen, zato je $l = |Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1$. Torej moramo najti $|Z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \mathbb{F}_n)| - 1$

paroma med seboj disjunktnih poti med vozliščema $(0,\hat{x})$ in $(1,\hat{y})$ v grafu $C(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{F}_2\times\cdots\times\mathbb{F}_n)$. Dobili smo problem, ekvivalenten začetnemu, kjer smo obseg $\mathbb{F}_1$ zamenjali z obsegom $\mathbb{Z}_2$. Če postopek nadaljujemo, lahko predpostavimo $\mathbb{F}_i\cong\mathbb{Z}_2$ za vsak $i=1,\ldots,n$ in $x=(0,\ldots,0)$ ter $y=(1,\ldots,1)$. Za vsak $z\in Z^*(\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2)$ je x—z—y pot med x in y, torej obstaja $|Z(\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2)|-1$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med x in y v grafu $C(\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2)$. Po prejšnjem sledi, da obstaja $|Z(\mathbb{F}_1\times\cdots\times\mathbb{F}_n)|-1$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med x in y v grafu $C(\mathbb{F}_1\times\cdots\times\mathbb{F}_n)$. □

Če med poljubnima vozliščema grafa G obstaja vsaj k paroma med seboj notranje disjunktnih poti, potem očitno velja $\kappa(G)\geq k$. To bomo uporabili pri dokazu naslednjega izreka.

Izrek 4.16. *Naj bo R končni komutativni kolobar. Potem velja $\kappa(C(R))=|Z(R)|-|\mathrm{Nil}(R)|$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da velja $\kappa(C(R))\geq|Z(R)|-|\mathrm{Nil}(R)|$. Podobno kot v dokazu leme 4.15 poiščemo $|Z(R)|-|\mathrm{Nil}(R)|$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med poljubnima vozliščema x in y grafa $C(R)$. Denimo, da je $x-y\in\mathrm{Nil}(R)$. Tedaj je po trditvi 3.38 za vsak $z\in Z(R)\backslash\{x-y,0\}$ x—$y+z$—y pot med x in y, takih poti je $|Z(R)|-2$. Ker sta x in y povezana, obstaja skupaj $|Z(R)|-1\geq|Z(R)|-|\mathrm{Nil}(R)|$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med x in y.
Predpostavimo sedaj, da velja $x-y\notin\mathrm{Nil}(R)$. V končnih kolobarjih velja $J(R)=\mathrm{Nil}(R)$ [9, posledica 8.2], zato je po Kitajskem izreku o ostankih kolobar $R/\mathrm{Nil}(R)$ izomorfen končnemu direktnemu produktu končnih obsegov. Po lemi 4.15 obstaja vsaj $|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-1$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med elementoma $x+\mathrm{Nil}(R)$ in $y+\mathrm{Nil}(R)$ v grafu $C(R/\mathrm{Nil}(R))$, označimo jih $p_1,\ldots,p_{(|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-1)}$,

$$p_i: x+\mathrm{Nil}(R)\text{—}x_1^{(i)}+\mathrm{Nil}(R)\text{—}\cdots\text{—}x_{k(i)}^{(i)}+\mathrm{Nil}(R)\text{—}y+\mathrm{Nil}(R).$$

Denimo, da elementa $x+\mathrm{Nil}(R)$ in $y+\mathrm{Nil}(R)$ nista povezana v grafu $C(R/\mathrm{Nil}(R))$. Tedaj imajo vse poti p_i dolžino vsaj 2. Vsak končni komutativni kolobar ima dimenzijo 0, zato je po lemi 4.10 in po trditvi 3.38 za vsak $m\in\mathrm{Nil}(R)$

$$q_{i,m}: x\text{—}x_1^{(i)}+m\text{—}v_1^{(i)}+m\text{—}\cdots\text{—}x_{k(i)}^{(i)}+m\text{—}y$$

pot med x in y v grafu $C(R)$. Ko m preteče množico $\mathrm{Nil}(R)$ in i preteče množico $\{1,\ldots,|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-1\}$, dobimo $|\mathrm{Nil}(R)|(|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-1)$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med x in y oblike $q_{i,m}$.
Denimo sedaj, da sta elementa $x+\mathrm{Nil}(R)$ in $y+\mathrm{Nil}(R)$ povezana v grafu $C(R/\mathrm{Nil}(R))$. Tedaj sta po lemi 4.10 elementa x in y povezana v grafu $C(R)$. Nadalje po lemi 4.15 obstaja vsaj $|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-2$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med $x+\mathrm{Nil}(R)$ in $y+\mathrm{Nil}(R)$ v grafu $C(R/\mathrm{Nil}(R))$ dolžine vsaj 2 in podobno kot prej dobimo $|\mathrm{Nil}(R)|(|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-2)$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med x in y v grafu $C(R)$ oblike $q_{i,m}$. Za vsak $m\in\mathrm{Nil}(R)\backslash\{0\}$ obstaja še pot

$$x\text{—}x+m\text{—}y\ (\text{in } x\text{—}y+m\text{—}y).$$

Torej imamo v obeh primerih skupaj vsaj $|\mathrm{Nil}(R)|(|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-1)$ paroma med seboj notranje disjunktnih poti med elementoma x in y v grafu $C(R)$. Po lemi 4.10 velja $Z(R/\mathrm{Nil}(R))=\{z+\mathrm{Nil}(R),z\in Z(R)\}$. Iz $|\{z+\mathrm{Nil}(R),z\in Z(R)\}|=|Z(R)+\mathrm{Nil}(R)|/|\mathrm{Nil}(R)|$ sledi $|\mathrm{Nil}(R)|(|Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-1)=|\mathrm{Nil}(R)||Z(R/\mathrm{Nil}(R))|-$

