Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Matematika – 2. stopnja

Domen Močnik

HAMILTONOV PRINCIP V MEHANIKI KONTINUUMA

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Igor Dobovšek

Ljubljana, 2015

Podpisani Domen Močnik izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom *Hamiltonov princip v mehaniki kontinuuma* izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Igorja Dobovška in

- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 27.8.2015 Podpis: ....

Zahvala

Svojemu mentorju izr. prof. dr. Igorju Dobovšku se iskreno zahvaljujem za njegove nasvete in za njegov čas ter trud, ki ga je vložil v pregledovanje nastajajočega magistrskega dela. Hkrati se mu zahvaljujem še za vse izposojene knjige in za omogočen individualen študij mehanike kontinuuma s konzultacijami, saj se predmet na fakulteti ni izvajal s predavanji.

Ljubljana, avgust 2015 Domen Močnik

Kazalo

1 Uvod **1**

2 Sredstva iz matematične analize **3**
2.1 Odvod na Banachovem prostoru 3
2.2 Tenzorska analiza 5
2.2.1 Evklidski prostor 5
2.2.2 Tenzorji drugega reda 7
2.2.3 Tenzorska polja, gradient in divergenca 11
2.2.4 Integralski izreki 13
2.3 Krivuljne koordinate 15
2.3.1 Koordinatni sistem 15
2.3.2 Koordinatna transformacija 16
2.3.3 Gradient in kovariantni odvod 17
2.3.4 Divergenca 20

3 Materialno telo **21**
3.1 Konfiguracije in gibanje telesa 21
3.2 Materialni in prostorski opis 24
3.3 Površinski in prostorninski element 25
3.4 Transportni izrek 28
3.5 Zakon o ohranitvi mase 30

4 Hamiltonov princip in variacijske metode **32**
4.1 Dopustno gibanje in variacija 32
4.2 Hamiltonov princip 35
4.2.1 Kinetična energija 35
4.2.2 Potencialna energija 36
4.2.3 Hamiltonov funkcional in Hamiltonov princip 38
4.3 Osnovne leme variacijskega računa 40
4.4 Primera 43
4.4.1 Elastični fluid 44

4.4.2 Hiperelastično trdno telo 45

A Konstitucijske enačbe za izotropno hiperelastično trdno telo 48

A.1 Sprememba opazovališča in objektivnost 48

A.2 Materialne simetrije 51

A.3 Izotropna trdna hiperelastična telesa 53

Zaključek 57

Program dela

V magistrski nalogi prikažite uporabo Hamiltonovega principa v mehaniki kontinuuma. Definirajte potrebne kinematične relacije in dinamične zakone gibanja ter pripadajoče ohranitvene zakone na primerljivi matematični ravni predlagane literature. Izbrani pristop uporabite pri izpeljavi osnovnih enačb, ki opisujejo materijalne lastnosti elastičnega fluida in elastičnega trdnega telesa.

Za temeljni vir literature uporabite izbrana poglavja iz knjig:

- A. Bedford, Hamilton's principle in continuum mechanics, Pitman Advanced Publishing Program, 1985;
- I-Shih Liu, Continuum mechanics, Springer, 2002;
- J. E. Marsden, T. R. J. Hughes, Mathematical foundations of elasticity, Dover Publications, Inc., 1994.

izr. prof. dr. Igor Dobovšek

Hamiltonov princip v mehaniki kontinuuma

Povzetek

Namen mehanike kontinuuma je raziskovanje gibanja materialnih teles pod vplivom sil v skladu z zakoni narave. Klasičen pristop za iskanje enačb gibanja vključuje uporabo Eulerjevih in Newtonovih zakonov. Alternativni pristop je variacijski, s pomočjo Hamiltonovega principa. Pri tem pristopu se pravo gibanje materialnega telesa išče kot stacionarno točko Hamiltonovega energijskega funkcionala. V klasičnih teorijah fluidov in deformabilnih teles je problem iskanja pravega gibanja mogoče postaviti kot primer variacijske naloge na prostoru vseh dopustnih gibanj, enačbe gibanja, ki izhajajo iz potrebnih pogojev za nastop stacionarne točke funkcionala, pa je mogoče poiskati s pomočjo ustrezno definiranih testnih funkcij.

Hamilton's principle in continuum mechanics

Abstract

The purpose of continuum mechanics is investigation of motion of material bodies under the influence of forces according to the laws of nature. Finding the equations of motion by classical approach includes Euler and Newton laws. Alternative approach is variational, by using Hamilton's principle. With this principle the true motion is found as a stationary point of Hamilton's energy functional. For classical theories of fluid and solid mechanics, searching of true motion can be put as an example of variational task on the space of all admissible motions. Equations of motion, which originate from necessary conditions for occurrence of sationary point of the functional, can be found with properly defined test functions.

Math. Subj. Class. (2010): 49S05, 70H25, 74A05, 74A10, 74A20

Ključne besede: Hamiltonov princip, Mehanika kontinuuma

Keywords: Hamilton's principle, Continuum mechanics

Notacija

oznaka	pomen
$A \times B$	kartezični produkt množic A in B
A^{C}	komplement množice A
$A \setminus B$	razlika množic A in B, $A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{C}}$
$f \circ g$	kompozitum preslikav f in g, $(f \circ g)(a) = f(g(a))$
$f(A)$	slika množice A s preslikavo f, $f(A) = \{f(a)\ ;\ a \in A\}$
f^{-1}	inverzna preslikava preslikave f
$\mathscr{L}(V, W)$	prostor vseh omejenih linearnih preslikav iz Banachovega prostora V v Banachov prostor W
$\mathscr{L}(V)$	krajša oznaka za $\mathscr{L}(V, V)$
$\langle u, v \rangle$	skalarni produkt elementov u in v nekega vektorskega prostora s skalarnim produktom
$\\|u\\|$	norma elementa u nekega normiranega vektorskega prostora
$\mathscr{V}$	trirazsežni evklidski vektorski prostor
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$	vektorski produkt vektorjev $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$
$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$	tenzorski produkt vektorjev $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$; $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$, $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}\ \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathscr{V}$
$\mathrm{tr}\mathbf{A}$	sled linearne preslikave $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$
$\det \mathbf{A}$	determinanta linearne preslikave $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$
$\mathbf{A}^T$	transponirana linearna preslikava od $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$; $\langle \mathbf{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathbf{A}^T \boldsymbol{v} \rangle\ \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$
$\mathbf{A}^{-T}$	$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$
∂B	rob množice B, ki je podmnožica nekega metričnega prostora
$\overline{B}$	zaprtje množice B
$\delta^i{}_j$	Kroneckerjev delta, $\delta^i{}_j = 1$, če je $i = j$, in 0 sicer

Dogovor o seštevanju. Če se v izrazu pojavi indeks natanko dvakrat, potem se izraz sešteva po zalogi vrednosti tega indeksa. Privzeta zaloga vrednosti vseh indeksov bo $\{1, 2, 3\}$, razen če ne bo navedeno drugače. Primer:

$$u^i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} u^i \boldsymbol{e}_i, \qquad g_{ij} u^i v^j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} u^i v^j.$$

Poglavje 1

Uvod

V mehaniki kontinuuma se enačbe gibanja fizikalnega telesa navadno izpelje na klasičen način preko Newtonovih in Eulerjevih zakonov, ki povezujejo gibanje telesa s silami in momenti, ki delujejo na telo. Alternativni pristop za izpeljavo enačb gibanja telesa je Hamiltonov princip, ki je po svoji naravi variacijski pristop. Pri Hamiltonovem principu med vsemi možnimi gibanji poiščemo pravo gibanje kot minimum Hamiltonovega energijskega funkcionala.

Kdor se je že srečal s klasično mehaniko, verjetno pozna princip virtualnega dela, ki je tudi variacijski princip, vendar je namenjen statiki. Hamiltonov princip lahko smatramo kot posplošitev principa virtualnega dela za primer dinamike.

William Rowan Hamilton (1805-1865) je bil irski fizik in matematik, ki se je v svojih zgodnjih raziskovalnih letih ukvarjal z optiko. Njegova teorija žarkov je bila variacijska, temeljila je na predpostavki, da svetlobni žarek potuje od ene točke prostora do druge po poti, za katero porabi najmanj časa. Med svojim delom na področju optike je začel razmišljati tudi o razvoju podobne teorije za dinamične sisteme delcev. Leta 1835 je nato tudi objavil članek, v katerem je predstavil svoj rezultat, ki je danes poznan pod imenom Hamiltonov princip.

Hamiltonovo delo na področju dinamike je bilo prepoznano in cenjeno, toda z vidika uporabnosti precej zapostavljeno vse do začetka dvajsetega stoletja, ko so takratni fiziki spoznali, da Hamiltonova formulacija ponuja najbolj naravno razširitev za takrat razvijajočo se teorijo kvantne mehanike. Ravno Hamiltonovo formalno povezavo med optiko in klasično mehaniko se ima za predhodnika kvantne mehanike.

V klasični mehaniki je bil Hamiltonov princip sprva uveden za sisteme delcev, kjer se obravnava dinamiko končnega števila točkastih masnih delcev. Ta princip je bil kmalu za tem razširjen za kontinuum, vendar se ga z redkimi izjemami sprva ni uporabljalo, saj se je dalo dobiti enake rezultate s pomočjo drugih, bolj direktnih metod. Do izraza je prišel s posplošitvijo klasičnih teorij v mehaniki fluidov ter v mehaniki deformabilnih teles, kjer se je izkazal kot zelo primeren pri matematični obravnavi materialov z mikrostrukturami in v teoriji mešanic.

Skozi dvajseto stoletje se je nasploh povečalo zanimanje za variacijske metode. Uporabljajo se recimo še v numerični analizi pri metodi končnih elementov, ter pri študiji stabilnosti rešitev za probleme iz mehanike fluidov in mehanike deformabilnih teles.

Namen tega déla je predstaviti Hamiltonov princip v mehaniki kontinuuma kot sredstvo za iskanje enačb, ki opisujejo gibanje zvezngа medija. Delo je omejeno na klasično teorijo fluidov in deformabilnih teles, zato je primerno za bralce, ki se s Hamiltonovim principom v mehaniki kontinuuma šele spoznavajo. Od bralca se pričakuje osnovno poznavanje funkcionalne analize, variacijskega računa, tenzorske analize in dobro poznavanje matematične analize ter linearne algebre. Potrebni pojmi in rezultati iz teh področij so povzeti v uvodnem poglavju, kjer je tudi predstavljena notacija in poimenovanja. Potrebni pojmi in rezultati iz mehanike kontinuuma bodo predstavljeni v tretjem poglavju, zato predhodno znanje iz mehanike kontinuuma ni potrebno, je pa dobrodošlo.

Jedro naloge je četrto poglavje. V njem bomo problem iskanja enačb gibanja postavili v okvir variacijske naloge. Definirali bomo prostor dopustnih gibanj in prostor dopustnih variacij, nato pa bomo pravo gibanje iskali kot stacionarno točko Hamiltonovega funkcionala. Nato bomo podali nekaj pomožnih izrekov variacijskega računa, s pomočjo katerih bomo lahko prišli do diferencialnih enačb za gibanje. Uporaba Hamiltonovega principa bo prikazana na primeru elastičnega fluida in hiperelastičnega trdnega telesa. Dodatne konstitucijske enačbe za hiperelastično trdno telo bodo izpeljane v dodatku.

Poglavje 2

Sredstva iz matematične analize

V tem poglavju bomo navedli nekaj bistvenih pojmov in rezultatov iz matematične analize, ki so potrebni za razumevanje nadaljnje vsebine. Predpostavlja se, da bralec te pojme in rezultate že pozna, zato večine izrekov in trditev tu ne bomo dokazovali. Razdelek služi bolj predstavitvi oznak, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju.

2.1 Odvod na Banachovem prostoru

Definicija 2.1. Naj bosta $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachova prostora, $U \subseteq V$ odprta množica in $F\colon U \to W$ preslikava. F je *odvedljiva* (v smislu Frécheta) v točki $u \in U$, če obstaja omejena (ekvivalentno: zvezna) linearna preslikava

$$DF(u)\colon V \to W,$$

da za vsak $v \in V$ velja

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|F(u+v) - F(u) - DF(u)(v)\|_W}{\|v\|_V} = 0. \tag{2.1}$$

F je *odvedljiva na* U, če je odvedljiva v vsaki točki $u \in U$. $DF(u)$ imenujemo *(krepki ali Fréchetov) odvod* preslikave F.

F je razreda C^1 na U (pišemo tudi: $F \in C^1(U, W)$ ali pa $F \in C^1(U)$, če je kodomena jasna iz konteksta), če je preslikava $u \mapsto DF(u)$ zvezna. F *je razreda* C^2 na U ($F \in C^2(U, W)$ ali $F \in C^2(U)$), če je preslikava $u \mapsto D^2F(u) = D(DF)(u)$ zvezna. Induktivno definiramo še $D^rF(u)$ in pojem F *je razreda* C^r za poljuben $r \in \mathbb{N}$. F je *gladka* na U, če je $F \in C^r(U, W)$ za vsak $r \in \mathbb{N}$.

Če odvod odbstaja, je enoličen. Odvedljiva preslikava je hkrati tudi zvezna. Linearna preslikava med končnorazsežnima Banachovima prostoroma je vedno omejena oz. zvezna. Pogoj (2.1) je ekvivalenten pogoju

$$F(u+v) = F(u) + DF(u)(v) + o(v) \quad \text{in} \quad \lim_{v \to 0} \frac{\|o(v)\|_W}{\|v\|_V} = 0.$$

Dogovor 2.2.

1. Če je v definiciji 2.1 $V = \mathbb{R}$, potem namesto $DF(u)$ pišemo $F'(u)$. V tem primeru je, striktno gledano, $F'(u)$ linearna preslikava iz $\mathbb{R}$ v W, kar je množenje nekega elementa $w \in W$ z realnim številom, zato kar enačimo $F'(u)$ s tem elementom w.

2. Če je v definiciji 2.1 $W = \mathbb{R}$ in je V opremljen s skalarnim produktom, potem je $DF(u)$ linearen funkcional, ki mu po Riezsovem izreku o reprezentaciji linearnih funkcionalov pripada enolično določen $w \in V$, da velja
$$DF(u)(v) = \langle w, v \rangle \qquad \forall\, v \in V.$$
Po dogovoru bomo $DF(u)$ kar enačili s pripadajočim vektorjem w in bomo pisali $DF(u)(v) = \langle DF(u), v \rangle$.

Definicija 2.3. Naj bosta V, W Banachova prostora, $U \subseteq V$ odprta množica in $F \colon U \to W$ preslikava. *Šibki odvod* (tudi: *Gâteauxov* ali *smerni odvod*) preslikave F v $u \in U$ in v smeri $v \in V$ je

$$\delta F(u)(v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u+\varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} F(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0},$$

če obstaja.

Trditev 2.4. *Naj bo F kot v prejšnjih definicijah. Če je F odvedljiva v $u \in U$, potem obstaja šibki odvod preslikave F v u v smeri vsakega vektorja $v \in V$ in velja*
$$\delta F(u)(v) = DF(u)(v).$$

Izrek 2.5 (Odvod kompozituma)**.** *Naj bodo V, W, Y Banachovi prostori, $U \subseteq V$ in $\Omega \subseteq W$ odprti množici in $F \colon U \to W$ ter $G \colon \Omega \to Y$ odvedljivi preslikavi, tako da je $F(U) \subseteq \Omega$. Potem je $G \circ F \colon U \to Z$ odvedljiva in za vsak $u \in U$ velja*

$$D(G \circ F)(u) = DG(F(u)) \circ DF(u). \tag{2.2}$$

Če je $v \in V$, potem (2.2) pomeni

$$D(G \circ F)(u)(v) = DG(F(u))(DF(u)(v)).$$

Ta izrek je poznan tudi pod imenom *verižno pravilo.*

Izrek 2.6 (Odvod produkta)**.** *Naj bodo V, W_1, W_2, Y Banachovi prostori, $U \subseteq V$ odprta množica,*

$$F: U \to W_1, \qquad G: U \to W_2$$

odvedljivi preslikavi in

$$\pi: W_1 \times W_2 \to Y$$

bilinearna preslikava. Potem je produkt

$$H: U \to Y, \qquad H(u) = \pi(F(u), G(u))$$

odvedljiv v vsakem $u \in U$ in za vsak $v \in V$ velja

$$DH(u)(v) = \pi\big(DF(u)(v), G(u)\big) + \pi\big(F(u), DG(u)(v)\big).$$

Pri tem bilinearna preslikava π predstavlja katerikoli produkt, ki je bilinearen, npr. produkt vektorja s skalarjem, skalarni produkt vektorjev, vektorski produkt vektorjev, tenzorski produkt vektorjev, produkt linearne prelikave in vektorja (aplikacija), itd.

Izrek 2.7 (Izrek o inverzni funkciji)**.** *Naj bosta V, W Banachova prostora, $U \subseteq V$ odprta in $x_0 \in U$. Naj bo $F: U \to W$ razreda C^1 in predpostavimo, da je $DF(x_0)$ obrnljiva in ima zvezni inverz. Potem obstajata okolici $U_1 \subseteq U$ točke x_0 in $U_2 \subseteq W$ točke $y_0 = F(x_0)$, tako da F preslika U_1 bijektivno na U_2, inverz $\phi := F^{-1}: U_2 \to U_1$ je razreda C^1 in velja*

$$D\phi(y_0) = (DF(x_0))^{-1}.$$

Definicija 2.8. Naj bosta V, W Banachova prostora, $U \subseteq V$ odprta in $F: U \to W$ preslikava. F je razreda C^r ($r \in \mathbb{N}$) na zaprtju $\overline{U}$, če je razreda C^r na U in obstaja zvezna razširitev preslikave $x \mapsto D^r F(x)$ na $\overline{U}$.

2.2 Tenzorska analiza

2.2.1 Evklidski prostor

V klasični mehaniki opisujemo dogodke v *Newtonovem prostor-času*, kar je produkt trirazsežnega Evklidskega prostora ter prostora realnih števil $\mathbb{R}$. Evklidski prostor nam služi za opis položaja in geometrije objektov, prostor $\mathbb{R}$ pa predstavlja časovno os.

Definicija 2.9. Množica točk $\mathscr{E}$ je *Evklidski točkovni prostor* in trirazsežni Evklidski vektorski prostor $\mathscr{V}$ je *translacijski prostor* za $\mathscr{E}$, če obstaja preslikava $\iota: \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathscr{V}$ z naslednjimi lastnostmi:

1. Za vsak $x \in \mathscr{E}$ je $\iota(x, x) = \mathbf{0}$, ničelni vektor.
2. Za vsak $o \in \mathscr{E}$ je preslikava

$$\iota_o \colon \mathscr{E} \to \mathscr{V}, \qquad \iota_o(x) = \iota(o, x) \tag{2.3}$$

bijektivna.
3. Za vse $x, y, z \in \mathscr{E}$ velja $\iota(x, y) + \iota(y, z) = \iota(x, z)$.

Preslikava (2.3) se imenuje *opazovališče* za $\mathscr{E}$.

Če preslikava ι iz definicije obstaja, potem je takih preslikav neskončno mnogo. Opazovališče (2.3) je odvisno od izbire preslikave ι in od izbire točke $o \in \mathscr{E}$, ki jo imenujemo *izhodišče.* V skladu z drugo točko definicije pripada vsaki točki $x \in \mathscr{E}$ glede na izhodišče o *krajevni vektor* $\boldsymbol{x} = \iota(o, x) = \iota_o(x) \in \mathscr{V}$. Naj bo $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ortonormirana baza prostora $\mathscr{V}$, ki je desnosučna, tj. $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$. Krajevni vektor $\boldsymbol{x}$ ima enoličen razvoj po bazi, $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$, koeficientom x_i tega razvoja pa rečemo *kartezijeve koordinate.* Te so odvisne od opazovališča in od ortonormirane baze. Imamo bijektivno korespondenco med naslednjimi objekti:

- točka $x \in \mathscr{E}$,
- krajevni vektor $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i \in \mathscr{V}$,
- kartezijeve koordinate $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Razdalja med točkama $x, y \in \mathscr{E}$ je definirana kot $d(x, y) = \|\iota(x, y)\|$, kjer je $\|.\|$ norma na vektorskem prostoru $\mathscr{V}$, porojena iz standardnega skalarnega produkta. $(\mathscr{E}, d)$ je metrični prostor. Metrika je odvisna od izbire preslikave ι.

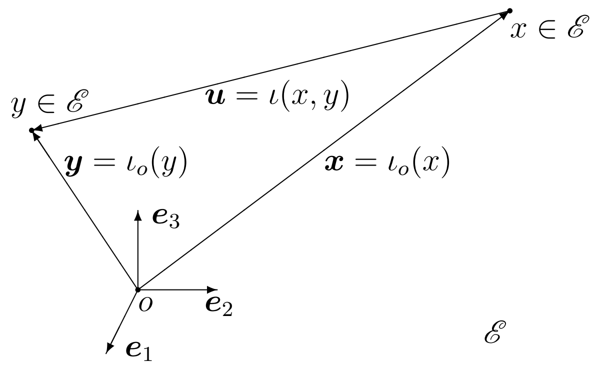
Ko imamo izbrano preslikavo ι, lahko definiramo odštevanje točk in seštevanje točke in vektorja na naslednji način.

- Naj bo $x \in \mathscr{E}$ in $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$. Potem je $x + \boldsymbol{u}$ tista točka $y \in \mathscr{E}$, za katero velja $\iota(x, y) = \boldsymbol{u}$.
- Naj bosta $x, y \in \mathscr{E}$. Potem je $y - x$ tisti vektor $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$, za katerega velja $\boldsymbol{u} = \iota(x, y)$.

Na sliki 2.1 je grafični prikaz omenjenih operacij.

Dogovor 2.10. Naj bo V Banachov prostor ali pa prostor $\mathscr{E}$, naj bo $U \subseteq V$ in $F \colon U \to \mathscr{E}$. Z enakim simbolom, le da bo pisan krepko (v tem primeru $\boldsymbol{F}$), bomo označevali pripadajočo preslikavo

$$\boldsymbol{F} \colon U \to \mathscr{V}, \qquad \boldsymbol{F} = \iota_o \circ F.$$



Slika 2.1: Grafični prikaz seštevanja točke in vektorja ter odštevanja dveh točk.

Za $u \in U$ je torej $\boldsymbol{F}(u)$ krajevni vektor točke $F(u)$ glede na opazovališče ι_o za $\mathscr{E}$.

