UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Primož Pušnik

Funkcijski račun za neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Oliver Dragičević

Ljubljana, 2014

Podpisani Primož Pušnik izjavljam:

– da sem magistrsko delo z naslovom *Funkcijski račun za neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator* izdelal samostojno pod mentorstvom doc. dr. Oliverja Dragičevića in

– da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 11. 9. 2014 Podpis: ....

Zahvala

Zahvaljujem se svojemu mentorju doc. dr. Oliverju Dragičeviću za številne nasvete, vodenje in prijetne pogovore, ki so pripomogli k nastanku magistrskega dela in mojemu matematičnemu razvoju.

Iskreno se zahvaljujem svoji družini, za vso pomoč in podporo tekom celotnega študija.

Kazalo

Program dela

Izhodišče naloge je problem optimalnega kota ϕ, za katerega za poljubne generatorje simetričnih kontrakcijskih polgrup in za vsak $p \in (1, \infty)$ obstaja holomorfni funkcijski račun na L^p v sektorju $\{|\arg z| < \phi\}$ (vir: A. Carbonaro, O. Dragičević, *Functional calculus for generators of symmetric contraction semigroups*, preprint (2014), `http://arxiv.org/abs/1308.1338`). V posebnem primeru, ko je generator neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator, kandidat dokaže, da je $\phi = \arcsin |1 - 2/p|$. V ta namen kandidat med drugim obdela osnovna orodja Malliavinovega računa (vir: D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2006).

Podpis mentorja: ....

Funkcijski račun za neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator

Povzetek

Dokazali bomo, da neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator na Wienerjevem prostoru za $1 < p < \infty$ porodi Hörmanderjev holomorfni funkcijski račun na L^p v sektorju $\{|\arg z| < \phi_p^*\}$ podanim s kotom $\phi_p^* = \arcsin|1-2/p|$. Pokažemo še, da je kot optimalni.

Functional Calculus for the infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck Operator

Abstract

We prove that the infinite-dimensional Ornstein-Uhlenbeck operator on the Wiener space admits, for $1 < p < \infty$, a Hörmander-type holomorphic functional calculus on L^p in the sector $\{|\arg z| < \phi_p^*\}$ of angle $\phi_p^* = \arcsin|1-2/p|$. We prove the angle is sharp.

Math. Subj. Class. (2010): 60H07, 47A60, 47B25, 28C20, 42B37

Ključne besede: funkcijski račun, Malliavinov račun, Ornstein-Uhlenbeckov operator, operatorske polgrupe

Keywords: Functional Calculus, Malliavin Calculus, Ornstein-Uhlenbeck operator, Operator semi-groups

Poglavje 1

Uvod

Naj bo ν $\sigma-$končna mera na Ω, $\mathcal{A}$ nenegativen, sebi-adjungiran linearni operator na $L^2(\Omega,\mu)$ in P njemu pripadajoča spektralna mera. Torej

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty \lambda dP(\lambda).$$

Domeno linearnega operatorja $\mathcal{A}$ bomo označevali z $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, sliko z $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ in jedro z $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Normo na L^p prostorih bomo označevali z $||\cdot||_p$.

Vzemimo poljubno omejeno Borelovo funkcijo $m\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$. Po spektralnem izreku lahko definiramo operator

$$m(A) = \int_0^\infty m(\lambda) dP_\lambda,$$

ki je omejen na $L^2(\Omega,\mu)$. Če ima $m(\mathcal{A})$ razširitev iz $L^2(\Omega,\nu) \cap L^p(\Omega,\nu)$ na celoten $L^p(\Omega,\nu)$, omejeno v standardni L^p normi, pravimo, da je funkcija m L^p *spektralni množitelj* za $\mathcal{A}$. Označimo z $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ razred vseh L^p spektralnih množiteljev operatorja $\mathcal{A}$. Zanimalo nas bo pod kakšnimi pogoji na funkcijo m bo $m \in \mathcal{M}_p(\mathcal{A})$.

Splošna karakterizacija množice $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ za splošne $\mathcal{A}$ in p je zelo težek in do sedaj še nerešen problem. Vprašanje je odprto celo za Laplaceov operator na $\mathbb{R}^n$. Znano je, da je $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ odvisna od operatorja $\mathcal{A}$, prostora (Ω,ν) in indeksa p. Zato je potrebno poiskati zadostne in potrebne pogoje na funkcijo m, ki zagotovijo, da je oz. ni L^p spektralni množitelj za dani operator $\mathcal{A}$. Mi se bomo ukvarjali z zadostnimi pogoji.

Pogoji na m, ki zagotovijo, da je $m \in \mathcal{M}_p(\mathcal{A})$, so pogosto izraženi v obliki regularnostnih zahtev.

Definicija 1.0.1. Naj bo $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$ in $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg z| < \theta\}$. Rekli bomo, da je S_θ *sektor velikosti* θ. Označimo s $H^\infty(\Omega)$ vse omejene holomorfne funkcije na domeni Ω. Za $J > 0$ bomo s $H^\infty(S_\phi; J)$ označili množico funkcij iz $H^\infty(S_\phi)$, ki na robu S_ϕ zadoščajo Hörmanderjevemu pogoju reda J. Pravimo, da operator $\mathcal{A}$ porodi na L^p

- *omejen holomorfni funkcijski račun* v sektorju S_ϕ, kadar za vsak $\theta > \phi$ velja
$$H^\infty(S_\theta) \subseteq \mathcal{M}_p(\mathcal{A}).$$
- *Hörmanderjev holomorfni funkcijski račun* reda $J > 0$ v sektorju S_ϕ, če velja
$$H^\infty(S_\phi; J) \subseteq \mathcal{M}_p(\mathcal{A}).$$

Hörmanderjev holomorfni funkcijski račun reda J, za neki $J > 0$, v sektorju S_ϕ implicira holomorfni funkcijski račun v sektorju S_ϕ.

Za $p \in (1, \infty)$ označimo
$$\phi_p^* = \arcsin\left|1 - \frac{2}{p}\right|.$$
Vpeljimo še oznako
$$p^* = \max\left\{p, \frac{p}{p-1}\right\}.$$
Pri študiju spektralnih množiteljev so še posebej zanimivi *univerzalni izreki*. Le-ti obravnavajo pripadnost $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$, za širok razred operatorjev. Eden takih je osrednji izrek magistrskega dela.

Izrek 1.0.2 (Carbonaro, Dragičević 2013 [5])**.** *Naj bo $\mathcal{A}$ generator simetrične kontrakcijske polgrupe na $\sigma-$končnem merljivem prostoru (Ω, ν). Za vsak $p \in (1, \infty)$, vsak $J > 3/2$ in $m \in H^\infty(S_{\phi_p^*}; J)$ obstaja konstanta $C(J) > 0$, da je*
$$||m(\mathcal{A})||_{p\to p} \leq C(J)(p^* - 1)^{\frac{9}{4}} \log p^* \Big(||m||_{\phi_p^*;J} + |m(0)|\Big). \tag{1.1}$$
Posledično je operator $m(\mathcal{A})\colon L^p(\Omega,\nu) \to L^p(\Omega,\nu)$ omejen.

Izrek 1.0.2 bomo dokazali za poseben primer, ko je $\mathcal{A}$ neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator.

Naša študija je del široke teorije, ki si jo bomo na kratko ogledali. Naj bo $\mathcal{A}$ pozitiven, sebi-adjungiran generator simetrične kontrakcijske polgrupe. Prvega v vrsti univerzalnih izrekov o množiteljih je leta 1970 dokazal E. M. Stein, ki je pokazal, da so za vsak $p > 1$, vse funkcije v sliki Laplaceove transformacije L^p spektralni množitelji za poljuben generator $\mathcal{A}$, Markovske polgrupe [33]. M. Cowling [6] je leta 1983 pokazal obstoj omejenega holomorfnega funkcijskega računa za generatorje simetričnih kontrakcijskih polgrup na sektorjih S_ϕ za
$$\phi > \phi_p^C = \pi\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|.$$
V primeru, ko je $\mathcal{A}$ generator sub-Markovske polgrupe, sta P. C. Kunstmann in Ž. Štrkalj [20] leta 2003 pokazala obstoj holomorfnega funkcijskega računa za
$$\phi > \phi_p^{KŠ} = \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| + \left(1 - \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|\right)\arcsin\frac{|p-2|}{2p - |p-2|}.$$

Leta 2011 pa je Kriegler [18] dokazal, da lahko predpostavko o sub- Markovski lastnosti v rezultatu P. C. Kunstmanna in Ž. Štrkalja izpustimo.

Leta 2001 so García-Cuerva, Mauceri, Meda, Sjögren, Torrea [13] dokazali obstoj holomorfnega funkcijskega računa za končno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator v sektorju $S_{\phi_p^*}$. Velja

$$0 < \phi_p^* < \phi_p^{K\check{S}} < \phi_p^C < \frac{\pi}{2}.$$

Zadnji rezultat t.j. ocene L^p norm za končno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator so odvisne od razsežnosti ambientnega prostora Ω, mi pa bomo dokazali izrek o množiteljih za primer neskončno razsežnega Ornstein-Uhlenbeckovega operatorja, ki bo neodvisen od razsežnosti ambientnega prostora.

Predpostavili bomo, da je bralec seznanjen z osnovami funkcionalne analize, kompleksne analize in teorije neomejenih operatorjev. Strnjena osvežitev funkcijskega računa in operatorskih polgrup je zapisana v prilogi. Na rezultate iz nje se večkrat skličemo.

Kaj je vsebina magistrskega dela? V drugem poglavju najprej spoznamo splošne L^2 prostore Soboljeva, preko katerih uvedemo Mihlin-Hörmanderjev pogoj. Naš regularnostni pogoj bo zagotovil obstoj Hörmanderjevega holomorfnega funkcijskega računa reda J v sektorju $S_{\phi_p^*}$ za $J > 3/2$. Posledično ima Ornstein-Uhlenbeckov operator omejen holomorfni funkcijski račun v sektorju $S_{\phi_p^*}$. Poleg tega bomo videli, da je za dokaz univerzalnega izreka o spektralnih množiteljih, dovolj dokazati izrek o bilinearni vložitvi. Slednjega dokažemo v četrtem poglavju le za primer neskončno razsežnega Ornstein-Uhlenbeckovega operatorja.

V tretjem poglavju bomo na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru definirali $\sigma-$algebro in uvedli Gaussovo mero na njej. Tako bomo dobili neskončno razsežni Wienerjev prostor. Na njem bomo definirali operatorje odvajanja, divergence in neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator, ki so po vrsti neskončno razsežna analogija operatorjem odvajanja, divergence in Laplaceovega operatorja na Evklidskih prostorih. Definirali bomo Ornstein-Uhlenbeckovo polgrupo in videli bomo, da je Ornstein- Uhlenbeckov operator njen infinitezimalni generator.

V četrtem poglavju bomo privzeli, da je $\mathcal{A}$ Ornstein-Uhlenbeckov operator in zanj dokazali izrek o bilinearni vložitvi. Z uporabo metode toplotnega toka bomo problem prevedli na iskanje funkcije Q, ki bo zadoščala nekaterim regularnostnim pogojem in lastnosti t.i. kvantitativne monotonosti. Orodja Malliavinovega računa nam bodo omogočila gledati na Ornstein-Uhlenbeckov operator kot na parcialni diferencialni operator drugega reda, s čimer bomo pogoj kvantitativne monotonosti zreducirali na oceno kvadratne forme na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. S pomočjo t.i. $\tau-$leme se bomo iz Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$ preselili v $\mathbb{R}$. Končno pokažemo, da zahtevanim lastnostim ustreza modifikacija posebne funkcije, ki sta jo leta 1995 vpeljala F. Nazarov in S. Treil.

Poglavje 2

Spektralni množitelji

2.1 Motivacija

Motivacija za študij spektralnih množiteljev je večplastna. Med drugim izvira tudi iz reševanja parcialnih diferencialnih enačb. Naj bo $\mathcal{A}$ poljuben sebi-adjungirani linearni operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ in $u\colon \mathbb{R} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Izberimo $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in $g \in \mathcal{H}$. Oglejmo si Cauchyjevo nalogo za valovno enačbo

$$\begin{aligned} u'' + \mathcal{A}u &= 0, \\ u(0) &= f, \\ u'(0) &= g, \end{aligned}$$

pri čemer je u dvakrat zvezno odvedljiva in $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Dokaz naslednje trditve najdemo v prilogi.

Trditev 2.1.1. *Če sta $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in $g \in \mathcal{D}(\sqrt{\mathcal{A}})$, je za vsak $t \in \mathbb{R}$ rešitev naloge podana s predpisom*

$$u(t) = \cos(t\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})f + \mathcal{A}^{-\frac{1}{2}} \sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)g. \tag{2.1}$$

Pri reševanju Cauchyjeve naloge pomembno, da sta robna pogoja $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in $g \in \mathcal{D}(\sqrt{\mathcal{A}})$. Denimo, da sta $f, g \in L^p(\mathbb{R}), p \neq 2$. Tedaj želimo, da je $L^p(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in $L^p(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}(\sqrt{\mathcal{A}})$. Če želimo, da bo imel predpis (2.1) pomen na $L^p(\mathbb{R})$, je dovolj, da imata operatorja $\cos(t\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ in $\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}} \sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)$ omejeno razširitev na $L^p(\mathbb{R})$. Torej nas zanima, ali sta funkciji $x \mapsto \cos(t\sqrt{x})$ in $x \mapsto \frac{\sin(t\sqrt{x})}{t\sqrt{x}}$ v $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$.

2.2 Prostori Soboljeva

Če rešujemo navadno nalogo $y'(x) = f(x, y), f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2), y(0) = 0$, in nas zanimajo zvezno odvedljive rešitve, vzamemo za domeno $\frac{d}{dx}$ prostor

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = 0\}.$$

Če pa opazujemo enačbo $\Delta u = f$, potem prostori $\mathcal{C}^k(\Omega)$ niso nujno naravni za rešitve te enačbe. Razred odvedljivih funkcij je žal premajhen, da bi v njem našli rešitev za vsako diferencialno enačbo, zato rešujemo diferencialne enačbe v smislu distribucij oz. šibkem smislu.

Za ta namen je potrebno vpeljati prostore Soboljeva, ki vsebujejo funkcije, katerih šibki odvodi ležijo v $L^p(\Omega, \nu)$. Prostori Soboljeva so tudi naravni prostor za reševanje enačbe $\Delta u = f$.

Z $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ in $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$ bomo označevali multiindekse. Dolžina multiindeksa α je $|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k$. Parcialne odvode funkcije $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *reda* α bomo označili z

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\cdots\partial^{\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_d}}.$$

Pogosto bomo namesto $\frac{\partial}{\partial x}$ pisali $\frac{d}{dx}$.

Definicija 2.2.1. Naj bo $1 \le p < \infty$ in $k \in \mathbb{N}$. *L^p prostor Soboljeva* reda k na $\mathbb{R}^d$ je množica funkcij $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, za katere je $\partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, za vsak multi-indeks $|\alpha| \le k$. Uporabimo oznako $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Za $k = 0$ dobimo $W^{0,p}(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$. Prostor $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ opremljen z normo

$$||u||_{W^{k,p}} = \Big(\sum_{|\alpha|\le k} ||\partial^\alpha u||_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

je Banachov. Za nas bo zanimiv primer $p = 2$. Tedaj je $W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$ Hilbertov prostor s skalarnim produktom

$$\langle u, v\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\le k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle = \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial^\alpha u)(x)\overline{\partial^\alpha v}(x)dx.$$

Za vsak $k \in \mathbb{N}_0$ označimo s $H^k(\mathbb{R}^d)$ prostor Soboljeva $W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$:

$$H^k(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ za vse } |\alpha| \le k\}.$$

V tem primeru bomo normo označili z $||\cdot||_{H^k}$.

Definicija 2.2.2. *Fourierova transformacija* je preslikava

$$\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

podana s predpisom

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx.$$

Pogosto se uporablja zapis $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

Definicija 2.2.3. Za vsak $s \geq 0$ lahko definiramo L^2 prostor Soboljeva stopnje s kot

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |z|^2)^{s/2}\hat{u}(z) \in L^2(\mathbb{R}^n)\Big\}.$$

$H^2(\mathbb{R}^n)$ je Hilbertov prostor opremljen s skalarnim produktom

$$\langle u, v\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|^2)^s \hat{u}(z)\overline{\hat{v}(z)} dz$$

in normo

$$||u||^2_{\widetilde{H^s}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|^2)^s |\hat{u}(z)|^2 dz.$$

Izkaže se, da sta za $s \in \mathbb{N}_0$ normi $\widetilde{||\cdot||_{H^s}}$ in $||\cdot||_{H^s}$ ekvivalentni. Zato bomo v nadaljevanju uporabljali oznako H^s.

2.3 Mihlin-Hörmanderjev pogoj

Uvedimo oznako, ki nam bo olajšala pisanje. Kadar obstaja neka absolutna konstanta C, za katero velja $A \leq CB$, potem bomo pisali $A \lesssim B$. Če velja tudi $B \lesssim A$, potem pišemo $A \sim B$. Naj bo $C(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ odvisna od $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Če velja $A \leq C(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)B$, bomo pisali

$$A \lesssim_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} B.$$

Izberimo neko gladko funkcijo $\phi\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ z nosilcem v $[\frac{1}{4}, 4]$, ki je enaka 1 na $[\frac{1}{2}, 2]$. Označimo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

Definicija 2.3.1. Funkcija $m\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ ustreza *Hörmanderjevemu pogoju* reda $\alpha \geq 0$, če je

$$||m||_{Hör(\alpha)} = \sup_{t>0} ||\phi m(t\cdot)||_{H^\alpha} < \infty. \tag{2.2}$$

Opomba 2.3.2. Kljub temu, da je funkcija m definirana le na $\mathbb{R}^+$, je pogoj (2.2) smiselen. Funkcijo m lahko poljubno razširimo na $(-\infty, 0)$. Po definiciji funkcije $\phi(x)$, je $\phi(x)m(tx) = 0$ za $x < 0, t > 0$. Torej je izraz $||\phi m(t\cdot)||_{H^\alpha}$ dobro definiran.

Naj bo Ω domena v $\mathbb{R}^d$. Označimo z $L^2_{loc}(\Omega, \nu)$ množico vseh funkcij f, takih da za vsak $x \in \Omega$, obstaja okolica U, da je $f \in L^2(U, \nu)$. Množico gladkih funkcij na Ω s kompaktnim nosilcem bomo označili z $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Trditev 2.3.3. *Naj bo $\alpha > \frac{1}{2}$ in $m \in L^2_{loc}(0, \infty)$. Če m izpolnjuje Hörmanderjev pogoj, potem je m omejena.*

Dokaz. Ocenimo lahko

$$\begin{aligned}
||m||_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{2^{-n}\leq|x|\leq 2^{-n+1}} |m(x)|^2 \\
&= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{2^{-n}\leq|x|\leq 2^{-n+1}} |m(x)\phi(2^{n-1}x)| \\
&\leq \sup_{r>0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |m(x)\phi(rx)| \\
&= \sup_{r>0} ||\phi m(r\cdot)||_\infty \\
&\lesssim \sup_{r>0} ||\phi m(r\cdot)||_{H^\alpha}.
\end{aligned}$$

V zadnji oceni smo upoštevali, da za $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$ velja

$$\begin{aligned}
||u||_\infty &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi)|\, d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^\alpha} \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^\alpha |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\lesssim ||u||_{H^\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Trditev 2.3.4. *Hörmanderjev pogoj je neodvisen od izbire funkcije ϕ.*

Dokaz. Naj bo $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ z nosilcem v $(\frac{1}{4}, 4)$ in za vsak $\psi \equiv 1$ na $(\frac{1}{2}, 2)$ Na $(\frac{1}{4}, 4)$ je $\sum_{k=-1}^{1} \phi(2^{-2k}\cdot) = 1$, zato je $\psi = \sum_{k=-1}^{1} \phi(2^{-2k}\cdot)\psi$ na $\mathbb{R}$. Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in $f \in H^\alpha(\mathbb{R})$obstaja konstanta $C_\alpha > 0$, da je

$$||\phi f||_{H^\alpha} \leq C_\alpha ||f||_{H^\alpha}.$$

Za $\alpha \in \mathbb{N}$ je to jasno po definiciji, za ostale pa sledi s standardno interpolacijo.

Sedaj lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
\sup_{r>0} ||\psi m(r\cdot)||_{H^\alpha} &= \sup_{r>0} ||\sum_{k=-1}^{1} \phi(2^{-2k}\cdot)\psi m(r\cdot)||_{H^\alpha} \lesssim \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||\sum_{k=-1}^{1} \phi(2^{-2k}\cdot) m(r\cdot)||_{H^\alpha} \\
&\lesssim \sup_{r>0} \sum_{k=-1}^{1} ||\phi(2^{-2k}\cdot) m(r\cdot)||_{H^\alpha} \lesssim \sup_{r>0} ||\phi(\cdot) m(r\cdot)||_{H^\alpha} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Brez dokaza bomo navedli naslednji izrek.

Izrek 2.3.5 (Fatou [31] Izrek 11.32.)**.** *Naj bo $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ odprt enotski disk. Vsaka omejena holomorfna funkcija $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ima radialno limito v smeri, ki jo določa kot θ, za skoraj vsak θ.*

Naj bo $m \in H^\infty(S_\theta)$. Potem obstaja biholomorfna preslikava $g\colon S_\theta \to \mathbb{D}$. Po Fatoujevem izreku ima funkcija $m \circ g^{-1}$ netangentno limito v skoraj vsaki robni točki. Ker je g biholomorfna, ima tudi m netangentno limito v skoraj vsaki robni točki S_θ. Tako dobljeno razširjeno funkcijo zopet označimo z m. Sedaj lahko dobro definiramo funkciji m_+ in m_-, ki sta podani s.p. na $\mathbb{R}^+$ s predpisoma

$$m_+(\lambda) = m(\lambda e^{i\theta}),$$

$$m_-(\lambda) = m(\lambda e^{-i\theta}).$$

Označimo z $H^\infty(S_\theta, J)$ Banachov prostor vseh funkcij $m \in H^\infty(S_\theta)$, takih, da m_+ in m_- ustrezata Hörmanderjevemu pogoju reda J. Če $H^\infty(S_\theta, J)$ opremimo z normo

$$||m||_{\theta;J} = ||m_+||_{Hör(J)} + ||m_-||_{Hör(J)},$$

dobimo Banachov prostor.

Definicija 2.3.6. Rečemo, da funkcija $m\colon S_\theta \to \mathbb{C}$ zadošča *Mihlin-Hörmanderjevem pogoju reda* J, kadar velja

$$||m||_{\theta;J} < \infty.$$

Uporabljali bomo oznako

$$H^\infty(S_\theta; J) = \{m \in H^\infty(S_\theta) : ||m||_{\theta;J} < \infty\}.$$

2.4 Izrek o spektralnih množiteljih

Izberimo $p \in (1, \infty)$ in označimo s $q \in \mathbb{R}$ k p konjugirani eksponent, podan z enačbo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Za $p, q \in \mathbb{R}$ označimo z $||\mathcal{A}||_{p\to q}$ operatorsko normo omejenega operatorja

$$\mathcal{A}\colon L^p(\Omega, \nu) \to L^q(\Omega, \nu).$$

Naj bo

$$\phi_p^* = \arcsin\left|1 - \frac{2}{p}\right|.$$

Za poljuben $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ označimo

$$\theta^* = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Potem je

$$\phi_p = \phi_q = \arccos\left|1 - \frac{2}{p}\right| = \arctan\frac{2\sqrt{p-1}}{|p-2|}.$$

Spomnimo se univerzalnega izreka o spektralnih množiteljih (Izrek 1.0.2): generator simetrične kontrakcijske polgrupe ima holomorfni funkcijski račun Hörmanderjevega tipa reda $J > 3/2$ znotraj sektorja $S_{\phi_p^*}$. V jedru naloge bomo dokazali poseben primer, in sicer za neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator.

Izrek 2.4.1. *Naj bo $\mathcal{L}_{OU}$ neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator na Wienerjevem prostoru (Ω, ν). Za vsak $p \in (1, \infty)$, $J > \frac{3}{2}$ in $m \in H^\infty(S_{\phi_p^*}; J)$ obstaja konstanta $C(J)$, da je*

$$||m(\mathcal{L}_{OU})||_{p \to p} \leq C(J)(p^* - 1)^{\frac{9}{4}} \log p^* \Big(||m||_{\phi_p^*; J} + |m(0)| \Big). \tag{2.3}$$

Operator $m(\mathcal{L}_{OU})\colon L^p(\Omega, \nu) \to L^p(\Omega, \nu)$ je omejen.

Izrek 1.0.2 ima za seboj dolgo zgodovino. Njegov dokaz poteka preko serije redukcij. V tem poglavju in v razdelku 4.1 bomo naredili redukcije v dokazu Izreka 1.0.2, ki veljajo za vse $\mathcal{A}$, kot v Izreku 1.0.2. Ob predpostavki, da velja bilinearni vložitveni izrek, ga bomo tudi dokazali. V četrtem poglavju pa bomo upoštevali, da je $\mathcal{A}$ Ornstein-Uhlenbeckov operator na verjetnostnem prostoru z Gaussovo mero in dokazali bilinearni vložitveni izrek zanj. Dokaza Izrekov 1.0.2 in 2.4.1 se razlikujeta. Ker $\mathcal{A}$ v splošnem ni nujno diferencialni operator, ne omogoča integriranja po delih, na kar se bomo v primeru $\mathcal{A} = \mathcal{L}_{OU}$ opirali pri dokazu Izreka 2.4.1. Več o tem v četrtem poglavju.

Definicija 2.4.2. *Laplaceova transformacija* funkcije $M \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ je preslikava

$$\widetilde{M}\colon \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}z > 0\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

podana s predpisom

$$\widetilde{M}(\lambda) = \lambda \int_0^\infty M(t) e^{-t\lambda} dt.$$

Označimo z $\widetilde{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$ vse Laplaceove transformiranke funkcij iz $L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Kadar bomo govorili o enoparametrični operatorski polgrupi (glej Definicija 5.3.2) bomo rekli kar operatorska polgrupa ali samo polgrupa. Poleg tega bomo pri definiciji enoparametrične operatorske polgrupe privzeli še krepko zveznost (glej Opomba 5.3.3). Z *id* bomo označevali identiteto.

Definicija 2.4.3. Operatorska polgrupa $\{Q(t) : t \geq 0\}$ je

(1) *simetrična kontrakcijska polgrupa*, če je simetrična in za vsak $t > 0$, vsak $p \in [1, \infty]$ in vsak $f \in L^p(\Omega, \nu) \cap L^2(\Omega, \nu)$ velja

$$||Q(t)f||_p \leq ||f||_p.$$

(2) *sub-Markovska*, če je simetrična kontrakcijska ter poleg tega za vsako nenegativno $f \in L^2(\Omega, \nu)$ in skoraj vsak $\omega \in \Omega$ velja

$$\Big(Q(t)f\Big)(\omega) \geq 0.$$

(3) *Markovska*, če je sub-Markovska in

$$Q(t)id = id.$$

Opomba 2.4.4. Opazimo, da v Definiciji 2.4.3 simetrične kontrakcijske polgrupe zahtevamo, da so operatorji $\{Q(t) : t \geq 0\}$ kontrakcije na $L^p(\Omega, \nu)$ za vsak $p \in [1, \infty]$, česar ne zahtevamo v Definiciji 5.3.5.

Izrek 2.4.5 (Stein 1970 [33]). *Če je $\mathcal{A}$ generator Markovske polgrupe in $p > 1$, potem velja*

$$\widetilde{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \subseteq \mathcal{M}_p(\mathcal{A}).$$

Steinov rezultat je pokazal obstoj holomorfnega funkcijskega računa za dokaj širok razred funkcij. Kasneje so želeli Steinov rezultat posplošiti na širši razred funkcij. Zadostne pogoje za pripadnost $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ se pogosto izraža v obliki regularnostnih pogojev na množitelj m. Izkazalo se je, da je smiselno gledati omejene holomorfne funkcije na sektorjih. Že nekaj časa je znano, da imamo holomorfni funkcijski račun na L^p na sektorjih podanih s kotom manjšim od $\frac{\pi}{2}$:

Izrek 2.4.6 (Cowling 1983 [6]). *Naj bo $p > 1$. Obstaja $\phi_p^C \in (0, \frac{\pi}{2})$, da za vsak $\phi > \phi_p^C$ in poljuben generator $\mathcal{A}$, simetrične kontrakcijske polgrupe, velja*

$$H^\infty(S_\phi) \subseteq \mathcal{M}_p(\mathcal{A}).$$

Kasneje sta Kunstmann in Štrkalj njegov rezultat izboljšala za primer, ko je $\mathcal{A}$ generator sub-Markovske polgrupe.

Izrek 2.4.7 (Kunstmann in Štrkalj 2003, [20]). *Naj bo $\mathcal{A}$ generator sub-Markovske polgrupe. Potem obstaja $\phi_p^{KŠ} < \phi_p^C$, da za vsak $\phi > \phi_p^{KŠ}$ velja*

$$H^\infty(S_\phi) \subseteq \mathcal{M}_p(\mathcal{A}).$$

Ne dolgo nazaj pa je Kriegler pokazal, da sub-Markovski pogoj ni potreben.

Izrek 2.4.8 (Kriegler 2011 [18]). *Pogoj, da je polgrupa $\mathcal{A}$ sub-Markovska, lahko v prejšnjem izreku izpustimo.*

Pojavi se vprašanje o *optimalnem kotu* holomorfnosti, t.j. kakšen je najmanjši $\phi > 0$, da bo $H^\infty(S_\phi) \subseteq \mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ za vsak $\mathcal{A}$ iz izbranega razreda operatorjev. Izkazalo se je, da je za končno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator $\mathcal{L}_{OU}$ na $\mathbb{R}^n$, opremljenem z Gaussovo mero, optimalni kot enak ϕ_p^*.

Izrek 2.4.9 (García-Cuerva, Mauceri, Meda, Sjögren, Torrea 2001 [13]). *Če je $J > \frac{5}{2}$ in $m \in H^\infty(S_{\phi_p^*}; J)$, potem velja*

$$||m(\mathcal{L}_{OU})||_p \leq C(n,p)\Big(||m||_{\phi_p^*;J} + |m(0)|\Big). \tag{2.4}$$

Kot ϕ_p^* je optimalen.

Veljajo ocene

$$0 < \phi_p^* < \phi_p^{KS} < \phi_p^C < \frac{\pi}{2}.$$

Izrek 2.4.9 nam pove, da je kot ϕ_p^* v Izrekih 1.0.2 in 2.4.1 najboljši možen, saj velja enakost v primeru Ornstein-Uhlenbeckovega operatorja.