$|\mathrm{Nil}(R)| = |Z(R) + \mathrm{Nil}(R)| - |\mathrm{Nil}(R)| = |Z(R)| - |\mathrm{Nil}(R)|$, zadnja enakost sledi po trditvi 3.38. Zato je $\kappa(C(R)) \geq |Z(R)| - |\mathrm{Nil}(R)|$.
Pokažimo še, da velja $\kappa(C(R)) \leq |Z(R)| - |\mathrm{Nil}(R)|$. Naj bo H graf, ki ga dobimo iz $C(R)$, ko odstranimo vozlišča iz množice $Z(R)\backslash\mathrm{Nil}(R)$. Graf H sestavljajo vozlišča iz množice $\mathrm{Reg}(R) \cup \mathrm{Nil}(R)$. Izberimo $x \in \mathrm{Reg}(R)$, $y \in \mathrm{Nil}(R)$ in denimo, da velja $z := x - y \in Z(R)$. Tedaj je po trditvi 3.38 element $x = y + z$ delitelj niča, kar je protislovje. Zato sta podgrafa grafa H, inducirana z množicama $\mathrm{Reg}(R)$ in $\mathrm{Nil}(R)$ neprazna in disjunktna in je $Z(R)\backslash\mathrm{Nil}(R)$ vozliščna prerezna množica. Sledi $\kappa(C(R)) \leq |Z(R)| - |\mathrm{Nil}(R)|$. □

Naj bo G končni graf in $X, Y \subseteq V(G)$ podmnožici vozlišč grafa G. Označimo $E(X,Y)$ množico vseh povezav, ki imajo eno vozlišče v množici X in eno vozlišče v množici Y in naj bo $e(X,Y)$ število le-teh. Naj bo $\partial(X) := E(X, X^{\mathsf{c}})$ in definirajmo preslikavo $d\colon 2^{V(G)} \to \mathbb{N}$ s predpisom $d(X) := |\partial(X)|$. *Atom* grafa G je minimalna podmnožica $X \subseteq V(G)$, za katero velja $d(X) = \kappa'(G)$ in $|X| \leq |V(G)|/2$. Vsak graf vsebuje vsaj en atom, saj velja $d(X) = d(X^{\mathsf{c}})$ za vsak $X \subseteq V(G)$. Očitno je $d(\emptyset) = d(V(G)) = 0$. Če je X atom grafa G in $\emptyset \neq Y \subsetneq X$, tedaj zaradi minimalnosti X velja $d(Y) > d(X)$.

Trditev 4.17. *Naj bo G graf in X ter Y poljubni podmnožici množice $V(G)$. Tedaj velja*
$$d(X \cup Y) + d(X \cap Y) \leq d(X) + d(Y).$$

Dokaz. Velja
$$\begin{aligned} d(X \cap Y) &= e(X \cap Y, Y\backslash X) + e(X \cap Y, X\backslash Y) + e(X \cap Y, (X \cup Y)^{\mathsf{c}}) \\ &\leq e(X, Y\backslash X) + e(Y, X\backslash Y) + e(X \cap Y, (X \cup Y)^{\mathsf{c}}), \end{aligned}$$
sledi
$$\begin{aligned} d(X \cup Y) &= (d(X) - e(X, Y\backslash X)) + (d(Y) - e(Y, X\backslash Y)) - e(X \cap Y, (X \cup Y)^{\mathsf{c}}) \\ &\leq d(X) + d(Y) - d(X \cap Y). \end{aligned}$$
□

Če za realno funkcijo f, definirano na družini podmnožic množice S, za vsaki podmnožici $X, Y \subseteq S$ velja
$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y),$$
pravimo, da je funkcija f *submodularna.* Prejšnja trditev pravi, da je funkcija d submodularna.

Trditev 4.18. *Različni atomi grafa so paroma med seboj disjunktni.*

Dokaz. Naj bosta X in Y poljubna različna atoma grafa G in denimo, da velja $X \cap Y \neq \emptyset$, torej $X \cap Y^{\mathsf{c}} \subsetneq X$. Iz minimalnosti atomov X in Y sledi $X \cap Y^{\mathsf{c}} \neq \emptyset$. Ker sta množici $X^{\mathsf{c}} \cup Y$ in $X \cap Y^{\mathsf{c}}$ komplementarni, velja
$$d(X^{\mathsf{c}} \cup Y) = d(X \cap Y^{\mathsf{c}}) > d(X) = d(Y),$$
zato je $X^{\mathsf{c}} \cup Y \neq Y$, iz česar sledi $X \cup Y \neq V(G)$. Torej velja $\emptyset \neq X \cap Y \subseteq X \cup Y \subsetneq V(G)$ in sledi
$$d(X \cup Y) \geq d(X) \text{ in } d(X \cap Y) \geq d(Y).$$
Ker je funkcija d submodularna, sledi
$$d(X \cap Y) \leq d(X) + d(Y) - d(X \cup Y) \leq d(X) + d(Y) - d(X) = d(Y),$$

zato je $d(X \cap Y) = d(Y)$. Toda množica $X \cap Y$ je strogo manjša od množice Y, zato je to protislovje z minimalnostjo atoma Y. $\square$

Izrek 4.19. *Naj bo G povezani s-regularni vozliščno tranzitivni graf. Potem je $\kappa'(G) = s$.*