Prostor $\mathscr{E} \times \mathbb{R}$ se imenuje *Newtonov prostor-čas.* Na njem lahko vpeljemo običajno evklidsko metriko preko opazovališča za $\mathscr{E}$: Za $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \mathscr{E} \times \mathbb{R}$ je njuna medsebojna razdalja

$$d((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = \sqrt{\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|^2 + (t_2 - t_1)^2},$$

kjer sta $\boldsymbol{x}_1 = \iota_o(x_1)$ in $\boldsymbol{x}_2 = \iota_o(x_2)$ krajevna vektorja točk x_1 in x_2.

2.2.2 Tenzorji drugega reda

V tem podrazdelku naj oznaka $\mathscr{V}$ izjemoma pomeni n-razsežen vektorski prostor nad obsegom realnih števil, saj rezultati, navedeni v tem podrazdelku, držijo za poljuben končno razsežen vektorski prostor $\mathscr{V}$. Od tega podrazdelka dalje bo oznaka $\mathscr{V}$ vedno služila za translacijski prostor Evklidskega trirazsežnega točkovnega prostora, zato bo vedno $n = 3$.

$\mathscr{V}$ naj bo opremljen s standardnim skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Elemente oz. vektorje prostora $\mathscr{V}$ bomo vedno označevali s krepkimi poševnimi simboli, npr. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{F}$. Elemente prostora $\mathscr{L}(\mathscr{V})$, tj. linearne preslikave iz $\mathscr{V}$ v $\mathscr{V}$, bomo vedno označevali s krepkimi pokončnimi simboli, npr. $\mathbf{F}$, in jih kasneje imenovali *tenzorji drugega reda* ali pa na kratko kar *tenzorji.* [1]

[1] Tenzorji drugega reda so v matematiki sicer bilinearne funkcije iz $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ v $\mathbb{R}$, vendar med bilinearnimi funkcijami in linearnimi preslikavami iz $\mathscr{V}$ v $\mathscr{V}$ obstaja povezava preko Riezsovega izreka, zato se v mehaniki izraz *tenzor* običajno uporablja kar za linearno preslikavo.

Če bralec s pojmi in rezultati, podanimi v tem podrazdelku, še ni seznanjen, lahko pripadajoče dokaze in utemeljitve najde v [3, str. 233-261].

Krepka enica $\mathbf{1}$ bo pomenila identično linearno preslikavo, $\mathbf{1} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$, $\mathbf{1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ za vsak $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$. Krepka nič $\mathbf{0}$ pomeni bodisi ničelni vektor ali pa ničelno linearno preslikavo, odvisno od konteksta.

Tenzorski produkt vektorjev $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ je linearna preslikava

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} \in \mathscr{L}(\mathscr{V}), \qquad (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{u} \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \mathscr{L}(V).$$

Tenzorski produkt ni komutativen. Če sta $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ in $\{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$ bazi za vektorski prostor $\mathscr{V}$, potem je $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{d}_j \ ; \ i, j = 1, \ldots, n\}$ baza za vektorski prostor $\mathscr{L}(\mathscr{V})$. Vsak $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ se da torej zapisat kot

$$\mathbf{A} = a_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{d}_j,$$

kjer so a_{ij} realna števila.

Transponirana linearna preslikava od $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je linearna preslikava $\mathbf{A}^T \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$, za katero velja

$$\langle \mathbf{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathbf{A}^T \boldsymbol{v} \rangle, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}.$$

Za poljubne $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ velja

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,
2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$,
3. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T =: \mathbf{A}^{-T}$,
4. $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^T = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}$,
5. $\mathbf{A}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\mathbf{A}\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{v}$ in $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\mathbf{A} = \boldsymbol{u} \otimes (\mathbf{A}^T \boldsymbol{v})$.

Alternirajoča n-linearna forma je n-linearna[2] preslikava

$$\omega \colon \overbrace{\mathscr{V} \times \cdots \times \mathscr{V}}^{n} \to \mathbb{R},$$

tako da za poljubno permutacijo σ na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$ in za poljubne $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathscr{V}$ velja

$$\omega(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{u}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sign} \sigma) \omega(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

Pri tem je $\operatorname{sign} \sigma$ predznak permutacije σ. ω je *netrivialna*, če obstajajo taki $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathscr{V}$, da je $\omega(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \neq 0$. Če so vektorji $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ linearno odvisni, potem je $\omega(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = 0$. Če sta ω in ω' alternirajoči n-linearni

[2] Linearna v vsakem argumentu posebaj.

formi in je ω netrivialna, potem obstaja $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $\omega'(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) = \lambda\omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ za vse $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in \mathscr{V}$.

Determinanta linearne preslikave $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je realno število $\det \mathbf{A}$, za katerega velja

$$(\det \mathbf{A})\omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) = \omega(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_n)$$

za poljubno netrivialno alternirajočo n-linearno formo ω in poljubne vektorje $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in \mathscr{V}$. Definicija je nedvisna od izbire netrivialne forme ω. Za poljubna $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ velja

1. $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$,
2. $\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$.

Sled linearne preslikave $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je realno število $\mathrm{tr}\mathbf{A}$, za katerega velja

$$(\mathrm{tr}\mathbf{A})\omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_j, \dots, \boldsymbol{u}_n)$$

za poljubno netrivialno alternirajočo n-linearno formo ω in poljubne vektorje $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in \mathscr{V}$. Tudi tu je definicija nedvisna od izbire netrivialne forme ω. Za poljubne $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ velja

1. $\mathrm{tr}(\alpha\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B}$,
2. $\mathrm{tr}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$,
3. $\mathrm{tr}\mathbf{A}^T = \mathrm{tr}\mathbf{A}$,
4. $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.

Običajni skalarni produkt na prostoru $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ je definiran na sledeč način:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) \qquad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{L}(\mathscr{V}).$$

Za vse $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ velja

$$\langle \mathbf{AB}, \mathbf{C} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A}^T\mathbf{C} \rangle = \langle \mathbf{A}, \mathbf{CB}^T \rangle. \tag{2.4}$$

Linearna preslikava $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je *simetrična*, če je $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. $\mathbf{A}$ je *pozitivno definitna*, če za vsak neničelen $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$ velja $\langle \boldsymbol{u}, \mathbf{A}\boldsymbol{u} \rangle > 0$.

Vpeljimo naslednje oznake:

- $\mathrm{Inv}(\mathscr{V}) = \{\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})\ ;\ \det \mathbf{A} \neq 0\}$,
- $\mathscr{U}(\mathscr{V}) = \{\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})\ ;\ |\det \mathbf{A}| = 1\}$,
- $\mathscr{O}(\mathscr{V}) = \{\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})\ ;\ \mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{1}\}$,
- $\mathrm{Sym}(\mathscr{V}) = \{\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})\ ;\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$.

Množice $\mathrm{Inv}(\mathscr{V})$, $\mathscr{U}(\mathscr{V})$ in $\mathscr{O}(\mathscr{V})$ so za operacijo kompozitum grupe. $\mathrm{Inv}(\mathscr{V})$ je grupa vseh obrnljivih linearnih preslikav, $\mathscr{U}(\mathscr{V})$ je *unitarna grupa*, $\mathscr{O}(\mathscr{V})$ pa je *ortogonalna grupa* in njeni elementi se imenujejo *ortogonalne preslikave*. Za grupi G in H naj oznaka $H < G$ pomeni H *je (prava) podgrupa grupe* G. Velja $\mathscr{O}(\mathscr{V}) < \mathscr{U}(\mathscr{V}) < \mathrm{Inv}(\mathscr{V})$. Množica $\mathrm{Sym}(\mathscr{V})$ je vektorski podprostor prostora $\mathscr{L}(\mathscr{V})$, ni pa grupa za kompozitum. V njem so vse simetrične linearne preslikave.

Če je $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}(\mathscr{V})$, potem iz linearne algebre vemo, da so vse lastne vrednosti preslikave $\mathbf{S}$ realne. Še več, za prostor $\mathscr{V}$ obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ preslikave $\mathbf{S}$. Če je $\boldsymbol{u}_j$ lastni vektor pri lastni vrednosti a_j, $j = 1, \ldots, n$, potem se da po spektralnem izreku $\mathbf{S}$ enolično zapisati kot

$$\mathbf{S} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{u}_j. \tag{2.5}$$

$\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}(\mathscr{V})$ je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so vse njene lastne vrednosti pozitivne. V tem primeru obstaja enolično določena simetrična pozitivno definitna linearna preslikava $\mathbf{T}$, tako da velja $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}$. $\mathbf{T}$ imenujemo *kvadratni koren* od $\mathbf{S}$ in pišemo kar $\mathbf{T} = \sqrt{\mathbf{S}}$. Če je $\mathbf{S}$ zapisana kot v (2.5), potem velja

$$\mathbf{T} = \sqrt{\mathbf{S}} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j}\, \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{u}_j.$$

Izrek 2.11 (Polarni razcep)**.** *Za vsak* $\mathbf{F} \in \mathit{Inv}(\mathscr{V})$ *obstajata simetrični pozitivno definitni linearni preslikavi* $\mathbf{V}$ *in* $\mathbf{U}$ *ter ortogonalna linearna preslikava* $\mathbf{R}$*, tako da velja*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}.$$

Pri tem so $\mathbf{U}$*,* $\mathbf{V}$ *in* $\mathbf{R}$ *z zgornjim razcepom enolično določene.*

Dokaz. Takoj se vidi, da sta preslikavi $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ in $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ simetrični, hkrati pa tudi pozitivno definitni, saj je za poljuben neničelen $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathbf{F}^T\mathbf{F}\boldsymbol{u} \rangle = \langle \mathbf{F}\boldsymbol{u}, \mathbf{F}\boldsymbol{u} \rangle > 0,$$

ker je $\mathbf{F}$ nesingularna.

Definirajmo

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T. \tag{2.6}$$

Po definiciji je $\mathbf{U}$ simetrična pozitivno definitna in $\mathbf{R}$ je ortogonalna, saj je

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{R}^T &= \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})^T = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^{-T}\mathbf{F}^T \\ &= \mathbf{F}\mathbf{U}^{-2}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Poleg tega je

$$\mathbf{V}^2 = (\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T)(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T) = (\mathbf{R}\mathbf{U})(\mathbf{R}\mathbf{U})^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^T,$$

torej je $\mathbf{V}$ kvadratni koren od $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ in je zato simetrična in pozitivno definitna. Enoličnost sledi iz enoličnosti obstoja kvadratnega korena. □

2.2.3 Tenzorska polja, gradient in divergenca

Rezervirajmo oznako $\mathscr{W}$ za poljuben končnorazsežen normiran vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$. Običajno bo

$$\mathscr{W} \in \{\mathbb{R}, \mathscr{V}, \mathscr{L}(\mathscr{V}), \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{L}(\mathscr{V}))\}.$$

Če prostor $\mathscr{W}$ ne bo natančno določen, bomo njegove elemente običajno označevali s krepkimi poševnimi simboli, torej kot vektorje. Funkcije, katerih kodomena je $\mathscr{V}$, $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ ali $\mathscr{W}$, bomo označevali kot elemente teh prostorov.

Naj bo $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{E}$. Funkciji $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{W}$ rečemo *tenzorsko polje*. V posebnem primeru, ko je $\mathscr{W} = \mathbb{R}$, ji rečemo *skalarno polje*, v primeru $\mathscr{W} = \mathscr{V}$ pa *vektorsko polje*.

Naj bo $\psi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ bijektivna preslikava razreda C^1, katere inverz je prav tako razreda C^1. ψ priredi točki v $\mathcal{U}$ njene krivuljne koordinate, torej gre za koordinatni sistem. Več o krivočrtnih koordinatah bomo govorili v razdelku 2.3. Funkciji $\boldsymbol{f} \circ \psi^{-1}$ in $\boldsymbol{f} \circ \iota^{-1}$ bomo z zlorabo notacije pogosto označevali enako, kot $\boldsymbol{f}$, torej

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) := \boldsymbol{f}(\psi^{-1}(x_1, x_2, x_3)), \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{f}(\iota^{-1}(\boldsymbol{x})).$$

Definicija 2.12. *Gradient* tenzorskega polja $\boldsymbol{f}$ je odvod funkcije $\boldsymbol{f} \circ \iota^{-1}$, in ga pišemo kot $\nabla \boldsymbol{f}$ ali $\operatorname{grad} \boldsymbol{f}$.

Uporabljali bomo obe oznaki. V skladu s to definicijo je gradient preslikava $\nabla \boldsymbol{f}\colon \iota(\mathcal{U}) \to \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$, vendar ga dojemamo tudi kot tenzorsko polje $\nabla \boldsymbol{f}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ na očiten način: za $x \in \mathcal{U}$, $\boldsymbol{x} = \iota(x)$ in $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ je

$$\nabla \boldsymbol{f}(x)(\boldsymbol{v}) = D(\boldsymbol{f} \circ \iota^{-1})(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}).$$

Če je $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ skalarno polje, potem v $x \in \mathcal{U}$ vrednost gradienta $\nabla f(x)$ pripada prostoru $\mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, kar je linearni funkcional na prostoru $\mathscr{V}$. Po Riezsovem izreku o reprezentaciji mu enolično pripada vektor $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$, da za vsak $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ velja $\nabla f(x)(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. V tem primeru po dogovoru 2.2 identificiramo ∇f s pripadajočim vektorskim poljem in pišemo

$$\nabla f(x)(\boldsymbol{v}) = \langle \nabla f(x), \boldsymbol{v} \rangle.$$

Če je $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{V}$ vektorsko polje, potem je v $x \in \mathcal{U}$ vrednost gradienta $\nabla \boldsymbol{f}(x)$ linearna preslikava iz $\mathscr{V}$ v $\mathscr{V}$ in pišemo

$$\nabla \boldsymbol{f}(x)(\boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{v},$$

torej oklepaj opustimo, kot je to tudi sicer v navadi za linearne preslikave.

Oznaka I bo praviloma služila za interval $I = (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, odprti ali zaprti. Tudi funkciji $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{U} \times I \to \mathscr{W}$ bomo rekli *(časovno odvisno) tenzorsko polje.* Gradient časovno odvisnega tenzorskega polja je definiran kot gradient polja $\boldsymbol{f}(\cdot, t)\colon \mathcal{U} \to \mathscr{W}$, v katerem je spremenljivka t fiksna. Označimo ga enako, torej $\nabla \boldsymbol{f} = \nabla \boldsymbol{f}(x,t)$ ali $\mathrm{grad}\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\boldsymbol{f}(x,t)$. Odvod funkcije $\boldsymbol{f}(x, \cdot)\colon I \to \mathscr{W}$, v kateri je spremenljivka x fiksna, bomo imenovali *časovni odvod* in ga bomo označili kot parcialni odvod $\partial \boldsymbol{f}/\partial t$.

Medtem ko gradient viša red tenzorskega polja, ga divergenca niža.

Definicija 2.13. *Divergenca vektorskega polja* $\boldsymbol{u}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{V}$ je skalarno polje

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \mathrm{tr}(\nabla \boldsymbol{u}). \tag{2.7}$$

Divergenca tenzorskega polja $\mathbf{S}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je vektorsko polje $\mathrm{div}\mathbf{S}$ z lastnostjo, da za vsako konstantno vektorsko polje $\boldsymbol{v}$ velja

$$\langle \boldsymbol{v}, \mathrm{div}\mathbf{S}\rangle = \mathrm{div}(\mathbf{S}^T\boldsymbol{v}). \tag{2.8}$$

Podajmo nekaj lastnosti gradienta in divergence, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 2.14. *Za odvedljivo skalarno polje ϕ ter odvedljivi vektorski polji $\boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{v}$ velja*

1. $\nabla(\phi\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \otimes \nabla\phi + \phi\nabla\boldsymbol{v}$,
2. $\nabla\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = (\nabla\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{u}$,
3. $\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \nabla\phi\rangle + \phi\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}$,
4. $\mathrm{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}$.

Dokaz. Za poljubno konstantno vektorsko polje $\boldsymbol{h}$ je

$$\begin{aligned}\nabla(\phi\boldsymbol{v})\boldsymbol{h} &= \langle \nabla\phi, \boldsymbol{h}\rangle\boldsymbol{v} + \phi(\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{v} \otimes \nabla\phi)\boldsymbol{h} + \phi(\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{h} \\ &= \big(\boldsymbol{v} \otimes \nabla\phi + \phi\nabla\boldsymbol{v}\big)\boldsymbol{h},\end{aligned}$$

iz česar sledi prva enakost, ter

$$\begin{aligned}\big\langle \nabla\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle, \boldsymbol{h}\big\rangle &= \langle (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, (\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{h}\rangle = \langle (\nabla\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}\rangle + \langle (\nabla\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}\rangle \\ &= \big\langle (\nabla\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}\big\rangle,\end{aligned}$$

iz česar sledi druga enakost. Tretjo enakost dokažemo neposredno:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{v}) &= \mathrm{tr}\big(\nabla(\phi\boldsymbol{v})\big) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{v}\otimes\nabla\phi + \phi\nabla\boldsymbol{v}) \\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{v}\otimes\nabla\phi) + \phi\mathrm{tr}(\nabla\boldsymbol{v}) = \langle\boldsymbol{v},\nabla\phi\rangle + \phi\mathrm{div}\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili definicijo divergence (2.7), prvo enakost trditve in lastnosti za sled, podane na str. 9.

Za poljubno konstantno vektorsko polje $\boldsymbol{w}$ je

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{w},\mathrm{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\rangle &= \mathrm{div}\big((\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{w}\big) = \mathrm{div}\big((\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{w}\big) \\ &= \mathrm{div}\big(\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle\boldsymbol{v}\big) = \big\langle\boldsymbol{v},\nabla\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle\big\rangle + \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle\mathrm{div}\boldsymbol{v} \\ &= \langle(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle + \langle\boldsymbol{u}\mathrm{div}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = \big\langle(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\mathrm{div}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\big\rangle,\end{aligned}$$

iz česar sledi četrta enakost. Pri tem smo uporabili definicijo divergence (2.8) ter tretjo in drugo enakost trditve, pri čemer smo upoštevali, da je $\nabla\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$. □

2.2.4 Integralski izreki

Trditev 2.15. *Naj bo $\mathcal{U}\subseteq\mathscr{E}$ odprta množica ter $f\colon\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ zvezno skalarno polje. Če za vsako podmnožico $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{U}$ velja*

$$\int_{\mathcal{N}} f\,dv = 0,$$

potem je $f(x) = 0$ za vsak $x\in\mathcal{U}$.

Dokaz. Recimo, da obstaja $x_0\in\mathcal{U}$, da je $f(x_0) > 0$. Če je $f(x_0) < 0$, potem gledamo polje $-f$. Ker je f zvezno, obstaja okolica $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{U}$ točke x_0 z volumnom $v(\mathcal{N}) > 0$, tako da je $f(x) > 0$ za vsak $x\in\mathcal{N}$. Po izreku o povprečni vrednosti iz analize obstaja točka $\xi\in\mathcal{N}$, da je

$$\int_{\mathcal{N}} f\,dv = v(\mathcal{N})f(\xi) > 0,$$

kar nasprotuje predpostavki iz izreka, torej take točke $x_0\in\mathcal{U}$ ni. □

Definicija 2.16.
- Območje $\mathcal{B}\subset\mathscr{E}$ je *regularno*, če je njegov rob $\partial\mathcal{B}$ sestavljen iz končnega števila orientabilnih ploskev.
- Naj bo $\mathcal{B}\subset\mathscr{E}$ regularno območje. Točka na $\partial\mathcal{B}$ je *regularna*, če obstaja enotska normala na $\partial\mathcal{B}$ v tej točki, sicer je *neregularna*.

Ploskev je že po definiciji regularna parametrizacija iz neke podmnožice v $\mathbb{R}^2$ z neprazno notranjostjo, ki slika v $\mathscr{E}$. Da je regularna pomeni, da obstaja odvod te parametrizacije na celotni domeni in rang odvoda je 2. Ekvivalentno, obstaja normala na ploskev v vsaki točki ploskve. Neregularne točke na robu $\partial\mathcal{B}$ se lahko pojavijo tam, kjer se stikata dve ali več ploskev, pa prehod med ploskvama ni gladek. Množica vseh neregularnih točk na robu regularnega območja ima ploščinsko mero oz. ploščino enako 0.

Izrek 2.17 (Divergenčni izrek)**.** *Naj bo $\mathcal{B}$ regularno območje v $\mathscr{E}$ in $\boldsymbol{n}$ vektorsko polje zunanje enotske normale, definirano na množici vseh regularnih točk robu $\partial\mathcal{B}$. Naj bodo $\phi\colon \overline{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}\colon \overline{\mathcal{B}} \to V$ ter $\mathbf{S}\colon \overline{\mathcal{B}} \to \mathscr{L}(V)$ zvezna polja, odvedljiva v notranjosti območja $\mathcal{B}$. Potem velja*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{B}} \phi\boldsymbol{n}\, da &= \int_{\mathcal{B}} \mathrm{grad}\phi\, dv,\\
\int_{\partial\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}\rangle\, da &= \int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\boldsymbol{u}\, dv,\\
\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{S}\boldsymbol{n}\, da &= \int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\mathbf{S}\, dv.
\end{aligned}$$

Dokaz. Druga enakost je splošno znan *Gaussov izrek* iz vektorske analize, zato ga tukaj ne bomo dokazovali. Naj bo $\boldsymbol{w}$ poljubno konstantno vektorsko polje. Potem je

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{w}, \int_{\partial\mathcal{B}} \phi\boldsymbol{n}\, da \right\rangle &= \int_{\partial\mathcal{B}} \langle \phi\boldsymbol{w}, \boldsymbol{n}\rangle\, da = \int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}(\phi\boldsymbol{w})\, dv\\
&= \int_{\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{w}, \mathrm{grad}\phi\rangle\, dv = \left\langle \boldsymbol{w}, \int_{\mathcal{B}} \mathrm{grad}\phi\, dv \right\rangle,
\end{aligned}$$

s čimer smo dokazali prvo enakost. Pri tem smo uporabili Gaussov izrek, tretjo enakost iz trditve (2.14) ter upoštevali, da je $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = 0$.

Zopet naj bo $\boldsymbol{w}$ poljubno konstantno vektorsko polje. Potem je

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{w}, \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{S}\boldsymbol{n}\, da \right\rangle &= \int_{\partial\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{w}, \mathbf{S}\boldsymbol{n}\rangle\, da = \int_{\partial\mathcal{B}} \langle \mathbf{S}^T\boldsymbol{w}, \boldsymbol{n}\rangle\, da = \int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}(\mathbf{S}^T\boldsymbol{w})\, dv\\
&= \int_{\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{w}, \mathrm{div}\mathbf{S}\rangle\, dv = \left\langle \boldsymbol{w}, \int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\mathbf{S}\, dv \right\rangle,
\end{aligned}$$

kjer smo zopet uporabili Gaussov izrek in definicijo divergence (2.8). S tem smo dokazali še tretjo enakost. □

2.3 Krivuljne koordinate

2.3.1 Koordinatni sistem

Definicija 2.18. Naj bo $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{E}$ odprta množica. *Koordinatni sistem* na $\mathcal{U}$ je bijektivna preslikava $\psi\colon \mathcal{U} \to V$ razreda C^r (običajno je r vsaj 2), kjer je V odprta množica v $\mathbb{R}^3$, inverz ψ^{-1} pa je prav tako razreda C^r.