Izrek 2.4.10 (Mauceri, Meda, Sjögren 2001 [24])**.** *Izrek 2.4.9 velja že za* $J > 1$.

Konstanta $C(n,p)$ v oceni (2.4) je odvisna od razsežnosti prostora, na katerem deluje $\mathcal{L}_{OU}$. Iz Izreka 2.4.1 izhaja, da lahko najdemo oceno neodvisno od razsežnosti prostora, ki nam omogoči holomorfni funkcijski račun za neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator.

2.5 Redukcija na ocene imaginarnih potenc

Osnovne predpostavke
Izberimo $p \geq 1$ in predpostavimo, da je (Ω, ν) *merljiv prostor* s $\sigma-$*končno mero.* Operator $\mathcal{A}$ naj bo *generator simetrične kontrakcijske polgrupe* $\{e^{-t\mathcal{A}} : t \geq 0\}$ na $L^2(\Omega, \nu)$. Za $\Re z > 0$ bomo pisali $T_z = \exp(-z\mathcal{A})$. Polgrupa $\{T_t : t \geq 0\}$ bo delovala na $L^p(\Omega, \nu)$ za različne p, zato bomo označili z $\mathcal{A}_p$ njen generator na $L^p(\Omega, \nu)$. Kadar bo $p = 2$, bomo indeks pri $\mathcal{A}$ izpuščali.

Pri dokazu Izreka 1.0.2 bomo uporabili Medov prispevek.

Izrek 2.5.1 (S. Meda [25])**.** *Naj bo* $1 < p < \infty$. *Denimo, da obstajajo konstante* $C_0, \sigma > 0$ *in* $\phi^* \in [0, \frac{\pi}{2})$, *da za vsak* $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_p)$ *in vsak* $s \in \mathbb{R}$ *velja*

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \leq C_0(1 + |s|)^\sigma e^{\phi^*|s|} ||f||_p.$$

Če je $J > \sigma + 1$ *in* $m \in H^\infty(S_\theta; J)$, *potem ima* $m(\mathcal{A})$ *razširitev do omejenega operatorja na* $\overline{R(\mathcal{A}_p)}$.

Izrek 2.5.1 nam pove, da je za dokaz izreka o množiteljih dovolj oceniti L^p normo imaginarnih potenc operatorja $\mathcal{A}$.

Definicija 2.5.2. Naj bo f integrabilna kompleksna funkcija. *Mellinova transformacija* funcije f, kadar ima smisel, je za $s \in \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$\mathcal{M}(f)(s) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) t^{-is} \frac{dt}{t}.$$

Opazimo, da je Mellinova transformacija v bistvu Fourierova transformacija funkcije $m \circ \exp$, pomnožena s konstanto $\sqrt{2\pi}$. Zato lahko po inverzni Fourierovi formuli za $\lambda \in \mathbb{R}^+$ izračunamo

$$m(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(m)(u) \lambda^{iu} du. \tag{2.5}$$

Za vsako funkcijo $m\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in vsak $\tau \in (0,1)$ naj bo

$$m_\tau(t,\lambda) = (t\lambda)^\tau e^{-t\lambda} m(\lambda).$$

Transformacija $\mathcal{M}_s, s \in \mathbb{R}$, funkcije m_τ je podana kot

$$[\mathcal{M}_s m_\tau](t) = \int_0^\infty m_\tau(t,\lambda)\lambda^{-is}\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Brez dokaza navedimo naslednjo lemo.

Lema 2.5.3. *[23] Denimo, da m ustreza Mihlinovemu pogoju reda $J \in \mathbb{N}$. Tedaj je*

$$\max_{0\leq j\leq J}\sup_{R>0}\int_R^{2R}\lambda^j\frac{\partial^j m}{\partial\lambda^j}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} < \infty.$$

Lema 2.5.4. *Naj bodo $\tau \in (0,1), s \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \phi^* \in [0, \frac{\pi}{2})$ in $m \in H^\infty(S_{\phi^*};\alpha)$. Potem velja*

$$||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq C(\alpha)e^{-\phi^*|s|}(1+|s|)^{-\alpha}\tau^{-1}(\cos\phi^*)^{-\tau-\alpha}||m||_{\phi^*;\alpha}. \tag{2.6}$$

Dokaz. Privzemimo, da je $\alpha \in \mathbb{N}$. Če je $s < 0$, lahko poračunamo

$$\begin{aligned}
[\mathcal{M}_s m_\tau](t) &= \int_0^\infty m_\tau(t,\lambda)\lambda^{-is}\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= \int_0^\infty (t\lambda)^\tau e^{-\lambda t} m(\lambda)\lambda^{-is}\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= e^{(i\tau+s)\phi^*}\int_0^\infty (\lambda t)^\tau e^{-e^{i\phi^*}t\lambda} m(e^{i\phi^*}\lambda)\lambda^{-is}\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= e^{(i\tau+s)\phi^*}t^{is}\int_0^\infty v^{\tau-is}e^{-e^{i\phi^*}v}m(e^{i\phi^*}\frac{v}{t})\frac{dv}{v}.
\end{aligned}$$

Sledi

$$|[\mathcal{M}_s m_\tau](t)| \leq e^{s\phi^*}\Big|\int_0^\infty v^{\tau-is}e^{-e^{i\phi^*}v}m(e^{i\phi^*}\frac{v}{t})\frac{dv}{v}\Big|.$$

Podobno lahko v primeru, ko je $s \geq 0$ ocenimo

$$|[\mathcal{M}_s m_\tau](t)| \leq e^{-s\phi^*}\Big|\int_0^\infty v^{\tau-is}e^{-e^{-i\phi^*}v}m(e^{-i\phi^*}\frac{v}{t})\frac{dv}{v}\Big|. \tag{2.7}$$

Torej velja

$$|[\mathcal{M}_s m_\tau](t)| = e^{-|s|\phi^*}\Big|\int_0^\infty v^{\tau-is}e^{-e^{\pm i\phi^*}v}m_\pm(\frac{v}{t})\frac{dv}{v}\Big|,$$

pri čemer primerno izberemo predznak $\pm$. Izberimo si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ z nosilcem v $[\frac{1}{2}, 2]$ tako, da za vsak $\lambda > 0$ velja

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi(2^k\lambda) = 1.$$

Potem lahko razdelimo izraz (2.7) na koščke in ga ocenimo

$$|[\mathcal{M}_s m_\tau](t)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|s|\phi^*} | \int_0^\infty v^{\tau - is} e^{-e^{\pm i\phi^*} v} m_\pm(\frac{v}{t}) \psi(2^k v) \frac{dv}{v}|.$$

Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci je zamenjava vsote in integrala v zadnjem računu upravičena. Označimo

$$\gamma = \gamma(\tau, \alpha; s) = \frac{(-1)^\alpha}{(\tau - is) \cdots (\alpha + \tau - is - 1)}.$$

P $\alpha-$kratni integraciji po delih sledi

$$\int_0^\infty v^{\tau - is} e^{-e^{\pm i\phi^*} v} m_\pm(\frac{v}{t}) \psi(2^k v) \frac{dv}{v} = \gamma \int_0^\infty v^{\alpha + \tau - is} \frac{\partial^\alpha}{\partial v^\alpha} \Big(e^{-e^{\pm i\phi^*} v} m_\pm(\frac{v}{t}) \psi(2^k v) \Big) \frac{dv}{v}.$$

Po Leibnitzovem pravilu lahko izračunamo

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial v^\alpha} \Big(e^{-e^{\pm i\phi^*} v} m_\pm(\frac{v}{t}) \psi(2^k v) \Big) = \sum_{l+r+j=\alpha} (-1)^j e^{\pm i\phi^* j} e^{-e^{\pm i\phi^*} v} m_\pm^{(l)}(\frac{v}{t}) \psi^{(r)}(2^k v) 2^{kr} \frac{1}{t^l}.$$

Izberimo $0 \leq j + l + r \leq \alpha$ ter $s, r \geq 0$ in označimo

$$I_{k,\alpha,s}(t) = \int_0^\infty 2^{kr} \frac{1}{t^l} v^{\tau + \alpha - is} e^{-e^{\pm i\phi^* v}} m_\pm^{(l)}(\frac{v}{t}) \psi^{(r)}(2^k v) \frac{dv}{v}.$$

Po Cauchy-Schwarzevi neenakosti lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
|I_{k,\alpha,n}(t)| &= \Big| \int_0^\infty 2^{kr} \frac{1}{t^l} v^{\tau+\alpha-is} e^{-e^{\pm i\phi^*} v} m_\pm^{(l)}(\frac{v}{t}) \psi^{(r)}(2^k v) \frac{dv}{v} \Big| \\
&= \Big| \int_0^\infty 2^{kr} t^{-l} \lambda^{\tau+\alpha-is} 2^{-k(\tau+\alpha-is)} e^{-e^{\pm i\phi^*} \lambda 2^{-k}} m_\pm^{(l)}(\frac{\lambda}{t 2^k}) \psi^{(r)}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \Big| \\
&\leq 2^{-k(\tau+\alpha-r-l)} \int_{\frac{1}{2}}^2 \Big| (\frac{\lambda}{2^k t})^l \lambda^{\tau+\alpha-l} e^{-e^{\pm i\phi^*} \lambda 2^{-k}} m_\pm^{(l)}(\frac{\lambda}{2^k t}) \psi^{(r)}(\lambda) \Big| \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\leq 2^{-k(\tau+\alpha-r-l)} \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^2 |(\frac{\lambda}{2^k t})^l m_\pm^{(l)}(\frac{\lambda}{2^k t})|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}} \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^2 |\lambda^{\tau+\alpha-l} e^{-\cos\phi \lambda 2^{-k}}|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}}
\end{aligned}$$

Ocenimo lahko

$$\begin{aligned}
\sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^2 |\lambda^{\tau+\alpha-l} e^{-\cos\phi \lambda 2^{-k}}|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}} &= \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^2 |(\frac{\lambda}{\cos\phi})^{\tau+\alpha-l} e^{-\lambda 2^{-k}}|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}} \\
&\leq (\cos\phi)^{-\tau-\alpha} C \begin{cases} 1 & \text{za } k > 0, \\ \exp(-2^{-k-1})\} & \text{za } k \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

in

$$|\gamma(n, \alpha; u)| \leq C(\alpha) \frac{1}{\tau} (1 + |u|)^{-\alpha}.$$

Vpeljimo oznako

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{za } k > 0, \\ \exp(-2^{-k-1})\} & \text{za } k \le 0 \end{cases}.$$

Po Lemi 2.5.3 je

$$\sup_{t>0} \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^{2} |(\frac{\lambda}{2^k t})^l m_{\pm}^{(l)}(\frac{\lambda}{2^k t})|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}} \lesssim_\alpha ||m||_{\alpha;\phi^*}.$$

Sledi

$$||I_{k,\alpha,n}(t)||_\infty \le 2^{-k(\tau+\alpha-r-l)}||m||_{\phi;\alpha}(\cos\phi)^{-\tau-\alpha}Ca_k.$$

Označimo

$$B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l+r+j=\alpha} 2^{-k(\tau+\alpha-r-l)}a_k.$$

Potem je

$$||\mathcal{M}_s m_\tau]||_\infty \le C(\alpha)\frac{1}{\tau}(1+|s|)^{-\alpha}||m||_{\alpha;\phi^*}(\cos\phi)^{-\tau-\alpha}e^{-|s|\phi^*}B$$

Velja

$$\sum_{l+r+j=\alpha} 2^{-k(\tau+\alpha-r-l)}a_k \lesssim_\alpha \max_{0\le j\le\alpha}\{2^{-k(\tau+j)}\}.$$

Za $k \ge 0$ velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(\tau+j)} \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\tau} = \frac{2^{-\tau}}{1-2^{-\tau}} < \infty.$$

V primeru, ko je $k \le 0$ ocenimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\tau+j)}e^{-2^{k-1}} \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\tau+\alpha)}e^{-2^{k-1}} \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\tau+\alpha)}e^{-k\tau} = \frac{1}{1-(\frac{2}{e})^{1+\frac{\alpha}{\tau}}} < \infty.$$

Posledično je

$$|\mathcal{M}_s m_\tau](t)| \lesssim_\alpha (1+|s|)^{-\alpha}||m||_{\alpha;\phi^*}(\cos\phi)^{-\tau-\alpha}e^{-|s|\phi^*}\frac{1}{\tau}.$$

Trditev smo tako dokazali za vse $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Izkaže se, da velja trditev tudi za splošen $\alpha \ge 0$. Dokaz bomo izpustili. □

Lema 2.5.5. *Naj bodo $p \in (1,\infty)$, $\tau \in (0,1), s \in \mathbb{R}, \alpha \ge 0, \phi^* \in (0,\frac{\pi}{2})$ in $m \in H^\infty(S_{\phi^*};\alpha)$. Potem za vsak $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_p)$ velja*

$$m(\mathcal{A})f = \frac{2^\tau}{\pi\Gamma(\tau+1)}\int_{-\infty}^{\infty}[\widetilde{\mathcal{M}_s m_\tau}](\mathcal{A})\mathcal{A}^{is}f ds. \tag{2.8}$$

Dokaz. Upoštevajmo enačbo (2.5) za funkcijo $m_\tau(t,\lambda)$

$$m_\tau(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} [\mathcal{M}_s m_\tau](t)\lambda^{is} ds.$$

Sedaj lahko izračunamo

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(\tau+1)}\int_0^\infty (\lambda t)^{\tau+1} e^{-\lambda t} m(\lambda)\frac{dt}{t} \\ &= \frac{2^{\tau+1}}{\Gamma(\tau+1)}\int_0^\infty (\lambda y)^{\tau+1} e^{-2\lambda y} m(\lambda)\frac{dy}{y} \\ &= \frac{2^\tau}{\pi\Gamma(\tau+1)}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\mathcal{M}_s m_\tau](y)\lambda^{is} ds \ \lambda y e^{-\lambda y}\frac{dy}{y} \\ &= \frac{2^\tau}{\pi\Gamma(\tau+1)}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty [\mathcal{M}_s m_\tau](y) \ \lambda y e^{-\lambda y}\frac{dy}{y}\lambda^{is} ds \\ &= \frac{2^\tau}{\pi\Gamma(\tau+1)}\int_{-\infty}^\infty [\widetilde{\mathcal{M}_s m_\tau}](\lambda)\lambda^{is} ds. \end{aligned}$$

Utemeljiti moramo še menjavo vrstnega reda integracije. Upoštevajoč Lemo 2.5.4 lahko ocenimo

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty |[\mathcal{M}_s m_\tau](y)\lambda e^{-\lambda y}|dy|\lambda^{is}|ds \leq \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty C e^{-\phi_p^*|s|}(1+|s|)^{-\alpha} e^{-\lambda y}||m||_{\phi_p^*;\alpha} dy ds.$$

Desni integral je končen. Po Trditvi 5.2.27 sledi enakost (2.8). □

Izberimo poljubno $M \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Potem je $\widetilde{M}$ omejena holomorfna funkcija na $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Naj bo $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_p)$ poljubna. Po Cowlingovem izreku (Izrek 2.4.6) obstaja konstanta $C(p)$, da je

$$||\widetilde{M}(\mathcal{A})f||_p \leq C(p)||\widetilde{M}||_\infty ||f||_p \leq C(p)||M||_\infty ||f||_p. \tag{2.9}$$

Označimo s $C_2(p)$ optimalno konstanto C v neenakosti (2.9).

Dokaz Izreka 2.5.1. Iz formule (2.8) vidimo, da je za dokaz Izreka 2.5.1 dovolj videti, da velja

$$\int_{\mathbb{R}} ||\widetilde{\mathcal{M}_s m_\tau}(\mathcal{A})||_{p\to p} ||\mathcal{A}^{is}||_{p\to p} ds < \infty.$$

Neenakost (2.9) pove, da za vsak $M \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ velja

$$||\widetilde{M}(\mathcal{A})||_{p\to p} \leq C(p)||M||_\infty.$$

Ob upoštevanju neenakosti (2.6) je

$$\begin{aligned} ||\widetilde{\mathcal{M}_s m_\tau}(\mathcal{A})||_{p\to p} &\leq C(p)||\mathcal{M}_s m_\tau||_\infty \\ &\leq C(p)\frac{C(\alpha)}{\tau}(\cos\phi^*)^{-\tau-\alpha}(1+|s|)^{-\alpha} e^{-\phi^*|s|}||m||_{\phi^*;\alpha}. \end{aligned}$$

Če velja

$$||\mathcal{A}^{is}f||_p \leq C_0(1+|s|)^\sigma e^{\phi^*|s|}||f||_p$$

potem bo sledil izrek Meda za vse ϕ, α, za katere konvergira integral

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|s|)^{\sigma-\alpha}ds < \infty.$$

Integral konvergira za vse $\alpha > \sigma + 1$. S tem je Izrek 2.5.1 dokazan. □

Trditev 2.5.6. *Naj bo $1 < p < \infty$. Denimo, da obstajajo konstante $C_0, \sigma > 0$ in $\phi^* \in [0, \frac{\pi}{2})$, da za vsak $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_p)$ in vsak $s \in \mathbb{R}$ velja*

$$||\mathcal{A}^{is}f||_p \leq C_0(1+|s|)^\sigma e^{\phi^*|s|}||f||_p. \tag{2.10}$$

Naj bo $J > \sigma + 1$ in $m \in H^\infty(S_{\phi^*}; J)$. Tedaj velja

$$||m(\mathcal{A})||_{p\to p} \leq C_1,$$

pri čemer je

$$C_1 = C_2(p) \inf_{\tau\in(0,1)} \int_{-\infty}^{\infty} ||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \cdot ||\mathcal{A}^{is}||_{B(L^p(\overline{R(\mathcal{A}_p)}, \nu))} ds$$

končna konstanta.

Dokaz. Ob upoštevanju formule (2.8), enakosti (2.9) in neenakosti (2.10) sledi

$$\begin{aligned}
||m(\mathcal{A})f||_p &\leq \frac{2^\tau}{\pi\Gamma(\tau+1)}||\int_{-\infty}^{\infty}[\widetilde{\mathcal{M}_s m_\tau}(\mathcal{A})]\mathcal{A}^{is}f ds||_p \\
&\leq \frac{2^\tau}{\pi\Gamma(\tau+1)}|\int_{-\infty}^{\infty}||[\widetilde{\mathcal{M}_s m_\tau}(\mathcal{A})]\mathcal{A}^{is}f||_p ds \\
&\leq C_2(p)\int_{-\infty}^{\infty}||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}^+,\nu)}||\mathcal{A}^{is}f||_p ds \\
&\leq C_2(p)\int_{-\infty}^{\infty}||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}^+,\nu)}||\mathcal{A}^{is}||_{\mathcal{B}(L^p(\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)}),\nu)}||f||_p ds.
\end{aligned}$$

Ocenimo še integral

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}^+,\nu)}||\mathcal{A}^{is}||_{\mathcal{B}(L^p(\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)}),\nu)} ds \\
&\leq C_0 C(J)||m||_{\phi^*;J}\tau^{-1}(\cos\phi^*)^{-\tau-J}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|s|)^{\sigma-J}ds \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Sledi, da je C_1 končna konstanta. □

Za vsak $\upsilon \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ naj bo

$$\gamma_\upsilon = \{re^{i\upsilon} : r > 0\}$$

pozitivno orientirana pot.

Lema 2.5.7. *Naj bo $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ in $M \in H^\infty(S_\psi)$, ali $\psi = 0$ in $M \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Za vsak $\upsilon \in (-\psi, \psi) \cup \{0\}$, $f \in D(\mathcal{A}_2) \cap R(\mathcal{A}_2)$ in $g \in L^2(\Omega, \nu)$ velja*

$$\left\langle \widetilde{M}(\mathcal{A})f, g \right\rangle = 2 \int_{\gamma_\upsilon} \langle \mathcal{A}T_z f, T_{\overline{z}} g\rangle M(2z) dz. \tag{2.11}$$

Dokaz. Izračunamo lahko

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{M}(x)f, g\rangle &= \langle x \int_0^\infty M(t) e^{-tx} f dt, g\rangle \\
&= \int_0^\infty \langle x e^{-tx} f(x), g(x)\rangle M(t) dt \\
&= 2\int_0^\infty \langle x e^{-2zx} f(x), g(x)\rangle M(2z) dz \\
&= 2\int_0^\infty \langle x e^{-zx} f(x), e^{-\overline{z}x} g(x)\rangle M(2z) dz \\
&= 2\int_{\gamma_\upsilon} \langle x e^{-zx} f(x), e^{-\overline{z}x} g(x)\rangle M(2z) dz.
\end{aligned}$$

V zadnji enakosti smo upoštevali Cauchyjev izrek. Sledi utemeljitev. Očitno je funkcija

$$z \mapsto \langle x e^{-2zx} f(x), g(x)\rangle$$

holomorfna. Označimo $z = a + i\xi$ in integrirajmo po daljici $[a, a(1+\tan\phi)]$, . Dobimo oceno

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^{a\tan\phi} \langle \cdot e^{-2(a+i\xi)\cdot} f, g\rangle M(a+\xi i) d\xi \Big| &\leq \int_0^{a\tan\phi} |\langle \cdot e^{-2(a+i\xi)\cdot} f, g\rangle| \; ||M||_\infty d\xi \\
&\leq \int_0^{a\tan\phi} || \cdot e^{-2(a+i\xi)\cdot} f||_2 \; ||g||_2 \; ||M||_\infty d\xi \\
&\leq \int_0^{a\tan\phi} \sqrt{\int_0^\infty x^2 e^{-4ax} dx} \; ||f||_2 \; ||g||_2 \; ||M||_\infty d\xi \\
&= \int_0^{a\tan\phi} \frac{1}{4\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \; ||f||_2 \; ||g||_2 \; ||M||_\infty d\xi \\
&= \frac{a\tan\phi}{4\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \; ||f||_2 \; ||g||_2 \; ||M||_\infty \\
&\lesssim a^{-\frac{1}{2}} \; ||f||_2 \; ||g||_2 \; ||M||_\infty \to 0, \text{ za } a \to \infty.
\end{aligned}$$

Enakost (2.11) sledi. □

Posledica 2.5.8. *Ob predpostavkah Leme 2.5.7 velja*

$$\left| \left\langle \widetilde{M}(\mathcal{A})f, g \right\rangle \right| \leq 2||M||_{L^\infty(\gamma_\upsilon)} \int_{\gamma_\upsilon} |\langle \mathcal{A}T_z f, T_{\overline{z}} g\rangle| d|z|. \tag{2.12}$$

2.6 Bilinearni vložitveni izrek

Integralska reprezentacija (2.11) je ključnega pomena za dokaz Izreka 1.0.2. Posledica 2.5.8 nam pove, da je za dokaz Izreka 1.0.2 dovolj najti primerno oceno za bilinearni integral

$$\int_{\gamma_\upsilon} |\langle \mathcal{A}T_z f, T_{\overline{z}} g\rangle| d|z|. \tag{2.13}$$

Za $p \in (2, \infty)$ in $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ vpeljimo oznaki

$$p_\varepsilon = \frac{p - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad \text{in} \quad q_\varepsilon = \frac{p_\varepsilon}{p_\varepsilon - 1}. \tag{2.14}$$

Naslednji izrek bo dal oceno za integral (2.13).

Izrek 2.6.1 (*Bilinearni vložitveni izrek*)**.** *Za poljubne $p \in (2, \infty), \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}), \phi \in [-\phi_{p_\varepsilon}, \phi_{p_\varepsilon}]$ in vse $f \in L^p(\Omega, \nu), g \in L^q(\Omega, \nu)$ velja*

$$\int_{\gamma_\phi} |\langle \mathcal{A}T_z f, T_{\overline{z}} g\rangle| d|z| \leq \frac{32(p-1)}{\varepsilon \cos\phi} ||f||_p ||g||_q. \tag{2.15}$$

Do konca poglavja privzemimo, da velja Izrek 2.6.1. Z njegovo pomočjo bomo dokazali univerzalni izrek o množiteljih (Izrek 1.0.2).

2.7 Ocene imaginarnih potenc

Lema 2.7.1. *Naj bo A sebi-adjungirani operator na $L^2(\Omega, \nu)$. Denimo, da za vsak $p > 2$ in vsak $f \in L^2(\Omega, \nu) \cap L^p(\Omega, \nu)$ velja neenakost*

$$||Af||_p \leq C(p) ||f||_p.$$

Potem velja tudi

$$||Af||_q \leq C(p) ||f||_q. \tag{2.16}$$

Dokaz. Naj bo $p > 2$. Potem je operator A omejen na $L^p(\Omega, \nu)$. Zato je tudi njegov adjungiran operator A^* omejen. Naj bo q adjungiran eksponent k p. Seveda je

$$A^* \colon (L^p(\Omega, \nu))^* \to (L^p(\Omega, \nu))^*,$$

in ker je $(L^p(\Omega, \nu))^* = L^q(\Omega, \nu)$, sledi $A \colon L^q(\Omega, \nu) \to L^q(\Omega, \nu)$ je omejen, z normo največ $C(p)$. Torej velja neenakost (2.16). $\square$

Spomnimo se naslednje leme.

Lema 2.7.2. *Naj bosta p in q konjugirana eksponenta. Za vsak $g \in L^q(\mu)$ velja*

$$||g||_q = \sup_{||f||_p \leq 1} \Big| \int_X f g d\mu \Big| = \sup_{||f||_p \leq 1} |\langle f, g\rangle|.$$

Trditev 2.7.3. *Izberimo $p \in (1, \infty)$. Za poljubna $M \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ in $f \in \overline{R(\mathcal{A}_p)}$ velja*

$$||\widetilde{M}(\mathcal{A})f||_p \leq 128(p^* - 1)||M||_\infty ||f||_p.$$

Dokaz. Po Lemi 2.7.1 smemo privzeti $p > 2$. Vzemimo $f, g \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_p)$. V neenakost (2.12) vstavimo $\upsilon = 0$ in dobimo

$$\left|\left\langle \widetilde{M}(\mathcal{A})f, g\right\rangle\right| \leq 2||M||_\infty \int_{\gamma_\upsilon} |\langle \mathcal{A}T_z f, T_{\overline{z}} g\rangle |d|z|.$$

V neenakost (2.15) vstavimo $\phi = 0$ in $\varepsilon = \frac{1}{2}$, od koder sledi

$$\int_{\gamma_\theta} |\langle \mathcal{A}T_z f, T_{\overline{z}} g\rangle d|z| \leq 64(p-1)||f||_p ||g||_q.$$

Dobimo

$$\left|\left\langle \widetilde{M}(\mathcal{A})f, g\right\rangle\right| \leq 128(p-1)||M||_\infty ||f||_p ||g||_q.$$

Po Lemi 2.7.2 sledi

$$||\widetilde{M}(\mathcal{A})f||_p \leq 128(p-1)||M||_\infty ||f||_p.$$

Po Lemi 5.3.25 velja neenakost za poljubna $f, g \in \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)}$. □

Lema 2.7.4. *Za vsak $p > 2$ in vsak $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ velja*

$$\phi^*_{p_\varepsilon} \leq \phi^*_p + \frac{2(p-2)}{p\sqrt{p-1}}\varepsilon. \tag{2.17}$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\phi^*_{p_\varepsilon} = \arcsin\left|1 - \frac{2}{p_\varepsilon}\right| = \arcsin\left|\frac{p-2}{p-2\varepsilon}\right|,$$

in

$$\phi^*_p = \arcsin\left|1 - \frac{2}{p}\right|.$$

Funkcijo arcsin lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli točke $1 - \frac{2}{p}$ v krogu s polmerom 1 :

$$\arcsin(\frac{p-2}{p-2\varepsilon}) = \arcsin\left(1 - \frac{2}{p}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \Big(\frac{2\varepsilon(p-2)}{p(p-2\varepsilon)}\Big)^{2n+1}.$$

Vrsta konvergira, saj je

$$\frac{2\varepsilon(p-2)}{p(p-2\varepsilon)} < 1.$$

Prepričajmo se, da velja

$$1 - \frac{\sqrt{p-1}}{p-2\varepsilon} \geq \frac{2\varepsilon(p-2)}{p(p-2\varepsilon)}. \tag{2.18}$$

Zadnje je ekvivalentno

$$p^2 - 2p\varepsilon - p\sqrt{p-1} \geq 2p\varepsilon - 4\varepsilon,$$

oziroma

$$p(p - \sqrt{p-1}) \geq 4\varepsilon(p-1).$$

Sedaj je jasno, da je dovolj preveriti, da za vsak $p \geq 2$ velja

$$p(p - \sqrt{p-1}) \geq 2(p-1).$$

Naredimo substitucijo $t = \sqrt{p-1}$. Zadnjo neenakost lahko prepišemo v ekvivalentno

$$t^5 \geq 1,$$

ki očitno velja.

Za $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \leq 1$, zato lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
\arcsin(\frac{p-2}{p-2\varepsilon}) &\leq \phi_p^* + \frac{2\varepsilon(p-2)}{p(p-2\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\sqrt{p-1}}{p-2\varepsilon}\Big)^{2n} \\
&\leq \phi_p^* + \frac{2\varepsilon(p-2)}{p(p-2\varepsilon)} \cdot \frac{p-2\varepsilon}{\sqrt{p-1}} \\
&= \phi_p^* + \frac{2(p-2)\varepsilon}{p\sqrt{p-1}}.
\end{aligned}$$

□

Trditev 2.7.5. *Za vsak $s \in \mathbb{R}, p > 1$ in $f \in \overline{R(\mathcal{A}_p)}$ velja*

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \lesssim (p^* - 1)(1 + |s|)^{\frac{1}{2}} e^{\phi_p^*|s|} ||f||_p. \tag{2.19}$$

Za vsak $p^* \geq 3$ in $f \in \overline{R(\mathcal{A}_p)}$ velja

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \lesssim e^{\phi_p^*|s|} ||f||_p \begin{cases} (p^*-1)(1+|s|)^{-\frac{1}{2}} & , \textit{če je } |s| \leq 2p^* \frac{\sqrt{p^*-1}}{p^*-2}, \\ \sqrt{p^*-1}(1+|s|)^{\frac{1}{2}} & , \textit{če je } |s| > 2p^* \frac{\sqrt{p^*-1}}{p^*-2}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Dokaz. Po Lemi 2.7.1 je dovolj dokazati trditev za $p \in (2, \infty)$. Opazimo lahko, da za $z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0$ in

$$M_s(z) = \frac{z^{-is}}{\Gamma(1 - is)}$$

velja

$$\mathcal{A}^{is} = \widetilde{M_s}(\mathcal{A}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Očitno je $M_s \in \mathcal{H}^\infty(S_\theta)$, za vse $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Velja Stirlingova asimptotska ocena

$$|\Gamma(1-is)| \sim \sqrt{|s|}e^{-\pi\frac{|s|}{2}}, \text{ za } |s| \to \infty.$$

Sledi, da za $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in $s \in \mathbb{R}$ velja

$$||M_s||_{L^\infty(\gamma_\theta)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+|s|}} e^{\frac{\pi|s|}{2}+s\theta}. \tag{2.21}$$

Izberimo si $s \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}), r > 2$ in $\phi \in [0, \phi_{r_\varepsilon}]$. Če zaporedoma uporabimo neenakost (2.12) z $\theta = -\phi$ sign(s), bilinearni vložitveni izrek in (2.21) lahko za $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_r)$ ocenimo

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}^{is} f, g\rangle| &\leq 2\int_{\gamma_{-\phi \operatorname{sign}(s)}} |\langle \mathcal{A}T_z f, T_{\overline{z}} g\rangle||M(2z)|dz \qquad (2.22)\\ &\leq \frac{64(r-1)}{\varepsilon\cos\phi}||f||_p\ ||g||_q(1+|s|)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi|s|}{2}-\phi|s|}. \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Po Lemi 2.7.2 in Lemi 5.3.25 sledi, da za vsak $f \in \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_r)}$ velja

$$||\mathcal{A}^{is} f||_r \lesssim \frac{r-1}{\varepsilon\cos\phi}\frac{1}{\sqrt{1+|s|}}e^{\phi^*|s|}||f||_r.$$

Sedaj ločimo dva primera, glede na velikost $|s|$. Neenakost (2.17) je razlog za izbiro delilne točke.