Dokaz. Naj bo X atom grafa G in $u, v \in X$. Ker je graf G vozliščno tranzitiven, obstaja tak $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$, da je $\theta(u) = v$. Ker je θ izomorfizem, je tudi $\theta(X)$ atom grafa G. Velja $v \in X \cap \theta(X)$, zato po trditvi 4.18 velja $X = \theta(X)$. Torej je preslikava $\theta|_X$ avtomorfizem grafa $G[X]$, tj. grafa, induciranega z vozlišči iz X. Ker sta bili vozlišči u in v poljubni, je graf $G[X]$ vozliščno tranzitiven in posledično k-regularen za neko naravno število k. Velja $|X| \geq k + 1$. Ker je G povezan, obstaja vozlišče iz množice X, ki je povezano z nekim vozliščem iz X^{c}, zato ima le-to stopnjo vsaj $k + 1$. Sledi $s \geq k + 1$ in

$$\kappa'(G) = d(X) = |X|(s - k) \geq (k + 1)(s - k) = s + k(s - k - 1) \geq s.$$

Povezavna povezanost grafa očitno ne more biti večja od stopnje poljubnega vozlišča, zato je $\kappa'(G) = s$. $\square$

Posledica 4.20. *Naj bo R končni kolobar in $Z(R) \not< (R, +)$. Potem velja $\kappa'(C(R)) = |Z(R)| - 1$.*

4.1. **Eulerjevost in hamiltonskost Cayleyjevega grafa.** Vemo, da je graf Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa njegova vozlišča sode stopnje in vsa vozlišča z neničelno stopnjo ležijo v isti komponenti za povezanost.

Posledica 4.21. *Cayleyjev graf $C(R)$ kolobarja R je Eulerjev natanko tedaj, ko je bodisi R cel bodisi velja $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$ in je $Z(R)$ lihe moči.*

Pokazali bomo, da je Cayleyjev graf končnega kolobarja R hamiltonski natanko tedaj, ko je povezan. Naj bo G končna grupa in označimo id enoto grupe G. *Zaporedje na grupi G* je končno zaporedje z elementi iz G. Naj bo $S = [s_1, \ldots, s_n]$ zaporedje na grupi G. Naj bo $\pi_i(S) := \pi_{j=1}^{i} s_j$ *i-ti delni produkt* zaporedja S. Pravimo, da je zaporedje S na grupi G *hamiltonsko*, če velja $n = |G|$, $\pi_n(S) = \mathrm{id}$ in delni produkti $\pi_i(S)$ pretečejo grupo G, tj. za vsak $g \in G$ obstaja tak $i \in \{1, \ldots, n\}$, da je $g = \pi_i(S)$. *Obratno zaporedje* zaporedja S je zaporedje $S^{-1} := [s_n^{-1}, \ldots, s_1^{-1}]$. Naj bo $\overline{S} := [s_1, \ldots, s_{n-1}]$, $\hat{S} := [s_2, \ldots, s_{n-1}]$ in $z_S = s_n$ zadnji element zaporedja S. *Produkt zaporedij* $S = [s_1, \ldots, s_n]$ in $T = [t_1, \ldots, t_m]$ je zaporedje $ST := [s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m]$. Naj bo $M \subseteq G$ poljubna podmnožica grupe G. Če so vsi elementi zaporedja S iz množice M, potem je S *M-zaporedje* na grupi G. Označimo $M^* := (M \cup M^{-1}) \backslash \{\mathrm{id}\}$ in $\mathscr{H}(M, G)$ vsa hamiltonska M^*-zaporedja na grupi G.

Lema 4.22. *Cayleyjev graf končnega kolobarja R je hamiltonski natanko takrat, ko obstaja neko hamiltonsko $Z(R)$-zaporedje na aditivni grupi $(R, +)$.*

Dokaz. Naj bo $x_1 — \cdots — x_n — x_1$ hamiltonski cikel grafa $C(R)$. Tedaj je $S = [x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_n - x_1]$ $Z(R)$-zaporedje na grupi $(R, +)$ dolžine $n = |R|$. Velja $\pi_i(S) = x_1 - x_{i+1}$ za $i = 1, \ldots, n - 1$ in $\pi_n(S) = 0$, zato je zaporedje S hamiltonsko. Obratno, naj bo $S = [z_1, \ldots, z_n]$ hamiltonsko $Z(R)$-zaporedje na grupi $(R, +)$. Po definiciji hamiltonskega zaporedja na grupi sledi, da je $\pi_1(S) — \cdots — \pi_n(S) — \pi_1(S)$ hamiltonski cikel grafa $C(R)$. $\square$

Lema 4.23. *Naj množica M generira končno komutativno grupo G in naj bo $M' \subseteq M$ taka njena podmnožica, da velja $\mathscr{H}(M', \langle M' \rangle) \neq \emptyset$. Potem je tudi $\mathscr{H}(M, \langle M \rangle) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Če je $M \backslash M' = \emptyset$, potem lema očitno velja. Sicer naj bo $g \in M \backslash M'$ in $S \in \mathscr{H}(M', \langle M' \rangle)$ hamiltonsko M'^*-zaporedje, ki obstaja po predpostavki. Skonstruirajmo hamiltonsko $(M' \cup g)^*$-zaporedje na grupi $\langle M', g \rangle$. Naj bo n najmanjše tako naravno število, da je $g^n \in \langle M' \rangle$. Vsak element grupe $\langle M', g \rangle$ mora biti enak natanko enemu delnemu produktu iskanega zaporedja. Delni produkti $\pi_i(S)$ zaporedja S so ravno elementi grupe $\langle M' \rangle$. Če vsakega od delnih produktov $\pi_i(S)$ pomnožimo z g^i za $i = 1, \ldots, n-1$, dobimo natanko vse elemente grupe $\langle M', g \rangle$. Denimo, da je n liho število. Tedaj je

$$\overline{S}([g]\hat{S}^{-1}[g]\hat{S})^{\frac{n-1}{2}}[z_S][g^{-1}]^{n-1}$$

iskano hamiltonsko $(M' \cup g)^*$-zaporedje na grupi $\langle M', g \rangle$. Če pa je n sodo število, pa je iskano zaporedje

$$\overline{S}([g]\hat{S}^{-1}[g]\hat{S})^{\frac{n-2}{2}}[g]\overline{S}^{-1}[g^{-1}]^{n-1}.$$