Naj bo $x \in \mathcal{U}$ in

$$\psi\colon x \mapsto (x^1, x^2, x^3) = \psi(x).$$

(x^1, x^2, x^3) so *(krivuljne) koordinate* točke x. Za $i \in \{1, 2, 3\}$ se funkcija

$$\psi^i\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \qquad \psi^i(x) = x^i$$

imenuje *i-ta koordinatna funkcija* koordinatnega sistema ψ.

Naj bodo (x^1, x^2, x^3) koordinate točke $x \in \mathcal{U}$. Z $\boldsymbol{j}_i$ označimo i-ti vektor iz standardne baze za $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{j}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{j}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{j}_3 = (0, 0, 1).$$

Za pozitivno realno število ε je slika preslikave

$$\gamma_i\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{U}, \qquad \gamma_i(t) = \psi^{-1}\big((x^1, x^2, x^3) + t\boldsymbol{j}_i\big), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2.9}$$

i-ta koordinatna krivulja v $\mathcal{U}$, ki gre pri $t = 0$ skozi točko x. V točki x lahko definiramo *kovariantne vektorje*

$$\boldsymbol{g}_i(x) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma}_i(t)\Big|_{t=0} = \boldsymbol{\gamma}_i'(0) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{-1}}{\partial x^i}\Big|_{(x^1,x^2,x^3)}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.10}$$

in *kontravariantne vektorje*

$$\boldsymbol{g}^i(x) = \nabla \psi^i(x), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Trditev 2.19. *Množica $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}_i$ tvori bazo za translacijski prostor $\mathscr{V}$.*

Dokaz. Naj bo $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$ poljuben in definirajmo krivuljo skozi x s predpisom

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{U}, \qquad \gamma(t) = x + t\boldsymbol{u}.$$

Velja

$$\boldsymbol{u} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma}(t)\Big|_{t=0} \quad \text{in} \quad \gamma(t) = \psi^{-1}\big(\psi^1(x + t\boldsymbol{u}), \psi^2(x + t\boldsymbol{u}), \psi^3(x + t\boldsymbol{u})\big),$$

zato je

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{-1}}{\partial x^i}\Big|_{(x^1,x^2,x^3)} \frac{d}{dt}\psi^i(x + t\boldsymbol{u})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\psi^i(x + t\boldsymbol{u})\Big|_{t=0}\boldsymbol{g}_i(x).$$

Z drugimi besedami, $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}_i$ razpenja prostor $\mathscr{V}$. $\square$

Kovariantni in kontravariantni vektorji so definirani v vsaki točki množice $\mathcal{U}$, torej gre v bistvu za vektorska polja. V vsaki točki $x \in \mathcal{U}$ se baza $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}_i$ prostora $\mathscr{V}$ imenuje *kovariantna baza.* Množica $\{\boldsymbol{g}^i(x)\}_i$ je prav tako baza za $\mathscr{V}$, imenovana *kontravariantna baza*, in je dualna bazi $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}_i$. Res, iz zveze

$$x^i = \psi^i(\psi^{-1}(x^1, x^2, x^3))$$

dobimo po verižnem pravilu

$$\delta^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \left\langle \nabla\psi^i, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^{-1}}{\partial x^j} \right\rangle = \langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j \rangle. \tag{2.11}$$

Skalarna polja

$$g_{ij} = \langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j \rangle \qquad \text{in} \qquad g^{ij} = \langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j \rangle$$

imenujemo *koeficienti metričnega tenzorja.* Iz zadnjih treh zvez hitro vidimo, da velja

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j, \qquad \boldsymbol{g}^i = g^{ik} \boldsymbol{g}_k, \qquad \boldsymbol{g}_i = g_{ik} \boldsymbol{g}^k.$$

2.3.2 Koordinatna transformacija

Naj bosta ψ in $\bar{\psi}$ oz. (x^i) in $(\bar{x}^i)$ koordinatna sistema za $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{E}$ s kovariantima bazama $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}_i$ oz. $\{\bar{\boldsymbol{g}}_i(x)\}_i$ in kontravariantnima bazama $\{\boldsymbol{g}^i(x)\}_i$ oz. $\{\bar{\boldsymbol{g}}^i(x)\}_i$. Koordinatna transformacija je podana s preslikavami

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, x^3).$$

Za kovariantne in kontravariantne vektorje velja

$$\boldsymbol{g}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \bar{\boldsymbol{g}}^k, \qquad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{\boldsymbol{g}}_k. \tag{2.12}$$

Prvo enakost dobimo kot gradient funkcije x^i iz koordinatne transformacije, drugo enakost pa dobimo s parcialnim odvajanjem enakosti

$$\psi^{-1}(x^1, x^2, x^3) = \bar{\psi}^{-1}(\bar{x}^1(x^1, x^2, x^3), \bar{x}^2(x^1, x^2, x^3), \bar{x}^3(x^1, x^2, x^3)).$$

Če je $\boldsymbol{u} \colon \mathcal{U} \to \mathscr{V}$ vektorsko polje, potem ga lahko zapišemo v komponentni obliki glede na eno od baz prostora $\mathscr{V}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= u_i\, \boldsymbol{g}^i = u^i\, \boldsymbol{g}_i \\ &= \bar{u}_i\, \bar{\boldsymbol{g}}^i = \bar{u}^i\, \bar{\boldsymbol{g}}_i, \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pri tem so komponente $u_i, u^i, \dots$ skalarna polja. Prav tako lahko tenzorsko polje $\mathbf{S}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathscr{V})$ zapišemo v komponentni obliki glede na eno od baz prostora $\mathscr{L}(\mathscr{V})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= S_{ij}\, \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j = S^i{}_j\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \\ &= \bar{S}_{ij}\, \bar{\boldsymbol{g}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{g}}^j = \bar{S}^i{}_j\, \bar{\boldsymbol{g}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{g}}^j.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Tudi tu so $S_{ij}, S^i{}_j, \dots$ skalarna polja. Posamezne komponente vektorskih in tenzoskih polj dobimo s pomočjo zveze (2.11) iz (2.13) in (2.14):

$$u_i = \langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{u} \rangle, \qquad u^i = \langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{u} \rangle, \tag{2.15}$$

$$S_{ij} = \langle \boldsymbol{g}_i, \mathbf{S}\boldsymbol{g}_j \rangle, \qquad S^i{}_j = \langle \boldsymbol{g}^i, \mathbf{S}\boldsymbol{g}_j \rangle. \tag{2.16}$$

S pomočjo (2.12) dobimo naslednje zveze med posameznimi komponentami:

$$\begin{aligned}\bar{u}_i &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} u_k, \qquad & \bar{u}^i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x_k} u_k, \\ \bar{S}_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} S_{kl}, \qquad & \bar{S}^i{}_j &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} S^k{}_l.\end{aligned}$$

Če je $\boldsymbol{u} = u_k \boldsymbol{g}^k$ poljubno vektorsko polje, je

$$(\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_i) u_k \boldsymbol{g}^k = u_k \delta_i{}^k \boldsymbol{g}^i = u_k \boldsymbol{g}^k = \boldsymbol{u},$$

torej je $\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_i = \mathbf{1}$, identična linearna preslikava, in to v vsaki točki množice $\mathcal{U}$. Seveda velja tudi $\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^i = \mathbf{1}$.

2.3.3 Gradient in kovariantni odvod

Do konca tega razdelka naj velja, da so vsa obravnavan tenzorska polja razreda C^1 ali C^2, kar bo razvidno samo po sebi.

Naj bo ψ oz. (x^i) koordinatni sistem na $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{E}$ z bazama $\{\boldsymbol{g}_i\}_i$ in $\{\boldsymbol{g}^i\}_i$. Ker so gradienti tenzorskih polj tudi tenzorska polja, jih lahko zapišemo v komponentni obliki.

Naj bo $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{W}$ tenzorsko polje. Če je γ_i i-ta koordinatna krivulja, ki gre pri $t = 0$ skozi točko x, potem iz (2.10) dobimo

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}(\gamma_i(t))\Big|_{t=0} = \nabla \boldsymbol{f}(x)(\boldsymbol{\gamma}_i'(0)) = \nabla \boldsymbol{f}(x)(\boldsymbol{g}_i(x)),$$

po drugi strani pa imamo po (2.9)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}(\gamma_i(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{f}\big(\psi^{-1}((x^1, x^2, x^3) + t\boldsymbol{j}_i)\big)\Big|_{t=0} = \frac{\partial(\boldsymbol{f} \circ \psi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{(x^1,x^2,x^3)}.$$

Po dogovoru bomo namesto $\boldsymbol{f} \circ \psi^{-1}$ pisali kar $\boldsymbol{f}$. Če izenačimo oba rezultata, dobimo

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x^i}(x^1, x^2, x^3) = \nabla \boldsymbol{f}(x)(\boldsymbol{g}_i(x)). \tag{2.17}$$

V primeru, ko je f skalarno polje, iz enačbe (2.15) in iz pravkar izpeljane enačbe dobimo $(\nabla f)_i = \langle \nabla f, \boldsymbol{g}_i \rangle = \partial f / \partial x^i$, torej je

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \boldsymbol{g}^i. \tag{2.18}$$

Preden nadaljujemo z gradienti vektorskih polj, vpeljimo najprej standardne oznake za gradiente kovariantnih in kontravariantnih vektorskih polj:

$$\nabla \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{\Gamma}_i = \mathit{\Gamma}_{i\ k}^{\ j}\, \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k, \qquad \nabla \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{\Gamma}^i = \mathit{\Gamma}^i_{\ jk}\, \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k. \tag{2.19}$$

Tu sta $\boldsymbol{\Gamma}_i, \boldsymbol{\Gamma}^i \colon \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathscr{V})$ tenzorski polji drugega reda, komponente $\mathit{\Gamma}_{i\ k}^{\ j}$ in $\mathit{\Gamma}^i_{\ jk}$ pa se imenujejo *Christoffelovi simboli* in ne gre za komponente kakega tenzorja tretjega reda. Če v enačbi (2.17) za $\boldsymbol{f}$ vstavimo vektorsko polje $\boldsymbol{g}_i$ oz. $\boldsymbol{g}^i$ in upoštevamo (2.16) in (2.19), dobimo

$$\mathit{\Gamma}_{i\ k}^{\ j} = \Big\langle \boldsymbol{g}^j, \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^k} \Big\rangle = -\Big\langle \boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^k} \Big\rangle, \qquad \mathit{\Gamma}^i_{\ jk} = \Big\langle \boldsymbol{g}_j, \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^k} \Big\rangle. \tag{2.20}$$

Pri tem je drugi izraz za $\mathit{\Gamma}_{i\ k}^{\ j}$ dobljen iz prvega s parcialnim odvajanjem enakosti $\langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j \rangle = \delta^i_{\ j}$ po spremenljivki x^k.

Če po pravilu $(2.14)_2$ izračunamo gradient izraza $\langle \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j \rangle$, ki je $\mathbf{0}$, in upoštevamo, da velja[3] $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^T = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}$ za poljubna vektorja $\boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{v}$ ter da je transponiranje linearna operacija, potem dobimo zvezo

$$\mathit{\Gamma}_{j\ k}^{\ i} = -\mathit{\Gamma}^i_{\ jk}. \tag{2.21}$$

Nadalje, ker je $\boldsymbol{\Gamma}^i = \nabla(\nabla \psi^i)$ in je drugi gradient simetrični tenzor[4], veljata še naslednji zvezi:

$$\mathit{\Gamma}^i_{\ jk} = \mathit{\Gamma}^i_{\ kj}, \qquad \mathit{\Gamma}_{j\ k}^{\ i} = \mathit{\Gamma}_{k\ j}^{\ i}.$$

Ker je zaradi teh zvez možno prehajati iz ene vrste simbolov v drugo vrsto, so v uporabi zgolj simboli $\mathit{\Gamma}_{i\ k}^{\ j}$, imenovani Christoffelovi simboli druge vrste.

Naj bo sedaj $\boldsymbol{u} \colon \mathcal{U} \to \mathscr{V}$ vektorsko polje, v komponentni obliki zapisano kot

$$\boldsymbol{u} = u^j \boldsymbol{g}_j = u_k \boldsymbol{g}^k.$$

[3] $\langle (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})\boldsymbol{b} \rangle$

[4] $(\nabla(\nabla \psi^i))^T = \nabla(\nabla \psi^i)$ [3, str. 271]

Njegov gradient zavzema vrednosti v prostoru $\mathscr{L}(\mathscr{V})$, zato ga lahko zapišemo v komponentni obliki

$$\nabla \boldsymbol{u} = u^j{}_{,k}\, \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k. \tag{2.22}$$

Poiščimo izraz za komponente $u^j{}_{,k}$. Z upoštevanjem (2.16) in (2.17) dobimo

$$\begin{aligned} u^j{}_{,k} &= \Big\langle \boldsymbol{g}^j, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^k} \Big\rangle = \Big\langle \boldsymbol{g}^j, \frac{\partial (u^i \boldsymbol{g}_i)}{\partial x^k} \Big\rangle \\ &= \Big\langle \boldsymbol{g}^j, \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \boldsymbol{g}_i + u^i \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^k} \Big\rangle \\ &= \frac{\partial u^j}{\partial x^k} + u^i \Gamma_{i\ k}^{\ j}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pri tem smo na zadnjem koraku upoštevali relacijo (2.20). Dobljena enakost (2.23) za $u^j{}_{,k}$ je t. i. *kovariantni odvod* komponentne u^j po spremenljivki x^k.

Če zapišemo

$$\nabla \boldsymbol{u} = u_{j,k}\, \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k, \tag{2.24}$$

in ponovimo prejšnji postopek, kjer dodatno uporabimo relacijo (2.21), dobimo

$$u_{j,k} = \frac{\partial u_j}{\partial x^k} - u_i \Gamma_{j\ k}^{\ i}. \tag{2.25}$$

Primer 2.20. Če v izrazu $\boldsymbol{u} = u_j \boldsymbol{g}^j$ vstavimo za $u_j = \partial f / \partial x^j$, kar so komponente od ∇f v izrazu (2.18), ter vstavimo v (2.25), rezultat pa nato v (2.24), dobimo

$$\nabla(\nabla f) = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Gamma_{j\ k}^{\ i} \Big) \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k.$$

Naj bo $\mathbf{S}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathscr{V})$. Potem je $\nabla \mathbf{S}\colon \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{L}(\mathscr{V}))$ in ga v komponentni obliki lahko razpišemo glede na bazo prostora $\mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{L}(\mathscr{V}))$ kot

$$\nabla \mathbf{S} = S^{ij}{}_{,k} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k.$$

Iz (2.17) dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^k} = (\nabla \mathbf{S})(\boldsymbol{g}_k) = (S^{ij}{}_{,l} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^l) \boldsymbol{g}_k = S^{ij}{}_{,k} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j.$$

Če na dobljeni enakosti uporabimo (2.16), dobimo

$$\begin{aligned} S^{ij}{}_{,k} &= \Big\langle \boldsymbol{g}^i, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^k} \boldsymbol{g}^j \Big\rangle = \Big\langle \boldsymbol{g}^i, \frac{\partial (S^{lr} \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}_r)}{\partial x^k} \boldsymbol{g}^j \Big\rangle \\ &= \Big\langle \boldsymbol{g}^i, \Big(\frac{\partial S^{lr}}{\partial x^k} \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}_r + S^{lr} \frac{\partial \boldsymbol{g}_l}{\partial x^k} \otimes \boldsymbol{g}_r + S^{lr} \boldsymbol{g}_l \otimes \frac{\partial \boldsymbol{g}_r}{\partial x^k} \Big) \boldsymbol{g}^j \Big\rangle \\ &= \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^k} + S^{lj} \Gamma_{l\ k}^{\ i} + S^{ir} \Gamma_{r\ k}^{\ j}. \end{aligned}$$

Preostale komponente za $\nabla \mathbf{S}$ dobimo na enak način.

2.3.4 Divergenca

Sled tenzorja $\mathbf{S} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ s komponentno obliko (2.14) je[5]

$$\operatorname{tr} \mathbf{S} = S^i{}_i = g^{ij} S_{ij}.$$

Če je $\boldsymbol{u}$ vektorsko polje, potem iz (2.22) in (2.24) dobimo

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \operatorname{tr}(\nabla \boldsymbol{u}) = u^i{}_{,i} = g^{ij} u_{i,j}. \tag{2.26}$$

Poiščimo še izraz za divergenco tenzorskega polja $\mathbf{S} \colon \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathscr{V})$. Iz (2.26) dobimo za poljubno vektorsko polje $\boldsymbol{u} = u_k \boldsymbol{g}^k$

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T \boldsymbol{u}) = \operatorname{div}(S^{ij} \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_i u_k \boldsymbol{g}^k) = \operatorname{div}(S^{ij} u_i \boldsymbol{g}_j) = (S^{ij} u_i)_{,j}.$$

Bralec se lahko sam prepriča, da tudi za kovariantni odvod produkta velja podobno pravilo, kot ga poznamo za običaji odvod, zato imamo

$$(S^{ij} u_i)_{,j} = S^{ij}{}_{,j} u_i + S^{ij} u_{i,j} = S^{ij}{}_{,j} \langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{u} \rangle + \operatorname{tr}(\mathbf{S}^T \nabla \boldsymbol{u}).$$

Dobili smo enakost

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T \boldsymbol{u}) = S^{ij}{}_{,j} \langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{u} \rangle + \operatorname{tr}(\mathbf{S}^T \nabla \boldsymbol{u}). \tag{2.27}$$

Če je $\boldsymbol{u}$ konstantno vektorsko polje, potem je $\nabla \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ in v enačbi (2.27) s pomočjo definicije 2.13 prepoznamo izraz za $\operatorname{div}\mathbf{S}$, ki je

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = S^{ij}{}_{,j} \boldsymbol{g}_i.$$

Če dobljeni izraz vstavimo nazaj v enačbo (2.27) in zamenjamo $\mathbf{S}$ z $\mathbf{S}^T$, dobimo naslednjo trditev.

Trditev 2.21. *Za poljubno tenzorsko polje $\mathbf{S} \in C^1(\mathcal{U}, \mathscr{L}(\mathscr{V}))$ in poljubno vektorsko polje $\boldsymbol{u} \in C^1(\mathcal{U}, \mathscr{V})$ velja*

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \operatorname{div}\mathbf{S}^T \rangle + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \nabla \boldsymbol{u}).$$

[5] $\operatorname{tr}\mathbf{S} = S^i{}_j \operatorname{tr}(\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j) = S^i{}_j \langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^j \rangle = S^i{}_i$ [3, str. 249]

Poglavje 3

Materialno telo

3.1 Konfiguracije in gibanje telesa

Naj bosta $\mathscr{E}_R$ in $\mathscr{E}$ Evklidska točkovna prostora, ki imata sicer enake lastnosti, vendar ju bomo kljub temu razlikovali. Prostor $\mathscr{E}_R$ bo služil določitvi materialnega telesa: z množico točk izbranega regularnega območja $\mathcal{B} \subset \mathscr{E}_R$ je določeno *materialno telo* ali *kontinuum.* Množici $\mathcal{B}$ bomo rekli *referenčna* ali *sklicna konfiguracija* materialnega telesa. Privzeli bomo, da je $\mathcal{B}$ zaprta. Prostor $\mathscr{E}$ pa bo služil opisu dejanskega položaja materialnega telesa v prostoru.

Točke prostora $\mathscr{E}_R$, njihove koordinate ter njihove krajevne vektorje bomo označevali z velikimi simboli: X, (X_1, X_2, X_3), $\boldsymbol{X}$, in jih bomo imenovali *materialne točke oz. koordinate oz. vektorji.* Točke prostora $\mathscr{E}$, njihove koordinate ter njihove krajevne vektorje bomo, kot doslej, označevali z malimi simboli: x, (x_1, x_2, x_3), $\boldsymbol{x}$, in jih bomo imenovali *prostorske točke oz. koordinate oz. vektorji.*

Definicija 3.1. *Konfiguracija (materialnega) telesa* je zvezna in injektivna preslikava

$$\kappa\colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}, \qquad \kappa\colon X \mapsto x = \kappa(X).$$

Tudi sliki preslikave κ, tj. $\kappa(\mathcal{B})$, rečemo *konfiguracija telesa.*

S konfiguracijo torej določamo položaj telesa v prostoru $\mathscr{E}$. Ker je $\mathcal{B}$ kompaktna množica, je tudi inverz $\kappa^{-1}\colon \kappa(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ konfiguracije κ zvezna preslikava.

Naj bo $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ časovni interval.

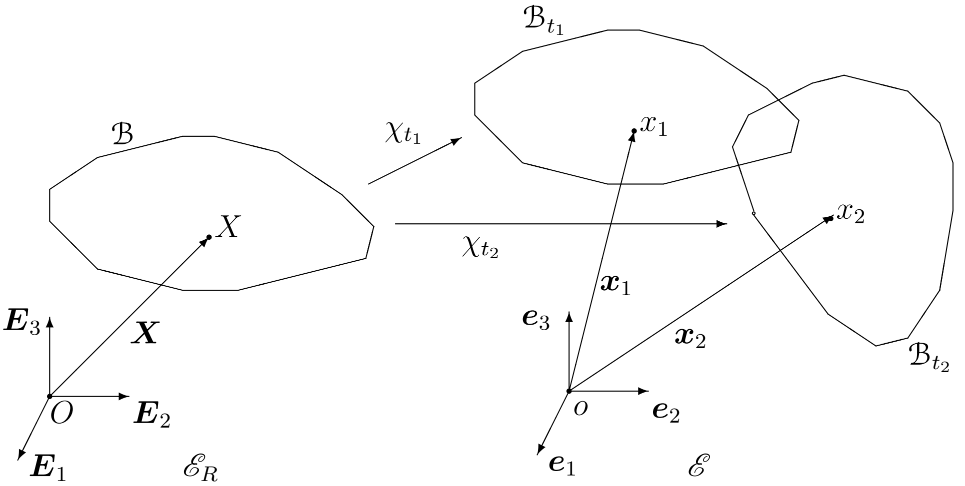
Definicija 3.2. *Gibanje (materialnega) telesa* je zvezna preslikava

$$\chi\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{E}, \qquad \chi\colon (X, t) \mapsto x \tag{3.1}$$

z lastnostjo, da je za vsak $t \in I$ preslikava

$$\chi_t \colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}, \qquad \chi_t(x) := \chi(X, t)$$

konfiguracija. Preslikava χ_t in množica $\mathcal{B}_t := \chi_t(\mathcal{B})$ se imenujeta *trenutna konfiguracija* telesa ob času t.