1. *primer:* $|s| > 2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}$.

   V enakost (2.22) vstavimo $r = p$,

$$\varepsilon = \frac{p\sqrt{p-1}}{p-2} \cdot \frac{1}{1+|s|} < \frac{1}{2}$$

in $\phi = \phi_{p_\varepsilon}$. Dobimo oceno

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \lesssim \frac{p-2}{p\cos\phi_{p_\varepsilon}}\sqrt{p-1}(1+|s|)^{\frac{1}{2}}e^{\phi^*_{p_\varepsilon}|s|}||f||_p.$$

Iz neenakosti (2.17) in ocene $\cos\phi_{p_\varepsilon} > \cos\phi_p = 1 - \frac{2}{p}$ sledi, da za vsak $f \in \overline{R(\mathcal{A}_p)}$ velja

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \lesssim \sqrt{p-1}\sqrt{1+|s|}e^{\phi^*_p|s|}||f||_p.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\frac{2(p-2)}{p\sqrt{p-1}}\varepsilon|s| = \frac{2|s|}{1+|s|} \leq 2$.

2. *primer:* $|s| \leq 2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}$.

   Zopet ločimo dva primera:

(a) Za $2 < p \leq 3$ lahko v neenakost (2.22) vstavimo $r = 2p, \phi = 0$ in $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Torej za vsak $f \in \overline{R(\mathcal{A}_p)}$ velja

$$||\mathcal{A}^{is} f||_{2p} \lesssim (2p-1)\frac{1}{\sqrt{1+|s|}} e^{\frac{\pi}{2}|s|}||f||_{2p}.$$

Za $\Re(z) \leq 0$ naj bo $m(z) = z^{is}$. Tedaj je

$$||m(\mathcal{A})||_{2\to 2} = ||m||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} = 1.$$

Naj bo $\theta = \frac{p-2}{p-1}$. Po Riesz-Thorinovem interpolacijskem izreku je

$$\begin{aligned} ||m(\mathcal{A})||_{p\to p} &\leq ||m(\mathcal{A})||_{2\to 2}^{1-\theta}||m(\mathcal{A})||_{2p\to 2p}^{\theta} \\ &\leq (2p-1)^{\frac{p-2}{p-1}}(1+|s|)^{-\frac{p-2}{2(p-1)}} e^{\pi\frac{p-2}{2(p-1)}|s|} \\ &\lesssim (p-1). \end{aligned}$$

Upoštevali smo

$$(1+|s|)^{-\frac{p-2}{2(p-1)}} \leq 1$$

in

$$\frac{p-2}{2(p-1)}|s| \leq \frac{p-2}{2(p-1)} 2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2} = \frac{p}{\sqrt{p-1}} \leq 3$$

Sledi

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \lesssim (p-1)||f||_p \lesssim (p-1)\sqrt{1+|s|}e^{\phi_p^*|s|}||f||_p.$$

(b) Za $p \geq 3$ je $\cos\phi_{p_\varepsilon} \geq \cos\phi_3 = \frac{1}{3}$. Zopet upoštevajmo neenakost (2.22) z $r = p, \varepsilon = \frac{1}{3}$ in $\phi = \phi_{p_\varepsilon}$. Dobimo, da za vsak $f \in \overline{R(\mathcal{A}_p)}$ velja

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \lesssim 3\frac{p-1}{\cos\phi_{p_\varepsilon}}(1+|s|)^{-\frac{1}{2}}e^{\phi_{p_\varepsilon}^*|s|}||f||_p \lesssim \frac{p-1}{\sqrt{1+|s|}}e^{\phi_p^*|s|}||f||_p.$$

V zadnji neenakosti smo upoštevali, da iz neenakosti (2.17) sledi

$$\phi_{p_\varepsilon}^*|s| \leq \phi_p^*|s| + \frac{4}{3}. \qquad \square$$

2.8 Redukcija univerzalnega izreka o množiteljih na bilinearni vložitveni izrek

V neenakost (2.19) vstavimo $\sigma = \frac{1}{2}$ in $\phi_p = \phi_p^*$. Sledi

$$||\mathcal{A}^{is} f||_p \lesssim (p^*-1)\sqrt{1+|s|}e^{\phi_p^*|s|}||f||_p.$$

Torej so izpolnjene predpostavke Izreka 2.5.1. Sledi, da je operator $m(\mathcal{A})$ omejen na $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)}$. Po Trditvi 2.5.6 lahko ocenimo normo $m(\mathcal{A})$ na $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)}$

$$||m(\mathcal{A})f||_p \leq C_1||f||_p,$$

pri čemer je

$$C_1 = C_2(p) \inf_{\tau\in(0,1)} \int_{-\infty}^{\infty} ||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \cdot ||\mathcal{A}^{is}||_{B(L^p(\overline{R(\mathcal{A}_p)},\nu))} ds.$$

Po Trditvi 2.7.3 je $C_2(p) \leq 128(p^*-1)$. Lema 2.7.1 nam pove, da smemo privzamemo, da je $p > 2$. Lahko je videti, da je $\cos\phi_p^* = 2\frac{\sqrt{p-1}}{p}$. V neenakost (2.6) vstavimo $\phi^* = \phi_p^*$ in $\alpha = 0$. Dobimo

$$||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C(J)e^{-\phi_p^*|s|}\frac{1}{\tau}(\cos\phi_p^*)^{-\tau}||m||_{\phi_p^*;0}. \tag{2.24}$$

Neenakost (2.6) uporabimo še z $\phi^* = \phi_p^*$ in $\alpha = J$ ter dobimo

$$||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C(J)e^{-\phi_p^*|s|}\frac{1}{\tau}(\cos\phi_p^*)^{-\tau-J}(1+|s|)^{-J}||m||_{\phi_p^*;J}. \tag{2.25}$$

Če združimo neenakosti (2.24) in (2.25), sledi ocena

$$||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \lesssim_J \frac{1}{\tau}p^{\frac{\tau}{2}}e^{-\phi_p^*|s|}\min\Big\{1, \Big(\frac{\sqrt{p}}{1+|s|}\Big)^J\Big\}||m||_{\phi_p^*;J}.$$

Sedaj lahko ocenimo integral

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} ||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \cdot ||\mathcal{A}^{is}||_{B(L^p(\overline{R(\mathcal{A}_p)},\nu))} ds\\ &\leq \frac{1}{\tau}p^{\frac{\tau}{2}}||m||_{\phi_p^*;J}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\phi_p^*|s|}||\mathcal{A}^{is}||_{B(L^p(\overline{R(\mathcal{A}_p)},\nu))}\min\Big\{1, (\frac{\sqrt{p}}{1+|s|})^J\Big\}ds.\end{aligned}$$

Lema 2.8.1. *Za $p > 2$ velja*

$$1 + \frac{2p\sqrt{p-1}}{p-2} \geq \sqrt{p}. \tag{2.26}$$

Dokaz. Neenakost (2.26) je ekvivalentna

$$p - 2 + 2p\sqrt{p-1} \geq p\sqrt{p} - 2\sqrt{p},$$

oziroma

$$p + 2\sqrt{p} + 2p\sqrt{p-1} \geq 2 + p\sqrt{p}.$$

Ker je $p \geq 2$, je dovolj videti

$$2\sqrt{p} + 2p\sqrt{p-1} \geq p\sqrt{p}. \tag{2.27}$$

Naslednje neenakosti so ekvivalentne (2.27)

$$2 + 2\sqrt{p(p-1)} \geq p.$$

$$2\sqrt{p(p-1)} \geq p - 2.$$

$$4p^2 - 4p \geq p^2 - 4p + 4$$

$$3p^2 \geq 4.$$

□

Označimo

$$F_{J,p}(s) = \min\Big\{1, (\frac{\sqrt{p}}{1+|s|})^J\Big\}.$$

Neenakost (2.26) nam pove, da lahko zapišemo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\phi_p|s|}||\mathcal{A}^{is}||_p F_{J,p}(s)ds = 2\int_0^{\sqrt{p}-1} e^{-\phi_p|s|}||\mathcal{A}^{is}||_p F_{J,p}(s)ds \tag{2.28}$$

$$+2\int_{\sqrt{p}-1}^{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}} e^{-\phi_p|s|}||\mathcal{A}^{is}||_p F_{J,p}(s)ds \tag{2.29}$$

$$+2\int_{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}}^{\infty} e^{-\phi_p|s|}||\mathcal{A}^{is}||_p F_{J,p}(s)ds. \tag{2.30}$$

S pomočjo neenakosti (2.19) in (2.20) lahko za $J > \frac{3}{2}$ naredimo naslednji dve oceni

$$\int_0^{\sqrt{p}-1} e^{-\phi_p|s|}||\mathcal{A}^{is}||_p F_{J,p}(s)ds \leq (p-1)\int_0^{\sqrt{p}-1}(1+s)^{-\frac{1}{2}}ds, \tag{2.31}$$

$$\int_{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}}^{\infty} e^{-\phi_p|s|}||\mathcal{A}^{is}||_p F_{J,p}(s)ds \leq \sqrt{p-1}\,p^{\frac{J}{2}}\int_{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}}^{\infty}(1+s)^{-J+\frac{1}{2}}ds. \tag{2.32}$$

Pri oceni (2.31) smo privzeli $p \geq 3$, saj je v primeru $p \in [2,3]$ integral omejen s konstanto neodvisno od p. Dalje lahko ocenimo

$$(p-1)\int_0^{\sqrt{p}-1}(1+s)^{-\frac{1}{2}}ds = 2(p-1)[p^{\frac{1}{4}} - 1] \lesssim (p-1)^{\frac{5}{4}}.$$

V oceni (2.32) smo upoštevali, da velja neenakost (2.20), ko je $|s| > 2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}$, za vse $p > 2$. Slednje je razvidno iz njenega dokaza. Ker je $J > \frac{3}{2}$, lahko s pomočjo neenakosti (2.26) ocenimo

$$\begin{aligned}\sqrt{p-1}\,p^{\frac{J}{2}}\int_{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}}^{\infty}(1+s)^{-J+\frac{1}{2}}ds &= \sqrt{p-1}\,p^{\frac{J}{2}}\frac{1}{J-\frac{3}{2}}\Big(1+2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}\Big)^{-J+\frac{3}{2}}\\ &\leq \sqrt{p-1}\,p^{\frac{J}{2}}\frac{1}{J-\frac{3}{2}}(\sqrt{p})^{-J+\frac{3}{2}}\\ &\lesssim_J p^{\frac{3}{2}}\sqrt{p-1}.\end{aligned}$$

Za oceno člena (2.29) se moramo bolj potruditi. Če je $p \geq 3$, potem lahko upoštevamo neenakost (2.20).

$$(p-1)p^{\frac{J}{2}} \int_{\sqrt{p}-1}^{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}} (1+s)^{-J-\frac{1}{2}} ds = (p-1)p^{\frac{J}{2}} \frac{1}{J-\frac{1}{2}} \left[p^{\frac{1}{4}-\frac{J}{2}} - \left(1 + \frac{2p\sqrt{p-1}}{p-2}\right)^{\frac{1}{2}-J} \right] \tag{2.33}$$

Ker je $p \geq 3$, velja

$$1 + \frac{2p\sqrt{p-1}}{p-2} = 1 + 2\sqrt{p-1} + \frac{4\sqrt{p-1}}{p-2} \leq \sqrt{p} + 2\sqrt{p} + 4\sqrt{p} = 7\sqrt{p}.$$

Torej je

$$p^{\frac{1}{4}-\frac{J}{2}} - \left(1 + \frac{2p\sqrt{p-1}}{p-2}\right)^{\frac{1}{2}-J} \leq p^{\frac{1}{4}-\frac{J}{2}}(1 - 7^{\frac{1}{2}-J}).$$

Zato lahko (2.33) ocenimo z

$$(p-1)p^{\frac{J}{2}} \int_{\sqrt{p}-1}^{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}} (1+s)^{-J-\frac{1}{2}} ds \lesssim_J (p-1)p^{\frac{1}{4}}.$$

Če pa je $p \in [2,3]$, potem bomo uporabili neenakost (2.19)

$$(p-1)p^{\frac{J}{2}} \int_{\sqrt{p}-1}^{2p\frac{\sqrt{p-1}}{p-2}} (1+s)^{-J+\frac{1}{2}} ds = (p-1)p^{\frac{J}{2}} \frac{1}{J-\frac{3}{2}} \left[p^{\frac{3}{4}-\frac{J}{2}} - \left(1 + \frac{2p\sqrt{p-1}}{p-2}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{J}{2}} \right].$$

Zaradi zveznosti je desna stran omejena neodvisno od p.

Če upoštevamo ocene za (2.28), (2.29) in (2.30), sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||\mathcal{M}_s m_\tau||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} ||\mathcal{A}^{is}||_{B(L^p(\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)}, \nu))} ds \lesssim \frac{1}{\tau} p^{\frac{\tau}{2}} ||m||_{\phi_p;J} (p-1)^{\frac{5}{4}}.$$

Torej za vsak $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_p)$ velja

$$||m(\mathcal{A})f||_p \lesssim_J \inf_{\tau \in (0,1)} \frac{1}{\tau} p^{\frac{\tau}{2}} (p-1)^{\frac{9}{4}} ||m||_{\phi_p;J} ||f||_p.$$

Če minimiziramo desno stran zgornje neenakosti po $\tau \in (0,1)$ dobimo

$$||m(\mathcal{A})||_{p\to p} \lesssim_J \log(p)(p-1)^{\frac{9}{4}} ||m||_{\phi_p;J}.$$

Po Lemi 5.3.25 lahko za $f \in L^2(\Omega,\nu) \cap L^p(\Omega,\nu)$ pišemo

$$m(\mathcal{A})f = m(0)\mathcal{P}_0 f + m(\mathcal{A})(I - \mathcal{P}_0)f,$$

pri čemer je $\mathcal{P}_0$ kontrakcija na $L^p(\Omega,\nu)$. Sedaj je $(I - \mathcal{P}_0)f \in \overline{R(\mathcal{A}_p)}$. Sledi

$$||m(\mathcal{A})||_{p\to p} \leq C(J) \log(p)(p-1)^{\frac{9}{4}} (|m(0)| + ||m||_{\phi_p^*;J}).$$

Poglavje 3

Malliavinov račun

V tem poglavju predpostavimo, da je $\mathcal{H}$ realen separabilen Hilbertov prostor.

3.1 Gaussova mera

Glavna referenca o Gaussovi meri, ki smo jo uporabili je bila knjiga [9].

Definicija 3.1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Za $B \in \mathcal{F}$ bomo vpeljali funkcijo χ_B, ki na $\omega \in \Omega$ deluje s predpisom

$$\chi_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{če } \omega \in B \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Z $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bomo označevali Borelovo $\sigma-$algebro na $\mathcal{H}$. *Slučajna spremenljivka* na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\mathcal{H}$ je preslikava $X \colon \Omega \to \mathcal{H}$, za katero velja

$$I \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Longrightarrow X^{-1}(I) \in \mathcal{F}.$$

Kadar bo $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, bomo rekli, da je X realna slučajna spremenljivka.

Definicija 3.1.2. Na $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ lahko definiramo mero $F_X = F_{X,\mathbb{P}}$ tako, da za vsak $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ velja

$$F_X(I) = \mathbb{P}(X^{-1}(I)) = \mathbb{P}(X \in I).$$

Pravimo, da je X *porazdeljena po zakonu* F_X. Kadar je $\mathbb{P}$ znana ali razvidna iz konteksta, pišemo kar F_X. V primeru, ko je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ rečemo, da je F_X *porazdelitvena mera* slučajne spremenljivke X glede na mero $\mathbb{P}$.

Spomnimo se še formule za vpeljavo nove integracijske spremenljivke.

Trditev 3.1.3. *Naj bo X slučajna spremenljivka na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v realnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ in $\phi \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ omejena Borelova funkcija. Potem velja*

$$\int_\Omega \phi(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathcal{H}} \phi(x) dF_X(x).$$

Dokaz. Izberimo $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Naj bo $\phi = \chi_I$. Potem za $\omega \in \Omega$ velja

$$\phi(X(\omega)) = \chi_{X^{-1}(I)}(\omega).$$

Sledi

$$\int_\Omega \phi(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(X^{-1}(I)) = F_X(I) = \int_\mathcal{H} \phi(x)dF_X(x).$$

Po linearnosti velja trditev za vse stopničaste funkcije. Ker so le te goste v $L^1(\Omega, \mathbb{P})$, trditev sledi po izreku o monotoni konvergenci. □

3.1.1 Gaussova mera na $\mathbb{R}^d$

Naj bosta $m \in \mathbb{R}$ in $\sigma \geq 0$. Na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lahko uvedemo mero $\nu_{m,\sigma}$ s predpisom

$$\nu_{m,\sigma}(B) = \begin{cases} \delta_m(B), & \text{če } \sigma = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_B e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}} dx & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ker je $\nu_{m,\sigma}(\mathbb{R}) = 1$, je $\nu_{m,\sigma}$ je verjetnostna mera na $\mathbb{R}$. Za $\sigma > 0$ je $\nu_{m,\sigma}$ absolutno zvezna glede na Lesbeguovo mero in lahko pišemo

$$d\nu_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}} dx. \tag{3.1}$$

Kadar bosta m in σ splošna, oziroma jasna iz konteksta, bomo namesto $\nu_{m,\sigma}$ pisali krajše kar ν. Mero ν imenujemo *Gaussova mera* na $\mathbb{R}$. Le-ta določa normalno porazdelitev $N(m, \sigma)$. V verjetnostnem kontekstu je m pričakovana vrednost in σ variacija normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

Definicija 3.1.4. Naj bo $\mathcal{H}$ realen Hilbertov prostor in μ mera na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Označimo z $\hat{\mu}$ *Fourierovo transformacijo mere* μ, tj. za vsak $h \in \mathcal{H}$ velja

$$\hat{\mu}(h) = \int_\mathcal{H} e^{i\langle x,h\rangle} d\mu(x).$$

Lahko je videti, da je Fourierova transformacija Gaussove mere $\nu_{m,\sigma}$ na $\mathbb{R}$ enaka

$$\hat{\nu}(t) = e^{imt-\frac{1}{2}\sigma t^2}, t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Naj bo $\mathcal{H}$ končno razsežen. Izberimo pozitivno semidefinitno matriko Q na $\mathcal{H}$. Potem obstaja ortonormirana baza $\{e_1, \ldots, e_d\}$ in $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \geq 0$, da za $k = 1, 2, \ldots, d$ velja $Qe_k = \lambda_k e_k$. Preslikava

$$\gamma \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}^d,$$

$$x \mapsto (\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \ldots, \langle x, e_d\rangle)$$

je izomorfizem. Gaussovo mero bomo za začetek uvedli le na $\mathbb{R}^d$. Na splošnem Hilbertovem prostoru jo bomo definirali v naslednjem razdelku.

Vzemimo $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{R}^d$. Na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ uvedemo mero

$$N_{m,Q} = \prod_{k=1}^{d} \nu_{m_k,\lambda_k}.$$

$N_{m,Q}$ je verjetnostna mera in nam podaja normalno porazdelitev v $\mathbb{R}^d$ s *pričakovano vrednostjo*

$$m = \int_{\mathbb{R}^d} x dN_{m,Q}(x)$$

in *kovariančno matriko* Q.

S pomočjo (3.1) pridemo do znane gostote

$$dN_{m,Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det Q}} e^{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-m), x-m\rangle} dx.$$

Po izreku o enoličnosti Fourierove transformacije sledi še naslednja trditev.

Trditev 3.1.5. *[9, Trditev 1.4] Če je $\mathcal{H}$ končno razsežen Hilbertov prostor, $m \in \mathcal{H}$ in Q pozitivna semi-definitna linearna preslikava na $\mathcal{H}$ ter μ verjetnostna mera na $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tako, da za poljuben $h \in \mathcal{H}$ velja*

$$\int_{\mathcal{H}} e^{i\langle h,x\rangle} d\mu(x) = e^{i\langle m,h\rangle - \frac{1}{2}\langle Qh,h\rangle},$$

tedaj je $\mu = N_{m,Q}$.

3.1.2 Gaussova mera na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru

Predpostavimo, da je $\mathcal{H}$ neskončno razsežen, z ortonormirano bazo $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ naj bo $P_k \colon \mathcal{H} \to P_k(\mathcal{H})$ ortogonalni projektor na podprostor $P_k(\mathcal{H}) = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_k\}$, ki vsak $x \in \mathcal{H}$ slika po predpisu

$$P_k x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

Znano je, da za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$.

Iz [19, str. 8] si bomo sposodili naslednjo trditev.

Trditev 3.1.6. *Naj bosta μ in ν končni meri na $\mathcal{H}$, taki, da za vsako omejeno zvezno funkcijo $\phi \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ velja*

$$\int_{\mathcal{H}} \phi d\mu = \int_{\mathcal{H}} \phi d\nu.$$

Potem je $\mu = \nu$.

Trditev 3.1.7. *Naj bosta μ in ν končni meri na $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Če je za vsak $n \in \mathbb{N}$*

$$F_{P_n,\mu} = F_{P_n,\nu},$$

potem je $\nu = \mu$.

Dokaz. Izberimo poljubno zvezno omejeno funkcijo $\phi\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Po izreku o dominirani konvergenci in zamenjavi integracijske spremenljivke lahko izračunamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} \phi(x) d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{H}} \phi(P_n x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{P_n(\mathcal{H})} \phi(\xi) dF_{P_n,\mu}(\xi) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{P_n(\mathcal{H})} \phi(\xi) dF_{P_n,\nu}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{H}} \phi(P_n x) d\nu(x) = \int_{\mathcal{H}} \phi(x) d\nu(x).\end{aligned}$$

Po Trditvi 3.1.6 je $\mu = \nu$. □

Trditev 3.1.8. *Naj bosta μ in ν končni meri na $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, taki da za vsak $h \in \mathcal{H}$ velja $\hat{\mu}(h) = \hat{\nu}(h)$. Potem je $\mu = \nu$.*

Dokaz. Vzemimo $h \in \mathcal{H}$ ter izračunajmo

$$\hat{\mu}(P_n h) = \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x, P_n\rangle} d\mu(x) = \int_{P_n(\mathcal{H})} e^{i\langle P_n \xi, P_n h\rangle} dF_{P_n,\mu}(\xi)$$

in

$$\hat{\nu}(P_n h) = \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x, P_n\rangle} d\nu(x) = \int_{P_n(\mathcal{H})} e^{i\langle P_n \xi, P_n h\rangle} dF_{P_n,\nu}(\xi).$$

Po predpostavki sledi, da imata meri $F_{P_n,\nu}$ in $F_{P_n,\mu}$ enako Fourierovo transformacijo. Po Trditvi 3.1.5 sta enaki. Po Trditvi 3.1.7 pa sledi $\mu = \nu$. □

Naš cilj je uvesti Gaussovo mero na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru. To bomo storili tako, da bomo najprej definirali pričakovano vrednost in kovarianco poljubne mere μ na $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Denimo, da je

$$\int_{\mathcal{H}} |x| d\mu(x) < \infty.$$

Potem je za vsak $h \in \mathcal{H}$ dobro definiran linearen funkcional $F\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$

$$F(h) = \int_{\mathcal{H}} \langle x, h\rangle d\mu(x).$$

F je zvezen, saj lahko ocenimo

$$|F(h)| \leq \int_{\mathcal{H}} |x| d\mu(x) |h|.$$

Po Rieszovem izreku obstaja $m \in \mathcal{H}$, da za vsak $h \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle m, h\rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle x, h\rangle d\mu(x).$$

Definicija 3.1.9. Elementu m pravimo *pričakovana vrednost* mere μ in pišemo

$$m = \int_{\mathcal{H}} x d\mu(x).$$

Denimo, da je še

$$\int_{\mathcal{H}} |x|^2 d\mu(x) < \infty,$$

in si oglejmo bilinearno formo $G\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$

$$G(h,k) = \int_{\mathcal{H}} \langle h, x-m\rangle \langle k, x-m\rangle d\mu(x).$$

Tudi G je zvezna, kar vidimo iz ocene

$$|G(h,k)| \leq \int_{\mathcal{H}} |x-m|^2 d\mu(x) |h|\ |k|.$$

Po Rieszovem izreku obstaja enolično določeni omejeni linearni operator Q na $\mathcal{H}$, da za vsaka $h, k \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle Qh, k\rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle h, x-m\rangle \langle k, x-m\rangle d\mu(x).$$

Definicija 3.1.10. Rekli bomo, da je Q *kovarianca* mere μ.

Očitno je Q simetričen pozitivno semi-definiten operator. Opazimo lahko, da za $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\langle Qe_k, e_k\rangle = \int_{\mathcal{H}} |\langle x-m, e_k\rangle|^2 d\mu(x).$$

Po izreku o monotoni konvergenci in Parsevalovi enakosti sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Qe_k, e_k\rangle = \int_{\mathcal{H}} |x-m|^2 d\mu(x) < \infty.$$

Zato lahko definiramo *sled* operatorja Q s predpisom

$$\mathrm{Tr}\ Q = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Qe_k, e_k\rangle.$$

Sedaj bomo lahko uvedli Gaussovo mero na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru. Izberimo $a \in \mathcal{H}$ in omejen simetričen pozitivno semi-definiten linearen operator Q s končno sledjo.

Definicija 3.1.11. *Gaussova mera* $\nu = N_{a,Q}$ na $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ je verjetnostna mera s pričakovano vrednostjo a, kovariančnim operatorjem Q in Fourierovo transformacijo, ki je za $h \in \mathcal{H}$ podana z

$$\widetilde{N_{a,Q}}(h) = e^{i\langle a,h\rangle - \frac{1}{2}\langle Qh,h\rangle}.$$

Definicija 3.1.12. Če je $X\colon \Omega \to \mathcal{H}$, in je $F_X = N_{a,Q}$ za $a \in \mathcal{H}$ ter pozitivno semi-definiten linearni operator Q s končno sledjo na $\mathcal{H}$, pravimo, da je X *Gaussova slučajna spremenljivka* oziroma, da je porazdeljena po *Gaussovem zakonu* $N_{a,Q}$. Kadar je $a = 0$ in $Q = id$, rečemo, da je X *standardna* Gaussova slučajna spremenljivka.

Kadar bo $\mathcal{N}(Q) = \{0\}$, bomo rekli, da je Gaussova mera *nedegenerirana*. Pokazati moramo, da taka Gaussova mera sploh obstaja. To bo vsebina Izreka 3.1.17.

Ker je Q simetričen pozitivno semidefiniten, obstaja ortonormirana baza $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ prostora $\mathcal{H}$ in nenegativna števila $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$, da za $k \in \mathbb{N}$ velja

$$Qe_k = \lambda_k e_k.$$

Za $x \in \mathcal{H}$ bomo označili $x_n = \langle x, e_k\rangle$. Naj bo $\gamma\colon x \mapsto (x_1, x_2, \ldots)$ naravni izomorfizem med $\mathcal{H}$ in Hilbertovim prostorom $l^2(\mathbb{R})$ vseh realnih zaporedij $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, z lastnostjo $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$. Zato lahko $\mathcal{H}$ identificiramo z $l^2(\mathbb{R})$. Naj bo $(a_1, a_2, \ldots) \in l^2(\mathbb{R})$ zaporedje, prirejeno a. Označimo z $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ prostor vseh realnih zaporedij. Na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ definirajmo μ s predpisom

$$\mu = N_{a_1,\lambda_1} \times N_{a_2,\lambda_2} \times \cdots .$$

Pokazali bomo, da je mera skoncentrirana na l^2 in da je μ enaka $N_{a,Q}$. Še prej pa moramo povedati, kaj sploh pomeni definicija mere μ.

Definicija 3.1.13. Naj bo $\{\mu_k : k \in \mathbb{N}\}$ zaporedje verjetnostnih mer na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lahko opremimo z metriko

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\max\{|x_k - y_k| : 1 \le k \le n\}}{1 + \max\{|x_k - y_k| : 1 \le k \le n\}}.$$

Znano je, da je $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ opremljen s to metriko poln in da je topologija, ki jo porodi, ekvivalentna produktni topologiji.

Mero μ bomo najprej definirali na družini $\mathcal{C}$ cilindričnih množic $I_{n,A}$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Za $n \in \mathbb{N}$ in $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ naj bo

$$I_{n,A} = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\infty} : (x_1, \ldots, x_n) \in A\}.$$

Označimo $\mathbb{R}_n = \{0\}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \{0\}^{\mathbb{N}}$. Lahko je videti, da za $k, n \in \mathbb{N}$ velja

$$I_{n,A} = I_{n+k, A \times \mathbb{R}_{n+1} \times \cdots \mathbb{R}_{n+k}}.$$

Sedaj je jasno, da je $\mathcal{C}$ algebra (glej [21, Definicija 1.1.1.]). Vsako odprto kroglo v $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ lahko zapišemo kot števen presek cilindričnih množic. Borelova $\sigma-$algebra na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je generirana z odprtimi kroglami, zato je $\sigma-$ algebra, generirana s $\mathcal{C}$, enaka $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Za $I_{n,A} \in \mathcal{C}$ predpišimo

$$\mu(I_{n,A}) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A).$$

Izposodili si bomo še naslednjo trditev.

Trditev 3.1.14. *[9, Izrek 1.9.] μ je mera na algebri $\mathcal{C}$.*

Po Caratheodoryjevem izreku lahko mero μ enolično razširimo iz algebre $\mathcal{C}$ na $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N}))$.