Če velja $G = \langle M', g \rangle$, smo končali, sicer postopek nadaljujemo. Ker je množica M končna, se postopek v končno mnogo korakih konča. □

Posledica 4.24. *Cayleyjev graf $C(R)$ končnega kolobarja R je hamiltonski natanko tedaj, ko je povezan.*

Dokaz. Naj bo graf $C(R)$ povezan, torej velja $(R, +) = \langle Z(R) \rangle$. Ker je $C(R)$ povezan, kolobar R ni cel, zato vsebuje neki neničelni delitelj niča z. Naj bo n red elementa z aditivne grupe $(R, +)$. Tedaj je $S = [z]^n$ hamiltonsko $\{z\}^*$-zaporedje na ciklični aditivni grupi $\langle z \rangle$. Po lemi 4.23 sledi, da obstaja hamiltonsko $Z(R)$-zaporedje na grupi $(R, +)$, zato je po lemi 4.22 graf $C(R)$ hamiltonski. □

4.2. **Kvocientni graf Cayleyjevega grafa.** Naj bo G graf in $x \in V(G)$. Naj bo $N(x)$ množica sosedov vozlišča x in $N[x] := N(x) \cup \{x\}$. Vpeljimo ekvivalenčno relacijo na vozliščih grafa G na naslednji način:

$$x \sim y \iff N[x] = N[y].$$

Kvocientni graf $G/_\sim$ grafa G ima za vozlišča kvocientne razrede $\{[x]; x \in G\}$ relacije $\sim$, vozlišči $[x]$ in $[y]$ sta povezani natanko tedaj, ko sta povezani vozlišči x in y v grafu G.

Izrek 4.25. *Naj bo R komutativni kolobar, naj bo $Z(R)$ končna unija minimalnih praidealov kolobarja R in $x, y \in R$ poljubni vozlišči grafa $C(R)$. Potem je $N[x] = N[y]$ natanko tedaj, ko je $x - y \in \mathrm{Nil}(R)$.*

Dokaz. Naj bo $x - y \in \mathrm{Nil}(R)$ in naj bo $u \in N[x]$. Tedaj velja $x - u \in Z(R)$. Po trditvi 3.38 je $y - u = (y - x) + (x - u) \in Z(R)$, zato je $u \in N[y]$. Enako pokažemo $N[y] \subseteq N[x]$.
Naj bo $N[x] = N[y]$ in $Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$, kjer so $P_i \in \mathrm{Min}(R)$. Trdimo, da velja $\mathrm{Min}(R) = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Naj bo $P \in \mathrm{Min}(R)$. Po lemi 4.3 je $P \subseteq Z(R) = \cup_{i=1}^n P_i$, zato po praidealskem izogibu velja $P \subseteq P_j$ za neki j in iz minimalnosti sledi $P = P_j$. Definirajmo indeksno množico $A := \{i; x - y \in P_i\}$. Denimo, da velja $A^\mathsf{c} = \{1, \ldots, n\} \backslash A \neq \emptyset$. Po praidealskem izogibu obstaja neki $z \in \bigcap_{i \in A^\mathsf{c}} P_i \backslash \bigcup_{i \in A} P_i$. Pokažimo, da je element $z - x + y$ regularen. Če je $z - x + y \in Z(R) = \bigcup_{i=1}^n P_i$,

potem je $z-x+y \in P_k$ za neki k. Če je $k \in A$, potem je $x-y \in P_k$ in je zato tudi $z \in P_k$, kar je protislovje. Če pa je $k \in A^c$, je $z \in P_k$ in je zato tudi $x-y \in P_k$, kar je spet protislovje. Zato je element $z-x+y$ regularen in je x sosed elementa $z+y$ v grafu $\overline{C(R)}$. Iz $N[x]=N[y]$ sledi, da je tudi y sosed elementa $z+y$ v grafu $\overline{C(R)}$. Sledi $(z+y)-y=z \in \mathrm{Reg}(R)$, kar je protislovje. Zato je $A^c=\emptyset$ in po lemi 4.2 velja $x-y \in \bigcap_{i=1}^n P_i = \mathrm{Nil}(R)$. □

Naj bo R komutativni pollokalni kolobar dimenzije 0. Delitelji niča kolobarja so enaki uniji praidealov. Ker ima R dimenzijo 0, je vsak praideal minimalen in maksimalen. Ker je R pollokalen, je teh končno mnogo. Torej komutativni pollokalni kolobarji dimenzije 0 ustrezajo predpostavkam prejšnjega izreka.

Posledica 4.26. *Naj bo R komutativni pollokalni kolobar dimenzije 0. Potem je $C(R)/_\sim \cong C(R/J(R))$.*

Dokaz. Ker je kolobar R dimenzije 0, ja vsak praideal maksimalen in velja $\mathrm{Nil}(R) = J(R)$. Po izreku 4.25 je $V(C(R/_\sim)) = R/\mathrm{Nil}(R) = R/J(R)$. Po definiciji sta vozlišči $[x]$ in $[y]$ grafa $C(R)/_\sim$ povezani natanko tedaj, ko sta povezana x in y v grafu $C(R)$, to pa je po lemi 4.10 natanko tedaj, ko sta povezana $x+\mathrm{Nil}(R)$ in $y+\mathrm{Nil}(R)$ v grafu $C(R/\mathrm{Nil}(R))$. □

Graf G je *popoln*, če je vsak njegov končni inducirani podgraf H šibko popoln, tj. $\omega(H)=\chi(H)$. *Krepki izrek o popolnih grafih* pravi, da je graf G popoln natanko tedaj, ko niti G niti $\overline{G}$ ne vsebuje lihega induciranega cikla dolžine vsaj 5 [11, izrek 14.18].