Slika 3.1: Prikaz referenčne konfiguracije telesa $\mathcal{B} \subset \mathscr{E}_R$ na levi strani in dveh trenutnih konfiguracij $\mathcal{B}_{t_1}$ ter $\mathcal{B}_{t_2}$ v prostoru $\mathscr{E}$ ob časih $t_1, t_2 \in I$ na desni strani. Za točko $X \in \mathcal{B}$ je prikazan njen krajevni vektor $\boldsymbol{X} = \hat{\iota}_O(X)$ glede na opazovališče $\hat{\iota}_O$ za $\mathscr{E}_R$. Položaj te materialne točke v trenutnih konfiguracijah je označen s prostorskima točkama $x_1 = \chi(X, t_1) \in \mathcal{B}_{t_1}$ in $x_2 = \chi(X, t_2) \in \mathcal{B}_{t_2}$, ki imata svoj krajevni vektor $\boldsymbol{x}_1 = \iota_o(x_1)$ oz. $\boldsymbol{x}_2 = \iota_o(x_2)$ glede na opazovališče ι_o za $\mathscr{E}$.

V skladu z dogovorom 2.10 bomo s krepkimi simboli $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\chi}_t$, ... označevali vektorska polja $\boldsymbol{\chi} = \iota_o \circ \chi$, $\boldsymbol{\chi}_t = \iota_o \circ \chi$, ..., kjer je ι_o opazovališče za $\mathscr{E}$.

Na gibanje lahko gledamo tudi kot na enoparametrično družino konfiguracij $\{\chi_t\,;\ t \in I\}$, kjer je preslikava $t \mapsto \chi_t$ (enakomerno) zvezna, tj. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsaka $t_1, t_2 \in I$, za katera je $|t_2 - t_1| < \delta$, velja $\sup_{X \in \mathcal{B}} \|\boldsymbol{\chi}_{t_2}(X) - \boldsymbol{\chi}_{t_1}(X)\| < \varepsilon$. Pri tem je $\|\cdot\|$ norma prostora $\mathscr{V}$.

Z oznako Ω bomo označili množico

$$\Omega = \{(x, t)\ ;\ x \in \chi_t(\mathcal{B}),\ t \in I\} \subset \mathscr{E} \times I.$$

Gibanje (3.1) ni injektivna preslikava[1], zato nima inverza. Kljub temu na smiselen način definiramo *inverzno gibanje*

$$\chi^{-1}\colon \Omega \to \mathcal{B}, \qquad \chi^{-1}\colon (x,t) \mapsto X := {\chi_t}^{-1}(x).$$

S χ^{-1} smo torej označili inverz preslikave $(X,t) \mapsto (x,t) = (\chi(X,t),t)$, ki pa je injektivna. Dodatno bomo do nadaljnjega predpostavili, da sta gibanje in iverzno gibanje razreda C^2.

Tenzorsko polje

$$\mathbf{F}\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{L}(\mathscr{V}), \qquad \mathbf{F}(X,t) = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}(X,t) = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}_t(X)$$

se imenuje *deformacijski gradient* gibanja. Po izreku o inverzni funkciji velja

$$\mathbf{F}^{-1}(x,t) = \mathrm{grad}\boldsymbol{\chi}_t^{-1}(x) = \mathrm{grad}\boldsymbol{\chi}^{-1}(x,t).$$

Za $\mathbf{F}$ lahko uprabimo polarni razcep (izrek 2.11), $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$. Tenzorja $\mathbf{U}$ in $\mathbf{V}$ v tem razcepu se imenujeta *desni* oz. *levi razteznostni tenzor*, $\mathbf{R}$ pa je *rotacijski tenzor*. Tenzorja

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

se imenujeta *desni* oz. *levi Cauchy-Greenov deformacijski tenzor*.

Determinanti deformacijskega gradienta rečemo *jacobijan* in jo označimo z

$$J = \det \mathbf{F}.$$

Ker so konfiguracije χ_t injektivne oz. bijektivne na svojo sliko, mora biti $J \neq 0$ povsod na $\mathcal{B} \times I$. Zaradi zveznosti tenzorskega polja $\mathbf{F}$ mora biti potem skalarno polje $\det \mathbf{F}$, ki je potemtakem tudi zvezno, enakega predznaka povsod na $\mathcal{B} \times I$. Običajno, ni pa nujno, je začetna konfiguracija ob začetnem času t_1 časovnega intervala I taka, da za vse $X \in \mathcal{B}$ velja $\hat{\iota}_O(X) = \iota_o(\chi(X,t_1))$. Povedano drugače, krajevni vektorji točk iz referenčne konfiguracije (glede na opazovališče $\hat{\iota}_O$ za $\mathscr{E}_R$) so enaki krajevnim vektorjem pripadajočih točk v začetni konfiguraciji (glede na opazovališče ι_o za $\mathscr{E}$). V tem primeru je $\mathbf{F}(\cdot,t_1) = \mathbf{1}$ in $\det \mathbf{F}(\cdot,t_1) = 1$, zato je po prejšnjem premisleku $J = \det \mathbf{F} > 0$ na celotnem območju $\mathcal{B} \times I$. V tem in še naslednjem poglavju bomo privzeli, da je $J > 0$.

[1] Zaradi zveznosti preslikave χ obstajata različna časa $t, t' \in I$, ki sta dovolj blizu skupaj, tako da imata množici $\chi(\mathcal{B},t)$ in $\chi(\mathcal{B},t')$ neprazen presek, torej obstaja točka x iz tega preseka in točki $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$, da je $\chi(X_1,t) = x = \chi(X_2,t')$, vendar pa $(X_1,t) \neq (X_2,t')$, ker je vsaj $t \neq t'$.

Hitrost $\boldsymbol{v}$ in *pospešek* $\boldsymbol{a}$ gibanja χ sta vektorski polji

$$\boldsymbol{v}\colon \mathcal{B}\times I \to \mathscr{V} \qquad \boldsymbol{v}(X,t) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(X,t), \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{a}\colon \mathcal{B}\times I \to \mathscr{V} \qquad \boldsymbol{a}(X,t) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t^2}(X,t). \tag{3.3}$$

Alternativna oznaka za $\boldsymbol{v}$ je tudi $\dot{\boldsymbol{x}}$, za $\boldsymbol{a}$ pa $\ddot{\boldsymbol{x}}$.

3.2 Materialni in prostorski opis

Vsakemu tenzorskemu polju $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{B}\times I \to \mathscr{W}$ pripada glede na gibanje (3.1) enakovreden predpis

$$\bar{\boldsymbol{f}}\colon \Omega \to \mathscr{W}, \qquad \bar{\boldsymbol{f}}(x,t) := \boldsymbol{f}(\chi^{-1}(x,t),t) = \boldsymbol{f}(X,t)$$

Tenzorsko polje $\bar{\boldsymbol{f}}$ se imenuje *prostorski opis* tenzorskega polja $\boldsymbol{f}$.

Na enak način pripada vsakemu tenzorskemu polju $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathscr{W}$ glede na gibanje (3.1) enakovreden predpis

$$\hat{\boldsymbol{f}}\colon \mathcal{B}\times I \to \mathscr{W}, \qquad \hat{\boldsymbol{f}}(X,t) := \boldsymbol{f}(\chi(X,t),t) = \boldsymbol{f}(x,t). \tag{3.4}$$

$\hat{\boldsymbol{f}}$ imenujemo *materialni opis* tenzorskega polja $\boldsymbol{f}$.

Pogosto bomo strešico ali črtico v oznakah za materialni ali prostorski opis opustili, če to ne bo pustilo dvomov o tem, na kateri domeni je definirano polje. Pri integraciji bo že iz integracijske domene razvidno, za kateri opis gre. Če poleg polja pišemo še argumente, potem mali x v argumentu nakazuje na prostorski, veliki X pa na materialni opis. Pri gradientu in divergenci se dvomom izognemo z uporabo različnih notacij za ta dva diferencialna operatorja. V materialnem opisu pišemo oznaki za gradient in divergenco z veliko začetnico,

$$\mathrm{Grad}\boldsymbol{f} := \nabla\hat{\boldsymbol{f}}, \qquad \mathrm{Div}\boldsymbol{f} := \mathrm{div}\hat{\boldsymbol{f}},$$

v prostorskem opisu pa z malo,

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{f} := \nabla\bar{\boldsymbol{f}}, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{f} := \mathrm{div}\bar{\boldsymbol{f}}.$$

Če je $\boldsymbol{f}$ vektorsko polje, potem je

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{f} = \mathrm{tr}(\mathrm{Grad}\hat{\boldsymbol{f}}) \quad \text{in} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{f} = \mathrm{tr}(\mathrm{grad}\bar{\boldsymbol{f}}).$$

Če je ϕ skalarno, $\boldsymbol{u}$ pa vektorsko polje, potem je zveza med gradientoma

$$\mathrm{Grad}\phi = \mathbf{F}^T\mathrm{grad}\phi, \qquad \mathrm{Grad}\boldsymbol{u} = (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\mathbf{F}. \tag{3.5}$$

Res, če je $\boldsymbol{w}$ poljubno vektorsko polje, dobimo iz (3.4) z uporabo verižnega pravila

$$\langle \mathrm{Grad}\phi, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \mathrm{grad}\phi, (\mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi})\boldsymbol{w}\rangle = \langle \mathrm{grad}\phi, \mathbf{F}\boldsymbol{w}\rangle = \langle \mathbf{F}^T \mathrm{grad}\phi, \boldsymbol{w}\rangle,$$
$$(\mathrm{Grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})(\mathrm{Grad}\chi)\boldsymbol{w} = (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\mathbf{F}\boldsymbol{w}.$$

Definicija 3.3. Časovni odvod tenzorskega polja $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{B}\times I \to \mathscr{W}$ označimo z $\dot{\boldsymbol{f}}$ ali $d\boldsymbol{f}/dt$ in ga imenujemo *materialni časovni odvod*;

$$\dot{\boldsymbol{f}}(X,t) = \frac{d\boldsymbol{f}}{dt}(X,t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}(X,t).$$

Iz (3.4) dobimo z uporabo verižnega pravila še materialni časovni odvod za prostorski opis:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + (\mathrm{grad}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}), \tag{3.6}$$

kjer je $\boldsymbol{v}$ hitrost gibanja (3.2), $\partial\boldsymbol{f}/\partial t$ pa časovni dvod polja $\boldsymbol{f}(x,t)$ (odvod preslikave $\boldsymbol{f}(\cdot,t)\colon I \to \mathscr{E}$). Kadar poleg tenzorskega polja ne bomo pisali argumentov, bo oznaka $\partial\boldsymbol{f}/\partial t$ vedno pomenila časovni odvod prostorskega opisa.

Primer 3.4. Hitrost in pospešek sta prvi in drugi materialni časovni odvod gibanja $\boldsymbol{x}(X,t) = \boldsymbol{\chi}(X,t)$, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{x}}$. Pospešek je materialni časovni odvod hitrosti in se v prostorskem opisu izraža kot

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}. \tag{3.7}$$

Tenzorsko polje $\mathbf{L} = \mathrm{grad}\boldsymbol{v}$ se imenuje *hitrostni gradient.* Če je gibanje χ razreda C^2, potem je

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi} = \mathrm{Grad}\frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} \qquad \text{oziroma} \qquad \dot{\mathbf{F}} = \mathrm{Grad}\boldsymbol{v},$$

iz česar z uporabo zveze (3.5) dobimo

$$\mathbf{L} := \mathrm{grad}\boldsymbol{v} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \tag{3.8}$$

3.3 Površinski in prostorninski element

Naj bo ε pozitivno realno število in naj bo $C\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathcal{B}$ preslikava razreda C^1. Slika preslikave C je krivulja znotraj ali pa na robu materialnega telesa

$\mathcal{B}$. *Dolžinski element* v točki $C(0) = X \in \mathcal{B}$ glede na parametrizacijo C je infinitezimalni tangentni vektor

$$d\boldsymbol{X} = \frac{d}{d\alpha}\boldsymbol{C}(\alpha)\Big|_{\alpha=0} d\alpha = \boldsymbol{C}'(0)\, d\alpha.$$

Glede na trenutno konfiguracijo $\chi_t\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}_t$ ob času t pripada preslikavi C preslikava

$$c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{B}_t, \qquad c(\alpha) = \chi_t(C(\alpha)).$$

Dolžinski element v točki $c(0) = x \in \mathcal{B}_t$ glede na parametrizacijo c je infinitezimalni tangentni vektor

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x} &= \frac{d}{d\alpha}\boldsymbol{c}(\alpha)\Big|_{\alpha=0} d\alpha = \frac{d}{d\alpha}\boldsymbol{\chi}_t(C(\alpha))\Big|_{\alpha=0} d\alpha = \mathbf{F}(X,t)\boldsymbol{C}'(0)\, d\alpha \\ &= \mathbf{F}(X,t)\, d\boldsymbol{X}. \end{aligned}$$

Naj bosta $d\boldsymbol{X}_1$ in $d\boldsymbol{X}_2$ dolžinska elementa v isti točki $X \in \mathcal{B}$, vendar glede na različni parametrizaciji $C_1(\alpha_1)$ in $C_2(\alpha_2)$. Pripadajoča dolžinska elementa v točki $x \in \mathcal{B}_t$ iz trenutne konfiguracije naj bosta $d\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{F}\, d\boldsymbol{X}_1$ in $d\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{F}\, d\boldsymbol{X}_2$. Označimo parametrizaciji $c_1 = \chi_t \circ C_1$ in $c_2 = \chi_t \circ C_2$. Infinitezimalna vektorja

$$d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{X}_1 \times d\boldsymbol{X}_2 \quad \text{in} \quad d\boldsymbol{s} = d\boldsymbol{x}_1 \times d\boldsymbol{x}_2$$

se imenujeta *(materialni) površinski element* v referenčni oz. trenutni konfiguraciji. Za poljuben vektor $\boldsymbol{w} \in \mathscr{V}$ velja

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{w}, d\boldsymbol{s}\rangle &= \langle \boldsymbol{w}, d\boldsymbol{x}_1 \times d\boldsymbol{x}_2\rangle = \langle \boldsymbol{w}, \mathbf{F}\, d\boldsymbol{X}_1 \times \mathbf{F}\, d\boldsymbol{X}_2\rangle \\ &= \langle \mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{w}), \mathbf{F}\, d\boldsymbol{X}_1 \times \mathbf{F}\, d\boldsymbol{X}_2\rangle = (\det \mathbf{F})\langle \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{w}, d\boldsymbol{X}_1 \times d\boldsymbol{X}_2\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{w}, J\mathbf{F}^{-T}(d\boldsymbol{X}_1 \times d\boldsymbol{X}_2)\rangle, \end{aligned}$$

od koder sledi enakost

$$d\boldsymbol{s} = J\mathbf{F}^{-T}\, d\boldsymbol{S}. \tag{3.9}$$

Pri tem smo upoštevali, da je mešani produkt $\langle \cdot, \cdot \times \cdot\rangle$ alternirajoča 3-linearna forma. Enakost (3.9) lahko zapišemo tudi kot

$$\boldsymbol{n}\, da = J\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{N}\, dA, \tag{3.10}$$

pri čemer sta

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{C}_1'(0) \times \boldsymbol{C}_2'(0)}{\|\boldsymbol{C}_1'(0) \times \boldsymbol{C}_2'(0)\|} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{c}_1'(0) \times \boldsymbol{c}_2'(0)}{\|\boldsymbol{c}_1'(0) \times \boldsymbol{c}_2'(0)\|}$$

enotski normali in

$$dA = \|\boldsymbol{C}_1'(0) \times \boldsymbol{C}_2'(0)\| \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \quad \text{ter} \quad da = \|\boldsymbol{c}_1'(0) \times \boldsymbol{c}_2'(0)\| \, d\alpha_1 \, d\alpha_2$$

ploščinska elementa.

Če je $r = r(u, v)$ regularna parametrizacija neke ploskve v $\mathcal{B}_t$, ki je lahko tudi del robu $\partial\mathcal{B}$, potem lahko dolžinska elementa $d\boldsymbol{x}_1$, $d\boldsymbol{x}_2$, ki nastopata v površinskem elementu $d\boldsymbol{s} = d\boldsymbol{x}_1 \times d\boldsymbol{x}_2$, razumemo kot infinitezimalna tangentna vektorja

$$d\boldsymbol{x}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \, du, \qquad d\boldsymbol{x}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \, dv.$$

Podobno velja za parametrizacijo pripadajoče ploskve v $\mathcal{B}$. Ker lahko integrale po ploskvah izrazimo s pomočjo parametrizacije ploskve, dobimo s pomočjo enačbe (3.10) naslednji izrek.

Izrek 3.5. *Naj bo $\mathcal{S}$ ploskev v $\mathcal{B}$ in $\mathcal{S}_t = \chi_t(\mathcal{S})$ pripadajoča ploskev v trenutni konfiguraciji $\mathcal{B}_t$. Če je $\boldsymbol{f} \colon \mathcal{S} \to \mathscr{W}$ integrabilno tenzorsko polje, potem velja*

$$\int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{f}[\boldsymbol{n}] \, da = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}[J\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{N}] \, dA,$$
$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}[\boldsymbol{N}] \, dA = \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{f}[J^{-1}\mathbf{F}^{T}\boldsymbol{n}] \, da,$$

kjer izraz $\boldsymbol{f}[\,\cdot\,]$ nadomestimo z ustreznim produktom polja $\boldsymbol{f}$ in vsebine $[\,\cdot\,]$.

Naj bodo sedaj, podobno kot prej, za $j = 1, 2, 3$ $d\boldsymbol{X}_j$ dolžinski elementi v isti točki $X \in \mathcal{B}$, vendar glede na različne parametrizacije $C_j(\alpha_j)$. Pripadajoči dolžinski elementi v točki $x \in \mathcal{B}_t$ iz trenutne konfiguracije naj bodo $d\boldsymbol{x}_j = \mathbf{F} \, d\boldsymbol{X}_j$. Infinitezimalna skalarja

$$dV = |\langle d\boldsymbol{X}_1, d\boldsymbol{X}_2 \times d\boldsymbol{X}_3 \rangle| \quad \text{in} \quad dv = |\langle d\boldsymbol{x}_1, d\boldsymbol{x}_2 \times d\boldsymbol{x}_3 \rangle|$$

se imenujeta *(materialni) prostorninski element* v referenčni oz. trenutni konfiguraciji. Imamo

$$dv = |\langle \mathbf{F} \, d\boldsymbol{X}_1, \mathbf{F} \, d\boldsymbol{X}_2 \times \mathbf{F} \, d\boldsymbol{X}_3 \rangle| = |\det \mathbf{F}| |\langle d\boldsymbol{x}_1, d\boldsymbol{x}_2 \times d\boldsymbol{x}_3 \rangle| = J \, dV. \tag{3.11}$$

Tudi integrale po prostornini lahko izrazimo s pomočjo parametrizacije (npr. s pomočjo koordinatnega sistema) in s pomočjo enakosti (3.11) dobimo naslednji izrek.

Izrek 3.6. *Naj bo $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ regularno območje z neprazno notranjostjo, naj bo $\mathcal{P}_t = \chi_t(\mathcal{P})$ in naj bo $\boldsymbol{f} \colon \mathcal{P} \to \mathscr{W}$ integrabilno tenzorsko polje. Potem velja*

$$\int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{f} \, dv = \int_{\mathcal{P}} \boldsymbol{f} J \, dV \qquad \textit{in} \qquad \int_{\mathcal{P}} \boldsymbol{f} \, dV = \int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{f} J^{-1} \, dv.$$

3.4 Transportni izrek

V tem razdelku bomo podali transportni izrek, katerega vsebina je enačba za časovni odvod integrala po območju trenutne konfiguracije materialnega telesa. Še prej pa potrebujemo formulo za materialni časovni odvod determinante deformacijskega gradienta.

Naj bo $\mathscr{W}$ vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ dimenzije $n \in \mathbb{N}$. Najprej poiščimo odvod za determinanto $\det\colon \mathscr{L}(\mathscr{W}) \to \mathbb{R}$. Naj bo $\omega\colon \mathscr{W}^n \to \mathbb{R}$ netrivialna alternirajoča n-linearna forma in naj bo $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{W})$ linearna preslikava. Spomnimo, determinanta in sled linearne preslikave $\mathbf{A}$ sta definirani kot[2]

$$\begin{aligned}
\omega(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_n) &= (\det \mathbf{A})\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n), \\
\sum_{j=1}^{n} \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_j, \dots, \boldsymbol{u}_n) &= (\mathrm{tr}\mathbf{A})\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)
\end{aligned}$$

in definicija je neodvisna od izbire netrivialne forme ω.

Naj bo $\mathbf{S} \in \mathscr{L}(\mathscr{W})$ še ena linearna preslikava in $\varepsilon > 0$. Potem je

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{S})\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) = \omega((\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{S})\boldsymbol{u}_1, \dots, (\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{S})\boldsymbol{u}_n) \\
&\quad = \omega(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_n) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon\, \omega(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{S}\boldsymbol{u}_j, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_n) + o(\varepsilon) \\
&\quad = (\det \mathbf{A})\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \omega(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{u}_j, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_n) + o(\varepsilon) \\
&\quad = (\det \mathbf{A}) \Big(\omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{u}_j, \dots, \boldsymbol{u}_n) \Big) + o(\varepsilon) \\
&\quad = (\det \mathbf{A})(1 + \varepsilon\, \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}))\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Pri tem smo člene, kjer nastopajo potence števila ε, višje od 1, spravili v izraz $o(\varepsilon)$. Od tu lahko sedaj izračunamo smerni odvod

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \det(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{S})\Big|_{\varepsilon=0} \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big[\det(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{S})\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) \Big] \Big|_{\varepsilon=0} \\
= (\det \mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S})\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) &= \big\langle (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}, \mathbf{S} \big\rangle\, \omega(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n).
\end{aligned}$$

Pri tem smo na zdanjem koraku uporabili definicijo skalarnega produkta na prostoru $\mathscr{L}(\mathscr{W})$. Determinanta je odvedljiva preslikava, zato je krepki odvod enak pravkar izračunanemu smernemu odvodu, torej imamo

$$D\det(\mathbf{A})(\mathbf{S}) = \langle (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}, \mathbf{S} \rangle \quad \text{oz.} \quad D\det(\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}. \tag{3.12}$$

[2] Glej podrazdelek 2.2.2.