Trditev 3.1.15. *$l^2(\mathbb{R})$ je Borelova množica v $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.*

Dokaz. Naj bo $K_{n,r} \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta krogla s središčem v izhodišču in polmerom $r > 0$. Trditev sledi, saj je

$$l^2(\mathbb{R}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{n,K_{n,m}}.$$

□

Trditev 3.1.16. *Velja $\mu(l^2(\mathbb{R})) = 1$.*

Dokaz. Po izreku o monotoni konvergenci je

$$\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} x_k^2 N_{a_k,\lambda_k} d(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + a_k^2) < \infty, \tag{3.3}$$

zato je $\mu(l^2(\mathbb{R})) = 1$. □

Izrek 3.1.17. *Naj bo $a \in \mathcal{H}$ in Q pozitivno semi-definiten omejen linearni operator na $\mathcal{H}$ s končno sledjo. Na $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ obstaja natanko ena verjetnostna mera μ s pričakovano vrednostjo a, kovarianco Q in Fourierovo transformacijo*

$$\hat{\nu}(h) = e^{i\langle a,h\rangle - \frac{1}{2}\langle Qh,h\rangle}.$$

Dokaz. Enoličnost sledi iz Trditve 3.1.8. Pokazali bomo, da zožitev zgoraj definirane mere μ ustreza pogojem izreka. Enakost (3.3) nam pove, da je

$$\int_{\mathcal{H}} |x|^2 d\mu(x) = \mathrm{Tr} Q + ||a||^2.$$

Zaradi enostavnosti privzemimo, da je Q neizrojena in $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$. Naj bo $h \in \mathcal{H}$. Integral $\int_{\mathcal{H}} |x| d\mu(x)$ je končen in $|\langle x, h\rangle| \leq |x|\ |h|$, zato po izreku o dominirani konvergenci sledi

$$\int_{\mathcal{H}} \langle x, h\rangle d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \langle P_n x, y\rangle d\mu(x).$$

Hkrati je

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} \langle P_n x, h\rangle d\mu(x) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{H}} x_k h_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k \int_{\mathbb{R}} x_k dN_{a_k,\lambda_k}(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h_k a_k = \langle P_n a, h\rangle \to \langle a, h\rangle, \text{ za } n \to \infty.\end{aligned}$$

Pokazali smo, da je pričakovana vrednost mere μ enaka a.

Izberimo $y, z \in \mathcal{H}$. Ker je $\int_{\mathcal{H}} |x|^2 d\mu(x)$ končen in je $|\langle x-a, y\rangle| \leq ||x-a||\ ||y||$ ter $|\langle x-a, z\rangle| \leq ||x-a||\ ||z||$ po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci sledi

$$\int_{\mathcal{H}} \langle x-a, y\rangle\langle x-a, z\rangle d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{H}} \langle P_n(x-a), y\rangle\langle P_n(x-a), z\rangle d\mu(x).$$

Hkrati velja

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} \langle P_n(x-a), y\rangle\langle P_n(x-a), z\rangle d\mu(x) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{H}} (x_k - a_k)^2 y_k z_k d\mu(x)\\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \int_{\mathbb{R}} (x_k - a_k)^2 dN_{a_k,\lambda_k}(x_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \lambda_k = \langle P_n Q y, z\rangle \to \langle Qy, z\rangle.\end{aligned}$$

Pokazali smo, da je Q kovarianca od μ.

Za $h \in \mathcal{H}$ lahko izračunamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x,h\rangle} d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle P_n x,h\rangle} d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{i x_k h_k} dN_{a_K,\lambda_k}(x_k)\\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} e^{i a_k h_k - \frac{1}{2}\lambda_k h_k^2} = \lim_{n\to\infty} e^{i\langle P_n a,h\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle P_n Q h,h\rangle} = e^{i\langle a,h\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle Qh,h\rangle}.\end{aligned}$$

□

Definicija 3.1.18. Naj bo $\mathcal{H}$ realen separabilen Hilbertov prostor. Verjetnostni prostor $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}), \nu)$, kjer je ν standardna Gaussova mera, imenujemo Wienerjev prostor.

Definicija 3.1.19. *Slučajni proces* na $\mathcal{H}$ je poljubna družina $\{X_h : h \in \mathcal{H}\}$ realnih slučajnih spremenljivk na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 3.1.20. Slučajni proces $X = \{X_h : h \in \mathcal{H}\}$ je *Gaussov proces*, kadar je za poljuben končen izbor $(h_1, \ldots, h_n)$ slučajna spremenljivka

$$(X_{h_1}, \ldots, X_{h_n})\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

porazdeljena po Gaussovem zakonu.

3.2 Končno razsežen Wienerjev prostor

3.2.1 Hermitovi polinomi

Naj bo $d = 1$. Oglejmo si Taylorjev razvoj funkcije

$$\begin{aligned}F(x,t) = e^{tx - \frac{t^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x-t)^2} &= e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Big(\frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\Big)\Big|_{t=0}\\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x).\end{aligned}$$

Vrsta je konvergentna za vse $x, t \in \mathbb{C}$. Označili smo

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{3.4}$$

Lahko je videti, da je za $n \in \mathbb{N}$ $H_n(x)$ polinom stopnje n. Zato imenujemo $H_n(x)$ *Hermitov polinom* stopnje n.

Trditev 3.2.1. *Za Hermitove polinome in $n \geq 1$ velja*

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x) = H_{n-1}(x), \tag{3.5}$$

$$(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x), \tag{3.6}$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \tag{3.7}$$

Dokaz. Lastnost (3.5) sledi iz naslednjega računa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} H_n(x) &= (-1)^n \frac{1}{n!} \Big(2xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big) \\
&= (-1)^n \frac{1}{n!} \Big(2xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \big(- xe^{-\frac{x^2}{2}} \big) \Big) \\
&= (-1)^n \frac{1}{n!} \Big(2xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (-x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big) \\
&= (-1)^n \frac{1}{n!} \Big(2xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (-x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big) \\
&= (-1)^n \frac{1}{n!} \Big(2xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} - x \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} - n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big) \\
&= (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= H_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Enakost (3.6) dokažemo podobno

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} (2xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}}) = xH_n(x) - (n+1)H_{n+1}(x).$$

Enakost (3.7) je očitna. $\square$

Označimo z ν *standardno* Gaussovo mero na $\mathbb{R}^d$

$$d\nu(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx.$$

Trditev 3.2.2. *Polinomi $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ tvorijo kompleten ortogonalen sistem v $L^2(\mathbb{R}, \nu)$.*

Dokaz. Najprej preverimo ortogonalnost. Za $n < m$ lahko z integracijo po delih izračunamo

$$\begin{aligned}
m!(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int H_n(x)H_m(x)d\nu(x) &= (-1)^m \int_{\mathbb{R}} H_n(x)\frac{d^m}{dx^m}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)dx \\
&= H_n(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \\
&\quad \cdot (-1)^{m+1} \int_{\mathbb{R}} H_{n-1}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)dx \\
&= (-1)^{m+1} \int_{\mathbb{R}} H_{n-1}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)dx \\
&= \cdots \\
&= \int_{\mathbb{R}} H_0(x)\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dokažimo še kompletnost sistema. Hermitov polinom $H_n(x)$ je stopnje n. Zato lahko vsak polinom zapišemo kot vsoto Hermitovih polinomov. Torej je dovolj videti, da so polinomi gosti v $L^2(\gamma)$. Denimo, da obstaja $f \in L^2(\gamma)$, ki je ortogonalen na vse polinome. Produkt $f(x)e^{-x^2}$ je L^1 integrabilen, zato ima dobro definirano Fourierovo transformacijo. Za vsak $\xi \in \mathbb{R}$ velja

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x)d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\xi^n}{n!} x^n f(x)d\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\xi^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)d\nu(x) = 0. \tag{3.8}$$

Po izreku o enoličnosti Fourierove transformacije [31] sledi $f \equiv 0$.

Utemeljimo še, da smemo menjati vrstni red seštevanja in integracije v (3.8). Enakomerno lahko ocenimo

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} \frac{\xi^n}{n!} x^n f(x)\Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|}{n!}|x|^n|f(x)| = e^{|\xi||x|}|f(x)|.$$

Po Cauchy-Schwarzevi neenakosti sledi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|\xi||x|}|f(x)|d\gamma(x) \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\gamma(x)}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{2|\xi||x|}d\gamma(x)} < \infty. \qquad \square$$

Opomba 3.2.3. Iz dokaza sledi še $||H_n||_2 = \frac{1}{\sqrt{n!}}$.

Za $d \geq 1$ in multiindeks $\alpha \in \mathbb{N}^d$ lahko uvedemo Hermitove polinome na $\mathbb{R}^d$

$$H_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{d} H_{\alpha_i}(x_i), \qquad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Polinom je H_α je stopnje $|\alpha|$. Velja posplošitev Trditve 3.2.2.

Trditev 3.2.4. *Polinomi $\{H_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$ tvorijo kompleten ortogonalen sistem v $L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$.*

3.2.2 Valovna enačba

Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Potem za vsak $j = 1, \ldots, d$ velja

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_j} f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d,\nu)} = \langle f, (-\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j)g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d,\nu)}.$$

Torej formalno lahko na $L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$ pišemo

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^* = -\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j.$$

V primeru Lesbeguove mere je seveda

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^* = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Po vzoru pozitivnega Laplaceovega operatorja

$$-\Delta = \sum_{j=1}^{d} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^* \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

bi radi definirali operator Δ_{OU} na $L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$. Torej želimo, da za $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ velja

$$\Delta_{OU} = \sum_{j=1}^{d} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^* \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = -\Delta + x\nabla.$$

To je nenegativen simetričen operator na $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sedaj nas zanima, ali lahko Δ_{OU} s $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ razširimo do *sebi-adjungiranega* operatorja na neki domeni v $L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$.

Oglejmo si Cauchyjevo nalogo za $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^n$ in $t > 0$:

$$u_f' + \Delta_{OU} u_f = 0, \text{ na } [0, \infty)$$

$$u_f(0) = f(x).$$

Iščemo zvezno odvedljivo funkcijo

$$u_f \colon [0, \infty) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

ki reši dano nalogo.

Trditev 3.2.5. *Rešitev Cauchyjeve naloge je podana z* Mehlerjevo formulo

$$\Big(u_f(t)\Big)(x) = (T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + z\sqrt{1 - e^{-2t}}) d\nu(z).$$

Dokaz. Po Trditvi 4.1.4 lahko upravičeno menjamo vrstni red integriranja in odvajanja v naslednjih izračunih:

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + z\sqrt{1-e^{-2t}})(-e^{-t}x + z\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}})d\nu(z),$$

$$\nabla_x (T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \nabla f(e^{-t}x + z\sqrt{1-e^{-2t}})e^{-t}d\nu(z).$$

$$\Delta_x (T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \Delta f(e^{-t}x + z\sqrt{1-e^{-2t}})e^{-2t}d\nu(z).$$

Sledi

$$\begin{aligned} u' + \Delta_{OU} u = e^{-2t} \int_{\mathbb{R}} & \nabla f(e^{-t}x + z\sqrt{1-e^{-2t}}) z \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \\ & - \Delta f(e^{-t}x + z\sqrt{1-e^{-2t}}) d\nu(z). \end{aligned}$$

Z integracijo po delih dobimo

$$u' + \Delta_{OU} u = 0.$$

Očitno je $(T_0 f)(x) = f(x)$. □

Posledica 3.2.6. *Po Trditvi 5.3.26 lahko operator Δ_{OU} zapremo in njegovo zaprtje je sebi-adjungiran operator na $L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$.*

Definicija 3.2.7. Zaprtje operatorja Δ_{OU} imenujemo *končno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator*. Označimo ga zopet z Δ_{OU}.

Trditev 3.2.8. *Hermitovi polinomi so lastni vektorji operatorja Δ_{OU}. V $\mathbb{R}^d$ velja enakost*

$$\Delta_{OU} H_\alpha(x) = |\alpha| H_\alpha(x).$$

Dokaz. Oglejmo si primer $d = 1$. Z upoštevanjem zvez (3.5) in (3.6) lahko poračunamo

$$\begin{aligned} \Delta_{OU} H_n(x) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x) + x\frac{\partial}{\partial x} H_n(x) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} H_{n-1}(x) + x\frac{\partial}{\partial x} H_n(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big((n+1)H_{n+1}(x) - xH_n(x)\Big) + x\frac{\partial}{\partial x} H_n(x) \\ &= (n+1)H_n(x) - H_n(x) \\ &= nH_n(x). \end{aligned}$$

Dokažimo trditev še za splošen d. Naj bo α poljuben multiindeks. Računajmo

$$\begin{aligned}
\Delta_{OU} H_\alpha(x) &= \Big(-\Delta + (x_1, \dots, x_n) \cdot \nabla \Big) \prod_{i=1}^{d} H_{\alpha_i}(x_i) \\
&= \sum_{k=1}^{d} \Big[\Big(\prod_{i=1, i\neq k}^{d} H_{\alpha_i}(x_i) \Big) \Big(-\Delta + (x_1, \dots, x_n) \cdot \nabla \Big) H_{\alpha_k}(x_k) \Big] \\
&= \sum_{k=1}^{d} \Big[\Big(\prod_{i=1, i\neq k}^{d} H_{\alpha_i}(x_i) \Big) \ \alpha_k \ H_{\alpha_k}(x_k) \Big] \\
&= \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \ H_\alpha(x) \\
&= |\alpha| H_\alpha(x).
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Ornstein-Uhlenbeckova polgrupa na $L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$

Uvedli bomo *Ornstein-Uhlenbeckovo polgrupo* na $L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$. Po Trditvi 3.2.2 lahko vsako funkcijo $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \nu)$ razvijemo po bazi

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha H_\alpha \in L^2(\nu), \tag{3.9}$$

pri čemer smo uporabili oznako $a_\alpha = \langle f, H_\alpha \rangle$. Sledeč Trditvi 3.2.8 bomo v duhu Primera 5.2.25 definirali družino operatorjev $T = \{T_t : t \geq 0\}$ s predpisom

$$T_t f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{-t|\alpha|} a_\alpha H_\alpha. \tag{3.10}$$

Po Posledici 5.3.14 je T krepko zvezna simetrična kontrakcijska operatorska polgrupa.

Trditev 3.2.9. *Generator polgrupe T je natanko Δ_{OU} iz Definicije 3.2.7.*

Dokaz. Generator $\mathcal{L}_{OU}$ polgrupe T obstaja po Izreku 5.3.24, in je sebi-adjungiran. Po Trditvi 3.2.8 je $-\Delta + x\nabla \subseteq \mathcal{L}_{OU}$. Iz Posledice 3.2.6 in Leme 5.1.24 sledi

$$\Delta_{OU} = \overline{-\Delta + x\nabla} = \mathcal{L}_{OU}.$$

□

Označimo z I_n ortogonalni projektor na podprostor

$$\mathrm{Lin}\{H_\alpha : |\alpha| = n\} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n, \nu).$$

Iz Posledice 5.3.14 sledi, da lahko zapišemo operator $\mathcal{L}_{OU}$ eksplicitno

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^d, \nu) : \sum_{n=1}^{d} n ||I_n f||^2_{L^2(\mathbb{R}^d, \nu)} < \infty \},$$

$$\mathcal{L}_{OU} = \sum_{n=1}^{d} n I_n.$$

Opomba 3.2.10. Pri določitvi definicijskega območja smo upoštevali Opombo (3.2.3).

3.3 Neskončno razsežen Wienerjev prostor

Glavni vir za ta razdelek je knjiga [29].

Če je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ realna slučajna spremenljivka, bomo z $\mathbb{E}$ označevali pričakovano vrednost X, t.j.

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Kadar je znana porazdelitvena funkcija za X, pa lahko izračunamo

$$\mathbb{E}X = \int_\mathbb{R} x dF_X(x).$$

Definicija 3.3.1. Naj bosta $\mathcal{H}$ realen separabilen Hilbertov prostor in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ poln verjetnostni prostor. Označimo z $W := \{W(h) : h \in \mathcal{H}\}$ Gaussov slučajni proces na $\mathcal{H}$. Če za W in poljubna $h, g \in \mathcal{H}$ velja

$$\mathbb{E}\Big[W(h)\Big] = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{E}\Big[W(h)W(g)\Big] = \langle h, g\rangle_\mathcal{H},$$

potem rečemo, da je proces W *izonormalen Gaussov.*

Trditev 3.3.2. *Preslikava $h \mapsto W(h)$ linearna.*

Dokaz. Izberimo poljubne $a, b \in \mathbb{R}$ in $h, g \in \mathcal{H}$. Potem velja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(W(ah+bg) - aW(h) - bW(g)\Big)^2\Big] &= ||ah+bg||^2_\mathcal{H} + a^2||h||^2_\mathcal{H} + b^2||g||^2_\mathcal{H} \\ &\quad - 2a\langle ah+bg, h\rangle_\mathcal{H} - 2b\langle ah-bg, g\rangle_\mathcal{H} + 2ab\langle h, g\rangle_\mathcal{H} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sledi $W(ah+bg) = aW(h) + bW(g)$. □

Posledica 3.3.3. *Preslikava $h \to W(h)$ je linearna izometrija $\mathcal{H}$ na zaprt podprostor v $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Elementi tega podprostora so Gaussove slučajne spremenljivke z ničelno pričakovano vrednostjo.*

Trditev 3.3.4. *Izonormalen Gaussov proces obstaja na poljubnem realnem separabilnem Hilbertovem prostoru.*

Dokaz. Naj bo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Naj bo

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N}), \nu)$$

Wienerjev prostor. Potem so slučajne spremenljvke

$$x_n : \Omega \to \mathbb{R},$$

$$x_n(\omega) = \omega_n$$

neodvisne standardne Gaussove. Za $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$W : \mathcal{H} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \nu),$$
$$e_n \mapsto x_n.$$

Potem lahko ocenimo

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=1}^{N} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n\Big|^2\Big] = \sum_{n=1}^{N} |\langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}}|^2 = ||h||_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

Ker je bil $N \in \mathbb{N}$ poljuben sledi, da za vsak $h \in \mathcal{H}$, vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n$$

konvergira v $L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}, \nu)$ k neki slučajni spremenljivki, ki jo označimo z $W(h)$. Znano je, da je L^2 limita Gaussovih slučajnih spremenljivk tudi Gaussova [9, Trditev 1.16], torej je $W(h)$ Gaussova slučajna spremenljivka.

Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci za vsak $h \in \mathcal{H}$ velja

$$\mathbb{E}[W(h)] = \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} \mathbb{E}[x_n] = 0.$$

Za poljubna $h, k \in \mathcal{H}$ po dvakratni rabi Lesbeguovega izreka o dominirani konvergenci sledi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(h)W(k)] &= \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n \sum_{m=1}^{\infty} \langle k, e_m\rangle_{\mathcal{H}} x_m] = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} \mathbb{E}[x_n \sum_{m=1}^{\infty} \langle k, e_m\rangle_{\mathcal{H}} x_m] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} \sum_{m=1}^{\infty} \langle k, e_m\rangle_{\mathcal{H}} \mathbb{E}[x_n x_m] = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_{\mathcal{H}} \langle k, e_n\rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, k\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Pokazati moramo še, da je $W = \{W(h) : h \in \mathcal{H}\}$ res Gaussov proces. Radi bi videli, da je za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in izbor $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ slučajna spremenljivka $(W(h_1), \ldots, W(h_n))$ Gaussova. Preslikava $h \to W(h)$ je linearna in, če Gaussovo slučajno spremenljivko preslikamo z linearno preslikavo dobimo zopet Gaussovo slučajno spremenljivko [9, Trditev 1.18.]. Zato smemo predpostaviti, da so $h_1, \ldots, h_n$ enaki $e_1, \ldots, e_n$. Označimo z ν_1 standardno Gaussovo mero na $\mathbb{R}$. Naj bo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ in izračunajmo Fourierovo transformiranko

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp i\langle(\xi_1, \ldots, \xi_n), (W(e_1), \ldots, W(e_n)\rangle d\nu &= \int_\Omega e^{i\langle(\xi_1,\ldots,\xi_n),(x_1,\ldots,x_n)\rangle} d\nu \\ &= \int_\Omega e^{i\langle(\xi_1,\ldots,\xi_n),(\omega_1,\ldots,\omega_n\rangle} d\nu \\ &= \int_\Omega e^{i\langle(\xi_1,\ldots,\xi_n),(\omega_1,\ldots,\omega_n\rangle} d(\prod_{j=1}^{n} \nu_1) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \int_\Omega e^{i\xi_k \omega_k} d\nu_1(\omega_k) \\ &= \exp(i\langle \mu, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle Q\xi, \xi\rangle).\end{aligned}$$

Torej je vektor $(W(e_1),\dots,W(e_n))$ porazdeljen po standardni Gaussovi porazdelitvi na $(\mathbb{R}^n,\prod_{k=1}^n \nu_1)$. □

3.3.1 Wienerjev kaos

V nadaljevanju dela bomo privzeli, da so $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ kot v dokazu Trditve 3.3.4. Spomnimo se Hermitovih polinomov (3.4). Naj bo W spet izonormalen Gaussov proces. Označimo z G $\sigma-$algebro generirano z izonormalnimi slučajnimi spremenljivkami $\{W(h): h\in\mathcal{H}\}$.

Definicija 3.3.5. Naj bo $\mathbb{H}_n$ zaprt linearen podprostor v $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, ki ga generira množica $\{H_n(W(h)): h\in\mathcal{H}, ||h||_{\mathcal{H}}=1\}$ za $n\geq 1$, H_0 pa naj bo množica konstant. Vektorski prostor $\mathbb{H}_n$ imenujemo *Wienerjev kaos* reda n, prirejen procesu W.

Prostor H_1 se ujema z množico $\{W(h): h\in\mathcal{H}\}$.

Lema 3.3.6. *Naj bo (X,Y) Gaussova slučajna spremenljivka, za katero velja $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]=0$ in $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[Y^2]=1$. Tedaj za vse $m,n\geq 0$ velja*

$$\mathbb{E}\Big[H_n(X)H_m(Y)\Big]=\begin{cases}0 & \text{za } m\neq n,\\ \frac{1}{n!}\Big(\mathbb{E}\Big[XY\Big]\Big)^n, & \text{za } m\neq n.\end{cases}$$

Dokaz. Označimo $\rho=Cov(X,Y)$. Verjetnostna gostota za vektor (X,Y) je

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}.$$

Z integracijo po pogojni gostoti $f_{X|Y}$ dobimo

$$\mathbb{E}[X|Y]=\rho Y.$$

Izračunamo lahko

$$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|Y]]=\mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|Y]]=\mathbb{E}[Y\rho Y]=\rho\mathbb{E}[Y^2]=\rho.$$

Znano je, da je momentna funkcija za dvorazsežno standardno normalno porazdelitev enaka

$$\mathbb{E}[e^{sX+tY}]=M_{X,Y}(s,t)=e^{\frac{1}{2}(s^2+2st+t^2)}.$$

Sledi, da za $s,t\in\mathbb{R}$ velja

$$\mathbb{E}[e^{sX-\frac{s^2}{2}}e^{tY-\frac{t^2}{2}}]=e^{stE[XY]}.$$

Sedaj odvajajmo po $\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n\partial t^m}$. Lahko je preveriti, da lahko menjamo vrstni red odvajanja in integriranja po s oziroma t. Ko vstavimo $s=t=0$, dobimo

$$E[n!H_n(X)m!H_m(Y)]=\begin{cases}0, & \text{če je } n\neq m,\\ n!(E[XY])^n, & \text{če je } m=n.\end{cases}$$

□

Iz Leme 3.3.6 sledi, da sta prostora $\mathbb{H}_m$ in $\mathbb{H}_n$ ortogonalna za $m \neq n$.

Izrek 3.3.7. *Prostor $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$ je direktna vsota zaprtih linearnih podprostorov $\mathbb{H}_n$, $n \geq 0$, tj.*

$$L^2(\Omega, G, \mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}_n.$$

Dokaz. Denimo, da obstaja $X \in L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$, ki je pravokoten na $\mathbb{H}_n$ za vse $n \geq 0$. To pomeni, da za vsak $h \in \mathcal{H}$ z $||h||_{\mathcal{H}} = 1$ velja

$$\mathbb{E}[XH_n(W(h))] = 0.$$

Ker je polinom H_n stopnje n, se lahko poljubna potenca x^n izrazi kot linearna kombinacija $H_r(x), 0 \leq r \leq n$. Sledi, da za vse $n \geq 0$ velja

$$\mathbb{E}[XW(h)^n] = 0.$$

Posledično za vse $h \in \mathcal{H}, ||h||_{\mathcal{H}} = 1$ velja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Xe^{tW(h)}] &= \mathbb{E}\Big[X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tW(h))^n}{n!}\Big] = E\Big[X \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(tW(h))^n}{n!}\Big] \\ &= \lim_{m\to\infty} E\Big[X \sum_{n=0}^{m} \frac{(tW(h))^n}{n!}\Big] = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} E\Big[X \frac{(tW(h))^n}{n!}\Big] = 0.\end{aligned}$$

Pri menjavi limite in integrala smo upoštevala Lesbeguov izrek od dominirani konvergenci za $f_m = X \sum_{n=0}^{m} \frac{(tW(h))^n}{n!}$ in limitno funkcijo $Xe^{tW(h)}$. Uporaba Lebeguovega izreka je upravičena, saj je

$$\mathbb{E}[Xe^{tW(h)}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[e^{2tW(h)}] < \infty.$$

Preslikava $h \mapsto W(h)$ je linearna, torej za poljubne $m \geq 1, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ in $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{H}$ za katere je $||h_i||_{\mathcal{H}} = 1$ velja

$$E[X \exp(\sum_{i=1}^{m} t_i W(h_i))] = 0. \tag{3.11}$$

Pokažimo, da odtod sledi $X = 0$. Naj bosta $X^+ = X\chi_{\{X\geq 0\}}$ in $X^- = -X\chi_{\{X\leq 0\}}$. Potem je $X = X^+ - X^-$. Za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ definirajmo pozitivni meri

$$\lambda^+(B) = \mathbb{E}[X^+\chi_B(W(h_1), \ldots, W(h_m))],$$
$$\lambda^-(B) = \mathbb{E}[X^-\chi_B(W(h_1), \ldots, W(h_m))].$$

Njuna Laplaceova transformacija je podana z

$$\phi_{\lambda^+}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp(\lambda \cdot x) d\lambda^+(x) = \mathbb{E}[X^+ \exp(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i W(h_i))], \lambda \in \mathbb{R}^m,$$

$$\phi_{\lambda^-}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp(\lambda \cdot x) d\lambda^-(x) = \mathbb{E}[X^- \exp(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i W(h_i))], \lambda \in \mathbb{R}^m.$$

Enakost (3.11) nam pove, da sta Laplaceovi transformiranki obeh mer enaki. Sledi $X^+ = X^-$ skoraj povsod oziroma $X = 0$. □

Označimo z

$$J_n \colon L^2(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \to \mathbb{H}_n$$

ortogonalni projektor na $n-$ti Wienerjev kaos. Ker so Hermitovi polinomi paroma ortogonalni, za $m \neq n$ velja $J_n J_m = 0$.

Denimo, da je $\mathcal{H}$ neskončno razsežen. Naj bo $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ortogonalna baza za $\mathcal{H}$. Označimo z Λ množico vseh zaporedij $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \alpha_i \in \mathbb{N}_0$, ki imajo le končno mnogo neničelnih elementov. Za $\alpha \in \Lambda$ vpeljimo oznako $\alpha! = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i!$ in $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$. Naj bo $\alpha \in \Lambda$ poljuben. Definiramo lahko posplošeni Hermitov polinom $H_\alpha(x), x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$H_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{\infty} H_{\alpha_i}(x_i).$$

Hermitovi polinomi so dobro definirani, saj je $H_0(x) = 1$ in je $a_i \neq 0$ le za končno mnogo $i-$jev. Privzemimo, da imamo dan izonormalen proces W. Uvedimo oznako

$$\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \prod_{i=1}^{\infty} H_{\alpha_i}(W(e_i)). \tag{3.12}$$

Trditev 3.3.8. *Družina slučajnih spremenljivk $\{\Phi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ tvori ortonormirani sistem v $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$.*

Dokaz. Po Lemi 3.3.6 za poljubna $\alpha, \beta \in \Lambda$ velja

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{\infty} H_{\alpha_i}(W(e_i)) H_{\beta_i}(W(e_i))\Big] = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[H_{\alpha_i}(W(e_i)) H_{\beta_i}(W(e_i))\Big] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha!} & \text{za } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{za } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

□

Za $n \geq 1$ naj bo ${P_n}^0$ prostor, ki ga napenjajo slučajne spremenljivke

$$\Big\{p\Big(W(h_1), W(h_2), \ldots, W(h_k)\Big), h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathcal{H}, k \geq 1, \deg p \leq n\Big\}.$$

Označimo z P_n zaprtje prostora ${P_0}^n$ v $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$.

Trditev 3.3.9. *Velja $P_n = \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{H}_n$.*

Dokaz. Inkluzija $\oplus_{i=0}^{n} \mathbb{H}_i \subseteq P_n$ je očitna. Za dokaz obratne inkluzije je dovolj videti, da je P_n ortogonalen na $\mathbb{H}_m$ za vse $m > n$. Želimo pokazati, da je

$$\mathbb{E}[p(W(h_1), \ldots, W(h_k)) H_m(W(h))] = 0,$$

kjer je $||h||_{\mathcal{H}} = 1$ in p polinom stopnje največ n. Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo lahko zaradi linearnosti $W(h)$ nadomestimo

$$p(W(h_1), \ldots, W(h_k))$$

z

$$q\Big(W(e_1), \dots, W(e_j), W(h)\Big),$$

kjer je $\{e_1, \dots, e_j, h\}$ neka ortonormirana družina in q polinom stopnje največ n. Torej moramo pokazati

$$\mathbb{E}[q(W(e_1), \dots, W(e_j), W(h))H_m(W(h))] = 0.$$

Ker so $e_1, e_2, \dots, e_j$ in h paroma ortogonalni, je dovolj videti, da za vse $r \leq n < m$ velja

$$\mathbb{E}[W(h)^r H_m(W(h))] = 0.$$

To pa je takojšnja posledica tega, da lahko x^r izrazimo kot linearno kombinacijo Hermitovih polinomov $H_q(x)$ za $0 \leq q \leq r$. $\square$

Trditev 3.3.10. *Za vsak $n \geq 1$ tvorijo slučajne spremenljivke $\{\Phi_\alpha, \alpha \in \Lambda, |\alpha| = n\}$ kompleten ortonormirani sistem za $\mathbb{H}_n$.*

Dokaz. Po Trditvi 3.3.8 sta prostora $\{\Phi_\alpha, \alpha \in \Lambda, |\alpha| = n\}$ in $\{\Phi_\alpha, \alpha \in \Lambda, |\alpha| = m\}$ pravokotna za $m \neq n$. Po drugi strani pa $\{\Phi_\alpha, \alpha \in \Lambda, |\alpha| = n\}$ ležijo v P_n. Potem je dovolj pokazati, da lahko vsako polinomsko slučajno spremenljivko $p(W(h_1), \dots, W(h_k))$ izrazimo s polinomi v $W(e_i)$. To je možno, ker je W_h linearen in je $\{e_i, i \geq 1\}$ baza za $\mathcal{H}$. $\square$

Posledica 3.3.11. *Funkcije $\{\Phi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ tvorijo kompleten ortonormiran sistem za $L^2(\Omega, G, \mathbb{P})$.*

3.3.2 Malliavinov odvod

Naj bo $W = \{W(h) : h \in \mathcal{H}\}$ izonormalen Gaussov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Uvedli bomo diferencialni operator D, ki bo gladki slučajni spremenljivki $F \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ priredil DF. Tako bomo lahko odvajali F po $\omega \in \Omega$.