Trditev 4.27. *Graf G je popoln natanko tedaj, ko je graf $G/_\sim$ popoln.*

Dokaz. Denimo, da graf $G/_\sim$ ni popoln, torej brez škode za splošnost graf $G/_\sim$ vsebuje lihi inducirani cikel dolžine vsaj 5,

$$[x_1]—\cdots—[x_n]—[x_1], n \geq 5.$$

Tedaj je $x_1—\cdots—x_n—x_1$ lihi inducirani cikel grafa G in zato G ni popoln. Denimo sedaj, da graf G ni popoln. Brez škode za splošnost graf G vsebuje lihi inducirani cikel $x_1—\cdots—x_n—x_1$ dolžine vsaj 5. Ker je dolžine vsaj 5, za vsaka $i \neq j$ obstaja tak x_k, ki je povezan z x_i in ni povezan z x_j v grafu G. Sledi $[x] \neq [y]$ in je $[x_1]—\cdots—[x_n]—[x_1]$ lihi inducirani cikel dolžine vsaj 5 v grafu $G/_\sim$, zato $G/_\sim$ ni popoln. □

Naj bosta $G=(V(G),E(G))$ in $H=(V(H),E(H))$ poljubna grafa. *Direktni produkt* $G \times H$ je graf z vozlišči $V(G\times H) := V(G)\times V(H)$, za katerega velja: vozlišči (u,u') in (v,v') sta povezani natanko tedaj, ko je u povezan z v v grafu G in je u' povezan z v' v grafu H. V nadaljevanju potrebujemo naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazovali [12, izrek A23].

Izrek 4.28. *Direktni produkt $n \geq 2$ končnih grafov jo popoln natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih trditev:*

(1) Velja $n=2$ in vse komponente za povezanost obeh faktorjev so dvodelni grafi ali polni večdelni grafi.

(2) Velja $n \geq 3$ in vsaj en faktor je dvodelni graf.

Trditev 4.29. *Naj bo $n \geq 2$ in $K_{\alpha_1},\dots,K_{\alpha_n}$ polni grafi, kjer je $\alpha_i \geq 2$ za $i=1,\dots,n$ (α_i so lahko tudi neskončni). Graf $G=K_{\alpha_1}\times\cdots\times K_{\alpha_n}$ je popoln natanko tedaj, ko je bodisi $n=2$ bodisi $n\geq 3$ in $\alpha_i=2$ za neki i.*

Dokaz. Izrek 4.28 karakterizira popolnost končnega direktnega produkta končnih grafov, v našem primeru so grafi v direktnem produktu lahko neskončni. Omejiti se moramo na neki končni podgraf grafa G. Denimo, da je graf G popoln. Če je $\alpha_i = 2$ za neki i, ni kaj dokazovati. Naj bo $\alpha_i \geq 3$ za vsak i. Tedaj je $K_3 \times \cdots \times K_3$ inducirani podgraf grafa G in zato popoln. Ker noben faktor ni enak dvodelnemu grafu, po izreku 4.28 sledi $n = 2$.
Obratno, predpostavimo da je bodisi $n = 2$ bodisi $n \geq 3$ in $\alpha_i = 2$ za neki i, brez škode za splošnost naj bo $\alpha_1 = 2$. Naj bo C inducirani cikel v grafu G ali v grafu $\overline{G}$. Tedaj obstajajo taka naravna števila $m_i \geq 2$, da je C inducirani cikel v grafu $K_{m_1} \times \cdots \times K_{m_n}$ ali v grafu $\overline{K_{m_1} \times \cdots \times K_{m_n}}$, ki je podgraf grafa G oziroma $\overline{G}$. Velja bodisi $n = 2$ bodisi $n \geq 3$ in $\alpha_1 = 2 = m_1$, zato je po izreku 4.28 graf $K_{m_1} \times \cdots \times K_{m_n}$ popoln. Torej cikel C ni lih cikel dolžine vsaj 5. Ker je bil cikel C poljuben, po krepkem izreku o popolnih grafih sledi, da je graf G popoln. □

Naj bo $C(R)$ Cayleyjev graf poljubnega kolobarja R. Tedaj sta v njegovem komplementu $\overline{C(R)}$ poljubni vozlišči povezani natanko tedaj, ko je njuna razlika regularni element kolobarja R. Naj bo $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$ za neke kolobarje R_i. Dokažimo, da velja $\overline{C(R)} = \overline{C(R_1)} \times \cdots \times \overline{C(R_n)}$. Množica vozlišč je pri obeh grafih enaka množici $R_1 \times \cdots \times R_n$. Naj bosta $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, \ldots, y_n)$ poljubni vozlišči. Velja

$$xy \in E(\overline{C(R)}) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathrm{Reg}(R_i), \forall i \Leftrightarrow xy \in E(\overline{C(R_1)} \times \cdots \times \overline{C(R_n)}),$$

torej sta grafa res enaka.

Izrek 4.30. *Naj bo R komutativni pollokalni kolobar dimenzije* 0*. Cayleyjev graf $C(R)$ je popoln natanko tedaj, ko velja vsaj ena od naslednjih trditev:*

(1) Velja $|\mathrm{Max}(R)| \leq 2$,

(2) Neki residualni obseg kolobarja R je izomorfen $\mathbb{Z}_2$.