Sedaj imamo pripravljeno vse, da izračunamo materialni časovni odvod jacobijana:

$$\begin{aligned}\dot{J} &= (\det \mathbf{F})^{\cdot} = D\det(\mathbf{F})(\dot{\mathbf{F}}) = \langle J\mathbf{F}^{-T}, \dot{\mathbf{F}}\rangle \\ &= J\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) = J\mathrm{tr}(\mathrm{grad}\boldsymbol{v}) = J\mathrm{div}\boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pri tem smo uporabili verižno pravilo, malo prej izpeljano pravilo za odvod determinante (kjer vzamemo $\mathscr{W} = \mathscr{V}$), definicijo skalarnega produkta na prostoru $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ ter zvezo (3.8).

Izrek 3.7 (Transportni izrek)**.** *Naj bo $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ regularno območje znotraj referenčne konfiguracije in naj $\mathcal{P}_t = \chi(\mathcal{P}, t) \subseteq \mathcal{B}_t$ označuje njegovo trenutno konfiguracijo ob času t. Naj bo $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{P} \times I \to W$ razreda C^1 na zaprtju $\overline{\mathcal{P}} \times I$. Potem velja*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{f}\,dv = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{f}\mathrm{div}\boldsymbol{v})\,dv = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{f}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle\,da.$$

Ne pozabimo, da pri tem $\partial\boldsymbol{f}/\partial t$ pomeni časovni (parcialni) odvod prostorskega opisa polja $\boldsymbol{f}$.

Dokaz. Z uporabo izreka 3.6 in enačbe (3.13) pridemo do

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{f}\,dv &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \boldsymbol{f}J\,dV = \int_{\mathcal{P}} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{f}J)\,dV = \int_{\mathcal{P}} (\dot{\boldsymbol{f}}J + \boldsymbol{f}\dot{J})\,dV = \\ &= \int_{\mathcal{P}} (\dot{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{f}\mathrm{div}\boldsymbol{v})J\,dV = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{f}\mathrm{div}\boldsymbol{v})\,dv,\end{aligned}$$

s čimer je dokazan prvi del enačbe iz izreka. Pri tem smo na drugem koraku smeli zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja, ker se referenčna konfiguracija s časom ne spreminja.

Preostalo enakost bomo dokazali za primer, ko je $\boldsymbol{f}$ skalarno ali vektorsko polje, za katero lahko uporabimo tretjo oz. četrto enačbo iz trditve 2.14. Izrek sicer velja tudi za splošna tenzorska polja, le dokaz je bolj zapleten.

Z uporabo enačbe (3.6), trditve $2.14_{3,4}$ in divergenčnega izreka 2.17 pridemo do

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{f}\mathrm{div}\boldsymbol{v})\,dv &= \int_{\mathcal{P}_t} \Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + (\mathrm{grad}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{f}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\Big)\,dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{f}[\boldsymbol{v}])\Big)\,dv = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{f}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle\,da.\end{aligned}$$

Pri tem oznaka $\boldsymbol{f}[\boldsymbol{v}]$ pomeni $f\boldsymbol{v}$, če je $\boldsymbol{f} = f$ skalarno polje, oz. $\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{v}$, če je $\boldsymbol{f}$ vektorsko polje. $\square$

3.5 Zakon o ohranitvi mase

Masa poljubne podmnožice $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ je definirana kot vrednost integrala

$$M(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho_R \, dV,$$

kjer je $\rho_R \colon \mathcal{B} \to (0, \infty)$ integrabilno skalarno polje, imenovano *masna gostota referenčne konfiguracije*. Za ρ_R se običajno predpostavi še dodatne pogoje o zveznosti ali odvedljivosti.

V mehaniki kontinuuma se predpostavi naslednji zakon.

Zakon o ohranitvi mase. Gibanju $\chi(X, t) = \chi_t(X)$ pripada integrabilno, časovno odvisno skalarno polje $\rho \colon \Omega \to (0, \infty)$, imenovano *masna gostota trenutne konfiguracije*, tako da za vsako množico $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ velja

$$M(\mathcal{P}) = \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \rho \, dv \qquad \text{za vsak } t \in I.$$

Iz tega zakona z uporabo izreka 3.6 dobimo

$$\int_{\mathcal{P}} (\rho_R - \rho J) \, dV = 0 \qquad \text{za vsak } t \in I,$$

in ker to velja za vsako množico $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$, dobimo po trditvi 2.15 naslednjo relacijo za masni gostoti:

$$\rho_R(X) = \rho(X, t) J(X, t) \qquad \text{za vse } X \in \mathcal{B},\ t \in I. \tag{3.14}$$

Seveda potem velja $\rho_R = \rho J$ tudi v prostorskem opisu na Ω.

Posledica 3.8. *Za vsak $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ in vsako tenzorsko polje $\boldsymbol{f} \colon \mathcal{P} \times I \to \mathscr{W}$, ki je integrabilno na $\mathcal{P}$ pri vsakem $t \in I$, velja*

$$\int_{\mathcal{P}} \boldsymbol{f} \rho_R \, dV = \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \boldsymbol{f} \rho \, dv.$$

Dokaz. Uporabimo relacijo (3.14) in izrek 3.6. □

Še ena takojšnja posledica zakona o ohranitvi mase je ta, da se masa katerega koli dela delesa med gibanjem ne spreminja, torej velja

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \rho(x, t) \, dv = 0 \quad \text{za vsak } t \in I.$$

Če je ρ razreda C^1, potem z uporabo transportnega izreka 3.7 dobimo

$$\int_{\chi_t(\mathcal{P})} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, dv = 0,$$

in ker to velja za poljubno množico $\chi_t(\mathcal{P}) \subseteq \chi_t(\mathcal{B})$, je po trditvi 2.15

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.15}$$

na celotnem območju $\chi_t(\mathcal{B})$ in za vsak $t \in I$, torej na celotnem območju Ω, enako pa potem velja tudi v materialnem opisu na $\mathcal{B} \times I$. Enačba (3.15) je znana pod imenom *lokalna oblika zakona o ohranitvi mase.* V krivuljnih koordinatah (x^i) za prostor $\mathscr{E}$ se enačba (3.15) glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x^i} v^i + \rho {v^i}_{,i} = 0,$$

pri čemer smo uporabili materialni časovni odvod (3.6) za ρ, v^i pa so komponente vektorja hitrosti $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i$.

Izrek 3.9. *Naj bo tenzorsko polje* $\boldsymbol{f} \colon \mathcal{B} \times I \to W$ *razreda* C^1 *in naj bo masna gostota* $\rho \colon \Omega \to (0, \infty)$ *prav tako razreda* C^1*. Potem za vsak* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ *velja*

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \boldsymbol{f} \rho\, dv = \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \dot{\boldsymbol{f}} \rho\, dv.$$

Dokaz. Iz transportnega izreka 3.7 dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \boldsymbol{f} \rho\, dv &= \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \big((\boldsymbol{f}\rho)^{\cdot} + \boldsymbol{f} \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} \big)\, dv \\
&= \int_{\chi_t(\mathcal{P})} (\dot{\boldsymbol{f}} \rho + \boldsymbol{f} \dot{\rho} + \boldsymbol{f} \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, dv \\
&= \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \dot{\boldsymbol{f}} \rho\, dv + \int_{\chi_t(\mathcal{P})} \boldsymbol{f} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, dv,
\end{aligned}$$

od koder sledi enakost iz izreka, če upoštevamo (3.15). □

Drugа možnost za dokaz izreka je uporaba posledice 3.8 in izreka 3.6.

Poglavje 4

Hamiltonov princip in variacijske metode

4.1 Dopustno gibanje in variacija

V tem poglavju bomo s pomočjo t. i. *Hamiltonovega principa* poiskali potrebne pogoje, ki jim mora zadoščati pravo gibanje telesa. Še naprej naj $\mathcal{B}$ označuje referenčno konfiguracijo telesa (zaprto regularno območje v $\mathscr{E}_R$) in $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ zaprt časovni interval.

Recimo, da pravo gibanje iščemo med vsemi gibanji $\chi\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{E}$ razreda C^2, ki zadoščajo v naprej predpisanim začetnim in robnim pogojem.

1. *Začetni pogoj* je predpis

$$\chi(X, t_1) = \chi_{t_1}(X) \quad \text{in} \quad \chi(X, t_2) = \chi_{t_2}(X), \quad \forall\, X \in \mathcal{B}, \tag{4.1}$$

   kjer sta $\chi_{t_1}, \chi_{t_2}\colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}$ znani konfiguraciji razreda C^2, ki določata položaj telesa ob začetnem in končnem času t_1 oz. t_2.

2. *Robni pogoji* so lahko treh vrst. *Kinematični robni pogoj* je predpis

$$\chi(X, t) = q(X, t) \quad \text{za} \quad (X, t) \in \partial\mathcal{B} \times I, \tag{4.2}$$

   kjer je $q\colon \partial\mathcal{B} \times I \to \mathscr{E}$ poznana. Kinematični robni pogoj torej v naprej določa položaj robnih točk telesa. *Robni pogoj napetosti* je predpis za napetostni vektor, ki deluje na rob telesa. Ta pogoj bomo predstavili v naslednjem razdelku. Če je kinematični robni pogoj (4.2) podan le na $\partial_1\mathcal{B} \times I$, kjer je $\partial_1\mathcal{B} \subset \partial\mathcal{B}$, na $\partial_2\mathcal{B} \times I$ pa je podan robni pogoj napetosti, kjer je $\partial_2\mathcal{B} = \partial\mathcal{B} \setminus \partial_1\mathcal{B}$, potem tak robni pogoj imenujemo *mešani robni pogoj*.

Množica $\mathcal{X}$ vseh preslikav $\chi\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{E}$ razreda C^2 tvori vektorski prostor. $\mathcal{X}$ postane Banachov prostor, če na njem smiselno definiramo normo. Možna izbira predpisa za normo je npr.

$$\|\cdot\|\colon \mathcal{X} \to [0,\infty), \quad \|\chi\| = \sup\big\{\|\boldsymbol{\chi}(X,t)\|\ ;\ (X,t) \in \mathcal{B} \times I\big\}.$$

Pri tem je v skladu z dogovorom 2.10 $\boldsymbol{\chi} = \iota_o \circ \chi$, norma, ki se pojavi znotraj množice, pa je Evklidska norma na prostoru $\mathscr{V}$. Dejansko lahko supremum nadomestimo z maksimumom, ker je vsak $\chi \in \mathcal{X}$ zvezna preslikava na kompaktni domeni $B \times I$.

Definicija 4.1. 1. Preslikava $\chi \in \mathcal{X}$, ki zadošča predpisanim začetnim pogojem in kinematičnim robnim pogojem, se imenuje *dopustno gibanje*. Množico vseh dopustnih gibanj bomo označili z $\mathcal{A}$.

2. Vektorsko polje $\boldsymbol{\eta}\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{V}$, ki je razreda C^2 in ustreza pogojem

$$\boldsymbol{\eta}(X,t_1) = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\eta}(X,t_2) = \mathbf{0} \quad \text{za vse } X \in \mathcal{B} \quad \text{ter}$$

$$\boldsymbol{\eta}(X,t) = \mathbf{0} \quad \text{za vse } (X,t) \in \partial_1\mathcal{B} \times I,$$

se imenuje *variacija gibanja*. Množico vseh variacij gibanja bomo označili s $\mathcal{T}$.

3. Za dopustno gibanje χ, variacijo gibanja $\boldsymbol{\eta}$ in realno število ε se gibanje[1] $\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta}$ imenuje *bližnje gibanje* gibanja χ.

Takoj je potrebno opozoriti, da kljub poimenovanju dopustno gibanje in bližnje gibanje nista nujno gibanji, kot smo ju definirali v poglavju 3, ker tukaj nismo nič zahtevali, da morajo biti trenutne konfiguracije dopustnega ali bližnjega gibanja bijektivne. Ta pogoj je avtomatsko izpolnjen, če je pripadajoča determinanta deformacijskega gradienta vseskozi različna od 0. V bistvu je to potreben in tudi zadosten pogoj, da so trenutne konfiguracije dopustnega ali bližnjega gibanja res bijektivne za vsak $t \in I$.[2] Ko bomo iskali pravo gibanje, bo neničelnost jacobijana eden od potrebnih pogojev. V bistvu bomo predpostavili, da so konfiguracija χ_{t_1} iz začetnega pogoja (4.1) ter opazovališči za $\mathscr{E}_R$ in $\mathscr{E}$ izbrani tako, da je $J(\cdot,t_1) > 0$. Zato bo za pravo gibanje potreben dodaten pogoj, da je jacobijan pozitiven na celotnem definicijskem območju.

Ni se težko prepričati, da je $\mathcal{T}$ vektorski podprostor prostora $\mathcal{X}$, če na elemente iz $\mathcal{X}$ gledamo kot na vektorska polja glede na opazovališče ι_o za $\mathscr{E}$.

[1] V skladu z dogovorom na strani 6 je vsota točke in vektorja točka, zato preslikava $\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta}$ pripada prostoru $\mathcal{X}$.

[2] To velja za odvedljive preslikave, kar pa dopustna in bližnja gibanja po definiciji so.

Prav tako zlahka ugotovimo, da za poljubni dopustni gibanji χ_1 in χ_2 velja $\chi_2 - \chi_1 \in \mathcal{T}$. $\mathcal{A}$ je torej afini podprostor prostora $\mathcal{X}$, saj je

$$\mathcal{A} = \left\{\chi_0 + \boldsymbol{\eta}\,;\ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{T}\right\} = \chi_0 + \mathcal{T},$$

kjer je χ_0 poljubno dopustno gibanje.

Definicija 4.2. Naj bo U množica, ki je dobljena kot presek neke odprte množice v $\mathcal{X}$ in afinega podprostora $\mathcal{A}$. Naj bo $\mathcal{Y}$ Banachov prostor in $F\colon U \to \mathcal{Y}$ odvedljiva preslikava. Smerni odvod

$$\delta F\colon U \to \mathscr{L}(\mathcal{T}, \mathcal{Y}), \qquad \delta F(\chi)(\boldsymbol{\eta}) = \frac{d}{d\varepsilon} F(\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta})\Big|_{\varepsilon=0}$$

se imenuje tudi *variacija* preslikave F.

Notacija 4.3. Naj bo preslikava F definirana kot v prejšnji definiciji. Če F gibanju χ priredi neko njegovo fizikalno količino Y, $F(\chi) = Y$, potem oznaka Y^* pomeni pripadajočo fizikalno količino bližnjega gibanja, $Y^* = F(\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta})$ za neka $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{T}$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}$, oznaka δY pa pomeni $\delta Y = \delta F(\chi)(\boldsymbol{\eta})$. V tej notaciji velja

$$\delta Y = \left(\frac{dY^*}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0},$$

δY pa imenujemo tudi *variacija* količine Y.

Primeri 4.4. Poglejmo si nekaj posebnih primerov za preslikavo F iz zadnje definicije.

1. Če F dopustnemu gibanju χ priredi vektorsko polje hitrosti $\boldsymbol{v}$, $F(\chi) = d\boldsymbol{\chi}/dt = \dot{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{v}$, potem je

   $$\boldsymbol{v}^* = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\chi} + \varepsilon\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{v} + \varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}},$$

   variacija polja hitrosti pa je

   $$\delta\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\eta}}.$$

2. Če F dopustnemu gibanju χ priredi polje deformacijskega gradienta $\mathbf{F}$, $F(\chi) = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{F}$, potem je

   $$\mathbf{F}^* = \mathrm{Grad}(\boldsymbol{\chi} + \varepsilon\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{F} + \varepsilon\mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta},$$

   variacija pa je

   $$\delta\mathbf{F} = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta}. \tag{4.3}$$

3. Če F dopustnemu gibanju χ priredi polje jacobijana $J = \det(\mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi})$, potem je
$$J^* = \det(\mathrm{Grad}(\boldsymbol{\chi} + \varepsilon\boldsymbol{\eta})) = \det(\mathbf{F}^*).$$
Pri računanju variacije polja J se uporabi podobne prijeme, kot smo jih uporabili pri računanju enakosti (3.13). Dobimo
$$\begin{aligned}\delta J &= D\det(\mathbf{F})(\delta\mathbf{F}) = \langle J\mathbf{F}^{-T}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta}\rangle \\ &= J\mathrm{tr}(\mathbf{F}^{-1}\mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta}) = J\mathrm{tr}(\mathrm{grad}\boldsymbol{\eta}) = J\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}.\end{aligned}$$
Na predzadnjem koraku smo uporabili enakost (3.5).

4. Za masno gostoto ρ_R referenčne konfiguracije se predpostavi, da je znana. Če je ρ polje masne gostote trenutne konfiguracije glede na gibanje χ, dobimo iz relacije (3.14)
$$\rho^* = \frac{\rho_R}{J^*}.$$
Izračunajmo še variacijo:
$$\delta\rho = \rho_R\delta\left(\frac{1}{J}\right) = \rho_R\frac{-1}{J^2}(\delta J) = -\frac{\rho_R}{J}\frac{J\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}}{J} = -\rho\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}. \tag{4.4}$$

4.2 Hamiltonov princip

Preden podamo Hamiltonov princip, ki nam bo povedal, kako poiskati pravo gibanje telesa, moramo definirati še nekaj fizikalnih količin, ki nastopajo v Hamiltonovem funkcionalu.

4.2.1 Kinetična energija

Kinetična energija telesa glede na dopustno gibanje χ je definirana kot
$$T = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \rho_R\, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \rho\, dv$$
in je funkcija časa $t \in I$. Kinetična energija bližnjega gibanja $\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta}$ je potemtakem
$$T^* = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{v}^*\rangle \rho_R\, dV = \int_{\mathcal{B}_t{}^*} \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{v}^*\rangle \rho^*\, dv.$$
Pri tem je $\mathcal{B}_t{}^* = \chi(\mathcal{B}, t) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(\mathcal{B}, t)$. Variacijo kinetične energije je lažje izračunati iz prvega izraza, saj lahko odvajanje prenesemo pod integralski

znak, ker se integracijsko območje z ε ne spreminja. Skalarni produkt pod integralom odvajamo po pravilu za odvod produkta in na koncu dobimo

$$\delta T = \int_{\mathcal{B}} \langle \delta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \rho_R \, dV = \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{v} \rangle \rho_R \, dV.$$

Zanimal nas bo še integral kinetične energije od časa t_1 do časa t_2,

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} T \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \rho_R \, dV \, dt,$$

katerega variacija je

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{v} \rangle \rho_R \, dV \, dt. \tag{4.5}$$

Zapišemo jo lahko še nekoliko drugače, v obliki, ki bo v nadaljevanju za nas bolj pomembna. V (4.5) smemo po Fubinijevem izreku zamenjati vrstni red integriranja. Notranji integral, ki je sedaj integral po času, integriramo per-partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \rho_R \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{\eta}} \rangle \, dt = \langle \rho_R \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta} \rangle \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \langle \rho_R \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\eta} \rangle \, dt.$$

Prvi izraz na desni strani je enak 0, saj je $\boldsymbol{\eta}(\cdot, t_1) = \boldsymbol{\eta}(\cdot, t_2) = \boldsymbol{0}$. Rezultat vstavimo nazaj v (4.5) in dobimo

$$\delta \mathcal{I} = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \langle \rho_R \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\eta} \rangle \, dV \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}_t} \langle \rho \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\eta} \rangle \, dv \, dt. \tag{4.6}$$

Pri tem druga enakost velja zaradi posledice 3.8.

4.2.2 Potencialna energija

Zunanje sile so prostorninske in površinske sile, ki delujejo na materialno telo med gibanjem χ in so posledica interakcije telesa z okoljem. Rezultanto $\boldsymbol{f}(t)$ vseh zunanjih sil, ki delujejo na materialno telo ob času $t \in I$, lahko zapišemo kot vsoto

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}_b(t) + \boldsymbol{f}_s(t),$$

kjer je

$$\boldsymbol{f}_b(t) = \int_{B_t} \boldsymbol{b} \rho \, dv = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{b} \rho_R \, dV$$

telesna sila, ki deluje znotraj telesa, ter

$$\boldsymbol{f}_s(t) = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \boldsymbol{t} \, da = \int_{\partial \mathcal{B}} \boldsymbol{t}_R \, dA \tag{4.7}$$

stična sila, ki deluje na rob telesa. Vektorsko polje $\boldsymbol{b}$ je *gostota prostorninske sile*, njegove vrednosti imajo fizikalno enoto pospeška, torej *meter na kvadratno sekundo*, ms^{-2}. Primer takega vektorskega polja je npr. gravitacijski pospešek. Predpostavili bomo, da je $\boldsymbol{b}$ konzervativno vektorsko polje, kar pomeni, da obstaja C^1 skalarno polje $\phi\colon \mathscr{E} \times I \to \mathbb{R}$, da je

$$\boldsymbol{b}(x,t) = -\mathrm{grad}\phi(x,t).$$

Vektorsko polje

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(x,t), \quad (x,t) \in \{(x,t)\,;\; x = \chi_t(\partial\mathcal{B}),\; t \in I\}$$

se imenuje *Cauchyjev napetostni vektor*, polje

$$\boldsymbol{t}_R = \boldsymbol{t}_R(X,t), \quad (X,t) \in \partial\mathcal{B} \times I$$

pa *Piola-Kirchhoffov napetostni vektor*. Oba imata fizikalno enoto tlaka, torej *Newton na kvadratni meter*, Nm^{-2}. Primer napetostnega vektorja je npr. atmosferski tlak. Iz enačbe (4.7) vidimo, da mora veljati zveza

$$\boldsymbol{t}\,da = \boldsymbol{t}_R\,dA. \tag{4.8}$$

Tudi za napetostni vektor bomo predpostavili, da je konzervativno vektorsko polje, v smislu, da obstaja v času zvezno odvedljiv, v prostoru pa odsekoma zvezno odvedljiv[3] skalarni potencial $\psi\colon \mathscr{E} \to \mathbb{R}$, da velja

$$\boldsymbol{t}_R(x,t) = -\mathrm{grad}\psi(x,t) \quad \text{za} \quad (x,t) \in \{(x,t)\,;\; x = \chi_t(\partial\mathcal{B}),\; t \in I\},$$

kjer je $\boldsymbol{t}_R(x,t) = \boldsymbol{t}_R(\chi(X,t),t)$ prostorski opis polja $\boldsymbol{t}_R$.

Za polje $\boldsymbol{b}$ bomo predpostavili, da je znano. Če imamo podan predpis za polje $\boldsymbol{t}_R$ na območju $\partial\mathcal{B} \times I$, potem je ta predpis robni pogoj napetosti. Pri mešanih robnih pogojih poznamo predpis za polje $\boldsymbol{t}_R$ na območju $\partial\mathcal{B}_2 \times I$, na območju $\partial\mathcal{B}_1 \times I$ pa je podan predpis $\chi = q$. Na kinematične robne pogoje in robne pogoje napetosti lahko gledamo kot na poseben primer mešanih robnih pogojev; v prvem primeru je $\partial_2\mathcal{B} = \emptyset$, v drugem pa $\partial_1\mathcal{B} = \emptyset$.