Označimo z $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ množico vseh realnih gladkih funkcij na $\mathbb{R}^d$ s kompaktnim nosilcem. Naj bo

$$\mathcal{S} = \{F : F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)), f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}, n \geq 1\}.$$

Elementom množice $\mathcal{S}$ pravimo *gladke slučajne spremenljivke.* Znano je, da je množica $\mathcal{S}$ gosta v $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.

Definicija 3.3.12. Naj bo F gladka slučajna spremenljivka oblike

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)),$$

za neke $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$. Diferencial D je operator z z vrednostmi v $\mathcal{H}$, ki deluje na $\mathcal{S}$ s predpisom

$$DF = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n))h_i.$$

Slučajni spremenljivki DF rečemo *Malliavianov odvod F.*

Naslednja trditev nam pove, da je operator D dobro definiran.

Trditev 3.3.13. *Naj bo $F \in \mathcal{S}$ in denimo, da obstajata $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, da velja*

$$F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) = g(W(e_1), \ldots, W(e_m)),$$

pri čemer so $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ in je $\{e_1, \ldots e_m\}$ ortonormiran sistem v $\mathcal{H}$. Tedaj je

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) h_i = \sum_{i=1}^{m} \partial_i g(W(e_1), \ldots, W(e_m)) e_i.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je

$$\mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_m\} = \mathrm{Lin}\{h_1, \ldots, h_n\}.$$

Naj bo $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ prehodna linearna preslikava, podana z matriko

$$[\langle e_i, h_j \rangle]_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}.$$

Potem je $T(W(e_1), \ldots, W(e_m)) = (W(h_1), \ldots, W(h_n))$ oziroma

$$(f \circ T)(W(e_1), \ldots, E(e_m)) = F = g(W(e_1), \ldots, W(e_m)).$$

Zaradi zveznosti sledi $f \circ T = g$. Po verižnem pravilu je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \partial_i g(W(e_1), \ldots, W(e_m)) e_i &= \sum_{i=1}^{m} \partial_i (f \circ T)(W(e_1), \ldots, W(e_m)) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f \circ T)(W(e_1), \ldots, W(e_m)) \langle h_j, e_i \rangle e_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} \partial_j f(W(h_1), \ldots, W(h_m)) h_j.
\end{aligned}$$

$\square$

Opomba 3.3.14. Operator odvajanja lahko, v šibkem smislu, interpretiramo kot smerni odvod. Označimo $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{H}^n$ in $w = (W(h_1), \ldots, W(h_n))$. Za vsak $g \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle DF, g \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Big[f(w + \varepsilon \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}^n}) - f(w) \Big].$$

Opazimo, da je $\langle DF, g \rangle_{\mathcal{H}}$ odvod funkcije F komponirane s procesom

$$\{W(g) + \varepsilon \langle k, g \rangle_{\mathcal{H}}, k \in \mathcal{H}\}$$

v točki $\varepsilon = 0$.

Primer 3.3.15. Označimo z $\{B(t) : t \in [0,1]\}$ Brownovo gibanje na kanoničnem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Naj bo $\mathcal{H} = L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$, kjer je μ Lesbeguova mera na $[0,1]$. Za $h \in \mathcal{H}$ definirajmo $W(h) = \int_{[0,1]} h(s)dB(s)$. Zaradi večje jasnosti bomo dodatno pisali argument $\omega \in \Omega$.

Za $0 \leq t \leq 1$ naj bo

$$F = f(W(\chi_{[0,t]})) \in \mathcal{S}.$$

Potem je

$$F(\omega) = f(B(t)(\omega)).$$

Za vsak $h \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}} = f'(B(t)(\omega)) \int_0^t h(\xi)(\omega)d\xi = \frac{d}{d\varepsilon} F\Big(\omega + \varepsilon \int_0^t h(\xi)(\omega)d\xi\Big)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

To pomeni, da lahko D interpretiramo kot odvod $\frac{d}{d\omega}$ v šibkem smislu.

Naslednja trditev je analogija *integracije po delih.*

Trditev 3.3.16. *Če je F gladka slučajna spremenljivka in $h \in \mathcal{H}$, potem velja*

$$\mathbb{E}[\langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}}] = \mathbb{E}[FW(h)]. \tag{3.13}$$

Dokaz. Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je $||h||_{\mathcal{H}} = 1$. Potem obstajajo ortonormirani elementi $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{H}$, da je $h = e_1$ in F gladka slučajna spremenljivka oblike

$$F = f\Big(W(e_1), \ldots, W(e_n)\Big),$$

pri čemer je $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. Gostota standardne normalne porazdelitve v $\mathbb{R}^n$ je

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2).$$

Po integraciji po delih sledi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)x_1 dx \\ &= \mathbb{E}FW(e_1) = \mathbb{E}FW(h).\end{aligned}$$

□

Trditev 3.3.17. *Za gladki slučajni spremenljivki F in G velja*

$$D(FG) = (DF)G + F(DG). \tag{3.14}$$

Dokaz. Funkciji F in G sta oblike

$$F = f(W(e_1), \dots, W(e_n)),$$

$$G = g(W(f_1), \dots, W(f_m)).$$

Uporabimo oznako

$$h_i = \begin{cases} e_i, & 1 \leq i \leq n \\ f_{i-n} & n+1 \leq i \leq m+n. \end{cases}$$

Sledi

$$\begin{aligned} D(FG) &= \sum_{i=1}^{n+m} \partial_i (f \cdot g)\Big(W(e_1), \dots, W(e_n), W(f_1), \dots, W(f_m)\Big) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+m} (g \partial_i f + f \partial_i g)\Big(W(e_1), \dots, W(e_n), W(f_1), \dots, W(f_m)\Big) h_i \\ &= (DF)G + F(DG). \end{aligned}$$

□

Trditev 3.3.18. *Za gladki slučajni spremenljivki F in G ter $h \in H$ velja*

$$\mathbb{E}[G \langle DF, h \rangle_{\mathcal{H}}] = \mathbb{E}[-F \langle DG, h \rangle_{\mathcal{H}}] + \mathbb{E}[FGW(h)].$$

Dokaz. Če upoštevamo (3.13) in (3.14), lahko izračunamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[FGW(h)] &= \mathbb{E}[\langle D(FG), h \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E}[\langle (DF)G, h \rangle_{\mathcal{H}}] + \mathbb{E}[\langle F(DG), h \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E}[G \langle DF, h \rangle_{\mathcal{H}}] + \mathbb{E}[F \langle DG, h \rangle_{\mathcal{H}}]. \end{aligned}$$

□

Definicija 3.3.19. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ merljiv prostor. Preslikava $f \colon \Omega \to \mathcal{H}$ je *merljiva*, kadar je limita po točkah zaporedja enostavnih funkcij $f_n \colon \Omega \to \mathcal{H}$. Množico takih funkcij za katere je $\int_\Omega ||f||^p d\mathbb{P} < \infty$ označimo z $L^p(\Omega; \mathcal{H})$. Če $L^p(\Omega; \mathcal{H})$ opremimo z normo

$$||f||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})} = \left(\int_\Omega ||f||_{\mathcal{H}} d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}}$$

dobimo Banachov prostor. V primeru, ko je $p = 2$ je $L^2(\Omega; \mathcal{H})$ Hilbertov prostor s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega;\mathcal{H})} = \int_\Omega \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} d\mathbb{P}.$$

Trditev 3.3.20. *Za vsak $p \geq 1$ se da operator $D \colon \mathcal{S} \subseteq L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega; \mathcal{H})$ zapreti.*

Dokaz. Naj bo $\{F_N, N \geq 1\}$ zaporedje gladkih slučajnih spremenljivk, da $F_N \to 0$ v $L^p(\Omega)$ in $DF_N \to \eta$ v $L^p(\Omega; \mathcal{H})$. Izberimo $h \in \mathcal{H}$. Naj bo $F = Ge^{-W(h)^2}, G \in$

$\mathcal{S}$. Potem je $W(h)F$ omejena slučajna spremenljivka. Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci, in ob upoštevanju Trditve 3.3.18, sledi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle \eta, h\rangle_{\mathcal{H}} F] &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[\langle DF_N, h\rangle_{\mathcal{H}} F] \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[-F_N \langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}} + F_N F W(h)] \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[F_N \langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}}] + \mathbb{E}[F_N F W(h)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lahko je preveriti, da je množica $\{Ge^{-W(h)^2} : G \in \mathcal{S}\}$ gosta v $L^2(\Omega)$. Zato je $\mathbb{E}[\langle \eta, h\rangle] = 0$. Ker je bil $h \in \mathcal{H}$ poljuben, sledi $\eta = 0$. Po Trditvi 5.1.14 lahko operator D zapremo. $\square$

Zaprtje operatorja $\overline{D}$ bomo označili zopet z D. Naj bo $p \geq 1$. Domeno operatorja D, t.j. napolnitev prostora $\mathcal{S}$ glede na normo

$$||F||_{1,p} = \Big(\mathbb{E}[|F|^p + \mathbb{E}[||DF||^p_{\mathcal{H}}]\Big)^{\frac{1}{p}},$$

označimo z $\mathbb{D}^{1,p}$. V primeru $p = 2$ je $\mathbb{D}^{1,2}$ Hilbertov prostor s skalarnim produktom

$$\langle F, G\rangle_{1,2} = \mathbb{E}[FG] + \mathbb{E}[\langle DF, DG\rangle_{\mathcal{H}}].$$

Definicijo odvoda D lahko posplošimo na gladke slučajne spremenljivke z vrednostmi v poljubnem Hilbertovem prostoru.

Definicija 3.3.21. Naj bo V Hilbertov prostor. Z $\otimes$ bomo označevali tenzorski produkt. Označimo

$$\mathcal{S}_V = \Big\{F = \sum_{j=1}^n F_j h_j : F_j \in \mathcal{S}, h_j \in V, n \geq 1\Big\}.$$

Naj bo

$$F_j = f_j(W(h_1^j), \dots, W(h_{n_j}^j)),$$

za neke $n_j \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n_j})$ in $h_1^j, \dots, h_{n_j}^j \in \mathcal{H}$ in $v_j \in V$. Izberimo $F \in \mathcal{S}_V$. Odvod

$$D \colon \mathcal{S}_V \subseteq L^p(\Omega; V) \to L^p(\Omega; \mathcal{H} \otimes V)$$

je podan z

$$DF = \sum_{j=1}^n (DF_j) \otimes h_j.$$

V primeru $V = \mathbb{R}$ dobimo prvotno definicijo Malliavinogeva odvoda. Tudi ta definicija je dobra, t.j. neodvisna od izbire reprezentacije za F. Podobno kot v Trditvi 3.3.20 se izkaže, da lahko operator $D \colon L^p(\Omega; V) \to L^p(\Omega; \mathcal{H} \otimes V)$ zapremo. Za njegovo zaprtje uporabimo isto oznako, domeno pa označimo z $\mathbb{D}^{1,p}(V)$. Domena $\mathbb{D}^{1,p}(V)$ je napolnitev prostora $\mathcal{S}_V$ glede na normo

$$||F||_{1,p,V} = \Big(\mathbb{E}[||F||^p_V] + \mathbb{E}[||DF||^p_{\mathcal{H}\otimes V}]\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Primer 3.3.22. Oglejmo si drugi odvod za $F \in \mathcal{S}$. $D^2F = D(Df)$ je gladka slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ podana kot

$$D^2F = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{i,j}^2 f\Big(W(h_1), \ldots, W(h_n)\Big)(h_i \otimes h_j).$$

Naslednja trditev je analogija verižnega pravila.

Trditev 3.3.23. *Naj bo $g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija z omejenimi odvodi. Naj bo $p \geq 1$ in $F = (F^1, \ldots, F^d)$ slučajni vektor z $F^i \in \mathbb{D}^{1,p}$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, d$. Potem je $g(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ in*

$$D(g(F)) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i g(F) DF^i. \tag{3.15}$$

Dokaz. Pokažimo trditev za primer, ko je $d = 1$. Naj bo ψ_ε približna enota, t.j. $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\psi(\frac{x}{\varepsilon}), \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}$. Funkcija ψ je gladka in ima nosilec vsebovan v $[0,1]$, in $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 1$. Naj bo $g_\varepsilon(x) = g * \psi_\varepsilon(x)$. Funkcija g_ε je gladka, omejena in ima omejene odvode.

Operator D je zaprt in $F \in (\mathbb{D}^{1,p})^d(\mathcal{A})$. Zato obstaja zaporedje $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$ gladkih slučajnih spremenljivk

$$F_k = f_k(W(h_1), \ldots, W(h_{n_k})), f_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ki konvergirajo proti F v $L^p(\Omega)$ in zaporedje $\{DF_k : k \in \mathbb{N}\}$, ki konvergira proti DF v $L^p(\Omega; \mathcal{H})$. Po definiciji odvoda je

$$D(g_\varepsilon(F_k)) = \sum_{i=1}^{n_k} \partial_i (g_\varepsilon \circ f_k)(W(h_1), \ldots, W(h_{n_k}))h_i = g_\varepsilon'(F_k)DF_k.$$

Po trikotniški neenakosti lahko ocenimo

$$\begin{aligned} ||g_\varepsilon'(F_k)DF_k - g'(F)DF||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})} &\leq ||g_\varepsilon'(F_k)(DF_k - DF)||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})} \\ +||\Big(g_\varepsilon'(F_k) - g'(F_k)\Big)DF||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})} &+ ||\Big(g'(F_k) - g'(F)\Big)DF||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})}. \end{aligned}$$

Za vsak ε in $k \geq 1$ je $g_\varepsilon'(F_k)$ omejena skoraj povsod s konstanto, ki je neodvisna od ε in k. Sledi

$$\lim_{k\to\infty} ||g_\varepsilon'(F_k)(DF_k - DF)||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})} = 0.$$

Po izreku o dominirani konvergenci za vsak $k \geq 1$ velja

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ||\Big(g_\varepsilon'(F_k) - g'(F_k)\Big)DF||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})} = 0$$

in

$$\lim_{k\to\infty} ||\Big(g'(F_k) - g'(F)\Big)DF||_{L^p(\Omega;\mathcal{H})} = 0.$$

Pokazali smo

$$D(g_\varepsilon(F_k)) \overset{\varepsilon\to 0,\mathrm{k}\to\infty}{\longrightarrow} g'(F)DF \text{ v } L^p(\Omega;\mathcal{H}).$$

Hkrati velja še

$$g_\varepsilon(F_k) \overset{\varepsilon\to 0,\mathrm{k}\to\infty}{\longrightarrow} g(F) \text{ v } L^p(\Omega).$$

Operator D je zaprt, zato je po Trditvi 5.1.9 $g(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ in $D(g(F)) = g'(F)DF$. Splošen primer se dokaže podobno.

□

Lema 3.3.24. *[29] Naj bo $p \in (1,\infty)$ in $\{F_n \in \mathcal{D}^{1,p} : n \in \mathbb{N}\}$ zaporedje, ki konvergira proti F v $L^p(\Omega)$, tako da je*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[||DF_n||_{\mathcal{H}}]^p < \infty.$$

Tedaj je $F \in \mathbb{D}^{1,p}$ in DF_n konvergira v šibkem smislu proti DF.

Trditev 3.3.25. *Naj bo $F \in L^2(\Omega)$ gladka slučajna spremenljivka. Potem je $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ natanko tedaj, ko je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n||J_n(F)||_2^2 < \infty.$$

Dokaz. Izberimo ortonormirano bazo $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ za $\mathcal{H}$. Spomnimo se definicije (3.12). S pomočjo zveze (3.5) izračunamo

$$D(\Phi_\alpha) = \sqrt{\alpha!}\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1,i\neq j}^{\infty} H_{\alpha_i}(W(e_i))H_{\alpha_j-1}(W(e_j))e_j.$$

Poračunamo lahko

$$\mathbb{E}\Big[||D(\Phi_\alpha)||_{\mathcal{H}}^2\Big] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha!}{\prod_{i\neq j}\alpha_i!(\alpha_j-1)!} = |\alpha|.$$

Po Posledici 3.3.11 je množica $\{\Phi_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ortonormirana baza za $L^2(\Omega,\nu)$. Operator D je zaprt in linearen, zato sledi $\mathbb{H}_n \subseteq \mathbb{D}^{1,2}$ in

$$D\mathbb{H}_n \subseteq \mathbb{H}_{n-1} \otimes \mathcal{H}.$$

Za $n = -1$ definiramo $\mathbb{H}_{-1} = 0$. Za vsak $F \in \mathbb{H}_n$ sledi

$$\mathbb{E}[||DF||_{\mathcal{H}}^2] = n\mathbb{E}[|F|^2].$$

Denimo, da je $\sum_{n=0}^{\infty} n||J_n(F)||_2^2 < \infty$. Potem zaporedje

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} J_nF$$

konvergira v $L^2(\Omega)$ proti F. Ker je

$$\mathbb{E}[||DF_N||_{\mathcal{H}}^2] = \sum_{n=0}^{N} n||J_nF||_2^2 < \infty,$$

po Lemi 3.3.24 sledi, da je $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ in

$$DF = \sum_{n=1}^{\infty} DJ_nF.$$

Obratno, denimo, da je $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Znano je, da je množica $\{\Phi_\alpha \otimes e_k : \alpha \in \Lambda, k \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza za $L^2(\Omega; \mathcal{H})$. Če razvijemo DF po tej bazi in F po bazi $\{\Phi_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ lahko podobno kot zgodaj izračunamo

$$DJ_nF = J_{n-1}DF$$

in

$$\mathbb{E}[||DF||_{\mathcal{H}}^2] = \sum_{n=0}^{\infty} ||J_n(F)||_2^2.$$

□

3.3.3 Divergenca slučajne spremenljivke

Definicija 3.3.26. Označimo z δ k D adjungirani operator. To pomeni, da je δ neomejen operator $\delta\colon L^2(\Omega; \mathcal{H}) \to L^2(\Omega)$, za katerega velja

- Domena $\mathcal{D}(\delta)$ je podana z

$$\mathcal{D}(\delta) = \{u \in L^2(\Omega; H) : \text{ obstaja } c = c(u) > 0, \text{ da za vsak } F \in \mathbb{D}^{1,2} \\ \text{velja } |\mathbb{E}[\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}| \leq c||F||_{L^2(\Omega)}\}.$$

- Če $u \in \mathcal{D}(\delta)$, potem $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ in za vsak $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ velja

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}].$$

Operator δ imenujemo *divergenca.*

Trditev 3.3.27. *Naj bo $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ množica gladkih slučajnih spremenljivk oblike*

$$u = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j,$$

kjer so F_j gladke slučajne spremenljivke in $h_j \in \mathcal{H}$. Potem velja

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle DF_j, h_j\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{3.16}$$

Dokaz. Naj bosta $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ in $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ poljubna. Trditev 3.3.18 nam pove

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[F_j \langle DF, h_j\rangle_{\mathcal{H}}]\Big| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\Big(\Big|\mathbb{E}[F\langle DF_j, h_j\rangle_{\mathcal{H}}]\Big| + \Big|\mathbb{E}[FF_jW(h_j)]\Big|\Big) \\ &\leq c_u ||F||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Sledi $u \in Dom\delta$. Če zopet integriramo po delih, lahko za $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ izračunamo

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}\Big[F\Big(\sum_{j=1}^{n} F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, h_j\rangle_{\mathcal{H}}\Big)\Big].$$

Sledi, da velja zveza (3.16). □

Trditev 3.3.28. *Veljajo naslednje trditve*

(1) Če je $u \in \mathcal{D}(\delta)$, potem je $\mathbb{E}[\delta(u)] = 0$.

(2) δ je linearen in zaprt operator na $\mathcal{D}(\delta)$.

(3) Naj bodo $u \in S_{\mathcal{H}}, F \in \mathcal{S}$ in $h \in \mathcal{H}$. Velja

$$\langle D(\delta(u)), h\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, h\rangle_{\mathcal{H}} + \delta\Big(\sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, h\rangle_{\mathcal{H}} h_j\Big).$$

Dokaz. (1) Sledi iz definicije za $F = 1$.

(2) Ker je δ adjungiran operator gosto definiranega neomejenega operatorja, je zaprt. Linearnost sledi iz definicije.

(3) Če dvakrat zaporedoma uporabimo zvezo (3.16) lahko izračunamo

$$\begin{aligned}\langle D(\delta(u)), h\rangle_{\mathcal{H}} &= \Big\langle \sum_{j=1}^{n} D(F_jW(h_j)) - \sum_{j=1}^{n} D\langle DF_j, h_j\rangle_{\mathcal{H}}, h\Big\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} W(h_j)\langle DF_j, h\rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{j=1}^{n} F_j\langle DW(h_j), h\rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^{n}\langle D\langle DF_j, h_j\rangle_{\mathcal{H}}, h\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} F_j\langle h_j, h\rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{j=1}^{n}\Big(W(h_j)\langle DF_j, h\rangle_{\mathcal{H}} - \langle D(\langle DF_j, h\rangle_{\mathcal{H}}), h_j\rangle_{\mathcal{H}}\Big) \\ &= \langle u, h\rangle_{\mathcal{H}} + \delta\Big(\sum_{j=1}^{n}\langle DF_j, h\rangle_{\mathcal{H}} h_j\Big)\end{aligned}$$ □

Brez dokaza si sposodimo še naslednjo trditev.

Trditev 3.3.29. *[29] Izkaže se, da velja inkluzija*

$$\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{D}(\delta).$$

3.3.4 Ornstein-Uhlenbeckova polgrupa

Naj bo $W = \{W_h : h \in \mathcal{H}\}$ izonormalen Gaussov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in $\mathbb{H}_n$ $n-$ti Wienerjev kaos pripadajoč W. Za vsak $t \geq 0$ lahko definiramo operator

$$T_t \colon L^2(\Omega, \mathbb{P}) \to L^2(\Omega, \mathbb{P}),$$

ki na $F \in L^2(\Omega, \nu)$ deluje s predpisom

$$T_t(F) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n(F).$$

Po Posledici 5.3.14 je $\{T_t : t \geq 0\}$ simetrična kontrakcijska krepko zvezna operatorska polgrupa. Po Trditvi 5.3.12 je generator polgrupe T nenegativen sebi-adjungiran operator, ki ga bomo označili z $\mathcal{L}_{OU}$. Imenujemo ga *neskončno razsežni Ornstein Uhlenbeckov operator.*

Iz Primera 5.2.25 sledi, da je domena $\mathcal{L}_{OU}$ enaka

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU}) = \{F \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 ||J_n F||_2^2 < \infty\}$$

in na $F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU})$ deluje s predpisom

$$\mathcal{L}_{OU} F = \sum_{n=0}^{\infty} n J_n F.$$

Po Trditvi 3.3.25 je $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{D}^{1,2}$. Naslednja trditev nam bo dala povezavo med D, δ in $\mathcal{L}_{OU}$.

Trditev 3.3.30. *Za vsak $F \in L^2(\Omega)$ je $F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU})$ natanko tedaj, ko je $F \in \mathcal{D}(\delta D)$. Če je $F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU})$, je $\delta D f = \mathcal{L}_{OU} F$.*

Dokaz. Denimo, da je $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ in $DF \in \mathcal{D}(\delta)$. Naj bo $G \in \mathbb{H}_n$. Potem lahko izračunamo

$$\mathbb{E}[G \delta DF] = \mathbb{E}[\langle DG, DF \rangle_H] = \mathbb{E}[n J_n(G) J_n(F)] = n \mathbb{E}[G J_n F].$$

Zaradi gostosti je $J_n \delta DF = n J_n F$, kar implicira $F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU})$ in $\delta DF = \mathcal{L}_{OU} F$.

Obratno, denimo, da je $F \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU})$. Potem $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ in za vsak $G \in \mathbb{D}^{1,2}$ velja

$$\mathbb{E}[\langle DG, DF \rangle_{\mathcal{H}}] = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{E}[J_n(G) J_n(F)] = \mathbb{E}[G \mathcal{L}_{OU} F].$$

Sledi $DF \in \mathcal{D}(\delta)$ in $\delta DF = \mathcal{L}_{OU} F$. □

Opomba 3.3.31. Trditev 3.3.30 nam omogoča, da formalno uvedemo Ornstein-Uhlenbeckov operator

$$\mathcal{L}_{OU} = \delta D.$$

Pokazali bomo, da se operator $\mathcal{L}_{OU}$ pri delovanju na gladkih slučajnih spremenljivkah obnaša kot parcialni diferencialni operator drugega reda.

Trditev 3.3.32. *Velja* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L}_{OU})$ *in za vsak* $F \in \mathcal{S}$, $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))$, $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *velja*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}F = &-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_i \partial_j f)\Big(W(h_1), \ldots, W(h_n)\Big)\langle h_i, h_j\rangle_{\mathcal{H}} \\ &+ \sum_{i=1}^n (\partial_i f)\Big(W(h_1), \ldots, W(h_n)\Big) W(h_i).\end{aligned}$$

Dokaz. Vemo že, da $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ in

$$DF = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(W(h_1), \ldots, W(h_n)) h_i.$$

Posledično je $DF \in S_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{D}(\delta)$ in ob upoštevanju zveze (3.16) dobimo

$$\begin{aligned}\delta DF = &\sum_{i=1}^n (\partial_i f)(W(h_1), \ldots, W(h_n)) W(h_i) \\ &- \sum_{i,j=1}^n (\partial_i \partial_j f)(W(h_1), \ldots, W(h_n))\langle h_i, h_j\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

□

Poglavje 4

Spektralni množitelji za neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator

Bilinearni vložitveni izrek (Izrek 2.6.1) je bil ključen pri dokazu univerzalnega izreka o spektralnih množiteljih (Izrek 1.0.2). Dokaz bilinearnega izreka bo potekal preko serije redukcij. Ne bomo ga dokazali za generator poljubne simetrične kontrakcijske polgrupe, ampak le v primeru neskončno razsežnega Ornstein-Uhlenbeckovega operatorja.

4.1 Metoda toplotnega toka

V tem poglavju bomo predstavili tehniko, s pomočjo katere bomo dokazali bilinearni vložitveni izrek.

Naj bosta $p \in (2, \infty)$ in $Q \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ zvezno odvedljiva funkcija.

Definicija 4.1.1. *Tok*, prirejen funkciji Q in operatorju $\mathcal{A}$, na $L^p(\Omega, \nu) \times L^q(\Omega, \nu)$ je *regularen* na $L^p(\Omega, \nu) \times L^q(\Omega, \nu)$, če je za vsak $f \in L^p(\Omega, \nu)$ in vsak $g \in L^q(\Omega, \nu)$ ter $\phi \in (-\phi_p, \phi_p)$ funkcija $\mathcal{E} \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$, podana s predpisom

$$\mathcal{E}(t) = \int_\Omega Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) d\nu$$

zvezna na $[0, \infty)$ in ima na $(0, \infty)$ zvezni odvod podan z

$$\mathcal{E}'(t) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) d\nu. \tag{4.1}$$

Želimo najti nenegativno funkcijo $Q \in C^1(\mathbb{R}^4)$, katere tok ima, neodvisno od (Ω, ν), naslednje lastnosti:

(i) Tok prirejen Q je regularen na $L^p \times L^q$.

(ii) Obstaja konstanta $A_0 = A_0(\phi, p) > 0$, da za vse $f \in L^p(\Omega, \nu), g \in L^q(\Omega, \nu)$ velja

$$\mathcal{E}(0) \leq A_0\Big(||f||_p^p + ||g||_q^q\Big).$$

(iii) Obstaja $B_0 = B_0(p, \phi) > 0$, da za vsak $f \in L^p(\Omega, \nu), g \in L^q(\Omega, \nu)$ in $t > 0$ velja

$$-\mathcal{E}'(t) \geq B_0 |\langle AT_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g\rangle|. \tag{4.2}$$

Lastnosti (4.2) pravimo *kvantitativna monotonost*. Če bi našli funkcijo Q z naštetimi lastnostmi, bi sledilo

$$B_0 \int_0^\infty |\langle AT_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g\rangle| dt \leq -\int_0^\infty \mathcal{E}'(t)dt \leq \mathcal{E}(0) \leq A_0(||f||_p^p + ||g||_q^q). \tag{4.3}$$

Vstavimo namesto f in g po vrsti λf in g/λ. Po substituciji $z = te^{i\phi}$ se neenakost (4.3) prepiše v

$$B_0 \int_{\gamma_\phi} |\langle AT_z f, T_{\overline{z}} g\rangle| d|z| \leq A_0(\lambda^p ||f||_p^p + \lambda^{-q}||g||_q^q).$$

Desno stran bomo minimizirali po λ.

Lema 4.1.2. *Minimum funkcije*

$$f(\lambda) = \lambda^p ||f||_p^p + \lambda^{-q}||g||_q^q$$

je

$$(p-1)^{\frac{1}{p}} q ||g||_q ||f||_p.$$

Dokaz. Izračunajmo stacionarne točke

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= p\lambda^{p-1}||f||_p^p - q\lambda^{q-1}||g||_q^q, \\ \lambda_0 &= \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{p+q}} ||g||_q^{\frac{1}{p}} ||f||_p^{-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Jasno je, da minimum ni dosežen v robnih točkah, zato je edini kandidat stacionarna točka λ_0. Minimum je

$$\begin{aligned} f(\lambda_0) &= \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}} ||g||_q ||f||_p^{-\frac{p}{q}+p} + \Big(\frac{q}{p}\Big)^{-\frac{1}{p}} ||g||_q^{-\frac{q}{p}+q} ||f||_p \\ &= \Big[\Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\frac{q}{p}\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big] ||g||_q ||f||_p \\ &= (p-1)^{\frac{1}{p}} q ||g||_q ||f||_p. \end{aligned}$$

□

Sledi

$$\int_{\gamma_\phi} |\langle AT_z g, T_{\overline{z}} g\rangle| d|z| \leq \frac{A_0}{B_0}(p-1)^{\frac{1}{p}} q||f||_p||g||_q.$$

Pokazali smo, da če obstaja funkcija Q, ki ustreza pogojem (i), (ii) in (iii), potem za $C(\phi, p) = \frac{A_0}{B_0} q(p-1)^{\frac{1}{p}}$ ter vsak $f \in L^p(\Omega, \nu)$ in $g \in L^q(\Omega, \nu)$ velja

$$\int_{\gamma_\phi} |\langle AT_z g, T_{\overline{z}} g\rangle| d|z| \leq C(\phi, p)||f||_p||g||_q,$$

od koder sledi bilinearni vložitveni izrek.