Dokaz. Po posledici 4.26 in trditvi 4.27 izrek zadošča dokazati za graf $C(R/J(R))$. Ker je poljubni graf popoln natanko takrat, ko je popoln njegov komplement, se lahko omejimo na graf $\overline{C(R/J(R))}$. Naj bo $\mathrm{Max}(R) = \{M_1, \ldots, M_n\}$ za neko naravno število n. Če je $n = 1$, velja prva točka iz izreka. Hkrati je v tem primeru kolobar $R/J(R) = R/Z(R)$ celostno polje, zato je graf $\overline{C(R/J(R))}$ poln in zato popoln, torej je v tem primeru ekvivalenca iz izreka izpolnjena na prazno. Denimo sedaj, da velja $n \geq 2$. Po Kitajskem izreku o ostankih velja $R/J(R) \cong R/M_1 \times \cdots \times R/M_n$, iz česar po prejšnjem razmisleku sledi $\overline{C(R/J(R))} \cong \overline{C(R/M_1)} \times \cdots \times \overline{C(R/M_n)}$. Ker so grafi $\overline{C(R/M_i)}$ polni za $i = 1, \cdots, n$, je po trditvi 4.29 graf $\overline{C(R/J(R))}$ popoln natanko tedaj, ko velja bodisi $n = 2$ bodisi $n \geq 3$ in $R/M_i = \mathbb{Z}_2$ za neki i. □

4.3. **Regularni podgraf Cayleyjevega grafa.** Enako kot pri totalnem grafu kolobarja nas zanima še podgraf Cayleyjevega grafa, induciran z regularnimi elementi, označimo ga $\mathrm{Reg}(C(R))$.
Denimo, da velja $\mathrm{Reg}(R) = R^*$. Vemo, da je to res, če je kolobar R naprimer levi artinski ali pa komutativen dimenzije 0. Pokažimo, da je v tem primeru graf $\mathrm{Reg}(C(R))$ vozliščno tranzitiven. Najprej pokažimo, da je množenje s poljubnim elementom $r \in \mathrm{Reg}(R) = R^*$ avtomorfizem grafa $\mathrm{Reg}(C(R))$. Iz $rx = ry$ sledi $r(x - y) = 0$ in zaradi regularnosti r velja $x = y$. Zato je množenje z r injekcija na vozliščih grafa $\mathrm{Reg}(C(R))$. Za poljubno vozlišče $y \in V(\mathrm{Reg}(C(R)))$ velja $r(r^{-1}y) = y$, zato je množenje z r tudi surjekcija. Naj bosta $x, y \in V(\mathrm{Reg}(C(R)))$

sosednji vozlišči. Če je $x - y$ levi delitelj niča, je tudi $rx - rx = r(x - y)$ levi delitelj niča, če pa je $x - y$ desni delitelj niča. obstaja tak neničelni $w \in R$, da velja $w(x - y) = 0$. Sledi $(wr^{-1})r(x - y) = 0$, kjer je element (wr^{-1}) neničeln. Če je $r(x - y)$ delitelj niča, tedaj podobno vidimo, da je $x - y$ delitelj niča. Naj bosta sedaj x in y poljubni vozlišči grafa $\mathrm{Reg}(C(R))$. Velja $(yx^{-1})x = y$, zato je množenje z elementom yx^{-1} avtomorfizem grafa $\mathrm{Reg}(C(R))$, ki preslika x v y, torej je graf $\mathrm{Reg}(C(R))$ vozliščno tranzitiven.
V tem razdelku bomo poiskali klično in kromatično število grafa $\mathrm{Reg}(C(R))$ končnega komutativnega kolobarja R in pokazali, da je graf $\mathrm{Reg}(C(R))$ končnega komutativnega kolobarja R šibko popoln. Najprej si oglejmo naslednjo preprosto trditev iz teorije množic.

Trditev 4.31. *Naj bodo $M_1, \ldots, M_n$ poljubne podmnožice množice X. Tedaj velja*

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \setminus \bigcap_{i=1}^{n} M_i = \bigcup_{\emptyset \neq I \subsetneq \{1,\ldots,n\}} \Big(\bigcap_{i \in I} M_i \setminus \bigcup_{i \in I^{\mathsf{c}}} M_i \Big).$$

Dokaz. Če so vse podmnožice enake, potem trditev očitno drži. Sicer naj bo $x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i \setminus \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. Tedaj obstaja taka indeksna množica $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, da je $x \in \bigcap_{i \in I} M_i \setminus \bigcup_{i \in I^{\mathsf{c}}} M_i$. Denimo sedaj, da velja $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} M_i \setminus \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. Tedaj je bodisi $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} M_i)^{\mathsf{c}}$ bodisi $x \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, v obeh primerih velja $x \notin \bigcup_{\emptyset \neq I \subsetneq \{1,\ldots,n\}} (\bigcap_{i \in I} M_i \setminus \bigcup_{i \in I^{\mathsf{c}}} M_i)$. □

Izrek 4.32. *Naj bo R komutativni kolobar, ki ni celostno polje. Naj velja $|\mathrm{Min}(R)| < \infty$, naj bo $Z(R)$ unija končno mnogo idealov kolobarja R in naj graf $\mathrm{Reg}(C(R))$ ne vsebuje neskončne klike. Tedaj je R končen.*