Izraz

$$W = \int_{\mathcal{B}} \phi\rho_R\,dV + \int_{\partial_2\mathcal{B}} \psi\,dA$$

predstavlja del *potencialne energije* telesa, ki izvira iz potencialov zunanjih sil. Preostali del potencialne energije tvori *notranja* ali *deformacijska energija*, ki jo bomo označili z U, in je odvisna od materiala. Celotna potencialna

[3]Namesto gradienta imamo v tem primeru smerni odvod, definiran le v smereh iz tangentne ravnine na ploskev ∂B_t; vseeno bomo uporabljali oznako za gradient.

energija je torej $W + U$. V razdelku 4.4 si bomo ogledali primera elastičnih tekočin in hiperelastičnih trdnih teles in takrat bomo tudi podali izraz za notranjo energijo za ta dva primera.

Skalarni polji ϕ in ψ sta na prostoru $\mathscr{E} \times I$ definirani neodvisno od gibanja. Seveda to ne velja za njun materialni opis, od gibanja χ sta odvisni preko zvez

$$\hat{\phi}(X,t) = \phi(\chi(X,t),t) \quad \text{in} \quad \hat{\psi}(X,t) = \psi(\chi(X,t),t)$$

za $(X,t) \in \mathcal{B} \times I$. Če imamo namesto gibanja χ njegovo bližnje gibanje $\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta}$, potem je

$$\hat{\phi}^*(X,t) = \phi\big(\chi(X,t) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(X,t),t\big) \quad \text{in} \quad \hat{\psi}^*(X,t) = \psi\big(\chi(X,t) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(X,t),t\big).$$

Če ta dva izraza odvajamo po ε, nato pa postavimo $\varepsilon = 0$, dobimo variaciji

$$\delta\phi = \langle \mathrm{grad}\phi, \boldsymbol{\eta}\rangle = -\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\eta}\rangle, \qquad \delta\psi = \langle \mathrm{grad}\psi, \boldsymbol{\eta}\rangle = -\langle \boldsymbol{t}_R, \boldsymbol{\eta}\rangle.$$

Variacijo izraza W imamo sedaj na dlani:

$$\delta W = -\int_{\mathcal{B}} \langle \rho_R \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\eta}\rangle \, dV - \int_{\partial_2\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{t}_R, \boldsymbol{\eta}\rangle \, dA = -\int_{\mathcal{B}_t} \langle \rho\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\eta}\rangle \, dv - \int_{\partial_2\mathcal{B}_t} \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\eta}\rangle \, da. \tag{4.9}$$

Tu smo z $\partial_2\mathcal{B}_t$ označili $\chi_t(\partial_2\mathcal{B})$ in uporabili zvezo (4.8). Variacija δW je sicer splošno znana pod imenom *virtualno delo* zunanjih sil. Kot bomo videli v nadaljevanju, ni potrebno, da poznamo skalarna potenciala ϕ in ψ, ker nas bo zanimalo le virtualno delo. Pomembno je le, da predpostavimo njun obstoj.

4.2.3 Hamiltonov funkcional in Hamiltonov princip

Definicija 4.5. Funkcional, ki gibanju $\chi \in \mathcal{D}$ s kinetično energijo T in potencialno energijo $U + W$ priredi realno število

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - W)\, dt,$$

se imenuje *Hamiltonov funkcional.*

Definicija 4.6. Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ množica, dobljena kot presek afinega podprostora $\mathcal{A}$ in neke odprte množice v prostoru $\mathcal{X}$. Funkcional $F\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ima lokalni minimum pri dopustnem gibanju $\chi_0 \in \mathcal{D}$, če obstaja $\varepsilon > 0$, da za vsak $\chi \in \mathcal{D}$, za katerega je $\|\chi - \chi_0\| < \varepsilon$, velja $F(\chi_0) < F(\chi)$.

Hamiltonov princip. Za pravo gibanje telesa velja, da je njegov jacobijan pozitiven na celotnem definicijskem območju, Hamiltonov funkcional pa pri pravem gibanju zavzame lokalni minimum.

Hamiltonov princip zajema načelo minimalnega odpora. Telo se bo gibalo tako, da bo na poti razlika med kinetično in potencialno energijo čim manjša. Omenimo še, da zaradi zveznosti operatorja, ki dopustnemu gibanju priredi njegov jacobijan, obstaja okolica pravega gibanja, kjer je jacobijan vsakega gibanja iz te okolice še prav tako pozitiven.

Trditev 4.7. *Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ množica, dobljena kot presek afinega podprostora $\mathcal{A}$ in neke odprte množice v prostoru $\mathcal{X}$. Če funkcional $F\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ zavzame lokalni minimum pri dopustnem gibanju $\chi \in \mathcal{D}$, potem velja*

$$\delta F(\chi)(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \textit{za vsak } \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{T}.$$

Dokaz. Recimo, da F zavzame lokalni minimum pri $\chi \in \mathcal{D}$ in naj bo $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{T}$ poljubna. Definirajmo funkcijo $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\varphi(\varepsilon) = F(\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta}).$$

φ ima lokalni minimum pri $\varepsilon = 0$, zato velja $\varphi'(0) = 0$. Po drugi strani pa je

$$\varphi'(0) = \frac{d}{d\varepsilon} F(\chi + \varepsilon\boldsymbol{\eta})\Big|_{\varepsilon=0} = \delta F(\chi)(\boldsymbol{\eta}).$$

□

Posledica 4.8. *Potreben pogoj, ki mu mora pravo gibanje zadoščati, je pozitivnost jacobijana na celotnem definicijskem območju ter*

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U - \delta W)\, dt = 0.$$

Če poznamo izraz za notranjo energijo in njeno variacijo, potem iz posledice dobimo integralsko enačbo. Izraz za variacijo kinetične energije in virtualno delo smo namreč že izpeljali. Iz integralske enačbe se da dobiti sistem lokalnih diferencialnih enačb za tenzorska polja. Med rešitvami tega sistema je tudi sámo gibanje telesa. Da pa dobimo lokalne enačbe, potrebujemo nekaj izrekov, ki so podani v naslednjem razdelku.

4.3 Osnovne leme variacijskega računa

Skozi ta razdelek naj oznaka $\mathscr{W}$ predstavlja končnorazsežen vektorski prostor nad poljem realnih števil, opremljen s skalarnim produktom. Naj bo U podmnožica nekega metričnega prostora. *Nosilec* preslikave $\boldsymbol{w}\colon U \to \mathscr{W}$ je množica

$$\operatorname{supp} \boldsymbol{w} = \overline{\{x \in U\,;\ \boldsymbol{w}(x) \neq \mathbf{0}\}}.$$

Črta nad množico pomeni zaprtje množice. Če je $\operatorname{supp} \boldsymbol{w}$ kompaktna množica, potem rečemo, da je $\boldsymbol{w}$ *preslikava s kompaktnim nosilcem.* V nadaljevanju bomo pokazali, da obstajajo gladka tenzorska polja s kompaktnim nosilcem, saj jih bomo potrebovali v izrekih, ki jih bomo navedli v tem razdelku.

Prepričajmo se, da je funkcija

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ x \leq 0 \end{cases}$$

gladka. Očitno je to res za $x \neq 0$. Izračun limite v točki 0 pokaže, da je g zvezna v 0. Za $x > 0$ so odvodi funkcije g

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}, \qquad g^{(k)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) p_k\left(\frac{1}{x}\right),$$

kjer so p_k polinomi, $k \in \mathbb{N}$. Če naredimo limito teh odvodov, ko gre x z desne proti 0, dobimo $g^{(k)}(0) = 0$ za vse $k = 1, 2, \ldots$. Leva limita odvodov funkcije g je pa očitno vedno 0. Obe limiti sta enaki, torej so vsi odvodi funkcije g zvezni v točki 0.

Oglejmo si sedaj funkcijo

$$\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \beta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & ;\ |x| < 1 \\ 0 & ;\ |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Zapišemo jo lahko kot kompozitum funkcije g ter funkcije $x \mapsto 1 - x^2$. Obe funkciji sta gladki povsod in tak je zato je tudi njun kompozitum β. Nosilec funkcije β je $[-1, 1]$, v notranjosti nosilca pa je vrednost funkcije β pozitivna.

Definirajmo skalarno polje $\gamma\colon \mathscr{E}_R \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\gamma(X) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|\boldsymbol{X}\|^2}\right) & ;\ \|\boldsymbol{X}\| < 1 \\ 0 & ;\ \|\boldsymbol{X}\| \geq 1 \end{cases}$$

Pri tem je $\boldsymbol{X}$ krajevni vektor točke X. γ lahko zapišemo kot kompozitum $X \mapsto \|\boldsymbol{X}\| \mapsto \beta(\|\boldsymbol{X}\|)$, zato je polje γ gladko s kompaktnim nosilcem

$$\operatorname{supp} \gamma = \overline{\left\{X \in \mathscr{E}_R\,;\ \|\boldsymbol{X}\| < 1\right\}} = \overline{K}(O, 1).$$

Tu je $\overline{K}(O,1)$ zaprta krogla z radijem 1 okoli izhodiščne točke $O \in \mathscr{E}_R$ opazovališča $\hat{\iota}_O$ za $\mathscr{E}_R$.

Naj bo $\{\boldsymbol{b}_j\}_{j=1}^n$ baza prostora $\mathscr{W}$. Za neke $1 \leq k \leq n$, $\alpha > 0$, $X_0 \in \mathscr{E}_R$ in $t_0 \in \mathbb{R}$ definirajmo tenzorsko polje

$$\boldsymbol{w}\colon \mathscr{E}_R \times \mathbb{R} \to \mathscr{W}, \qquad \boldsymbol{w}(X,t) = \beta\left(\frac{t-t_0}{\alpha}\right)\gamma\left(\frac{X-X_0}{\alpha}\right)\boldsymbol{b}_k. \tag{4.10}$$

Hitro se lahko prepričamo, da je

$$\operatorname{supp}\boldsymbol{w} = \overline{K}(X_0,\alpha) \times [t_0-\alpha, t_0+\alpha], \tag{4.11}$$

kjer je $\overline{K}(X_0,\alpha) = \{X \in \mathscr{E}_R\,;\ \|X - X_0\| \leq \alpha\}$ zaprta krogla s središčem v X_0 in radijem α. Tako definirano polje $\boldsymbol{w}$ je tudi gladko, saj je produkt gladkih polj. V notranjosti nosilca je njegova edina neničelna (tj. k-ta) komponenta glede na bazo $\{\boldsymbol{b}_j\}_{j=1}^n$ pozitivna.

Omenimo še to pomembno dejstvo, da za vsako zvezno preslikavo $\boldsymbol{w}$ s kompaktnim nosilcem velja, da je $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ na robu nosilca. Komplement nosilca je namreč odprta množica, na kateri je $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, in ker je $\boldsymbol{w}$ zvezna, je po zvezni razširitvi $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ tudi na robu komplementa, ki je enak robu nosilca.

Lema 4.9. *Naj bo $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{B} \times [t_1,t_2] \to \mathscr{W}$ zvezno polje. Če velja*

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}\rangle\, dV\, dt = 0 \tag{4.12}$$

za vsako gladko polje $\boldsymbol{w}\colon \mathcal{B} \times [t_1,t_2] \to \mathscr{W}$, za katerega velja

$$\boldsymbol{w}(\cdot,t_1) = \boldsymbol{w}(\cdot,t_2) = \boldsymbol{0} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \text{ na } \partial\mathcal{B} \times [t_1,t_2],$$

potem je $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ na $\mathcal{B} \times [t_1,t_2]$.

Dokaz. Glede na fiksno bazo $\{\boldsymbol{b}_j\}_{j=1}^n$ prostora $\mathscr{W}$ lahko $\boldsymbol{f}$ zapišemo v komponentni obliki kot $\boldsymbol{f} = f_j\boldsymbol{b}_j$. Recimo, da obstaja točka (X_0,t_0) v notranjosti območja $\mathcal{B} \times [t_1,t_2]$, da je $f_k(X_0,t_0) \neq 0$ za neki $1 \leq k \leq n$. Potem zaradi zveznosti polja $\boldsymbol{f}$ obstaja dovolj majhen $\alpha > 0$, da je f_k na okolici $U = K(X_0,\alpha) \times (t_0-\alpha, t_0+\alpha)$ točke (X_0,t_0) različna od 0 in enakega predznaka, hkrati pa je U še v celoti vsebovana v notranjosti območja $\mathcal{B} \times [t_1,t_2]$.

Definirajmo polje $\boldsymbol{w}$ kot v (4.10), če je $f_k(X_0,t_0) > 0$, oz. kot $-\boldsymbol{w}$, če je $f_k(X_0,t_0) < 0$. Skrčitev polja $\boldsymbol{w}$ na domeno $\mathcal{B} \times [t_1,t_2]$ tako ustreza vsem pogojem iz leme. Skalarni produkt $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}\rangle$ je pozitiven na množici U (katere zaprtje je ravno nosilec od $\boldsymbol{w}$) in je 0 drugje, zato je

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}\rangle\, dV\, dt = \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha}\int_{\overline{K}(X_0,\alpha)} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}\rangle\, dV\, dt > 0,$$

kar nasprotuje enačbi (4.12). Torej mora veljati $f_k = 0$ za vsak k, tj. $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ povsod v notranjosti območja $\mathcal{B} \times [t_1, t_2]$, zaradi zveznosti pa tudi na zaprtju. $\square$

Lema 4.10. *Naj rob $\partial\mathcal{B}$ sestoji iz komplementarnih ploskev $\partial_1\mathcal{B}$ in $\partial_2\mathcal{B}$. Naj bo $\mathcal{R}$ množica vseh tistih regularnih točk ploskve $\partial_2\mathcal{B}$, ki niso na robu ploskve $\partial_2\mathcal{B}$ in naj bo polje $\boldsymbol{f}\colon \partial_2\mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathscr{W}$ zvezno na podobmočju $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$. Če velja*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial_2\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w} \rangle \, dA \, dt = 0 \tag{4.13}$$

za vsako gladko polje $\boldsymbol{w}\colon \mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathscr{W}$, za katero je

$$\boldsymbol{w}(\cdot, t_1) = \boldsymbol{w}(\cdot, t_2) = \mathbf{0} \quad in \quad \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \ na \ \partial_1\mathcal{B} \times [t_1, t_2],$$

potem je $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ na $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$.

Dokaz. Podobno, kot v prejšnjem dokazu, zapišemo $\boldsymbol{f} = f_j \boldsymbol{b}_j$ in predpostavimo $f_k(X_0, t_0) \neq 0$ za neke $1 \leq k \leq n$, $t_0 \in (t_1, t_2)$ in $X_0 \in \mathcal{R}$.

Ker točka X_0 ni na robu ploskve $\partial_2\mathcal{B}$ in je regularna, obstaja za dovolj majhen $\alpha > 0$ okolica $K(X_0, \alpha) \times (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ točke (X_0, t_0), tako da je $K(X_0, \alpha) \cap \partial_2\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$, $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset [t_1, t_2]$ in je f_k zaradi zveznosti $\boldsymbol{f}$ različna od 0 in enakega predznaka na območju $(K(X_0, \alpha) \cap \partial_2\mathcal{B}) \times (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$.

Definirajmo polje $\boldsymbol{w}$ kot v (4.10), če je $f_k(X_0, t_0) > 0$, oz. kot $-\boldsymbol{w}$, če je $f_k(X_0, t_0) < 0$. Skrčitev tako definiranega polja $\boldsymbol{w}$ na območje $\mathcal{B} \times [t_1, t_2]$ ustreza predpostavkam iz leme. Skalarni produkt $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w} \rangle$ je pozitiven na $(K(X_0, \alpha) \cap \partial_2\mathcal{B}) \times (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ in je 0 drugje na $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$, zato je[4]

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial_2\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w} \rangle \, dA \, dt = \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} \int_{K(X_0,\alpha)\cap\partial_2\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w} \rangle \, dA \, dt > 0,$$

kar nasprotuje enačbi (4.13). Torej mora veljati $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ na $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$. $\square$

Lema 4.11. *Naj bo $\chi\colon \mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathscr{E}$ gibanje razreda C^1 s pozitivnim jacobijanom J in $\boldsymbol{f}\colon \mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathscr{W}$ zvezno tenzorsko polje. Če velja*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\chi_t(\mathcal{B})} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w} \rangle \, dv \, dt = 0 \tag{4.14}$$

za vsako gladko polje $\boldsymbol{w}\colon \mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathscr{W}$, za katerega velja

$$\boldsymbol{w}(\cdot, t_1) = \boldsymbol{w}(\cdot, t_2) = \mathbf{0} \quad in \quad \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \ na \ \partial\mathcal{B} \times [t_1, t_2],$$

potem je $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ na $\mathcal{B} \times [t_1, t_2]$ oz. na Ω.

[4] Ploščina množice $\partial_2\mathcal{B} \setminus \mathcal{R}$ je 0.

V enačbi (4.14) nastopata polji $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{w}$ v prostorskem opisu.

Dokaz. Enačba (4.14) je po izreku 3.6 ekvivalentna enačbi

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \langle J\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w} \rangle \, dV \, dt = 0.$$

Ker je polje $J\boldsymbol{f}$ zvezno na $\mathcal{B} \times [t_1, t_2]$, je po lemi (4.9) $J\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ na $\mathcal{B} \times [t_1, t_2]$. Ker je $J > 0$, je $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ na $\mathcal{B} \times [t_1, t_2]$, v prostorskem opisu pa je potem tudi $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ na Ω. □

Lema 4.12. *Naj rob $\partial\mathcal{B}$ sestoji iz komplementarnih ploskev $\partial_1\mathcal{B}$ in $\partial_2\mathcal{B}$. Naj bo $\chi\colon \mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathscr{E}$ gibanje razreda C^1 s pozitivnim jacobijanom J in $f\colon \partial_2\mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ skalarno polje, zvezno na podobmočju $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$. Pri tem je $\mathcal{R}$ definirana enako, kot v lemi 4.10. Če velja*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\chi_t(\partial_2\mathcal{B})} \langle f\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \rangle \, da \, dt = 0 \tag{4.15}$$

za vsako gladko vektorsko polje $\boldsymbol{w}\colon \mathcal{B} \times [t_1, t_2] \to \mathscr{V}$, za katero je

$$\boldsymbol{w}(\cdot, t_1) = \boldsymbol{w}(\cdot, t_2) = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \text{ na } \partial_1\mathcal{B} \times [t_1, t_2],$$

potem je $f = 0$ na $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$ oz. na $\{(x, t)\,;\ x \in \chi_t(\mathcal{R}),\ t \in [t_1, t_2]\}$.

Dokaz. Enačba (4.15) je po izreku 3.5 ekvivalentna enačbi

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial_2\mathcal{B}} \langle fJ\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{N}, \boldsymbol{w} \rangle \, dA \, dt = 0.$$

Polje $fJ\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{N}$ je zvezno na $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$, zato je po lemi (4.10) $fJ\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{N} = \mathbf{0}$ na $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$. Ker so točke iz $\mathcal{R}$ regularne, je $\boldsymbol{N} \neq \mathbf{0}$, hkrati je po predpostavki $J > 0$, zato je tudi $\mathbf{F}^{-T}$ nesingularnen tenzor. Od tod sledi, da je $f = 0$ na $\mathcal{R} \times [t_1, t_2]$, v prostorskem opisu pa $f = 0$ na $\{(x, t)\,;\ x \in \chi_t(\mathcal{R}),\ t \in [t_1, t_2]\}$. □

4.4 Primera

V tem razdelku bomo podali dva primera, na katerih bomo prikazali uporabo Hamiltonovega principa kot sredstvo za izpeljavo enačb gibanja.

4.4.1 Elastični fluid

Elastični fluid je model tekočine, v katerem zanemarimo učinke viskoznosti. Če je tekočina stisljiva, potem je njena notranja ali deformacijska energija

$$U = \int_{\mathcal{B}} \rho_R e(\rho)\, dV = \int_{\chi_t(\mathcal{B})} \rho e(\rho)\, dv,$$

kjer je $e\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^2, imenovana *gostota notranje energije* in ima fizikalno enoto $m^2 s^{-2}$. Predpostavili bomo, da je funkcija e poznana, recimo iz zakona o idealnih plinih.

Izračunajmo variacijo notranje energije:

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{dU^*}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{\mathcal{B}} \rho_R e(\rho^*)\, dV\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\mathcal{B}} \rho_R e'(\rho^*)\frac{d\rho^*}{d\varepsilon}\, dV\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= -\int_{\mathcal{B}} \rho_R e'(\rho)\rho \operatorname{div}\boldsymbol{\eta}\, dV = -\int_{\chi_t(\mathcal{B})} \rho^2 e'(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}\, dv. \end{aligned}$$

Pri tem smo smeli zamenjati vrstni red odvajanja in integriranja, ker se referenčna konfiguracija $\mathcal{B}$ ne spreminja, nato pa smo uporabili verižno pravilo, enačbo (4.4) in posledico 3.8. Če sedaj na dobljenem rezultatu uporabimo relacijo 3 iz trditve 2.14 in nato divergenčni izrek 2.17_3, dobimo

$$\delta U = \int_{\chi_t(\mathcal{B})} \big\langle \operatorname{grad}\big(\rho^2 e'(\rho)\big), \boldsymbol{\eta}\big\rangle\, dv - \int_{\chi_t(\partial\mathcal{B})} \big\langle \rho^2 e'(\rho)\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta}\big\rangle\, da. \tag{4.16}$$

Od robnih pogojev imamo v tem primeru le robni pogoj napetosti. Naj bo $\mathcal{R} \subseteq \partial\mathcal{B}$ množica regularnih točk ploskve $\partial\mathcal{B}$ in predpostavimo, da imamo podan *zunanji tlak*, tj. zvezno skalarno polje $p\colon \mathscr{E}\times[t_1,t_2] \to \mathbb{R}$, da je $\boldsymbol{t} = -p\boldsymbol{n}$ na $\big\{(x,t)\,;\ x \in \chi_t(\mathcal{R}),\ t \in [t_1,t_2]\big\}$.