Najti moramo še funkcijo Q, ki bo ustrezala pogojem metode toplotnega toka. Zaenkrat so pogoji, za uporabo metode toplotnega toka, zapisani na operator $\mathcal{A}$, na mero ν in na poljubni funkciji $f \in L^p(\Omega, \nu)$ in $g \in L^q(\Omega, \nu)$, ter zajemajo še integracijo. Iskanje funkcije Q, ki bi ustrezala takšnim pogojem je zapleteno. Zato bomo poskusili najti pogoje, ki bodo implicirali (i), (ii) in (iii), ampak bodo lažje preverljivi.

Kompleksni spremenljivki $\zeta, \nu \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ lahko identificiramo z

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2, \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Potem je

$$\partial_\zeta = \frac{1}{2}(\partial_{\zeta_1} - i\partial_{\zeta_2})$$

in

$$\partial_\eta = \frac{1}{2}(\partial_{\eta_1} - i\partial_{\eta_2}).$$

Trditev 4.1.3. *Denimo, da za poljubna $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$ in za Q veljajo ocene*

$$0 \leq Q(\zeta, \eta) \leq A_0(|\zeta|^p + |\eta|^q) \tag{4.4}$$

$$2|(\partial_\zeta Q)(\zeta, \eta)| \leq |\zeta|^{p-1} + |\eta| \tag{4.5}$$

$$2|(\partial_\eta Q)(\zeta, \eta)| \leq |\eta|^{q-1} + |\zeta|. \tag{4.6}$$

Tedaj je tok $\mathcal{E}$, ki je prirejen Q in $\mathcal{A}$, regularen na $L^p(\Omega, \nu) \times L^q(\Omega, \nu)$ in $\mathcal{E}$ ima lastnost (ii).

Preden dokažemo Trditev 4.1.3 potrebujemo tehnične predpogoje. Spomnimo se znanega izreka o menjavi vrstnega reda integriranja in odvajanja.

Lema 4.1.4. *[17, Izrek 6.28] Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ netrivialen odprt interval in $h\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$, za katero velja*

(1) Za vsak $t \in I$ je preslikava $\omega \mapsto h(\omega, t) \in L^1(\Omega, \nu)$.

(2) Za skoraj vsak $\omega \in \Omega$ je preslikava $t \mapsto h(\omega, t)$ odvedljiva.

(3) $s = \sup_{t \in I} |\partial_t h(\omega, t)| \in L^1(\Omega, \nu)$.

Naj bo $F\colon I \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom*

$$F(t) = \int_\Omega h(\omega, t) d\nu(\omega).$$

Potem za vsak $t \in I$ *velja*

$$F'(t) = \int_\Omega \partial_t h(\omega, t) d\nu(\omega).$$

Lema 4.1.5. *Naj bosta* $F \in L^p(\Omega, \nu)$ *in* $G \in L^q(\Omega, \nu)$. *Denimo, da za poljubna* $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$ *in za* Q *veljata oceni* (4.5) *in* (4.6). *Potem sta*

$$(\partial_\zeta Q)(F, G) \in L^p(\Omega, \nu)$$

in

$$(\partial_\eta Q)(F, G) \in L^q(\Omega, \nu).$$

Dokaz. Velja

$$\int_\Omega |(\partial_\zeta Q)(F, G)|^q d\nu \leq \int_\Omega (|F|^{p-1} + |G|)^q d\nu \lesssim \int_\Omega |F|^p + |G|^q d\nu < \infty.$$

Podobno ocenimo tudi $\partial_\eta Q$. □

Izposodili bi bomo naslednjo trditev in njeno posledico.

Trditev 4.1.6 ([18],[5]). *Za poljuben* $p \in (1, \infty)$ *se polgrupa* $\{T_t : t > 0\}$ *v sektorju* S_{ϕ_p} *razširi do kontrakcijske analitične polgrupe na* $L^p(\Omega, \nu)$.

Posledica 4.1.7 ([33],[5]). *Za* $p \in (0, \infty), \phi \in (-\phi_p, \phi_p)$ *in* $f \in L^p(\Omega, \nu)$ *je funkcija* $t \mapsto (T_{te^{i\phi}} f)(x)$ *realno-analitična na* $(0, \infty)$ *za skoraj vsak* $x \in \Omega$.

Dokaz trditve 4.1.3. Po Lemi 4.1.4 uporabljeni za $I = (0, \infty)$,

$$F(t) = \int_\Omega Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) d\nu$$

in

$$h(\omega, t) = Q(T_{te^{i\phi}} f(\omega), T_{te^{-i\phi}} g(\omega))$$

sledi enakost (4.1). Preveriti moramo še veljavnost predpostavk (1), (2) in (3).

S pomočjo neenakosti (4.4) lahko za vsak $t > 0$ ocenimo

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq A_0 \int_\Omega |T_{te^{i\phi}} f|^p + |T_{te^{-i\phi}} g|^q d\nu \\ &\leq A_0 \int_\Omega |f|^p + |g|^q d\nu < \infty. \end{aligned}$$

Po Trditvi 4.1.7 sledi, da sta funkciji $t \mapsto T_{te^{i\phi}} f$ in $t \mapsto T_{te^{i\phi}} g$ realno-analitični na $\mathbb{R}$. Funkcija Q je zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}^4$, zato je za vsak $\omega \in \Omega$ funkcija $t \mapsto h(\omega, t)$ odvedljiva.

Neenakosti (4.5) in (4.6) pa povesta, da izbrana funkcija h ustreza tudi pogoju (3)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t |h(\omega,t)| d\nu &= \int_\Omega |\partial_\zeta Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) \partial_t T_{te^{i\phi}} f + \partial_\eta Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) \partial_t T_{te^{-i\phi}} g| d\nu \\ &\leq \int_\Omega |\partial_\zeta Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g)||\partial_t T_{te^{i\phi}} f| d\nu \\ &+ \int_\Omega |\partial_\eta Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g)||\partial_t T_{te^{-i\phi}} g| d\nu \\ &< \infty.\end{aligned}$$

V zadnji oceni smo upoštevali Lemo 4.1.5 in Hölderjevo neenakost.

Posledično je $\mathcal{E}(t)$ zvezna na $(0, \infty)$. Preveriti moramo še zveznost v 0. Očitno je

$$\mathcal{E}(0) = \int_\Omega Q(f, g) d\nu.$$

Operatorska polgrupa je krepko zvezna v 0, zato je

$$\lim_{t \to 0} T_{te^{i\phi}} f = f \quad \text{in} \quad \lim_{t \to 0} T_{te^{-i\phi}} g = g.$$

Ker je funkcija Q zvezna, je posledično

$$\lim_{t \to 0} Q(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) d\nu = Q(f, g).$$

Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci je $\mathcal{E}$ zvezna v 0. Torej je tok $\mathcal{E}(t)$ regularen. Neenakost (4.4) očitno implicira pogoj (ii). $\square$

Razpišimo enakost (4.1)

$$\begin{aligned}-\mathcal{E}'(t) = 2\Re\Big(&\int_\Omega e^{i\phi} (\partial_\zeta Q)(T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) \mathcal{A} T_{te^{i\phi}} f d\nu \\ &+ \int_\Omega e^{-i\phi} (\partial_\eta Q) T_{te^{i\phi}} f, T_{te^{-i\phi}} g) \mathcal{A} T_{te^{-i\phi}} g d\nu \Big).\end{aligned}$$

Ravnokar smo dokazali naslednjo trditev.

Trditev 4.1.8. *Naj bo Q kot v Trditvi 4.1.3. Denimo, da za vsak $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_p)$ in $g \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_q)$ velja*

$$B_0 \Big| \int_\Omega \mathcal{A} f \cdot \bar{g} d\nu \Big| \leq 2\Re \int_\Omega \Big(e^{i\phi} (\partial_\zeta Q)(f, g) \mathcal{A} f + e^{-i\phi} (\partial_\eta Q)(f, g) \mathcal{A} g \Big) d\nu. \tag{4.7}$$

Tedaj velja pogoj (iii).

Preselimo se v Wieneriansko okolje.

4.2 Integracija po delih

V tem razdelku si bomo natančneje ogledali pogoj kvantitativne monotonosti v Wienerjevem kontekstu.

Naj bo $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator in ν Gaussova mera. Z $\mathbb{E}$ bomo označevali integral po Gaussovi meri. Če prepišemo neenakost (4.7) v Wienerjev jezik, vidimo, da bo kvantitativna monotonost sledila, če za vsak $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_p)$ in $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_q)$ velja

$$|\mathbb{E}(\mathcal{L}f \cdot \overline{g})| \lesssim 2\Re\mathbb{E}\Big[e^{i\phi}(\partial_\zeta Q)(f,g)\mathcal{L}f + e^{-i\phi}(\partial_\eta Q)(f,g)\mathcal{L}g\Big]. \tag{4.8}$$

Trditev 4.2.1. *Naj bo $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^+$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija z omejenimi drugimi odvodi. Naj bo $\mathbb{H}(Q)$ Hessejeva matrika funkcije Q. Denimo, da za vsak $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_p)$ in $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_q)$ velja*

$$||Df||_{\mathcal{H}^2}||Dg||_{\mathcal{H}^2} \leq \left\langle \mathbb{H}(Q)(v) \cdot \mathcal{U}_\phi \begin{bmatrix} Df \\ Dg \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Df \\ Dg \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{4.9}$$

Sledi, da za vsak $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_p)$ in $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_q)$ velja tudi neenakost (4.8)

Dokaz. Posebej obravnavamo levo in desno stran v (4.2.1).
Leva stran neenakosti 4.8: Po definiciji divergence δ lahko izračunamo

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}f \cdot \overline{g}] = \mathbb{E}[\delta Df \cdot \overline{g}] = \mathbb{E}\langle Df, D\overline{g}\rangle.$$

Po Cauchy-Schwarzevi neenakosti sledi

$$|\mathbb{E}[\mathcal{L}f \cdot \overline{g}]| \leq \mathbb{E}||Df||_{\mathcal{H}^2}||Dg||_{\mathcal{H}^2}.$$

Desna stran neenakosti 4.8: Pišimo $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ in $Df = (Df_1, Df_2)$, $Dg = (Dg_1, Dg_2)$,

$$\mathcal{O}_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{ in } \mathcal{U}_\phi = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_\phi & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_{-\phi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}. \tag{4.10}$$

Dovolj je, da si ogledamo samo prvi sumand v (4.8). Označimo $v = (f, g)$,

$$\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2, \qquad \eta = \eta_1 + i\eta_2$$

in

$$\partial_\zeta = \frac{1}{2}\Big(\partial_{\zeta_1} - i\partial_{\zeta_2}\Big), \qquad \partial_\eta = \frac{1}{2}\Big(\partial_{\eta_1} - i\partial_{\eta_2}\Big).$$

Potem je

$$2\Re\Big(e^{i\phi}(\partial_\zeta Q)(f,g)\mathcal{L}f\Big) = \Re\Big((\cos\phi + i\sin\phi)(\partial_{\zeta_1}Q - i\partial_{\zeta_2}Q)(v)(\mathcal{L}f_1 + i\mathcal{L}f_2)\Big).$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}2\Re\mathbb{E}\Big[e^{i\phi}(\partial_\zeta Q)(f,g)\mathcal{L}f\Big] &= \cos\phi\cdot\mathbb{E}[(\partial_{\zeta_1}Q)(v)\cdot\mathcal{L}f_1 + (\partial_{\zeta_2}Q)(v)\cdot\mathcal{L}f_2] \\ &\quad + \sin\phi\cdot\mathbb{E}[(\partial_{\zeta_2}Q)(v)\cdot\mathcal{L}f_1 + (\partial_{\zeta_1}Q)(v)\cdot\mathcal{L}f_2].\end{aligned}$$

Po Trditvi 3.3.23 je $(\partial_{\zeta_j}Q)(v) \in \mathbb{D}^{1,2}$ in velja

$$\begin{aligned}D(\partial_{\zeta_j}Q)(v) &= (\partial^2_{\zeta_j\zeta_1}Q)(v)\cdot Df_1 + (\partial^2_{\zeta_j\zeta_2}Q)(v)\cdot Df_2 \\ &\quad + (\partial^2_{\zeta_j\eta_1}Q)(v)\cdot Dg_1 + (\partial^2_{\zeta_j\eta_2}Q)(v)\cdot Dg_2.\end{aligned}$$

Po definiciji operatorja δ velja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\partial_{\zeta_j}Q)(v)\cdot\mathcal{L}f_k] &= \mathbb{E}\langle Df_k, D(\partial_{\zeta_j}Q)(v)\rangle \\ &= \mathbb{E}\Big[(\partial^2_{\zeta_j\zeta_1}Q)(v)\langle Df_k, Df_1\rangle_{\mathcal{H}} + (\partial^2_{\zeta_j\zeta_2}Q)(v)\langle Df_k, Df_2\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\partial^2_{\zeta_j\eta_1}Q)(v)\langle Df_k, Dg_1\rangle_{\mathcal{H}} + (\partial^2_{\zeta_j\eta_2}Q)(v)\langle Df_k, Dg_2\rangle_{\mathcal{H}}\Big].\end{aligned}$$

Ko zložimo člene v zadnjih dveh enakostih za $j = 1,2$ in $k = 1,2$ dobimo

$$\begin{aligned}&2\Re\mathbb{E}\Big[e^{i\phi}(\partial_\zeta Q)(v)\mathcal{L}f\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big\langle \begin{bmatrix}\partial^2_{\zeta_1\zeta_1}Q & \partial^2_{\zeta_2\zeta_1}Q \\ \partial^2_{\zeta_1\zeta_2}Q & \partial^2_{\zeta_2\zeta_2}Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Df_1 \\ Df_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}Df_1 \\ Df_2\end{bmatrix}\Big\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \\ &+ \mathbb{E}\Big\langle \begin{bmatrix}\partial^2_{\zeta_1\eta_1}Q & \partial^2_{\zeta_2\eta_1}Q \\ \partial^2_{\zeta_1\eta_2}Q & \partial^2_{\zeta_2\eta_2}Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Df_1 \\ Df_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}Dg_1 \\ Dg_2\end{bmatrix}\Big\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}\end{aligned}$$

Podobno lahko izračunamo

$$\begin{aligned}&2\Re\mathbb{E}\Big[e^{i\phi}(\partial_\eta Q)(v)\mathcal{L}g\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big\langle \begin{bmatrix}\partial^2_{\eta_1\zeta_1}Q & \partial^2_{\eta_2\zeta_1}Q \\ \partial^2_{\eta_1\zeta_2}Q & \partial^2_{\eta_2\zeta_2}Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Dg_1 \\ Dg_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}Df_1 \\ Df_2\end{bmatrix}\Big\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \\ &+ \mathbb{E}\Big\langle \begin{bmatrix}\partial^2_{\eta_1\eta_1}Q & \partial^2_{\eta_2\eta_1}Q \\ \partial^2_{\eta_1\eta_2}Q & \partial^2_{\eta_2\eta_2}Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Dg_1 \\ Dg_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}Dg_1 \\ Dg_2\end{bmatrix}\Big\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}\end{aligned}$$

Če zložimo zadnji dve neenakosti, dobimo

$$\begin{aligned}&2\Re\mathbb{E}\Big[e^{i\phi}(\partial_\zeta Q)(v)\mathcal{L}f + e^{-i\phi}(\partial_\eta Q)(v)\mathcal{L}g\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big\langle \mathbb{H}(Q)(v)\cdot\mathcal{U}_\phi\begin{bmatrix}Df \\ Dg\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}Df \\ Dg\end{bmatrix}\Big\rangle.\end{aligned}$$

□

Posledica 4.2.2. *Denimo, da je $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^+$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija z omejenimi drugimi odvodi. Denimo, da za skoraj vsak $\xi \in \mathbb{R}^4$ in vsak $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ velja*

$$||\omega_1||_{\mathcal{H}^2}||\omega_2||_{\mathcal{H}^2} \lesssim \langle \mathbb{H}(Q)(\xi)\cdot\mathcal{U}_\phi\begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{bmatrix}\rangle_{\mathcal{H}^4}.$$

Sledi, da za vsak $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_p)$ in $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_q)$ velja neenakost (4.8).

4.3 $\tau-$lema

Naš naslednji pripomoček je lema o kvadratnih formah, t.i. $\tau-$lema.

Izrek 4.3.1 (Dragičević, Treil, Volberg[10])**.** *Naj bodo $\sigma_0, \sigma_, \sigma_2$ nenegativne neničelne kvadratne forme na vektorskem prostoru V (realnem ali kompleksnem), da za vsak $x \in V$ velja*

$$\sigma_0[x] \geq 2\sqrt{\sigma_1[x] \cdot \sigma_2[x]}.$$

Potem obstaja konstanta $\tau > 0$, da za vsak $x \in V$ velja

$$\sigma_0[x] \geq \tau\sigma_1[x] + \frac{1}{\tau}\sigma_2[x].$$

Po neenakosti med aritmetično in geometrično sredino druga neenakost implicira prvo.

Posledica 4.3.2. *Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksen ali realen Hilbertov prostor in A, B pozitivno definitna operatorja na $\mathcal{H}$. Če za sebi adjungiran operator T na $\mathcal{H}$ velja*

$$\langle Th, h\rangle \geq 2\sqrt{\langle Ah, h\rangle\langle Bh, h\rangle}$$

za vse $h \in \mathcal{H}$. Potem obstaja $\tau > 0$, za za vse $h \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle Th, h\rangle \geq \tau\langle Ah, h\rangle + \frac{1}{\tau}\langle Bh, h\rangle.$$

Naj bodo A, B in C realne 2×2 matrike in

$$M = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Lema 4.3.3. *Neenakost*

$$\left\langle M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2} \geq 2||x||_{\mathcal{H}^2}||y||_{\mathcal{H}^2} \tag{4.11}$$

velja za vsak $x, y \in \mathcal{H}^2$ natanko tedaj, ko velja za vse $x, y \in \mathbb{R}^8$.

Dokaz. Označimo

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2, B = [b_{ij}]_{i,j=1}^2, C = [c_{ij}]_{i,j=1}^2$$

in

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{H}.$$

Potem se neenakost (4.11) prepiše v

$$\sum_{i,j=1}^{2}[a_{i,j}\langle x_i, x_j\rangle + 2b_{ij}\langle x_i, y_j\rangle + c_{ij}\langle y_i, y_j\rangle \geq 2\sqrt{||x_1||^2_{\mathcal{H}} + ||x_2||^2_{\mathcal{H}}}\sqrt{||y_1||^2_{\mathcal{H}} + ||y_2||^2_{\mathcal{H}}}. \tag{4.12}$$

Vidimo, da je neenakost (4.11) odvisna le od skalarnega produkta x in y. Naj bo $\mathcal{E} = Lin\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ in izberimo ortonormirano bazo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ za $\mathcal{E}$. Jasno je $N \leq 4$. Označimo z $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^N$ linearno preslikavo podano z $\Phi\colon \xi_j \mapsto e_j, j = 1, 2, \ldots, N$. Naj bo $u_1 = \Phi x_1, u_2 = \Phi x_2$ in $v_1 = \Phi y_1, v_2 = \Phi y_2$. Potem lahko za $i = 1, 2, \ldots, N$ in $j = 1, 2, \ldots, N$ izrazimo.

$$\langle u_i, u_j\rangle_{\mathbb{R}^N} = \sum_{k=1}^{N}\langle x_i, \xi_k\rangle_{\mathcal{H}}\langle x_j, \xi_k\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x_i, x_j\rangle = \langle x_i, x_j\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Torej je ϕ izometrija. Pišimo $u = (u_1, u_2)$ in $v = (v_1, v_2)$. Potem je

$$\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{H}^2} + 2\langle Bx, y\rangle_{\mathcal{H}^2} + \langle Cy, y\rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle Au, u\rangle_{\mathbb{R}^{2N}} + 2\langle Bu, v\rangle_{\mathbb{R}^{2N}} + \langle Cu, u\rangle_{\mathbb{R}^{2N}}$$

in

$$||x||_{\mathcal{H}^2}||y||_{\mathcal{H}^2} = ||u||_{\mathbb{R}^{2N}}||v||_{\mathbb{R}^{2N}}.$$

Od tod sledi, če neenakost (4.11) velja na $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}$ za $N \leq 4$, potem velja tudi na poljubnem $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2$. □

Lema 4.3.3 nam pove, da je veljavnost neenakosti (4.11) na $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2$ ekvivalentna njeni veljavnosti na $\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8$. Mi pa želimo nekaj več, kar nam bo dala naslednja trditev.

Trditev 4.3.4. *Denimo da velja neenakost* (4.11) *za poljubna* $x, y \in \mathbb{R}^2$. *Potem velja tudi za poljubna* $x, y \in \mathcal{H}^2$.

Dokaz. Privzemimo oznake iz dokaza Leme 4.3.3. Za $k = 1, \ldots, N$ in $j = 1, 2$ označimo še $u_j^{(k)} = \langle x_j, \xi_k\rangle \in \mathbb{R}$, $u^{(k)} = (u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ in $u_j = (u_j^{(1)}, \ldots, u_j^{(N)}) \in \mathbb{R}^N$ Podobno naj bo za $k = 1, \ldots, N$ in $j = 1, 2$ $v_j^{(k)} = \langle y_j, \xi_k\rangle \in \mathbb{R}$, $v^{(k)} = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)})$ in $v_j = (v_j^{(1)}, \ldots, v_j^{(N)}) \in \mathbb{R}^N$. V Posledici 4.3.2 si izberimo

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2. \end{bmatrix}$$

Po predpostavki za vsak $h \in \mathbb{R}^4$ velja

$$\langle Mh, h\rangle_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \geq 2||Ah||_{\mathbb{R}^2}\ ||Bh||_{\mathbb{R}^2}.$$

Zato po Posledici 4.3.2 obstaja $\tau > 0$, s pomočjo katerega lahko naredimo oceno

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{2} [a_{ij}\langle x_i, x_j\rangle_{\mathcal{H}} + 2b_{ij}\langle x_i, y_j\rangle_{\mathcal{H}} + c_{ij}\langle y_i, y_j\rangle_{\mathcal{H}}] \\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^{2} [a_{ij}\langle u_i, u_j\rangle_{\mathbb{R}^N} + 2b_{ij}\langle u_i, v_j\rangle_{\mathbb{R}^N} + c_{ij}\langle v_i, v_j\rangle_{\mathbb{R}^N}] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{2} \left[a_{ij}u_i^{(k)}u_j^{(k)} + 2b_{ij}u_i^{(k)}v_j^{(k)} + c_{ij}v_i^{(k)}v_j^{(k)}\right] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{N} \left\langle M\begin{bmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^4} \\
&\qquad \geq \sum_{k=1}^{N} \left(\tau ||u^{(k)}||^2_{\mathbb{R}^2} + \frac{1}{\tau}||v^{(k)}||^2_{\mathbb{R}^2}\right) \\
&\qquad \geq 2||u||_{\mathbb{R}^{2N}}||v||_{\mathbb{R}^{2N}} \\
&\qquad = 2||x||_{\mathcal{H}^2}||y||_{\mathcal{H}^2}.
\end{aligned}$$

□

Posledica 4.3.5. *V Posledici 4.2.2 lahko izberemo $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.*

4.4 Povzetek

Na poti k dokazu bilinearnega vložitvenega izreka smo naredili več redukcij. Dokazano strnimo v trditev.

Trditev 4.4.1. *Naj bo $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^+$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija z omejenimi drugimi odvodi, ki za vsak $p > 2$ in vsak $\phi \in (-\phi_p, \phi_p)$, ustreza naslednjim pogojem*

(1) za poljubna $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$ velja $0 \leq Q(\zeta, \eta) \lesssim_{p,\phi} |\zeta|^p + |\eta|^q$,

(2) za poljubna $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$ velja $|(\partial_\zeta Q)(\zeta, \eta)| \lesssim |\zeta|^{p-1} + |\eta|$ in $|(\partial_\eta Q)(\zeta, \eta)| \lesssim |\eta|^{p-1} + |\zeta|$,

(3) za skoraj vsak $\xi \in \mathbb{R}^4$ in vse $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ velja

$$\left\langle \mathbb{H}(Q)(\xi) \cdot \mathcal{U}_\phi \omega, \omega \right\rangle_{\mathbb{R}^4} \gtrsim |\omega_1|\ |\omega_2|.$$

Tedaj za funkcijo Q velja neenakost (4.9), od koder sledi bilinearni vložitveni izrek v primeru neskončno razsežnega Ornstein-Uhlenbeckovega operatorja.

4.5 Nazarov-Treilova funkcija

V tem razdelku bomo poiskali funkcijo, ki ustreza pogojem (i) in (ii) in (iii) za uporabo metode toplotnega toka. Za celotno poglavje izberimo $p \in (2, \infty)$ in $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Naj bo

$$\delta = \delta(p, \varepsilon) = \frac{\varepsilon q(q-1)}{256}.$$

Definicija 4.5.1. *Nazarov-Treilova funkcija* $Q\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ je podana z

$$Q(\zeta, \eta) = |\zeta|^p + |\eta|^q + \delta \begin{cases} |\zeta|^2 |\eta|^{2-q}, & |\zeta|^p \le |\eta|^q \\ \frac{2}{p}|\zeta|^p + \left(\frac{2}{q} - 1\right)|\eta|^q, & |\zeta|^p \ge |\eta|^q. \end{cases}$$

Funkcijo Q sta vpeljala F. Nazarov in S. Treil [26]. Kasneje sta jo za specifične variante toplotnega toka uporabila O. Dragičević in A. Volberg [11], [12]. Mi bomo v dokazu potrebovali poseben primer dvorazsežne funkcije, s to razliko, da bomo uvedli dodaten parameter, ε.

Konstrukcija prvotne Nazarov-Treilove funkcije [26] je bil eden prvih primerov funkcije in uporabe tako imenovane *tehnike Bellmanove funkcije*. V harmonično analizo so jo vpeljali Nazarov, Treil in Volberg [27]. Ta tehnika se je do sedaj uporabljala predvsem v evklidski harmonični analizi.

V nadaljevanju bomo potrebovali prve in druge odvode funkcije Q. Zato bomo le-te izračunali. Upoštevali bomo identifikaciji $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ in $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$.
1. **primer:**$|\zeta|^p \le |\eta|^q$. Funkcija Q je podana z

$$Q(\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2) = \left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{q}{2}} + \delta(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \cdot \left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{2-q}{2}}. \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\zeta_1}(\zeta, \eta) &= p\zeta_1\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}} + 2\delta\zeta_1\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{2-q}{2}}, \\
Q_{\zeta_2}(\zeta, \eta) &= p\zeta_2\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}} + 2\delta\zeta_2\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{2-q}{2}}, \\
Q_{\eta_1}(\zeta, \eta) &= q\eta_1\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{q-2}{2}} + \delta(2-q)\eta_1(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{-\frac{q}{2}}, \\
Q_{\eta_2}(\zeta, \eta) &= q\eta_2\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{q-2}{2}} + \delta(2-q)\eta_2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{-\frac{q}{2}} \\
Q_{\zeta_1\zeta_1}(\zeta, \eta) &= p\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}} + p(p-2)\zeta_1^2\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p-4}{2}} + 2\delta\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{2-q}{2}}, \\
Q_{\zeta_1\zeta_2}(\zeta, \eta) &= p(p-2)\zeta_1\zeta_2\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p-4}{2}}, \\
Q_{\zeta_2\zeta_2}(\zeta, \eta) &= p\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}} + p(p-2)\zeta_2^2\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)^{\frac{p-4}{2}} + 2\delta\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{2-q}{2}}, \\
Q_{\eta_1\eta_1}(\zeta, \eta) &= q\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{q-2}{2}} + q(q-2)\eta_1^2\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right)^{\frac{q-4}{2}} \\
&\quad + \delta(2-q)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{-\frac{q}{2}} - \delta(2-q)q\eta_1^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{-q-2}{2}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{\eta_1,\eta_2}(\zeta,\eta) &= q(q-2)\eta_1\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-4}{2}} - q\delta(2-q)\eta_1\eta_2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{-q-2}{2}},\\
Q_{\eta_2\eta_2}(\zeta,\eta) &= q\Big(\eta_1^2+\eta_2^2\Big)^{\frac{q-2}{2}} + q(q-2)\eta_2^2\Big(\eta_1^2+\eta_2^2\Big)^{\frac{q-4}{2}}\\
&\quad + \delta(2-q)(\zeta_1^2+\zeta_2^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{q}{2}} - \delta(2-q)q\eta_2^2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{-q-2}{2}},\\
Q_{\eta_1,\zeta_1}(\zeta,\eta) &= 2\delta\zeta_1\eta_1(2-q)\Big(\eta_1^2+\eta_2^2\Big)^{-\frac{q}{2}},\\
Q_{\eta_1,\zeta_2}(\zeta,\eta) &= 2\delta\zeta_2\eta_1(2-q)\Big(\eta_1^2+\eta_2^2\Big)^{-\frac{q}{2}},\\
Q_{\eta_2,\zeta_1}(\zeta,\eta) &= 2\delta\zeta_1\eta_2(2-q)\Big(\eta_1^2+\eta_2^2\Big)^{-\frac{q}{2}},\\
Q_{\eta_2,\zeta_2}(\zeta,\eta) &= 2\delta\zeta_2\eta_2(2-q)\Big(\eta_1^2+\eta_2^2\Big)^{-\frac{q}{2}}.
\end{aligned}
$$

2. **primer:**$|\zeta|^p \geq |\eta|^q$. Tedaj je

$$
Q(\zeta_1,\zeta_2,\eta_1,\eta_2) = (1+\frac{2\delta}{p})\Big(\zeta_1^2+\zeta_2^2\Big)^{\frac{p}{2}} + (1+\delta(\frac{2}{q}-1))\Big(\eta_1^2+\eta_2^2\Big)^{\frac{q}{2}}. \tag{4.14}
$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
Q_{\zeta_1}(\zeta,\eta) &= (p+2\delta)\zeta_1(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^{\frac{p-2}{2}},\\
Q_{\zeta_2}(\zeta,\eta) &= (p+2\delta)\zeta_2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^{\frac{p-2}{2}},\\
Q_{\eta_1}(\zeta,\eta) &= q(1+\delta(\frac{2}{q}-1))\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-2}{2}},\\
Q_{\eta_2}(\zeta,\eta) &= q(1+\delta(\frac{2}{q}-1))\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-2}{2}},\\
Q_{\zeta_1\zeta_1}(\zeta,\eta) &= (p+2\delta)(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^{\frac{p-2}{2}} + (p+2\delta)(p-2)\zeta_1^2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^{\frac{p-4}{2}},\\
Q_{\zeta_2\zeta_2}(\zeta,\eta) &= (p+2\delta)(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^{\frac{p-2}{2}} + (p+2\delta)(p-2)\zeta_2^2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^{\frac{p-4}{2}},\\
Q_{\zeta_1\zeta_2}(\zeta,\eta) &= (p+2\delta)(p-2)\zeta_1\zeta_2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^{\frac{p-4}{2}},\\
Q_{\eta_1\eta_2}(\zeta,\eta) &= q(q-2)(1+\delta(\frac{2}{q}-1))\eta_1\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-2}{2}},\\
Q_{\eta_1\eta_1}(\zeta,\eta) &= q(q-2)(1+\delta(\frac{2}{q}-1))\eta_1^2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-4}{2}} + q(1+\delta(\frac{2}{q}-1))(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-2}{2}},\\
Q_{\eta_2\eta_2}(\zeta,\eta) &= q(q-2)(1+\delta(\frac{2}{q}-1))\eta_2^2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-4}{2}} + q(1+\delta(\frac{2}{q}-1))(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{q-2}{2}},\\
Q_{\eta_1\zeta_1}(\zeta,\eta) &= Q_{\eta_1,\zeta_2}(\zeta,\eta) = Q_{\eta_2,\zeta_1}(\zeta,\eta) = Q_{\eta_2,\zeta_2}(\zeta,\eta) = 0.
\end{aligned}
$$

Trditev 4.5.2. *Funkcija Q je zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}^4$ in dvakrat zvezno odvedljiva na komplementu množice $Y_0 = \{(\zeta,\eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : (\eta = 0)$ ali $(|\zeta|^p = |\eta|^q)\}$. Za vsak*

$(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *velja*

$$\begin{aligned} 0 \le Q(\zeta, \eta) &\le (1+\delta)(|\zeta|^p + |\eta|^q), \\ 2|(\partial_\zeta Q)(\zeta, \eta)| &\le (p + 2\delta) \max\{|\zeta|^{p-1}, |\eta|\}, \\ 2|(\partial_\eta Q)(\zeta, \eta)| &\le (q + (2-q)\delta)|\eta|^{q-1}. \end{aligned}$$

Dokaz. Predpisa (4.13) in (4.14) ter njuni prvi odvodi se ujemajo na preseku $\{(\zeta, \eta) : |\zeta|^p = |\eta|^q\}$. Ker sta predpisa zvezno odvedljiva, je funkcija Q zvezno odvedljiva. Drugi odvodi funkcije Q so zvezni povsod, razen na $\{(\zeta, \eta) : |\zeta|^p = |\eta|^q\}$, kjer se funkcijska predpisa drugih odvodov ne ujemata, in na $\{(\zeta, \eta) : \eta = 0\}$.