Dokaz. Očitno je množica $1+\mathrm{Nil}(R) \subseteq \mathrm{Reg}(R)$ klika v grafu $\mathrm{Reg}(C(R))$, vsebovanost sledi po trditvi 3.38. Ker po predpostavki graf $\mathrm{Reg}(C(R))$ ne vsebuje neskončne klike, je množica $1 + \mathrm{Nil}(R)$ končna, zato je tudi $\mathrm{Nil}(R)$ končen. Predpostavimo, da R vsebuje neničelni nilpotentni element w. Denimo da je $\mathrm{Reg}(R)$ neskončna množica. Za vsak $x \in \mathrm{Reg}(R)$ je element xw očitno nilpotenten. Ker je $\mathrm{Nil}(R)$ končen, obstaja taka neskončna podmnožica $A \subseteq \mathrm{Reg}(R)$, da za vsaka $u, v \in A$ velja $uw = vw$, iz česar sledi $(u - v)w$ in $u - v \in Z(R)$. Torej množica A tvori neskončno kliko v grafu $\mathrm{Reg}(C(R))$, kar je protislovje. Zato ima R končno mnogo regularnih elementov in po izreku 3.22 sledi, da je R končen.
Naj bo sedaj R reduciran in naj bo $\mathrm{Min}(R) = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Po lemi 4.3 je $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Za vsako indeksno množico $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ definirajmo množico

$$M(I) := \bigcap_{i \in I} P_i \setminus \bigcup_{i \in I^{\mathsf{c}}} P_i.$$

Po praidealskem izogibu obstaja neki $x \in \bigcap_{i \in I^{\mathsf{c}}} P_i \setminus \bigcup_{i \in I} P_i$. Pokažimo, da je za vsak $y \in M(I)$ element $x + y$ regularen. Denimo nasprotno, naj bo $x + y \in Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Tedaj obstaja tak k, da je $x + y \in P_k$. Če je $k \in I$, potem je $y \in P_k$, zato je tudi $x \in P_k$ kar je protislovje. Podobno sklepamo, da k ni v I^{c}. Torej je element $x + y$ regularen za vsak $y \in M(I)$ in množica $\{x + y; y \in M(I)\}$ tvori kliko v grafu $\mathrm{Reg}(C(R))$, saj velja $(x + y_1) - (x + y_2) = y_1 - y_2 \in \cap_{i \in I} P_i \subseteq Z(R)$, zato je le-ta končna in je končna tudi množica $M(I)$.

Ker je R reduciran, po lemi 4.2 velja $\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{i=1}^n P_i = \{0\}$. Po trditvi 4.31 sledi

$$Z(R)\backslash\{0\} = Z(R)\backslash \bigcap_{i=1}^n P_i = \bigcup_{i=1}^n P_i \backslash \bigcap_{i=1}^n P_i = \bigcup_{\emptyset \neq I \subsetneq \{1,\dots,n\}} M(I),$$

zato je $|Z(R)| < \infty$. Ker R ni celostno polje, je po izreku 2.36 kolobar R končen. $\square$

Naj bo R končni lokalni kolobar z maksimalnim idealom M, $k := |R/M|$ in $R/M = \{f_1 + M, \dots, f_k + M\}$. Naj bo x poljubni element kolobarja R in $\pi : R \to R/M$ kanonični homomorfizem. Velja $\pi(x) = f_i + M$ za neki i. Označimo $\overline{x} := x - f_i$.

Trditev 4.33. *Naj bo $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ končni komutativni kolobar, kjer so (R_i, M_i) lokalni kolobarji. Potem velja $\chi(\mathrm{Reg}(C(R))) \leq |M_1| \cdots |M_n| \chi(\mathrm{Reg}(C(R_1/M_1 \times \cdots \times R_n/M_n)))$.*

Dokaz. Naj bo $\pi_i \colon R_i \to R_i/M_i$ naravni homomorfizem za $i = 1, \dots, n$. Element $(x_1, \dots, x_n) \in R_1 \times \cdots \times R_n$ je regularen natanko tedaj, ko je $x_i \notin Z(R_i) = M_i$ za vsak i, kar je natanko tedaj, ko je element $(\pi_1(x_1), \dots, \pi_n(x_n)) \in R_1/M_1 \times \cdots \times R_n/M_n$ regularen. Naj bo ϕ pravilno barvanje grafa $\mathrm{Reg}(C(R_1/M_1 \times \cdots \times R_n/M_n))$. Definirajmo barvanje f grafa $\mathrm{Reg}(C(R))$ takole:

$$f \colon \mathrm{Reg}(R) \to M_1 \times \cdots \times M_n \times \{1, \dots, \chi(\mathrm{Reg}(C(R_1/M_1 \times \cdots \times R_n/M_n)))\},$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \phi(\pi_1(x_1), \dots, \pi_n(x_n))).$$

Naj bosta $(x_1, \dots, x_n)$ in $(y_1, \dots, y_n)$ vozlišči grafa $\mathrm{Reg}(C(R))$ enake barve in naj velja $x_i - y_i \in Z(R_i) = M_i$ za neki i. Velja $\phi(\pi_1(x_1), \dots, \pi_n(x_n)) = \phi(\pi_1(y_1), \dots, \pi_n(y_n))$. Ker je $\pi_i(x_i) = \pi_i(y_i)$ in je barvanje ϕ pravilno, velja $(\pi_1(x_1), \dots, \pi_n(x_n)) = (\pi_1(y_1), \dots, \pi_n(y_n))$. Iz $\overline{x_j} = \overline{y_j}$ sledi $x_j = y_j$ za $j = 1, \dots, n$, torej je barvanje f pravilno. $\square$

Trditev 4.34. *Naj bo $n \geq 2$ in naj bodo $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_n$ končni obsegi, $|\mathbb{F}_1| \leq \cdots \leq |\mathbb{F}_n|$. Tedaj velja $\chi(\mathrm{Reg}(C((\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n))) \leq |\mathbb{F}_2^*| \cdots |\mathbb{F}_n^*|$.*