Če sedaj upoštevamo rezultate (4.6), (4.9) in (4.16), mora po posledici 4.8 pravo gibanje zadoščati enačbi

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \Bigg(\int_{\chi_t(\mathcal{B})} \Big\langle -\rho\boldsymbol{a} - \operatorname{grad}\big(\rho^2 e'(\rho)\big) + \rho\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\eta}\Big\rangle\, dv + \\ + \int_{\chi_t(\partial\mathcal{B})} \big\langle \big(\rho^2 e'(\rho) - p\big)\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta}\big\rangle\, da\Bigg)\, dt = 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

za vsako variacijo gibanja $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{T}$. Med drugim mora to veljati za vsako variacijo gibanja iz množice

$$\big\{\boldsymbol{\eta} \in C^\infty(\mathcal{B}\times[t_1,t_2],\mathscr{V})\,;\ \boldsymbol{\eta}(\cdot,t_1) = \boldsymbol{\eta}(\cdot,t_2) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0} \text{ na } \partial\mathcal{B}\times[t_1,t_2]\big\} \subset \mathcal{T};$$

pri teh variacijah je vrednost drugega integrala enaka 0, na preostali enačbi pa lahko potem uporabimo lemo 4.11 in dobimo

$$\rho \boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\big(\rho^2 e'(\rho)\big) + \rho \boldsymbol{b} \quad \text{na } \Omega. \tag{4.18}$$

Če ta rezultat sedaj upoštevamo v (4.17), vidimo, da mora za vsako variacijo gibanja $\boldsymbol{\eta}$ veljati

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\chi_t(\partial \mathcal{B})} \big\langle \big(\rho^2 e'(\rho) - p\big)\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta} \big\rangle \, da \, dt = 0,$$

med drugim tudi za vsako variacijo iz množice

$$\big\{\boldsymbol{\eta} \in C^\infty(\mathcal{B} \times [t_1, t_2], \mathscr{V})\,;\ \boldsymbol{\eta}(\cdot, t_1) = \boldsymbol{\eta}(\cdot, t_2) = \mathbf{0}\big\} \subset \mathcal{T},$$

zato lahko uporabimo lemo 4.12 (v tem primeru je $\partial_1 \mathcal{B} = \emptyset$) in dobimo še pogoj

$$\rho^2 e'(\rho) = p \quad \text{na } \{(x,t)\,;\ x \in \chi_t(\mathcal{R}),\ t \in [t_1, t_2]\}. \tag{4.19}$$

Enačba (4.18) je *enačba za ohranitev gibalne količine.* Poleg enačb (4.18) in (4.19) sodi v sistem še enačba (3.15) za ohranitev mase.

V krivuljnih koordinatah (x^i) za prostor $\mathscr{E}$ se enačba (4.18) glasi

$$\rho\Big(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i{}_{,j}\Big) = g^{ij} \frac{\partial(\rho^2 e'(\rho))}{\partial x^j} + \rho b^i,$$

pri čemer so v^i in b^i komponente vektorjev $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i$ in $\boldsymbol{b} = b^i \boldsymbol{g}_i$, g^{ij} pa so metrični koeficienti. Pospešek $\boldsymbol{a}$ smo pri tem izrazili kot materialni odvod hitrosti (3.7).

4.4.2 Hiperelastično trdno telo

Hiperelastično trdno telo je model telesa iz trdnega materiala, v katerem se predpostavi, da je notranja ali deformacijska energija telesa podana kot

$$U = \int_{\mathcal{B}} \rho_R \sigma(\mathbf{F}) \, dV = \int_{\chi_t(\mathcal{B})} \rho \sigma(\mathbf{F}) \, dv,$$

kjer je $\sigma\colon \mathscr{L}(\mathscr{V}) \to \mathbb{R}$ *funkcija shranjene energije* ali *gostota deformacijske energije*, vrednost katere je odvisna od deformacijskega gradienta $\mathbf{F}$. Za funkcijo σ bomo v tem razdelku predpostavili, da je znana in da je razreda C^1 na svoji domeni. V dodatku A je za funkcijo σ navedenih nekaj dodatnih lastnosti, bolj podrobno pa je obdelana za primer izotropnega hiperelastičnega trdnega telesa.

Pri danem $\mathbf{F}$ je $D\sigma(\mathbf{F})$ linearen funkcional na vektorskem prostoru $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ s svojim skalarnim produktom, zato po Riezsovem izreku o reprezentaciji linearnih funkcionalov pripada funkcionalu $D\sigma(\mathbf{F})$ natanko določen tenzor $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$, da za vsak $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ velja

$$D\sigma(\mathbf{F})(\mathbf{A}) = \langle \tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{A} \rangle = \mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{A}).$$

Po drugi točki dogovora 2.2 bomo odvod $D\sigma(\mathbf{F})$ enačili s pripadajočim tenzorjem $\tilde{\mathbf{S}}$. Definirajmo tenzorsko polje

$$\mathbf{S} \colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{L}(\mathscr{V}), \qquad \mathbf{S}(X,t) = \rho_R(X) D\sigma(\mathbf{F}(X,t)). \tag{4.20}$$

$\mathbf{S}(X,t)$ se imenuje *prvi Piola-Kirchhoffov napetostni tenzor*.

Izračunajmo variacijo notranje energije:

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{dU^*}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{\mathcal{B}} \rho_R \sigma(\mathbf{F}^*)\, dV\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{\mathcal{B}} \rho_R \left\langle D\sigma(\mathbf{F}^*), \frac{d\mathbf{F}^*}{d\varepsilon}\right\rangle dV\bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\mathcal{B}} \rho_R \langle D\sigma(\mathbf{F}), \mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta}\rangle\, dV = \int_{\mathcal{B}} \langle \mathbf{S}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta}\rangle\, dV.\end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili enakost (4.3). Če sedaj upoštevamo zvezi (3.5) in (2.4) ter izrek (3.6), dobimo

$$\delta U = \int_{\mathcal{B}} J \left\langle \frac{1}{J}\mathbf{S}\mathbf{F}^T, \mathrm{grad}\boldsymbol{\eta}\right\rangle dV = \int_{\chi_t(\mathcal{B})} \langle \mathbf{T}, \mathrm{grad}\boldsymbol{\eta}\rangle\, dv,$$

kjer se vrednost tenzorskega polja

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J}\mathbf{S}\mathbf{F}^T = \rho D\sigma(\mathbf{F})\mathbf{F}^T \tag{4.21}$$

imenuje *Cauchyjev napetostni tenzor*. Obe dobljeni enačbi za δU lahko s pomočjo izrekov 2.21 in 2.17 zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{\partial_2\mathcal{B}} \langle \mathbf{S}\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\eta}\rangle\, dA - \int_{\mathcal{B}} \langle \mathrm{Div}\mathbf{S}, \boldsymbol{\eta}\rangle\, dV && (4.22)\\ &= \int_{\chi_t(\partial_2\mathcal{B})} \langle \mathbf{T}\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\eta}\rangle\, da - \int_{\chi_t(\mathcal{B})} \langle \mathrm{div}\mathbf{T}, \boldsymbol{\eta}\rangle\, dv. && (4.23)\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da sta ploskovna integrala po ploskvah $\partial_1\mathcal{B}$ in $\chi_t(\partial_1\mathcal{B})$ enaka 0, saj je tam zaradi kinematičnega robnega pogoja $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$.

Po posledici 4.8 mora pravo gibanje zadoščati enačbama

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \Bigg(\int_{\mathcal{B}} \langle -\rho_R \boldsymbol{a} + \mathrm{Div}\mathbf{S} + \rho_R \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\eta}\rangle\, dV + \\ + \int_{\partial_2\mathcal{B}} \langle \boldsymbol{t}_R - \mathbf{S}\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\eta}\rangle\, dA \Bigg)\, dt = 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

in

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(\int_{\chi_t(\mathcal{B})}\langle -\rho\boldsymbol{a}+\mathrm{div}\mathbf{T}+\rho\boldsymbol{b},\boldsymbol{\eta}\rangle\,dv+$$
$$+\int_{\chi_t(\partial_2\mathcal{B})}\langle \boldsymbol{t}-\mathbf{T}\boldsymbol{n},\boldsymbol{\eta}\rangle\,ds\Big)\,dt=0 \quad (4.25)$$

za vsa dopustna gibanja $\boldsymbol{\eta}\in\mathcal{T}$. Pri tem smo zopet upoštevali že prej izpeljana rezultata (4.6) in (4.9) ter variaciji notranje energije (4.22) oz. (4.23). Od tu dalje postopamo na enak način, kot smo pri primeru za elastični fluid. Iz enačbe (4.24) dobimo z uporabo leme 4.9

$$\rho_R\boldsymbol{a}=\mathrm{Div}\mathbf{S}+\rho_R\boldsymbol{b}\quad \text{na } \mathcal{B}\times[t_1,t_2], \qquad (4.26)$$

iz enačbe (4.25) pa z uporabo leme 4.11 dobimo

$$\rho\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\mathbf{T}+\rho\boldsymbol{b}\quad \text{na } \Omega. \qquad (4.27)$$

Če dobljena rezultata upoštevamo v (4.24) oz. v (4.25) in nato uporabimo lemo 4.10 oz. lemo 4.12, dobimo še

$$\mathbf{S}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{t}_R\quad \text{na } \mathcal{R}\times[t_1,t_2] \qquad (4.28)$$

oziroma

$$\mathbf{T}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}\quad \text{na } \{(x,t)\,;\ x\in\chi_t(\mathcal{R}),\ t\in[t_1,t_2]\}. \qquad (4.29)$$

Pri tem je $\mathcal{R}$ množica regularnih točk ploskve $\partial_2\mathcal{B}$.

Tudi tu sta (4.26) in (4.27) *enačbi za ohranitev gibalne količine.* Poleg enačb (4.26) in (4.28) oz. (4.27) in (4.29) sodi v sistem še enačba ohranitve mase (3.15).

V krivuljnih koordinatah (x^i) za prostor $\mathscr{E}$ se enačbi (4.27) in (4.29) glasita

$$\rho\Big(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^j v^i{}_{,j}\Big)=T^{ij}{}_{,j}+\rho b^i,$$
$$t^i=T^{ij}n_j=T^i{}_j n^j,$$

pri čemer so $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i$, $\boldsymbol{b}=b^i\boldsymbol{g}_i$, $\boldsymbol{t}=t^i\boldsymbol{g}_i$, $\boldsymbol{n}=n^i\boldsymbol{g}_i=n_i\boldsymbol{g}^i$ in $\mathbf{T}=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j=T^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j$. Enačba (4.26) se glasi

$$\rho_R\Big(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^j v^i{}_{,j}\Big)=S^{iK}{}_{,K}+\rho_R b^i,$$

pri čemer je $\mathbf{S}=S^{iK}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{G}_K$ in $\{\boldsymbol{G}_K\}$ je kovariantna baza za koordinatni sistem (X^K) na $\mathcal{B}\subset\mathscr{E}_R$.

Dodatek A

Konstitucijske enačbe za izotropno hiperelastično trdno telo

Namen tega dodatka je izpeljava konstitucijske enačbe za Cauchyjev napetostni tenzor, ki se pojavi v primeru hiperelastičnega trdnega telesa.

A.1 Sprememba opazovališča in objektivnost

V razdelku 2.2.1 smo podali definicijo opazovališča za Evklidski prostor $\mathscr{E}$. Določene fizikalne količine, definirane v poglavju 3, so odvisne od izbire opazovališča. V tem razdelku bomo na kratko analizirali spremembo opazovališča in kako to vpliva na spremembo nekaterih fizikalnih količin.

Da se bomo izognili morebitnim dvomom, omenimo, da bodo imele v tem poglavju oznake z $*$ drug pomen, kot pa ga imajo v poglavju 4.

Sprememba opazovališča za $\mathscr{E}$ je prehod iz opazovališča ι_o v opazovališče $\iota^*_{o^*}$. Pri tem točka $x \in \mathscr{E}$, ki ima v opazovališču ι_o krajevni vektor $\boldsymbol{x} = \iota_o(x)$, dobi nov krajevni vektor $\boldsymbol{x}^* = \iota^*_{o^*}(x)$ glede na opazovališče $\iota^*_{o^*}$. Vsaka sprememba opazovališča porodi transformacijo

$$\iota^*_{o^*} \circ \iota_o^{-1} \colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^* = \iota^*_{o^*}(\iota_o^{-1}(\boldsymbol{x})).$$

Razdalja oz. metrika na $\mathscr{E}$ je odvisna od izbire opazovališča. *Izmerjena razdalja* med točkama $x_1, x_2 \in \mathscr{E}$ v opazovališču ι_o je

$$d(x_1, x_2) = \|\iota_o(x_2) - \iota_o(x_1)\| = \|\iota(x_1, x_2)\|,$$

kjer je $\|\cdot\|$ norma prostora $\mathscr{V}$. Nas bodo zanimale take spremembe opazovališča, ki ohranjajo izmerjene razdalje med točkami, kar pomeni, da mora za vsaki točki $x_1, x_2 \in \mathscr{E}$ veljati $\|\iota^*(x_1, x_2)\| = \|\iota(x_1, x_2)\|$. Iz linearne algebre vemo, da so izometrije na prostoru $\mathscr{V}$ natanko ortogonalne preslikave, torej mora veljati

$$\iota^*(x_1, x_2) = \mathbf{Q}\iota(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathscr{E}, \tag{A.1}$$

kjer je $\mathbf{Q} \in \mathscr{O}(\mathscr{V})$ ortogonalna preslikava. Če je $x \in \mathscr{E}$ in je $\boldsymbol{x} = \iota_o(x)$ ter $\boldsymbol{x}^* = \iota^*_{o^*}(x)$, potem je

$$\boldsymbol{x}^* = \iota^*(o^*, x) = \iota^*(o^*, o) + \iota^*(o, x) = \boldsymbol{c} + \mathbf{Q}\boldsymbol{x}. \tag{A.2}$$

Pri tem smo označili $\boldsymbol{c} = \iota^*(o^*, o)$. Transformaciji oblike (A.2) se reče tudi *toga transformacija*. Odselj bomo izraz *sprememba opazovališča* uporabljali zgolj za take spremembe opazovališča, ki porodijo togo transformacijo. V splošnem sta lahko $\mathbf{Q}$ in $\boldsymbol{c}$ časovno odvisna in v takem primeru gre za časovno odvisno spremembo opazovališča, vendar se bomo mi omejili na take spremembe opazovališč, kjer sta $\mathbf{Q}$ in $\boldsymbol{c}$ konstantna.

Za vsak vektor $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$ po aksiomih Evklidskega točkovnega prostora obstajata točki $x_1, x_2 \in \mathscr{E}$, da je $\boldsymbol{u} = \iota(x_1, x_2)$. Vektorju $\boldsymbol{u}$ pripada vektor $\boldsymbol{u}^* = \iota^*(x_1, x_2)$, za katerega po (A.1) velja

$$\boldsymbol{u}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{u}. \tag{A.3}$$

Linearni preslikavi $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ z razvojem $\mathbf{A} = A_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ pripada linearna preslikava

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &= A_{ij}\, \boldsymbol{e}^*_i \otimes \boldsymbol{e}^*_j = A_{ij}\, (\mathbf{Q}\boldsymbol{e}_i) \otimes (\mathbf{Q}\boldsymbol{e}_j) = \mathbf{Q}(A_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T.\end{aligned} \tag{A.4}$$

Za vektorsko količino $\boldsymbol{u}$ oz. tenzorsko količino $\mathbf{A}$ rečemo, da je *objektivna* ali pa *neodvisna od opazovališča*, če se z vsako spremembo opazovališča iz ι_o v $\iota^*_{o^*}$ transformira po pravilu (A.3) oz. (A.4). Skalarna količina je *objektivna* ali *neodvisna od opazovališča*, če ob vsaki spremembi opazovališča ostane nespremenjena.

Za prostor $\mathscr{E}_R$, ki služi zgolj določitvi materialnega telesa, naj velja, da ima vseskozi enako opazovališče. Spremembe opazovališča pridejo v upoštev zgolj za prostor $\mathscr{E}$, kjer potekajo fizikalni dogodki. Naj bo $\chi\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{E}$ gibanje s pripadajočima vektorskima poljema $\boldsymbol{\chi} = \iota_o \circ \chi$ in $\boldsymbol{\chi}^* = \iota^*_{o^*} \circ \chi$. Po (A.2) velja

$$\boldsymbol{\chi}^*(X, t) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\chi}(X, t) + \boldsymbol{c}.$$

Naj bosta $\mathbf{F} = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}$ in $\mathbf{F}^* = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}^*$ pripadajoča deformacijska gradienta gibanja. Iz zgornje relacije dobimo

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}.$$

Deformacijski gradient torej ni objektiven oz. neodvisen od opazovališča, saj se ne transformira po pravilu (A.4). Absolutna vrednost jacobijana je objektivna skalarna količina, saj velja

$$|J^*| = |\det(\mathbf{F}^*)| = |\det(\mathbf{QF})| = |\det \mathbf{Q}||\det \mathbf{F}| = |\det \mathbf{F}| = |J|.$$

Masna gostota mora biti pozitivna, saj bi sicer lahko obstajali deli telesa z negativno ali ničelno maso. Zato v primeru, ko je $J < 0$, definiramo masno gostoto trenutne konfiguracije kot $\rho = \rho_R/|J|$ in je tudi objektivna skalarna količina, saj velja

$$\rho^* = \frac{\rho_R}{|J^*|} = \frac{\rho_R}{|J|} = \rho.$$

Za funkcijo shranjene energije $\sigma = \sigma(\mathbf{F})$, ki smo jo predstavili v primeru hiperelastičnega trdnega telesa, zahtevamo, da je kot skalarna količina neodvisna od opazovališča, torej mora veljati

$$\sigma^* = \sigma(\mathbf{F}^*) = \sigma(\mathbf{QF}) = \sigma(\mathbf{F}) \tag{A.5}$$

za vse nesingularne $\mathbf{F} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ in vse $\mathbf{Q} \in \mathscr{O}(\mathscr{V})$. Če deformacijski gradient zapišemo v polarnem razcepu $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ (izrek 2.11) in v (A.5) za $\mathbf{Q}$ uporabimo $\mathbf{R}^T$, dobimo

$$\sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{U}), \tag{A.6}$$

torej je σ odvisna od deformacijskega gradienta $\mathbf{F}$ le preko desnega raztezno-stnega tenzorja $\mathbf{U}$ in nič od rotacije $\mathbf{R}$.

Dokažimo še, da je tedaj Cauchyev napetostni tenzor (4.21)

$$\mathbf{T} = \rho D\sigma(\mathbf{F})\mathbf{F}^T \tag{A.7}$$

tudi objektiven. Če izraz $\sigma(\mathbf{QF})$ odvajamo po $\mathbf{F}$, dobimo za poljuben $\mathbf{H} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\sigma(\mathbf{Q}(\mathbf{F} + \varepsilon\mathbf{H}))\Big|_{\varepsilon=0} = \langle D\sigma(\mathbf{QF}), \mathbf{QH}\rangle = \langle \mathbf{Q}^T D\sigma(\mathbf{QF}), \mathbf{H}\rangle.$$

Z odvajanjem zadnje enakosti iz (A.5) po $\mathbf{F}$ torej pridemo do

$$\mathbf{Q}^T D\sigma(\mathbf{QF}) = D\sigma(\mathbf{F}) \qquad \text{oziroma} \qquad D\sigma(\mathbf{QF}) = \mathbf{Q}D\sigma(\mathbf{F}).$$

Z upoštevanjem pravkar dobljene enakosti in objektivnosti masne gostote dobimo

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^* &= \rho^* D\sigma(\mathbf{F}^*)\mathbf{F}^{*T} = \rho D\sigma(\mathbf{QF})\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T = \rho\mathbf{Q}D\sigma(\mathbf{F})\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{QTQ}^T \qquad \forall\, \mathbf{Q} \in \mathscr{O}(\mathscr{V}),\end{aligned}$$

kar dokazuje, da je $\mathbf{T}$ neodvisen od opazovališča.

A.2 Materialne simetrije

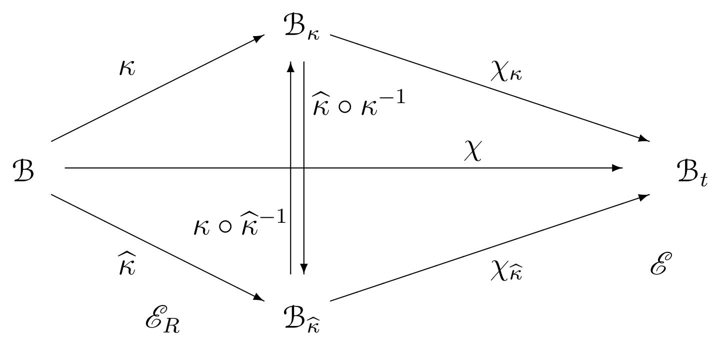
Sprememba referenčne konfiguracije je difeomorfizem $\kappa\colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}_R$. Pri tem je $\mathcal{B}_\kappa = \kappa(\mathcal{B})$ nova referenčna konfiguracija telesa. Gibanje $\chi\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{E}$ lahko enakovredno predstavimo s preslikavo

$$\chi_\kappa\colon \mathcal{B}_\kappa \times I \to \mathscr{E}, \qquad \chi_\kappa = \chi \circ \kappa^{-1}. \tag{A.8}$$

Če označimo $\mathbf{F} = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}$, $\mathbf{F}_\kappa = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}_\kappa$ in $\mathbf{P} = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\kappa}$, potem z odvajanjem enakosti (A.8) dobimo zvezo med gradienti

$$\mathbf{F}_\kappa = \mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}.$$

Naj bosta $\kappa\colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}_R$ in $\widehat{\kappa}\colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}_R$ novi referenčni konfiguraciji. Naj bo $\chi\colon \mathcal{B} \times I \to \mathscr{E}_R$ gibanje in naj bosta $\chi_\kappa = \chi \circ \kappa^{-1}$ in $\chi_{\widehat{\kappa}} = \chi \circ \widehat{\kappa}^{-1}$ opisa istega gibanja glede na referenčni konfiguraciji $\kappa(\mathcal{B})$ in $\widehat{\kappa}(\mathcal{B})$. Označimo pripadajoča



Slika A.1: Sprememba referenčne konfiguracije.

deformacijska gradienta z

$$\mathbf{F}_\kappa = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}_\kappa \quad \text{in} \quad \mathbf{F}_{\widehat{\kappa}} = \mathrm{Grad}\boldsymbol{\chi}_{\widehat{\kappa}}.$$

Jasno je, da imata referenčni konfiguraciji κ in $\widehat{\kappa}$ vsaka svojo funkcijo shranjene energije, σ_κ in $\sigma_{\widehat{\kappa}}$, ki sta v splošnem različni, vendar pa mora v vsaki točki $X \in \mathcal{B}$ in za vsak $t \in I$ veljati

$$\sigma_\kappa(\mathbf{F}_\kappa(\kappa(X), t)) = \sigma_{\widehat{\kappa}}(\mathbf{F}_{\widehat{\kappa}}(\widehat{\kappa}(X), t)). \tag{A.9}$$

Iz slike A.1 vidimo, da velja $\chi_\kappa = \chi_{\widehat{\kappa}} \circ \widehat{\kappa} \circ \kappa^{-1}$. Če označimo s

$$\mathbf{P} = \mathrm{Grad}(\widehat{\boldsymbol{\kappa}} \circ \boldsymbol{\kappa}^{-1}), \tag{A.10}$$

potem je $\mathbf{F}_\kappa = \mathbf{F}_{\widehat{\kappa}}\mathbf{P}$. Iz relacije (A.9) sedaj vidimo, da med funkcijama shranjene energije velja zveza

$$\sigma_{\widehat{\kappa}}(\mathbf{F}_{\widehat{\kappa}}) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}_{\widehat{\kappa}}\mathbf{P}). \tag{A.11}$$

Materialno telo lahko poseduje določene materialne simetrije, zaradi katerih ni mogoče razločiti med določenimi referenčnimi konfiguracijami. Na primer, materialno telo iz kubične kristalne strukture je nemogoče razločiti pred in po rotaciji za 90° okoli ene od kristalnih osi.