Za $|\zeta|^p \le |\eta|^q$ lahko ocenimo (4.13)

$$0 \le Q(\zeta, \eta) \le |\zeta|^p + |\eta|^q + \delta|\eta|^q \le (1+\delta)(|\zeta|^p + |\eta|^q).$$

Za $|\zeta|^p \ge |\eta|^q$ podobno ocenimo še (4.14)

$$0 \le Q(\zeta, \eta) \le (1+\frac{2\delta}{p})|\zeta|^p + (1+\delta(\frac{2}{q}-1))|\eta|^q \le (1+\delta)|\zeta|^p + |\eta|^q \le (1+\delta)(|\zeta|^p + |\eta|^q).$$

Ocenimo še odvode. Za $|\zeta|^p \le |\eta|^q$ velja

$$\begin{aligned} 2|(\partial_\zeta Q)(\zeta, \eta)| &= |Q_{\zeta_1}(\zeta, \eta) - iQ_{\zeta_2}(\zeta, \eta)| \\ &= \left| p(\zeta_1 - i\zeta_2)|\zeta|^{p-2} + 2\delta(\zeta_1 - i\zeta_2)|\eta|^{2-q} \right| \\ &\le p|\zeta|^{p-1} + 2\delta|\zeta||\eta|^{2-q} \\ &\le p|\eta|^{\frac{p-1}{p}q} + 2\delta|\eta|^{\frac{q}{p}+2-1} \\ &= (p + 2\delta)|\eta|. \end{aligned}$$

Za $|\zeta|^p \ge |\eta|^q$ velja

$$\begin{aligned} 2|(\partial_\zeta Q)(\zeta, \eta)| &= |Q_{\zeta_1}(\zeta, \eta) - iQ_{\zeta_2}(\zeta, \eta)| \\ &= (p + 2\delta)|\zeta_1 - i\zeta_2||\zeta|^{p-2} \\ &\le (p + 2\delta)|\zeta|^{p-1}. \end{aligned}$$

Za $|\zeta|^p \le |\eta|^q$ ocenimo

$$\begin{aligned} 2|Q_\eta(\zeta, \eta)| &= |Q_{\eta_1}(\zeta, \eta) - iQ_{\eta_2}(\zeta, \eta)| \\ &= |q\eta_1|\eta|^{q-2} + \delta(2-q)\eta_1|\zeta|^2|\eta|^{-q} - i(q\eta_2|\eta|^{q-2} + \delta(2-q)\eta_2|\zeta|^2|\eta|^{-q})| \\ &\le q|\eta|^{q-1} + \delta(2-q)|\eta||\zeta|^2|\eta|^{-q} \\ &\le q|\eta|^{q-1} + \delta(2-q)|\eta|^{\frac{2q}{p}-q+1} \\ &= (q + \delta(q-2))|\eta|^{q-1}. \end{aligned}$$

Za $|\zeta|^p \ge |\eta|^q$ pa velja

$$\begin{aligned} 2|Q_\eta(\zeta, \eta)| &= |Q_{\eta_1}(\zeta, \eta) - iQ_{\eta_2}(\zeta, \eta)| \\ &= (q + \delta(2-q))|\eta_1|\eta|^{q-2} - i\eta_2|\eta|^{q-2}| \\ &\le (q + \delta(2-q))|\eta|^{q-1}. \end{aligned}$$

□

4.6 Ocena kvadratne forme Nazarov-Treilove funkcije

Naj bo $B\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{M,M}$ realna matrična funkcija. Za $\xi \in \mathbb{R}^n$ in $\omega \in \mathbb{R}^M$ uvedimo oznako

$$B[\xi;\omega] = \langle B(\xi)\omega, \omega\rangle_{\mathbb{R}^4}.$$

Matriki $\mathcal{O}_\phi$ in $\mathcal{U}_\phi$ naj bosta kot v (4.10). Označimo z $\mathcal{R}_\phi(Q)$ simetrizacijo matrike $\mathbb{H}(Q)\mathcal{U}_\phi$

$$\mathcal{R}_\phi(Q) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{U}_\phi^T \mathbb{H}(Q) + \mathbb{H}(Q)\mathcal{U}_\phi\Big).$$

Za $\xi \in \mathbb{R}^4$ velja $\mathbb{H}(Q) = \mathbb{H}(Q)^*$, zato lahko opazimo

$$\mathcal{R}_\phi(Q)[\xi;\omega] = \langle \mathbb{H}(Q)(\xi)\cdot \mathcal{U}_\phi\omega, \omega\rangle = \langle \mathbb{H}(Q)(\xi)(\omega), \mathcal{U}_\phi\omega\rangle.$$

Naslednja ocena je eden glavnih rezultatov, ki jih bomo potrebovali.

Izrek 4.6.1. *Za vsak $\phi \in [-\phi_{p_\varepsilon}, \phi_{p_\varepsilon}]$, vse $\xi \in (\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)\backslash Y_0$ in $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ velja neenakost*

$$\mathcal{R}_\phi(Q)[\xi;\omega] \geq 16\delta\cos\phi|\omega_1|\ |\omega_2|. \tag{4.15}$$

Vseskozi bo $p > 2$ in $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Število q je podano preko zveze $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Naj bosta števili $p_\varepsilon, q_\varepsilon$ podani z zvezo (2.14).

Uvedimo matrike $\mathbb{H}_i, i = 1,2,3$ ter matrike $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ in $\mathcal{J}$

$$\mathbb{H}(Q) = \begin{bmatrix} \mathbb{H}_1(Q) & \mathbb{H}_2(Q) \\ \mathbb{H}_2^T(Q) & \mathbb{H}_3(Q)\end{bmatrix} \qquad \mathcal{J}(Q) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(Q) & \mathcal{J}_2(Q) \\ \mathcal{J}_2^T(Q) & -\mathcal{J}_3(Q)\end{bmatrix}.$$

Matrike $\mathcal{J}_i, i = 1,2,3$ so 2×2 realne matrike oblike

$$\mathcal{J}_1(Q) = \begin{bmatrix} \partial^2_{\zeta_1\zeta_2}Q & \frac{1}{2}(\partial^2_{\zeta_2\zeta_2}Q - \partial^2_{\zeta_1\zeta_1}Q) \\ \frac{1}{2}(\partial^2_{\zeta_2\zeta_2}Q - \partial^2_{\zeta_1\zeta_1}Q) & -\partial^2_{\zeta_1\zeta_2}Q \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_3(Q) = \begin{bmatrix} \partial^2_{\eta_1\eta_2}Q & \frac{1}{2}(\partial^2_{\eta_2\eta_2}Q - \partial^2_{\eta_1\eta_1}Q) \\ \frac{1}{2}(\partial^2_{\eta_2\eta_2}Q - \partial^2_{\eta_1\eta_1}Q) & -\partial^2_{\eta_1\eta_2}Q \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_2(Q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial^2_{\zeta_2\eta_1}Q - \partial^2_{\zeta_1\eta_2}Q & \partial^2_{\zeta_1\eta_1}Q + \partial^2_{\zeta_2\eta_2}Q \\ -\partial^2_{\zeta_1\eta_1}Q - \partial^2_{\zeta_2\eta_2}Q & \partial^2_{\zeta_2\eta_1}Q - \partial^2_{\zeta_1\eta_2}Q \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Po kratkem računu sledi

$$\mathcal{R}_\phi(Q) = \cos\phi\cdot\mathcal{H}(Q) + \sin\phi\mathcal{J}(Q).$$

4.6.1 Dokaz Izreka 4.6.1

Izrek 4.6.1 bomo dokazali v več korakih. Naj bo $\zeta \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \setminus Y_0$ in $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Potem je

$$\frac{1}{\cos\phi}\mathcal{R}_\phi(Q)[\zeta;\omega] = \langle(\mathcal{H}_1(Q + \tan\phi \cdot \mathcal{J}_1(Q))(\zeta)\omega_1, \omega_1\rangle_{\mathbb{R}^2} \tag{4.17}$$

$$+ 2\langle\mathcal{H}_2(Q) + \tan\phi \cdot \mathcal{J}_2(Q))(\zeta)\omega_1, \omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \tag{4.18}$$

$$+ \langle(\mathcal{H}_3(Q) - \tan\phi \cdot \mathcal{J}_3(Q))(\zeta)\omega_2, \omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}. \tag{4.19}$$

Območje $\xi \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \setminus Y_0$ bomo razdelili na dva dela

$$\Omega_d = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\zeta|^p > |\eta|^q > 0\},$$
$$\Omega_s = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\zeta|^p < |\eta|^q\}.$$

Za vsako območje posebej bomo ocenili (4.17), (4.18) in (4.19). Izrek 4.6.1 bo sledil tako, da bomo sešteli ocene za vsak člen posebej.

Potrebovali bomo pomožen rezultat, do katerega je prišel Bakry [1]. Naj bo $k \in \mathbb{R}$ in $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Označimo

$$L_k(v) = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_2^2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} v_1 v_2 & \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \\ \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) & -v_1 v_2 \end{bmatrix}.$$

Naj bo I_2 identiteta na $\mathbb{R}^2$. Za $s \in \mathbb{R}$ in $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uvedimo

$$\mathcal{D}_{s,k}(v) = I_2 + (s-2)L_k(\frac{v}{|v|}).$$

Lema 4.6.2. *Za poljuben $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in $p > 1$ matrika $\mathcal{D}_{p,k}$ inducira pozitivno semi-definitno kvadratno formo na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ natanko tedaj, ko je $|k| \le \tan\phi_p$.*

Dokaz. Sled matrike je

$$\operatorname{tr}\mathcal{D}_{p,k}(v) = p > 0.$$

Determinanta

$$\det\mathcal{D}_{p,k}(v) = (p-1) - \frac{k^2}{4}(p-2)^2$$

je neenegativna natanko tedaj, ko je

$$2\frac{\sqrt{p-1}}{p-2} \ge |k|.$$

Zadnje je ekvivalentno pogoju $|k| \le \tan\phi_p$. □

Trditev 4.6.3. *Za vsak $\zeta \in \Omega_d, \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\phi \in [-\phi_{p_\varepsilon}, \phi_{p_\varepsilon}]$ velja ocena*

$$\mathcal{R}_\phi(Q)[\zeta;\omega] \ge 2q\varepsilon\cos\phi|\omega_1||\omega_2|. \tag{4.20}$$

Dokaz. Iz enakosti (4.16) vidimo, da na območju Ω_g velja $\mathcal{J}_2(Q) = 0$. Opazimo lahko, da je na območju Ω_g

$$\mathbb{H}_2(Q) = \mathcal{J}_2(Q) = 0. \tag{4.21}$$

Izračunamo lahko še

$$\mathbb{H}_1(Q)(\zeta) = (p+2\delta)\begin{bmatrix} |\zeta|^{p-2} + (p-2)|\zeta|^{p-4}\zeta_1^2 & (p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{p-4} \\ (p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{p-4} & |\zeta|^{p-2} + (p-2)\zeta_2^2|\zeta|^{p-4} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{J}_1(Q) = (p+2\delta)\begin{bmatrix} (p-2)|\zeta|^{p-4}\zeta_1\zeta_2 & \frac{1}{2}|\zeta|^{p-4}(p-2)(\zeta_2^2-\zeta_1^2) \\ \frac{1}{2}|\zeta|^{p-4}(p-2)(\zeta_2^2-\zeta_1^2) & -(p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{p-4}. \end{bmatrix}$$

Sledi

$$\begin{aligned}(\mathbb{H}_1(Q) + \tan\phi\cdot\mathcal{J}_1(Q)) &= (p+2\delta)|\zeta|^{p-2}\Bigg(\begin{bmatrix} 1+(p-2)|\zeta|^{-2}\zeta_1^2 & \zeta_1\zeta_2(p-2)|\zeta|^{-2} \\ (p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{-2} & 1+(p-2)\zeta_2^2|\zeta|^{-2} \end{bmatrix} \\
&+ \tan\phi \begin{bmatrix} (p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{-2} & \frac{1}{2}(p-2)(\zeta_2^2-\zeta_1^2)|\zeta|^{-2} \\ \frac{1}{2}(p-2)(\zeta_2^2-\zeta_1^2)|\zeta|^{-2} & -(p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{-2}. \end{bmatrix}\Bigg) \\
&= (p+2\delta)|\zeta|^{p-2}\Bigg(I_2 + (p-2)\Bigg\{\frac{1}{|\zeta|^2}\begin{bmatrix} \zeta_1^2 & \zeta_1\zeta_2 \\ \zeta_1\zeta_2 & \zeta_2^2 \end{bmatrix} \\
&+ \tan\phi\frac{1}{|\zeta|^2}\begin{bmatrix} \zeta_1\zeta_2 & \frac{1}{2}(\zeta_2^2-\zeta_1^2) \\ \frac{1}{2}(\zeta_2^2-\zeta_1^2) & -\zeta_1\zeta_2 \end{bmatrix}\Bigg\}\Bigg) \\
&= (p+2\delta)|\zeta|^{p-2}\mathcal{D}_{p,\tan\phi}(\zeta) \\
&= (p+2\delta)|\zeta|^{p-2}(\varepsilon I_2 + (1-\varepsilon)\mathcal{D}_{p_\varepsilon,\tan\phi}(\zeta)).\end{aligned}$$

Podobno lahko vidimo, da je

$$\mathbb{H}_3(Q) = (q+(2-q)\delta)\begin{bmatrix} (q-2)\eta_1^2|\eta|^{q-4} + |\eta|^{q-2} & (q-2)\eta_1\eta_2|\eta|^{q-2} \\ (q-2)\eta_1\eta_2|\eta|^{q-2} & (q-2)\eta_2^2|\eta|^{q-4} + |\eta|^{q-2} \end{bmatrix}$$

in

$$\mathcal{J}_3(Q) = (q+(2-q)\delta)\begin{bmatrix} (q-2)\eta_1\eta_2|\eta|^{q-2} & \frac{1}{2}(q-2)|\eta|^{q-4}(\eta_2^2-\eta_1^2) \\ \frac{1}{2}(q-2)|\eta|^{q-4}(\eta_2^2-\eta_1^2) & -(q-2)\eta_1\eta_2|\eta|^{q-2}. \end{bmatrix}$$

Sledi

$$\begin{aligned}(\mathbb{H}_3(Q) + \tan\phi\cdot\mathcal{J}_3(Q))(\zeta,\eta) &= (q+(2-q)\delta)|\eta|^{q-2}\mathcal{D}_{q,-\tan\phi}(\eta) \\
&= (q+(2-q)\delta)|\eta|^{q-2}(\varepsilon(q-1)I_2 \\
&+ [1-\varepsilon(q-1)]\mathcal{D}_{q_\varepsilon,-\tan\phi}(\eta)).\end{aligned}$$

Po predpostavki je $|\tan\phi| \leq \tan\phi_{p_\varepsilon} = \tan\phi_{q_\varepsilon}$. Zato sta po Lemi 4.6.2 kvadratni formi $\mathcal{D}_{p_\varepsilon,\tan\phi}(\zeta)$ in $\mathcal{D}_{p_\varepsilon,-\tan\phi}(\eta)$ pozitivno semi-definitni. Ker je $\delta \geq 0$ lahko potem ocenimo

$$(\mathbb{H}_1(Q) + \tan\phi\cdot\mathcal{J}_1(Q))(\zeta,\eta) \geq \varepsilon(p+2\delta)|\zeta|^{p-2}I_2 \geq \varepsilon p|\zeta|^{p-2}I_2 \tag{4.22}$$

in

$$(\mathbb{H}_3(Q) - \tan\phi \cdot \mathcal{J}_3(Q))(\zeta, \eta) \geq \varepsilon(q-1)(q+(2-q)\delta)|\eta|^{q-2} I_2 \geq \varepsilon(q-1)q|\eta|^{q-2} I_2. \tag{4.23}$$

Če steštejemo ocene (4.21), (4.22) in (4.23) za (4.17), (4.18) in (4.19), sledi

$$\mathcal{R}_\phi(Q)[\xi;\omega] \geq \cos\phi(\varepsilon p|\zeta|^{p-2}|\omega_1|^2 + \varepsilon q(q-1)|\eta|^{q-2}|\omega_2|^2).$$

Ker na Ω_g velja $|\eta|^{q-2} > |\zeta|^{2-p}$, po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino sledi

$$\cos\phi(\varepsilon p|\zeta|^{p-2}|\omega_1|^2 + \varepsilon q(q-1)|\eta|^{q-2}|\omega_2|^2) \geq 2q\varepsilon\cos\phi|\omega_1|\ |\omega_2|. \qquad \square$$

Lema 4.6.4. *Naj bodo $\xi = (\zeta, \eta) \in \Omega_s, \omega_1 \in \mathbb{R}^2$ in $k \in [-\tan\phi_p, \tan\phi_p]$. Potem je*

$$\langle(\mathbb{H}_1(Q) + k \cdot \mathcal{J}_1(Q))(\xi)\omega_1, \omega_1\rangle_{\mathbb{R}^2} \geq 2\delta|\eta|^{2-q}|\omega_1|^2. \tag{4.24}$$

Dokaz. Izračunamo lahko

$$\mathbb{H}_1(G) = \begin{bmatrix} p|\zeta|^{p-2} + p(p-2)\zeta_1^2|\zeta|^{p-4} & p(p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{p-4} \\ p(p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{p-4} & p|\zeta|^{p-2} + p(p-2)\zeta_2^2|\zeta|^{p-4} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{J}_1(G) = \begin{bmatrix} p(p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{p-4} & \frac{1}{2}p(p-2)|\zeta|^{p-4}(\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \\ \frac{1}{2}p(p-2)|\zeta|^{p-4}(\zeta_2^2 - \zeta_1^2) & -p(p-2)\zeta_1\zeta_2|\zeta|^{p-4} \end{bmatrix}$$

Po kratkem računu sledi

$$(\mathbb{H}_1(G) + k \cdot \mathcal{J}_1(G))(\zeta, \eta) = p|\zeta|^{p-2}\mathcal{D}_{p,k}(\zeta). \tag{4.25}$$

Hitro vidimo, da je

$$\mathbb{H}_1(H)(\zeta, \eta) = 2|\eta|^{2-q} I_2 \qquad \text{in} \qquad \mathcal{J}_1(H)(\zeta, \eta) = 0.$$

Po Lemi 4.6.2 je matrika $\mathcal{D}_{p,k}(\zeta)$ pozitivno semi-definitna. Sledi

$$\langle(\mathbb{H}_1(Q) + k \cdot \mathcal{J}_1(Q))(\xi)\omega_1, \omega_1\rangle_{\mathbb{R}^2} \geq \langle(\delta\mathbb{H}_1(H)(\xi)\omega_1, \omega_1\rangle_{\mathbb{R}^2} = 2\delta|\eta|^{2-q}|\omega_1|^2 \qquad \square$$

Lema 4.6.5. *Za poljubne $\xi \in \Omega_s, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^2$ in $k \in [-\tan\phi_p, \tan\phi_p]$ velja*

$$\langle(\mathbb{H}_2(Q) + k \cdot \mathcal{J}_2(Q))(\xi)\omega_1, \omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \geq -8\delta|\omega_1||\omega_2|. \tag{4.26}$$

Dokaz. Opazimo, da velja

$$\mathbb{H}_2(Q) + k\mathcal{J}_2(Q) = \delta(\mathbb{H}_2(H) + k \cdot \mathcal{J}_2(H)). \tag{4.27}$$

in

$$(\partial^2_{\zeta_i\eta_j} H)(\zeta,\eta) = 2(2-q)\zeta_i\eta_j|\eta|^{-q}.$$

Na Ω_s je $|\zeta|\ |\eta|^{1-q} < 1$. Sledi, da so na Ω_s absolutne vrednosti elementov matrik $\mathbb{H}_2(H)$ in $\mathcal{J}_2(H)$ enakomerno omejene z $2(2-q)$. Posledično lahko ocenimo

$$\langle(\mathbb{H}_2(Q) + k\cdot\mathcal{J}_2(Q))(\xi)\omega_1,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \geq -4\delta(2-q)(1+|k|)|\omega_1||\omega_2|.$$

Ker je $k \in [-\tan\phi_p, \tan\phi_p]$, dobimo

$$(2-q)(1+|k|) \leq (2-q)(1+\tan\phi_p) = 2-q+\frac{2}{\sqrt{p-1}} < 2,$$

od koder sledi lema. □

Označimo

$$A = \frac{256}{q} \qquad \text{in} \qquad \delta = \frac{\varepsilon(q-1)}{A}.$$

Lema 4.6.6. *Za poljubne $\xi = (\zeta,\eta) \in \Omega_s$ in $k \in [-\tan\phi_{p_\varepsilon}, \tan\phi_{p_\varepsilon}]$ velja*

$$\langle(\mathbb{H}_3(Q) - k\cdot\mathcal{J}_3(Q))(\xi)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \geq q\delta(A-1)|\eta|^{q-2}|\omega_2|^2. \tag{4.28}$$

Dokaz. Podobno kot enakost (4.25) izpeljemo

$$(\mathbb{H}_3(G) - k\cdot\mathcal{J}_3(G))(\zeta,\eta) = q|\eta|^{q-2}\mathcal{D}_{q,-k}(\eta). \tag{4.29}$$

Z odvajanjem izračunamo

$$\mathbb{H}_3(H) = \begin{bmatrix} (2-q)|\zeta|^2|\eta|^{-q}\Big(1-q\frac{\eta_1^2}{|\eta|^2}\Big) & (\partial^2_{\eta_1\eta_2}H)(\zeta,\eta)q|\zeta|^2|\eta|^{-q}(q-2)\frac{\eta_1\eta_2}{|\eta|^2} \\ (\partial^2_{\eta_1\eta_2}H)(\zeta,\eta)q|\zeta|^2|\eta|^{-q}(q-2)\frac{\eta_1\eta_2}{|\eta|^2} & (2-q)|\zeta|^2|\eta|^{-q}\Big(1-q\frac{\eta_2^2}{|\eta|^2}\Big) \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

in

$$\mathcal{J}_3(H) = \begin{bmatrix} q|\zeta|^2|\eta|^{-q}(q-2)\frac{\eta_1\eta_2}{|\eta|^2} & \frac{1}{2}(2-q)q|\zeta|^2|\eta|^{-q-2}(\eta_1^2-\eta_2^2) \\ \frac{1}{2}(2-q)q|\zeta|^2|\eta|^{-q-2}(\eta_1^2-\eta_2^2) & -q|\zeta|^2|\eta|^{-q}(q-2)\frac{\eta_1\eta_2}{|\eta|^2} \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Sledi

$$(\mathbb{H}_3(H) - k\cdot\mathcal{J}_3(H)) = (2-q)|\zeta|^2|\eta|^{-q}\Big(I_2 - qL_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})\Big) = (2-q)|\zeta|^2|\eta|^{-q}\mathcal{D}_{2-q,-k}(\eta). \tag{4.32}$$

Matrika $\mathcal{D}_{2-q,-k}(\eta)$ ni nujno pozitivno semi-definitna, zato ločimo dva primera.
1. primer: Denimo, da je za vsak $\omega_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\langle\mathbb{H}_3(H) - k\cdot\mathcal{J}_3(H))(\zeta,\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \geq 0. \tag{4.33}$$

Po definiciji q_ε lahko izrazimo

$$1 - A\delta = \frac{2-q}{2-q_\varepsilon}.$$

Najprej uporabimo neenakost (4.33), nato pa (4.30) in dobimo

$$\begin{aligned}
&\langle(\mathbb{H}_3(Q) - k\cdot\mathcal{J}_3(Q))(\zeta,\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&\geq \langle(\mathbb{H}_3(G) - k\cdot\mathcal{J}_3(G))(\zeta,\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle\mathcal{D}_{q,-k}(\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle I_2 + (q-2)L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle I_2 + (1-A\delta)(2-q_\varepsilon)L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle A\delta I_2 + (1-A\delta)\mathcal{D}_{q_\varepsilon,-k})\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= qA\delta|\eta|^{q-2}|\omega_2|^2 + (1-A\delta)q|\eta|^{q-2}\langle\mathcal{D}_{q_\varepsilon,-k}(\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}.
\end{aligned}$$

Ker je $|k| \leq \tan\phi_{p_\varepsilon} = \tan\phi_{q_\varepsilon}$ je drugi sumand na desni po Lemi 4.6.2 nenegativen. Od tod, v tem primeru, sledi trditev leme.

2. primer: Denimo, da je

$$\langle(\mathbb{H}_3(H) - k\cdot\mathcal{J}_3(H))(\zeta,\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \leq 0.$$

Na Ω_s velja $|\zeta|^2 < |\eta|^{2q-2}$. Z upoštevanjem enakosti (4.32) lahko ocenimo

$$\langle(\mathbb{H}_3(H) - k\mathcal{J}_3(H))(\zeta,\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \geq (2-q)|\eta|^{q-2}\langle(I_2 - qL_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|}))\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \tag{4.34}$$

$$\geq -q(2-q)|\eta|^{q-2}\langle L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}. \tag{4.35}$$

Ker je $Q = G + \delta H$, po enakosti (4.32) in neenakosti (4.34) velja

$$\begin{aligned}
&\langle(\mathbb{H}_3(Q) - k\cdot\mathcal{J}_3(Q))(\zeta,\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= \langle(\mathbb{H}_3(G) - k\mathcal{J}_3(G)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} + \delta\langle(\mathbb{H}_3(H) - k\mathcal{J}_3(H))\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&\geq q|\eta|^{q-2}\langle\mathcal{D}_{q,-k}(\eta)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2} - \delta q(2-q)|\eta|^{q-2}\langle L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle\Big(I_2 + (q-2)L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|}) + \delta(q-2)L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})\Big)\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle(I_2 - (1+\delta)(2-q)L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle[I_2 + (1+\delta)(1-A\delta)(q_\varepsilon-2)L_{-k}(\frac{\eta}{|\eta|})]\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}\langle[I_2 + (1+\delta)(1-A\delta)(\mathcal{D}_{q_\varepsilon,-k}(\eta) - I_2)]\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&\geq q|\eta|^{q-2}\langle[I_2 - I_2(1+\delta)(1-A\delta)]\omega_2,\omega_2\rangle_{\mathbb{R}^2}\\
&= q|\eta|^{q-2}(1 - (1+\delta)(1-A\delta))|\omega_2|^2\\
&\geq q|\eta|^{q-2}\delta(A-1)|\omega_2|^2.
\end{aligned}$$

V predzadnji neenakosti smo upoštevali, da je matrika $\mathcal{D}_{q_\varepsilon,-k}$, po Lemi 4.6.2, pozitivno semi-definitna. S tem je trditev leme dokazana. □

Trditev 4.6.7. *Za vse* $\xi \in \Omega_s, \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *in* $\phi \in [-\phi_{p_\varepsilon}, \phi_{p_\varepsilon}]$ *velja*

$$\mathcal{R}_\phi(Q)[\xi;\omega] \geq 16\delta \cos\phi |\omega_1||\omega_2|.$$

Dokaz. Če upoštevamo ocene (4.24), (4.26) in (4.28), za vsak člen (4.17), (4.18) in (4.19) posebej, dobimo

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\phi(Q)[\xi;\omega] &\geq \delta\cos\phi\Big(2|\zeta|^{2-q}|\omega_1|^2 - 16|\omega_1||\omega_2| + q(A-1)|\eta|^{q-2}|\omega_2|^2\Big)\\ &\geq 2\delta\cos\phi|\omega_1||\omega_2|\Big(\sqrt{2q(A-1)} - 8\Big).\end{aligned}$$

Zadnja neenakost sledi po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino

$$2|\zeta|^{2-q}|\omega_1|^2 + q(A-1)|\eta|^{q-2}|\omega_2|^2 \geq 2\sqrt{2q(A-1)}|\omega_1||\omega_2|.$$

Ker je $2(A-1) \geq A$, iz zveze $\delta = \frac{\varepsilon(q-1)}{A}$ sledi

$$2\delta\Big(\sqrt{2q(A-1)} - 8\Big) \geq 2\varepsilon(q-1)\Big(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{A}} - \frac{8}{A}\Big) = 16\delta.$$ □

4.7 Regularizacija Nazarov-Treilove funkcije

Preden bo s pomočjo metode toplotnega toka sledil bilinearni vložitveni izrek, moramo rešiti le še eno težavo. Metoda toplotnega toka skupaj z integracijo po delih deluje za dvakrat zvezno odvedljive funkcije. Nazarov-Treilova funkcija žal ni dvakrat zvezno odveljiva na celotnem $\mathbb{R}^4$. Zato jo bo potrebno popraviti do globalne $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4)$ funkcije, hkrati pa želimo, da se ohranijo njene lastnosti.