Dokaz. Za $i = 1, \dots, n$ naj bo $\mathbb{F}_i^* = \{f_{i,1}, \dots, f_{i,|\mathbb{F}_i^*|}\}$ in definirajmo barvanje g grafa $\mathrm{Reg}(C(\mathbb{F}_1 \times \ldots \times \mathbb{F}_n))$ takole:

$$g \colon \mathbb{F}_1^* \times \cdots \times \mathbb{F}_n^* \to \mathbb{F}_2^* \times \cdots \times \mathbb{F}_n^*,$$
$$(f_{1,i_1}, \dots, f_{n,i_n}) \mapsto (f_{2,(i_1+i_2)(\mathrm{mod}\ |\mathbb{F}_2^*|)+1}, \dots, f_{n,(i_1+i_n)(\mathrm{mod}\ |\mathbb{F}_n^*|)+1}).$$

Naj bosta $x = (f_{1,i_1}, \dots, f_{n,i_n})$ in $y = (f_{1,j_1}, \dots, f_{n,j_n})$ vozlišči grafa $\mathrm{Reg}(C(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n))$ enake barve in naj velja $f_{k,i_k} = f_{k,j_k}$ oziroma $i_k = j_k$ za neki $k \in \{1, \dots, n\}$. Denimo, da je $k = 1$, torej $i_1 = j_1$. Ker sta x in y enake barve, velja $f_{l,(i_1+i_l)(\mathrm{mod}\ |\mathbb{F}_l^*|)+1} = f_{l,(j_1+j_l)(\mathrm{mod}\ |\mathbb{F}_l^*|)+1}$ za vsak $l = 2, \dots, n$, sledi $i_l = j_l$ za vsak $l = 2, \dots, n$, torej je $x = y$. Če pa je $i_k = j_k$ za neki $k \geq 2$, potem iz $f_{l,(i_1+i_k)(\mathrm{mod}\ |\mathbb{F}_k^*|)+1} = f_{l,(j_1+j_k)(\mathrm{mod}\ |\mathbb{F}_k^*|)+1}$ sledi $i_1 = j_1$, saj velja $|\mathbb{F}_1^*| \leq \cdots \leq |\mathbb{F}_n^*|$. Zato je enako kot prej tudi v tem primeru $x = y$. Torej je g pravilno barvanje grafa $\mathrm{Reg}(C(\mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n))$. $\square$

Izrek 4.35. *Naj bo $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ končni komutativni kolobar, kjer so (R_i, M_i) lokalni kolobarji. Če velja $|R_1/M_1| \leq \cdots \leq |R_n/M_n|$, potem je $\omega(\mathrm{Reg}(C(R))) = \chi(\mathrm{Reg}(C(R))) = |M_1|(|R_2| - |M_2|) \cdots (|R_n| - |M_n|)$.*

Dokaz. Če je (R, M) lokalni kolobar, potem je po drugi točki leme 4.1 graf $\mathrm{Reg}(C(R))$ disjunktna unija $|R/M| - 1$ polnih grafov $K_{|M|}$, torej očitno velja

$\omega(\mathrm{Reg}(C(R))) = \chi(\mathrm{Reg}(C(R))) = |M|$. Denimo sedaj, da je $n \geq 2$. Ker velja $|R_1/M_1| \leq \cdots \leq |R_n/M_n|$, po trditvah 4.33 in 4.34 sledi

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{Reg}(C(R))) &\leq |M_1|\cdots|M_n|\chi(\mathrm{Reg}(C(R_1/M_1\times\cdots\times R_n/M_n)))\\ &\leq |M_1|\cdots|M_n|(|R_2/M_2|-1)\cdots(|R_n/M_n|-1)\\ &= |M_1|(|R_2|-|M_2|)\cdots(|R_n|-|M_n|).\end{aligned}$$

Množica $(1+M_1)\times(R_2\backslash M_2)\times\cdots\times(R_n\backslash M_n)$ očitno tvori kliko v grafu $\mathrm{Reg}(C(R))$, zato je $\omega(\mathrm{Reg}(C(R))) \geq |M_1|(|R_2|-|M_2|)\cdots(|R_n|-|M_n|)$ in rezultat sledi. $\square$

Literatura

[1] D.F. Anderson, A. Badawi, *The total graph of a commutative ring*, J. Algebra 300 (2008), 2706-2719.

[2] M.H. Shekarizz, M.H. Shirdareh Haghighi, H. Sharif, *On the total graph of a finite commutative ring*, Comm. Algebra **40** (2012), 2798-2807.

[3] S. Akbari, F. Heydari, *The regular graph of a noncommutative ring*, Bull. Aust. Math. Soc. **89** (2014), 132-140.

[4] S. Akbari, F. Heydari, *The regular graph of a commutative ring*, Period. Math. Hung. **67(2)** (2013), 211-220.

[5] D. Dolžan, P. Oblak, *The total graphs of finite rings*, Comm. Algebra **43** (2015), 2903-2911.

[6] G. Aalipour, S. Akbari, *On the Cayley graph of a commutative ring with respect to its zero divisors*, Cornell University library (2013).

[7] I. Kaplansky, *Commutative Rings, rev. ed.*, University of Chicago Press, 1974.

[8] R.Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra, Second edition*, Cambridge University Press, 2000.

[9] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[10] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph theory with Applications*, Elsevier Publising Company, New York, 1976.

[11] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer **244**, New York, 2008.

[12] W. Imrich, S. Klavžar, *Product graphs, Structure and recognition*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[13] *About reduced rings (1)*, [ogled 22. 6. 2015], dostopno na `https://ysharifi.wordpress.com/2010/06/04/about-reduced-rings-1/`.