Definicija A.1. Referenčni konfiguraciji $\kappa\colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}_R$ in $\widehat{\kappa}\colon \mathcal{B} \to \mathscr{E}_R$ sta *materialno nerazločljivi*, če velja

$$\sigma_{\widehat{\kappa}}(\mathbf{F}) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}) \qquad \forall\, \mathbf{F} \in \operatorname{Inv}(\mathscr{V}). \tag{A.12}$$

Odziv materiala je odvisen od napetostnega tenzorja $\mathbf{T}$, ta pa je odvisen od funkcije shranjene energije. Materialna nerazločljivost v fizikalnem smislu pomeni, da se odziv materiala glede na konfiguracijo κ ne da razločiti od odziva glede na konfiguracijo $\widehat{\kappa}$ z nobenim mogočim eksperimentom.

Če uporabimo oznako (A.10) in upoštevamo enakosti (A.11), potem vidimo, da je pogoj (A.12) ekvivalenten pogoju

$$\sigma_\kappa(\mathbf{F}) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}\mathbf{P}) \qquad \forall\, \mathbf{F} \in \operatorname{Inv}(\mathscr{V}).$$

Definicija A.2. Če za linearno preslikavo $\mathbf{G} \in \mathscr{U}(\mathscr{V})$ velja pogoj

$$\sigma_\kappa(\mathbf{F}) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}\mathbf{G}) \qquad \forall\, \mathbf{F} \in \operatorname{Inv}(\mathscr{V}), \tag{A.13}$$

potem ji rečemo *materialna simetrijska transformacija* za σ glede na konfiguracijo κ.

Pogoj $\mathbf{G} \in \mathscr{U}(\mathscr{V})$ sodi k predpostavki, da vse materialne simetrijske transformacije ohranjajo prostornino telesa, saj bi se sicer materialno telo lahko poljubno razširilo, ne da bi se to poznalo na odzivu, kar pa je fizikalno nesprejemljivo.

Izrek A.3. *Množica $\mathcal{G}_\kappa$ vseh materialnih simetrijskih transformacij za σ glede na konfiguracijo κ je podgrupa unimodularne grupe.*

Dokaz. Dovolj je dokazati, da je $\mathcal{G}_\kappa$ grupa, saj je $\mathcal{G}_\kappa \subseteq \mathscr{U}(\mathscr{V})$. Za poljubni $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \in \mathcal{G}_\kappa$ z upoštevanjem relacije (A.13) velja

$$\sigma_\kappa(\mathbf{F}) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}\mathbf{G}_1) = \sigma_\kappa((\mathbf{F}\mathbf{G}_1)\mathbf{G}_2) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}(\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2)),$$

torej je $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 \in \mathcal{G}_\kappa$. Očitno je tudi $\mathbf{1} \in \mathcal{G}_\kappa$. Naj bo $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_\kappa$. Ker je $|\det \mathbf{G}| = 1$, obstaja $\mathbf{G}^{-1}$ in je

$$\sigma_\kappa(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}) = \sigma_\kappa((\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1})\mathbf{G}) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}),$$

kar dokazuje, da je tudi $\mathbf{G}^{-1} \in \mathcal{G}_\kappa$. Torej je $\mathcal{G}_\kappa$ grupa. □

$\mathcal{G}_\kappa$ se imenuje *materialna simetrijska grupa* za σ glede na referenčno konfiguracijo κ. Očitno je, da je $\mathcal{G}_\kappa$ odvisna od referenčne konfiguracije κ. Če je $\widehat{\kappa}$ še ena referenčna konfiguracija s pripadajočo materialno simetrijsko grupo $\mathcal{G}_{\widehat{\kappa}}$ in je $\mathbf{P}$ kot v (A.10), potem za poljuben $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_\kappa$ dobimo iz (A.11)

$$\begin{aligned}\sigma_{\widehat{\kappa}}(\mathbf{F}) &= \sigma_\kappa(\mathbf{FP}) = \sigma_\kappa((\mathbf{FP})\mathbf{G}) = \sigma_\kappa(\mathbf{F}(\mathbf{PGP}^{-1})\mathbf{P}) \\ &= \sigma_{\widehat{\kappa}}(\mathbf{F}(\mathbf{PGP}^{-1})),\end{aligned}$$

iz česar sledi, da je $\mathbf{PGP}^{-1} \in \mathcal{G}_{\widehat{\kappa}}$. Očitno je preslikava $\phi\colon \mathcal{G}_\kappa \to \mathcal{G}_{\widehat{\kappa}}$, $\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{PGP}^{-1}$, homomorfizem grup in očitno je injektivna, saj za $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \in \mathcal{G}_\kappa$ iz $\mathbf{PG}_1\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PG}_2\mathbf{P}^{-1}$ nemudoma sledi $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$. S podobnim postopkom, kot zgoraj, se dokaže še, da za poljuben $\mathbf{H} \in \mathcal{G}_{\widehat{\kappa}}$ velja $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{HP} \in \mathcal{G}_\kappa$, torej je $\phi(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{HP}) = \mathbf{H}$, kar pomeni, da je ϕ tudi surjektivna. ϕ je torej izomorfizem grup, zato smo dokazali naslednji izrek.

Izrek A.4 (Nollovo pravilo)**.** *Naj bosta κ ter $\widehat{\kappa}$ konfiguraciji in naj bo* $\mathbf{P} = \operatorname{Grad}(\widehat{\boldsymbol{\kappa}} \circ \boldsymbol{\kappa}^{-1})$. *Potem med materialnima simetrijskima grupama velja zveza*

$$\mathcal{G}_{\widehat{\kappa}} = \mathbf{P}\mathcal{G}_\kappa\mathbf{P}^{-1} = \{\mathbf{PGP}^{-1}\ ;\ \mathbf{G} \in \mathcal{G}_\kappa\}.$$

V zgornjem izreku je $\mathbf{P}$ gradient spremembe konfiguracije in ni nujno, da pripada unimodularni grupi.

A.3 Izotropna trdna hiperelastična telesa

Definicija A.5. Trdno hiperelastično materialno telo je *izotropno*, če obstaja referenčna konfiguracija κ, da je $\mathcal{G}_\kappa = \mathscr{O}(\mathscr{V})$. Taka konfiguracija se imenuje *izotropna.*

Opomba A.6. Podobno, kot smo definirali materialno simetrijsko grupo za σ, bi lahko definirali tudi materialno simetrijsko grupo za $\mathbf{T}$. Za elastične materiale velja definicija, da je materialno telo *trdno*, če obstaja referenčna konfiguracija telesa, tako da je materialna simetrijska grupa za $\mathbf{T}$ glede na to konfiguracijo podgrupa ortogonalne grupe $\mathscr{O}(V)$. Taki referenčni konfiguraciji se reče *naravna referenčna konfiguracija.* V [4, str. 310] je dokazano, da sta pri hiperelastičnih trdnih telesih materialni simetrijski grupi za σ in za $\mathbf{T}$ glede na isto referenčno konfiguracijo enaki.

Izotropnost v fizikalnem smislu pomeni, da nobena ortogonalna transformacija izotropne konfiguracije ne spremeni odziva v materialu.

K zgornji definiciji sodi še ta opomba: Če je $\widehat{\kappa}$ taka konfiguracija, da je $\mathcal{G}_{\widehat{\kappa}} \subseteq \mathscr{O}(\mathscr{V})$, potem je $\mathcal{G}_{\widehat{\kappa}}$ podgrupa grupe $\mathcal{G}_\kappa = \mathscr{O}(\mathscr{V})$. Po Nollovem pravilu sta $\mathcal{G}_{\widehat{\kappa}}$ in $\mathcal{G}_\kappa$ izomorfni, zato $\mathcal{G}_{\widehat{\kappa}}$ ne more biti prava podgrupa grupe $\mathcal{G}_\kappa$, ampak je $\mathcal{G}_{\widehat{\kappa}} = \mathcal{G}_\kappa$.

V nadaljevanju naj bo σ funkcija shranjene energije glede na neko izotropno referenčno konfiguracijo in $\mathcal{G}$ naj bo pripadajoča materialna simetrijska grupa.

Naj bo $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ polarni razcep. Ker za izotropni material velja $\mathcal{G} = \mathscr{O}(\mathscr{V})$, lahko v (A.13) za $\mathbf{G}$ uporabimo $\mathbf{R}^T$ in dobimo $\sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{V})$. Za izotropne materiale torej skupaj z (A.6) velja

$$\sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{U}) = \sigma(\mathbf{V}).$$

V praktični uporabi je namesto levega razteznostnega tenzorja $\mathbf{V}$ bolj primeren levi Cauchy-Greenov deformacijski tenzor $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, ker ga je lažje izračunati. Zato predstavimo funkcijo $\bar{\sigma}$, definirano kot

$$\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = \bar{\sigma}(\mathbf{V}^2) = \sigma(\mathbf{V}) = \sigma(\mathbf{F}).$$

Poiščimo zvezo med odvodoma za σ in $\bar{\sigma}$. Najprej pokažimo, da je $D\bar{\sigma}(\mathbf{B})$ simetričen teznor. $\mathbf{B}$ je simetričen, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, in za poljuben $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je

$$\begin{aligned}\langle D\bar{\sigma}(\mathbf{B}), \mathbf{A}\rangle &= \langle D\bar{\sigma}(\mathbf{B}^T), \mathbf{A}\rangle = \frac{d}{d\varepsilon}\bar{\sigma}((\mathbf{B} + \varepsilon\mathbf{A})^T)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \langle D\bar{\sigma}(\mathbf{B}^T), \mathbf{A}^T\rangle = \langle D\bar{\sigma}(\mathbf{B}), \mathbf{A}^T\rangle \\ &= \langle (D\bar{\sigma}(\mathbf{B}))^T, \mathbf{A}\rangle,\end{aligned}$$

torej je $D\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = (D\bar{\sigma}(\mathbf{B}))^T$. Če odvajamo $\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = \bar{\sigma}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$ po $\mathbf{F}$, dobimo

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\bar{\sigma}((\mathbf{F} + \varepsilon\mathbf{A})(\mathbf{F} + \varepsilon\mathbf{A})^T)\Big|_{\varepsilon=0} &= \langle D\bar{\sigma}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T), \mathbf{F}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{F}^T\rangle \\ &= \langle (D\bar{\sigma}(\mathbf{B}))^T, \mathbf{A}\mathbf{F}^T\rangle + \langle D\bar{\sigma}(\mathbf{B}), \mathbf{A}\mathbf{F}^T\rangle \\ &= 2\langle D\bar{\sigma}(\mathbf{B}), \mathbf{A}\mathbf{F}^T\rangle = 2\langle D\bar{\sigma}(\mathbf{B})\mathbf{F}, \mathbf{A}\rangle,\end{aligned}$$

pri čemer smo na predzadnjem koraku upoštevali simetričnost $D\bar{\sigma}(\mathbf{B})$. Če ta rezultat upoštevamo pri odvajanju zveze $\sigma(\mathbf{F}) = \bar{\sigma}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$ po $\mathbf{F}$, dobimo

$$D\sigma(\mathbf{F}) = 2D\bar{\sigma}(\mathbf{B})\mathbf{F}.$$

Cauchyev napetostni tenzor (A.7) lahko sedaj zapišemo v obliki

$$\mathbf{T} = \rho D\sigma(\mathbf{F})\mathbf{F}^T = 2\rho D\bar{\sigma}(\mathbf{B})\mathbf{F}\mathbf{F}^T = 2\rho D\bar{\sigma}(\mathbf{B})\mathbf{B}. \tag{A.14}$$

Za izotropno hiperelastično trdno materialno telo lahko pogoja (A.5) in (A.13) združimo v en sam ekvivalenten pogoj:

$$\sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{QFQ}), \qquad \forall\, \mathbf{Q} \in \mathscr{O}(\mathscr{V}) \text{ in } \forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{Inv}(\mathscr{V}).$$

Če v splošnem katera koli tenzorska funkcija zadošča temu pogoju, potem rečemo, da je *izotropna.* Funkcija $\bar{\sigma}(\mathbf{B})$ je tudi izotropna na svoji domeni:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = \sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{QFQ}) = \bar{\sigma}(\mathbf{QFQ}(\mathbf{QFQ})^T) = \bar{\sigma}(\mathbf{QBQ}^T),$$

kar velja za vsak simetričen pozitivno definiten $\mathbf{B}$ in vsak $\mathbf{Q} \in \mathscr{O}(\mathscr{V})$.

Izrek A.7. *Naj bo $\phi\colon \mathrm{Sym}(\mathscr{V}) \to \mathbb{R}$ tenzorska funkcija. Potem je ϕ izotropna natanko tedaj, ko se jo da zapisati v obliki*

$$\phi(\mathbf{A}) = f(a_1, a_2, a_3),$$

kjer je f poljubna skalarna funkcija, odvisna od lastnih vrednosti a_1, a_2, a_3 preslikave $\mathbf{A}$.

Dokaz. Naj bo ϕ izotropna in naj imata $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Sym}(\mathscr{V})$ enaki množici lastnih vrednosti, $\{a_1, a_2, a_3\} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Po spektralnem izreku za simetrične linearne preslikave obstajata ortonormirani bazi $\{\boldsymbol{d}_j\}$ in $\{\boldsymbol{e}_j\}$, da je

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{3} a_j \boldsymbol{d}_j \otimes \boldsymbol{d}_j \quad \text{in} \quad \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{3} b_j \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_j.$$

Obstaja ortogonalna preslikava $\mathbf{Q} \in \mathscr{O}(\mathscr{V})$, da velja $\mathbf{Q}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{d}_j$, $j = 1, 2, 3$, zato je

$$\begin{aligned}
\mathbf{QBQ}^T &= \sum_{j=1}^{3} b_j \mathbf{Q}(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_j)\mathbf{Q}^T = \sum_{j=1}^{3} b_j (\mathbf{Q}\boldsymbol{e}_j) \otimes (\mathbf{Q}\boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{3} a_j \boldsymbol{d}_j \otimes \boldsymbol{d}_j = \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Ker je ϕ po predpostavki izotropna, je

$$\phi(\mathbf{A}) = \phi(\mathbf{QBQ}^T) = \phi(\mathbf{B}).$$

Dokazali smo, da je ϕ odvisna le od lastnih vrednosti simetrične matrike, torej je $\phi(\mathbf{A}) = f(a_1, a_2, a_3)$.

Obratno, če velja $\phi(\mathbf{A}) = f(a_1, a_2, a_3)$, potem je $\phi(\mathbf{A}) = \phi(\mathbf{QAQ}^T)$, saj imata linearni preslikavi $\mathbf{A}$ in $\mathbf{QAQ}^T$ enake lastne vrednosti, kar se najhitreje vidi tako, da imata $\mathbf{A}$ in $\mathbf{QAQ}^T$ enak karakteristični polinom. Če je namreč $p_{\mathbf{A}}$ karakteristični polinom za $\mathbf{A}$, potem je po Cayley-Hamiltonovem izreku $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, hitro pa lahko vidimo, da je tudi $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{0}$. $\square$

Karakteristični polinom linearne preslikave $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = -\lambda^3 + I_{\mathbf{A}}\lambda^2 - II_{\mathbf{A}}\lambda + III_{\mathbf{A}},$$

pri tem so $I_{\mathbf{A}}, II_{\mathbf{A}}, III_{\mathbf{A}}$ *glavne invariante* za $\mathbf{A}$. Če so a_1, a_2, a_3 lastne vrednosti od $\mathbf{A}$, potem je

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{A}} &= a_1 + a_2 + a_3 = \mathrm{tr}\mathbf{A},\\
II_{\mathbf{A}} &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = \frac{1}{2}\big((\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\big),\\
III_{\mathbf{A}} &= a_1a_2a_3 = \det \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Množici $\{a_1, a_2, a_3\}$ in $\{I_{\mathbf{A}}, II_{\mathbf{A}}, III_{\mathbf{A}}\}$ sta ekvivalentni v smislu, da ena enolično določa drugo. Zato lahko v izreku A.7 nadomestimo funkcijo $f(a_1, a_2, a_3)$ z neko drugo funkcijo $\tilde{f}(I_{\mathbf{A}}, II_{\mathbf{A}}, III_{\mathbf{A}})$. Funkcijo $\bar{\sigma}$ lahko torej predstavimo kot

$$\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = w(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}}). \tag{A.15}$$

Na spremenljivke $I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}}$ v funkciji w lahko gledamo kot na funkcije $I_{\mathbf{B}} = I(\mathbf{B})$, itd. Z odvajanjem enakosti (A.15) po $\mathbf{B}$ dobimo

$$D\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = \frac{\partial w}{\partial I_{\mathbf{B}}} DI(\mathbf{B}) + \frac{\partial w}{\partial II_{\mathbf{B}}} DII(\mathbf{B}) + \frac{\partial w}{\partial III_{\mathbf{B}}} DIII(\mathbf{B}). \tag{A.16}$$

$DIII(\mathbf{B}) = D\det(\mathbf{B})$ smo že izračunali v (3.12). Izračunajmo še odvoda preostalih dveh glavnih invariant. Za poljuben $\mathbf{S}$ imamo

$$\begin{aligned}
DI(\mathbf{B})(\mathbf{S}) &= D\mathrm{tr}(\mathbf{B})(\mathbf{S}) = \frac{d}{d\varepsilon}\mathrm{tr}(\mathbf{B} + \varepsilon\mathbf{S})\Big|_{\varepsilon=0} = \mathrm{tr}(\mathbf{S}) = \langle \mathbf{1}, \mathbf{S}\rangle,\\
DII(\mathbf{B})(\mathbf{S}) &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\varepsilon}\Big(\big(\mathrm{tr}(\mathbf{B} + \varepsilon\mathbf{S})\big)^2 - \mathrm{tr}\big((\mathbf{B} + \varepsilon\mathbf{S})^2\big)\Big)\Big|_{\varepsilon=0}\\
&= (\mathrm{tr}\mathbf{B})(\mathrm{tr}\mathbf{S}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{S}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{S}\mathbf{B})\\
&= (\mathrm{tr}\mathbf{B})\langle \mathbf{1}, \mathbf{S}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{B}^T, \mathbf{S}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{S}, \mathbf{B}^T\rangle\\
&= \big\langle (\mathrm{tr}\mathbf{B})\mathbf{1} - \mathbf{B}^T, \mathbf{S}\big\rangle.
\end{aligned}$$

Odvodi glavnih invariant so torej

$$DI(\mathbf{B}) = \mathbf{1}, \quad DII(\mathbf{B}) = I_{\mathbf{B}}\mathbf{1} - \mathbf{B}^T, \quad DIII(\mathbf{B}) = III_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-T}.$$

Če to upoštevamo v (A.16), rezultat pa nato v (A.14), dobimo izraz za Cauchyjev napetostni tenzor $\mathbf{T}$ za izotropno hiperelastično trdno materialno telo, ki je

$$\mathbf{T} = 2\rho\bigg(III_{\mathbf{B}}\frac{\partial w}{\partial III_{\mathbf{B}}}\mathbf{1} + \Big(\frac{\partial w}{\partial I_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}}\frac{\partial w}{\partial II_{\mathbf{B}}}\Big)\mathbf{B} - \frac{\partial w}{\partial II_{\mathbf{B}}}\mathbf{B}^2\bigg). \tag{A.17}$$

Zaključek

Pri izpeljavi enačb gibanja za kontinuum nas Hamiltonov princip pripelje do enakega rezultata, kot običajne, direktne metode. Hamiltonov princip torej zares predstavlja alternativo običajnim metodam, vendar ga veliko monografij kljub temu ne omenja. Morda zato, ker je zanj vseeno potrebno nekaj več matematičnega predznanja, kot je recimo variacijski račun in nekaj osnov funkcionalne analize.

Za uporabo Hamiltonovega principa nam ni bilo potrebno predhodno definirati zakonov dinamike (Eulerjev prvi in drugi zakon), zato se nam tudi ni bilo potrebno ukvarjati z inercialnimi opazovališči. Prav tako smo se lahko izognili nekaterim dinamičnim količinam, kot sta recimo gibalna in vrtilna količina, definirati smo morali le osnovne kinematične količine, kot so hitrost, pospešek in deformacijski gradient. Ni nam bilo potrebno predhodno definirati Cauchyjevega napetostnega tenzorja na običajen način, preko Cauchyjevega izreka. Lokalno obliko zakona o ohranitvi mase smo izpeljali neodvisno.

Poleg podanih primerov (elastični fluid in hiperelastično trdno telo) je mogoče Hamiltonov princip uporabiti za splošno materialno telo iz zveznega medija, tudi če je iz neelastičnega materiala. Pri tem se izraz za notranjo energijo definira v splošni obliki ([1, str. 45]) in iz Hamiltonovega principa ravno tako dobimo enačbo za ohranitev gibalne količine, v kateri pa nastopajo neznane konstitucijske količine. Te je potrebno določiti na podoben način, kot smo to storili v dodatku za hiperelastično trdno telo, kjer se upošteva princip materialne objektivnosti (neodvisnost od opazovališča) ter materialne simetrije. Nekaj končnih parametrov je potrebno določiti še eksperimentalno.

Možnih razširitev Hamiltonovega principa v mehaniki kontinuuma je veliko. Zanimivo bi bilo raziskati tudi možnosti za uporabo v termodinamiki, piezoelektriki in pri drugih oblikah materialov s kompleksno strukturo.

Literatura

[1] A. Bedford, *Hamilton's principle in continuum mechanics*, Research notes in mathematics **139**, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

[2] S. Dost in B. Tabarrok, *Application of Hamilton's principle to large deformation and flow problems*, J. appl. mech. **46** (1979), 285–289.

[3] I-Shih Liu, *Continuum mechanics*, Advanced text in physics, Springer, Berlin, 2002.

[4] C. Truesdell, W. Noll, *The non-linear field theories of mechanics, 2nd ed.*, Springer, Berlin, 1992.

[5] P. Haupt, *Continuum mechanics and theory of materials*, Advanced text in physics, Springer, Berlin, 2000.

[6] J. Jost in X. Li-Jost, *Calculus of variations*, Cambridge studies in advanced mathematics **64**, Cambridge university press, Cambridge, 1998.

[7] J. E. Marsden in T. R. J. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover Publications, New York, 1994.