Naj bo $B^4 \subseteq \mathbb{R}^4$ odprta enotska krogla in za $x \in \mathbb{R}^4$ označimo

$$\psi(\xi) = ce^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}}\chi_{B^4}(\xi).$$

Za $r > 0$ in $\xi \in \mathbb{R}^4$ naj bo

$$\psi_r(\xi) = \frac{1}{r^4}\psi(\frac{\xi}{r}).$$

Funkcija Q je zvezno odvedljiva. Hkrati je Q dvakrat odvedljiva na $\mathbb{R}^4 \setminus Y_0$. Njeni drugi odvodi so lokalno integrabilni na $\mathbb{R}^4$, zato je dobro definirana konvolucija $Q*\psi_r$.

Za vsak $r > 0$, je funkcija $\psi_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ gladka in nenegativna. Njen nosilec je vsebovan v $B(0,r)$ in $\int_{\mathbb{R}^4} \phi_r(\xi)d\xi = 1$.

Lema 4.7.1. *Naj bo* $d \geq 1$. *Če je* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *in* $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, *tedaj je* $f * \psi$ *zvezna.*

Dokaz. Naj bo $x \in \mathbb{R}^d$. Izberimo zaporedje $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, ki konvergira proti x. Predpostavimo lahko, da je $x_n \in B(x, 1)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Izberimo $r > 0$ takšen, da bo nosilec funkcije ψ vsebovan v krogli $B(0, r)$. Izberimo $y, ||x - y|| > r + 1$. Potem je

$$||x_n - y|| \geq ||y - x|| - ||x - x_n|| > (r + 1) - 1 = r.$$

Torej je $\psi(x_n - y) = 0$. Zato za vsak $x_n, n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f(y)\psi(x_n - y)| \leq ||\psi||_\infty \chi_{B(x,r+1)}(y).$$

Po izreku o dominirani konvergenci sledi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(f * \psi)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f(y)\psi(x_n - y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} f(y)\psi(x_n - y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} f(y)\psi(x - y)dy \\
&= (f * \psi)(x).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.7.2. *Naj bo $d \geq 1$. Denimo, da je funkcija $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ in je $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Potem za vsak $i = 1, 2, \ldots, d$ velja*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \psi) = f * \frac{\partial}{\partial x_i}\psi. \tag{4.36}$$

Če je f poleg tega še skoraj povsod zvezno odvedljiva in je $\frac{\partial}{\partial x_i} f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, potem velja tudi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \psi) = \psi * \frac{\partial}{\partial x_i} f. \tag{4.37}$$

Dokaz. Dokazali bomo le drugo enakost. Prva se dokaže podobno. Označimo z e_i koordinatni vektor v smeri x_i. Poračunamo lahko

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \psi)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(f * \psi)(x + te_i) - (f * \psi)(x)] \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\Big(\frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t}\Big)dy \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + ce_i)dy.
\end{aligned}$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da po Lagrangeov izreku obstaja $x \in (0, h)$, da velja

$$\frac{f(x + te_i - y) - f(x - y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + ce_i).$$

Po Lemi 4.7.1 sledi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(f*\psi)(x) &= \lim_{t\to 0}\Big(\psi * \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big)(x+xe_i)\\ &= \Big(\psi * \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(x).\end{aligned}$$ □

Posledica 4.7.3. *Denimo, da je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ in $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Potem je $f*\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz. Ker velja enakost (4.36), je fukcija $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*\psi)$ po Lemi 4.7.1 zvezna. Podobno dokažemo še za višje odvode. □

Funkcija ψ_r je gladka in ima kompakten nosilec. Po Posledici 4.7.3 je $Q*\psi_r$ gladka. Prvi in drugi odvodi funkcije Q so lokalno integrabilni in skoraj gotovo zvezni. Po enakosti (4.37) sledi, da smemo menjati odvode z integralom v definiciji funkcije $Q*\psi_r$ t.j.

$$\partial^2(Q*\psi_r)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^4}(\partial^2 Q)(\xi-\xi')\psi_r(\xi')d\xi'.$$

Posledično za vsak $r>0, \xi\in\mathbb{R}^4$ in $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}^4$ velja

$$\mathcal{R}_\phi(Q*\psi_r)[\xi;\omega] = \int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{R}_\phi(Q)[\xi-\xi';\omega]\psi_r(\xi')d\xi'.$$

Trditev 4.7.4. *Za vsak $r>0, \xi\in\mathbb{R}^4$ in vsak $\phi\in(-\phi_p,\phi_p)$ veljajo naslednje lastnosti*

(1) $(Q*\psi_r)\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)$,

(2) za poljubna $\zeta,\eta\in\mathbb{R}^2$ je

$$0\le (Q*\psi_r)(\zeta,\eta)\le (1+\delta)\Big((|\zeta|+r)^p+(|\eta|+r)^q\Big),$$

(3) za poljubna $\zeta,\eta\in\mathbb{R}^2$ je

$$2|\partial_\zeta(Q*\psi_r)(\zeta,\eta)|\le (p+2\delta)\max\{(|\zeta|+r)^{p-1},|\eta|+r\}$$

in

$$2|\partial_\eta(Q*\psi_r)(\zeta,\eta)|\le (q+(2-q)\delta)(|\eta|+r)^{q-1}.$$

(4) za skoraj vsak $\xi\in\mathbb{R}^4$ in vse $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ je

$$\mathcal{R}_\phi(Q*\psi_r)[\xi;\omega]\ge 16\delta\cos\phi|\omega_1|\ |\omega_2|.$$

Dokaz. Naj bo $r > 0$ poljuben. Vemo že, da je $Q * \psi_r \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)$. Za vsak $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$ velja

$$\begin{aligned} Q * \psi_r(\zeta,\eta) &= \int_{\mathbb{R}^4} Q(\zeta-\zeta',\eta-\eta')\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^4} (1+\delta)(|\zeta-\zeta'|^p + |\eta-\eta'|^q)\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^4} (1+\delta)\Big((|\zeta|+r)^p + (|\eta|+r)^q\Big)\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &= (1+\delta)\Big((|\zeta|+r)^p + (|\eta|+r)^q\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\partial_\zeta(Q*\psi_r)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\zeta Q(\zeta-\zeta',\eta-\eta')\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^4} (p+2\delta)\max\{|\zeta-\zeta'|^{p-1}, |\eta-\eta'|\}\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^4} (p+2\delta)\max\{(|\zeta|+r)^{p-1}, (|\eta|+r)\}\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &= (p+2\delta)\max\{(|\zeta|+r)^{p-1}, |\eta|+r\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\partial_\zeta(Q*\psi_r)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\eta Q(\zeta-\zeta',\eta-\eta')\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^4} (q+(2-q)\delta)|\eta-\eta'|^{q-1}\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^4} (q+(2-q)\delta)(|\eta|+r)^{q-1}\psi_r(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' \\ &= (q+(2-q)\delta)(|\eta|+r)^{q-1}. \end{aligned}$$

Preverimo še zadnjo lastnost

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\phi(Q*\psi_r)[\xi;\omega] &= \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{R}_\phi(Q)[\xi-\xi';\omega]\psi_r(\xi')d\xi' \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^4} 16\delta\cos\phi|\omega_1|\ |\omega_2|\psi_r(\xi')d\xi' \\ &= 16\delta\cos\phi|\omega_1|\ |\omega_2|. \end{aligned}$$

□

4.8 Dokaz Bilinearnega vložitvenega izreka

Naj bosta $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$ poljubna. Po četrti točki Trditve 4.7.4 funkcija $Q * \psi_r$ ustreza pogoju t.i. kvantitativne monotonosti. Razberemo lahko, da je konstanta $B_0 = 16\delta\cos\phi$ (glej pogoj (iii)). Za dokaz bilinearnega vložitvenega izreka bomo sledili dokazu Trditve 4.1.3, le da bomo namesto s Q delali s funkcijo $Q * \psi_r$. Ker je mera

ν končna, velja zaključek Trditve 4.1.3 že ob predpostavkah (1), (2), (3) iz Trditve 4.7.4. Ker lahko naredimo sklep za poljuben $r > 0$ je $A_0 = (1 + \delta)$. Sledi

$$C(\phi, p) = \frac{\delta + 1}{16\delta \cos \phi} q(p-1)^{\frac{1}{p}}.$$

Pokažimo, da je

$$C(\phi, p) \leq \frac{32(p-1)}{\varepsilon \cos \phi},$$

od koder sledi neenakost (2.15) za neskončno razsežni Ornstein-Uhlenbeckov operator.

Po uteženi neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino je

$$q(p-1)^{\frac{1}{p}} = p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} = (p^q q^p)^{\frac{1}{pq}} \leq 2.$$

Zadošča videti, da za vsak $q \in (1, 2]$ velja

$$\frac{q(q-1)}{512} + 1 \leq q,$$

kar seveda velja. $\square$

4.9 Kot ϕ_p^* je optimalen

Fiksirajmo $d \in \mathbb{N}$. Spomnimo se poglavja o Malliavianovem računu. Naj bo ν_d standardna Gaussova mera na $\mathbb{R}^d$. Označimo z $\Delta^{(d)}$ Ornstein-Uhlenbeckov operator na $L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d)$. Njegovo domeno označimo z $\mathcal{D}_d$. Naj bo $\mathcal{H}$ neskončno razsežen realen Hilbertov prostor. Vemo, da obstaja izonormalen Gaussov proces $W = \{W(h) : h \in \mathcal{H}\}$ na $\mathcal{H}$. Izberimo bazo $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ za $\mathcal{H}$ in naj bo (Ω, ν) Wienerjev prostor kot v Trditvi 3.3.4. Spomnimo se, da je za $n \in \mathbb{N}$, H_n Hermitov polinom stopnje n. Za vsak multiindeks $\alpha \in \Lambda \subseteq \mathbb{N}^\infty$ bomo pisali $H_\alpha = \prod_{i=1}^\infty H_{\alpha_i}$ in $\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \prod_{i=1}^\infty H_{\alpha_i}(W(e_i))$. Zopet označimo z I_n in $J_n, n \in \mathbb{N}$ ortogonalne projektorje

$$I_n \colon L^2(\mathbb{R}^d, \nu_n) \to \mathrm{Lin}\{H_\alpha : |\alpha| = n\},$$

$$J_n \colon L^2(\Omega, \nu) \to \mathbb{H}_n = \mathrm{Lin}\{\Phi_\alpha : |\alpha| = n\}.$$

Ponovimo predpise in definicijska območja operatorjev $\Delta^{(d)}$

$$\mathcal{D}_d = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d, \nu) : \sum_{n=1}^{d} n||I_n f||^2_{L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d)} < \infty\},$$

$$\Delta^{(d)} = \sum_{n=1}^{d} n I_n,$$

in $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \{F \in L^2(\Omega, \nu) : \sum_{n=1}^{\infty} n||J_n F||^2_{L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d)} < \infty\},$$

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{\infty} n J_n.$$

Trditev 4.9.1. *Naj bo $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d), w = (W(e_1), W(e_2), \ldots, W(e_d))$ in $F = f(w)$. Tedaj je $f \in \mathcal{D}_d$ natanko tedaj, ko je $F \in \mathcal{D}(J_d \mathcal{L})$.*

Dokaz. Podobno kot v dokazu Trditve 3.3.4 lahko izračunamo

$$\begin{aligned} ||f||_{L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2(x) d\nu_d(x) \\ &= \int_\Omega |f(w)|^2(\omega) d\nu(\omega) \\ &= ||F||_{L^2(\Omega, \nu)}. \end{aligned}$$

Iz

$$\Phi_\alpha = H_\alpha(w)$$

sledi

$$\langle F, \Phi_\alpha(w) \rangle_{L^2(\Omega, \nu)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \langle f, H_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d)}.$$

Opazimo, če je $f \in \mathcal{D}_d$, tedaj je tudi $I_n f \in \mathcal{D}_d$ za vse $n = 1, 2, \ldots, d$. Podobno velja za $\mathcal{L}$. Pokažimo, da je $(I_n f)(w) = J_n F$:

$$\begin{aligned} I_n f(w) &= \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \langle f, H_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d)} H_\alpha(w) \\ &= \sum_{|\alpha|=n} \langle F, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\Omega,\nu)} \Phi_\alpha \\ &= J_n F. \end{aligned}$$

Potem je

$$\begin{aligned} ||I_n f||_{L^2(\mathbb{R}^d,\nu_d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |I_n f|^2(x) d\nu_d(x) \\ &= \int_\Omega |(I_n f)(w)|^2(\omega) d\nu(\omega) \\ &= ||J_n F||_{L^2(\Omega,\nu)}. \end{aligned}$$

□

Opomba 4.9.2. Pokazali smo, da je za vsak $f \in \mathcal{D}_d$ slučajna spremenljivka $f(w) \in \mathcal{D}(J_d\mathcal{L})$. Nismo pa pokazali, da je res vsak $F \in \mathcal{D}(J_d\mathcal{L})$ te oblike.

Posledica 4.9.3. *Za vsak $f \in \mathcal{D}_d$ velja*

$$(\Delta^{(d)} f)(w)(\omega) = J_d(\mathcal{L}F)(\omega). \tag{4.38}$$

Trditev 4.9.4. *Kot ϕ_p^* iz Izreka 2.4.1 je optimalen.*

Dokaz. Naj bo $m\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ poljubna omejena Borelova funkcija. Tedaj lahko podobno kot (4.38) izpeljemo, da za vsak $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \nu_d)$ velja

$$\Big(m(\Delta^{(d)})f\Big)(w) = J_d(m(\mathcal{L})F).$$

Izračunajmo normo operatorja

$$m(\Delta^{(d)})\colon L^p(\mathbb{R}^d,\nu_d) \to L^p(\mathbb{R}^d,\nu_d).$$

$$\begin{aligned} ||m(\Delta^{(d)})||_{p\to p} &= \sup_{f\in L^p : ||f||_{L^p(\mathbb{R}^d,\nu_d)}=1} ||m(\Delta^{(d)})f||_{L^p(\mathbb{R}^d,\nu_d)} \\ &= \sup_{f\in L^p : ||f||_{L^p(\mathbb{R}^d,\nu_d)}=1} ||(m(\Delta^{(d)})f)(w)||_{L^p(\Omega,\nu)} \\ &\le \sup_{F\in L^p : ||f||_{L^p(\Omega,\nu)}=1} ||J_d m(\mathcal{L})F||_{L^p(\Omega,\nu)} \\ &\le ||m(\mathcal{L})||_{p\to p}. \end{aligned}$$

Po Izreku 2.4.9 je kot ϕ_p^* optimalen. □

Poglavje 5

Priloge

V prilogi bomo predstavili teorijo neomejenih operatorjev, spektralni izrek in teorijo operatorskih polgrup, ki je pomembna za razumevanje magistrskega dela. Glavni vir so bila predavanja in domače naloge pri predmetu *Izbrana poglavja iz harmonične analize: Spektralna teorija in Cauchyjev problem za eliptične diferencialne operatorje 2. reda*, ki ga je predaval *doc. dr. Oliver Dragičević* . Predmet se je izvajal v zimskem semestru študijskega leta 2013-2014. Večina dokazov je izpuščena, saj jih lahko najdemo v klasični literaturi za spektralno teorijo [3], [30].

Teorija je napisana v jeziku Hilbertovih prostor. Nekatere konstrukcije pa delujejo na splošnih Banachovih prostorih, na le-te bomo posebej opozorili.

5.1 Teorija neomejenih operatorjev

5.1.1 Osnovni pojmi

Definicija 5.1.1. Naj bo $\mathcal{D}(T)$ linearen podprostor v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ in naj bo $T\colon \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ linearen operator na $\mathcal{H}$, t.j za poljubna $x, y \in \mathcal{D}(T)$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ velja

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

Prostor $\mathcal{D}(T)$ je *definicijsko območje* operatorja T. Na operator gledamo kot par $(T, \mathcal{D}(T))$. Če je T linearen operator in $\alpha \in \mathbb{C}$, potem je operator αT definiran s predpisoma

$$(\alpha T)(x) = \alpha \cdot Tx \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(\alpha T) = \mathcal{D}(T).$$

Definicija 5.1.2. Če sta T in S operatorja v $\mathcal{H}$, tedaj je $T+S$ definiran s predpisoma

$$\mathcal{D}(T+S) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S) \quad \text{in} \quad (T+S)(x) = Tx + Sx.$$

Kompozitum TS je definiran s predpisoma

$$\mathcal{D}(TS) = \{x \in \mathcal{D}(S), Sx \in \mathcal{D}(T)\} \quad \text{in} \quad (TS)(x) = T(Sx).$$

Po definiciji sledi $\alpha(TS) = (\alpha T)S$.

Ko gre za diferencialne operatorje, domena pogosto zrcali začetne oziroma robne pogoje problema, ki ga obravnavamo.

Primer 5.1.3. Vzemimo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Diferencialni operator H je podan s predpisom $Hf := -f''$, za $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Radi bi rešili nalogo $-f'' = \lambda f$, za $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ ob nekih robnih pogojih. Za obravnavanje Dirichletovih robnih pogojev izberemo

$$\mathcal{D}(H_D) = \{f \in \mathcal{C}^2[a, b], f(a) = f(b) = 0\}.$$

Za obravnavanje Neumanovih robnih pogojev izberemo

$$\mathcal{D}(H_N) = \{f \in \mathcal{C}^2[a, b], f'(a) = f'(b) = 0\}.$$

Tako dobimo dva različna operatorja H_D in H_N.

Opomba 5.1.4. Vedno velja $(T_1+T_2)S = TS_1+TS_2$, toda $T(S_1+S_2) = TS_1+TS_2$ ne velja vedno.

Definicija 5.1.5. Pravimo, da je operator T razširitev operatorja S, če velja

$$\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T) \;\text{ in }\; T\Big|_{\mathcal{D}(S)} = S.$$

Označimo $S \subseteq T$.

5.1.2 Zaprti in sebi-adjungirani operatorji

Definicija 5.1.6. *Graf* linearnega operatorja T na $\mathcal{H}$ je $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$.

Trditev 5.1.7. *Graf linearnega operatorja T, $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx), x \in \mathcal{D}(T)\}$ je linearni podprostor v $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Inkluzija $S \subseteq T$ velja natanko tedaj, ko je $\mathcal{G}(S) \subseteq \mathcal{G}(T)$.*

Definicija 5.1.8. Pravimo, da je T zaprt, če je $\mathcal{G}(T)$ zaprt prostor v $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Topologija na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ je porojena s skalarnim produktom

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}} + \langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{H}}.$$

S tem skalarnim produktom je $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ zopet Hilbertov prostor.

Trditev 5.1.9. *Linearen operator T je zaprt natanko tedaj, ko za poljubno, v $\mathcal{H}$ konvergentno, zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$, katerega slike $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirajo proti $y \in \mathcal{H}$ sledi $x \in \mathcal{D}(T)$ in $y = Tx$.*

Definirajmo na $\mathcal{D}(T)$ skalarni produkt

$$\langle x, y\rangle_T = \langle x, y\rangle + \langle Tx, Ty\rangle.$$

Opomba 5.1.10. Če je $\mathcal{H}$ Banachov prostor lahko definiramo normo

$$||x||_T = ||x|| + ||Tx||.$$

Torej je pojem zaprtega operatorja smiselno definiran tudi na Banachovem prostoru.

Trditev 5.1.11. *Prostor $(\mathcal{D}(T), || \ ||_T)$ je poln natanko tedaj, ko je T zaprt.*

Trditev 5.1.12. *Če je T zaprt v $\mathcal{H}$ in je S omejen operator na $\mathcal{H}$, potem je tudi $T+S$ zaprt.*

Definicija 5.1.13. Pravimo, da je linearen operator T *gosto definiran*, če je $\mathcal{D}(T)$ gosta množica v $\mathcal{H}$. Operator T *se da zapreti*, če je $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(S)$ za neki linearni operator S. Operator S je *zaprtje* operatorja T, kar označimo z $S = \overline{T}$.

Trditev 5.1.14. *Naj bo T linearen operator. Naslednje trditev so ekvivalentne*

a) T se da zapreti.

b) $T \subseteq T_1$ za neki zaprti operator T_1.

c) Če je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ in $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ter $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, potem je $y = 0$.

Trditev 5.1.15. *Naj bo T gosto definiran. Označimo*

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y \in \mathcal{H} : \text{ funkcional } x \to \langle Tx, y\rangle \text{ je zvezen na } \mathcal{D}(T)\}.$$

Potem za vsak $y \in \mathcal{D}(T^*)$ obstaja natanko en $v = T^*y \in \mathcal{H}$, da je $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ za vse $x \in \mathcal{D}(T)$. Operatorju $(T^*, \mathcal{D}(T^*))$ pravimo adjungiran operator k operatorju $(T, \mathcal{D}(T))$.

Lema 5.1.16. *Če je operator T gosto definiran in operator S omejen na $\mathcal{H}$, potem je $(T+S)^* = T^* + S^*$.*

Trditev 5.1.17. *Če so T, S, ST gosto definirani, je $(ST)^* \supseteq T^*S^*$. Če pa je S omejen in povsod definiran na $\mathcal{H}$, potem je $(ST)^* = T^*S^*$.*

Definicija 5.1.18. Naj bo T linearen operator. Če za poljubna $x, y \in \mathcal{D}(T)$ velja $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, je T *simetričen*.

Trditev 5.1.19. *Gosto definiran operator T je simetričen natanko tedaj, ko je $T^* \supseteq T$.*

Definicija 5.1.20. Operator T je *sebi-adjungiran*, če je $T^* = T$.

Lema 5.1.21. *Če se da operator T zapreti, tedaj je $(\overline{T})^* = T^*$ in $\overline{T} = (T^*)^*$.*

Definicija 5.1.22. Če je T simetričen in obstaja $\overline{T}$ ter je $\overline{T}$ sebi-adjungiran, potem rečemo, da je T *esencialno sebi-adjungiran*, t.j. $\overline{T} = T^*$.

Definicija 5.1.23. Operator T na $\mathcal{H}$ je *maksimalno simetričen*, kadar velja sklep: če je S simetričen operator na $\mathcal{H}$ tak, da je $T \subseteq S$, tedaj je $T = S$.

Lema 5.1.24. *Vsak sebi-adjungiran operator je maksimalno simetričen.*

Označimo

$$U\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}, U(x, y) = (-y, x),$$
$$V\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}, U(x, y) = (y, x).$$

Operatorja U in V sta unitarna.

Trditev 5.1.25. *Če je linearni operator A injektiven, potem je zaprt natanko tedaj, ko je njegov inverz zaprt.*

Trditev 5.1.26. *Naj bo Y podprostor v $\mathcal{H}$ in U unitaren operator na $\mathcal{H}$. Potem je $U(A^{\perp}) = (U(A))^{\perp}$.*

Trditev 5.1.27. *Naj bo $U\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}, (x, y) \mapsto (-y, x)$. Če je operator T gosto definiran, potem je*

$$\mathcal{G}(T^*) = (U\mathcal{G}(T))^{\perp} = U(\mathcal{G}(T)^{\perp}).$$

Posledica 5.1.28. *Če je T povsod definiran, je T^* zaprt. Sebi-adjungiran operator je vedno zaprt in gosto definiran.*

Trditev 5.1.29. *Če je $A \subseteq B$ in je A gosto definiran, potem je $B^* \subseteq A^*$. Če je A še simetričen, potem se da zapreti in velja $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{A}^* = A^*$.*

Trditev 5.1.30. *Naj bo T gosto definiran in zaprt. Potem je T^* gosto definiran in zaprt ter velja $(T^*)^* = T$.*

Trditev 5.1.31. *Za gosto definiran operator T, ki se da zapreti velja $T^* = (\overline{T})^*$.*

5.2 Spektralna teorija

5.2.1 Spektralna mera

Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Označimo z $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ množico vseh ortogonalnih projektorjev na $\mathcal{H}$.

Definicija 5.2.1. Naj bo Ω poljubna množica, $\mathcal{M}$ $\sigma-$algebra na Ω in $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Preslikava $E\colon \mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ se imenuje *spektralna mera* (tudi *razčlenitev enote*), če zadošča pogojem

1. $E(\emptyset) = 0$ in $E(\Omega) = id$.

2. Za poljubna $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}$ velja $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1) \cdot E(\omega_2)$.
3. Za vsaka $x, y \in \mathcal{H}$ je funkcija $E_{xy} \colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, $\omega \to \langle E(\omega)x, y\rangle$ kompleksna mera.

Projektorji $\{E(\omega) : \omega \in \mathcal{M}\}$ paroma komutirajo. Uporabimo oznako $E_x = E_{x,x}$. Potem je $\langle E(\omega)x, x\rangle = ||E(\omega)x||^2$.

Definicija 5.2.2. Naj bodo $T_0, T_1, \ldots \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Pravimo, da T_n konvergira proti T

- v normi, če $||T_n - T|| \to 0$.
- krepko, če $||T_n x - Tx|| \to 0$ za vsak $x \in \mathcal{H}$.
- šibko, če $\langle (T_n - T)x, y\rangle \to 0$ za vsaka $x, y \in \mathcal{H}$.

Trditev 5.2.3. *Naj bodo $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ paroma disjunktne množice iz $\mathcal{M}$. Tedaj je*

$$E\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j\Big) = \lim_{n\to\infty} E\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \omega_j\Big)$$

v krepkem smislu.

Dokaz. Označimo $\omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j$. Za poljubna $x, y \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle E(\omega)x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle E(\omega_j)x, y\rangle.$$

Za $j \neq k$ velja

$$\langle E(\omega_j)x, E(\omega_k)y\rangle = \langle E(\omega_k E(\omega_j)x, y\rangle = \langle E(\omega_k \cap \omega_j)x, y\rangle = 0.$$

Sledi $E(\omega)x = \sum_{j=1}^{\infty} E(\omega_j)x$. $\square$

Posledično je preslikava $E_x \colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ pozitivna mera, če izberemo na $\mathcal{M}$ krepko topologijo.

Primer 5.2.4. Izberimo zaporedje $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ realnih števil. Naj bo $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ zaporedje ortogonalnih projektorjev na $\mathcal{H}$, za katere velja $P_k P_n = 0, k \neq n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = id$ v krepkem smislu. Za $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definirajmo preslikavo E s predpisom

$$E(M) = \sum_{\lambda_n \in M} P_n.$$

Trditev 5.2.5. *Preslikava E je spektralna mera na $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Očitno je $E(\emptyset) = 0$ in $E(\mathbb{R}) = id$. Izberimo $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Potem je

$$\begin{aligned} E(\omega_1 \cap \omega_2)x &= \sum_{\lambda_n \in \omega_1 \cap \omega_2} P_n x = \sum_{\lambda_n \in \omega_1} \sum_{\lambda_m \in \omega_2} P_n P_m x \\ &= \sum_{\lambda_n \in \omega_1} P_n \sum_{\lambda_m \in \omega_2} P_m x = E(\omega_1)E(\omega_2)x. \end{aligned}$$

Pokažimo še, da je za poljubna $x, y \in \mathcal{H}$ preslikava $E_{xy} \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ kompleksna mera. Očitno je $E_{xy}(\emptyset) = 0$ in $E_{xy}(\mathbb{R}) = \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$. Radi bi videli še števno aditivnost. Naj bodo $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ paroma disjunktne. Označimo $\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$. Vemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = id$ v krepkem smislu.

$$\begin{aligned} E_{xy}(\omega) &= \langle E(\omega)x, y \rangle = \langle \sum_{\lambda_n \in \omega} P_n x, y \rangle = \sum_{\lambda_n \in \omega} \langle P_n x, y \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\lambda_n \in \omega_m} \langle P_n x, y \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} E_{xy}(\omega_n) \end{aligned}$$ □

5.2.2 Integracija po spektralni meri

Označimo

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}) = \{\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}, A_j \in \mathcal{M}, c_j \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Za funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ lahko definiramo njen integral glede na spektralno mero E povsem naravno kot

$$If = \int_{\Omega} f dE = \sum_{j=1}^{n} c_j E(A_j) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Definicija je dobra, s čimer imamo

$$I \colon \mathcal{S}(\mathcal{M}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Naj bo $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ merljiva glede na $\sigma-$algebro $\mathcal{M}$ in $E \colon \mathcal{M} \to P(\mathcal{H})$ spektralna mera. *Bistveni rang* $\mathcal{R}(f)$ funkcije f je

$$\mathcal{R}(f) = \{\xi \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \text{ je } E(f^{-1}(B(\xi, \varepsilon))) \neq 0\}.$$

Uvedemo lahko tudi normo

$$||f||_{L^\infty(\mathcal{M},E)} = \sup\{|\xi| : \xi \in \mathcal{R}(f)\}.$$

Kadar je $\mathcal{R}(f)$ omejen, pravimo da je f *esencialno omejena*, tj. $f \in L^\infty(\mathcal{M}, E)$. Za $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ je $\mathcal{R}(f) \subseteq f(\Omega)$, zato je $||f||_{L^\infty(\mathcal{M},E)} \leq ||f||_\infty$. Elementi $L^\infty(\mathcal{M}, E)$ so v resnici ekvivalečni razredi glede na relacijo

$$f \sim g \leftrightarrow ||f - g||_{L^\infty(\mathcal{M},E)} = 0.$$

Tedaj za vsak $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ velja

$$||f||_{L^\infty(\mathcal{M},E)} = ||f||_\infty.$$

Množica $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ je gosta v $L^\infty(\mathcal{M}, E)$. Zato za vsak $f \in L^\infty(\mathcal{M}, E)$ obstaja zaporedje $f_n \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$, ki konvergira k f v $||\cdot||_{L^\infty(\mathcal{M},E)}$. Zato je zaporedje $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ Cauchyjevo v $||\cdot||_{L^\infty(\mathcal{M},E)}$ in v $||\cdot||_\infty$. Vidimo lahko, da je potem $\{If_n : n \in \mathbb{N}\}$ Cauchyjevo v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in zato obstaja limita

$$\lim_{n\to\infty} If_n = If \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Definicija If je neodvisna od izbire zaporedja $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Trditev 5.2.6. *Naj bodo $f, g \in L^\infty(\mathcal{M}, E), x, y \in \mathcal{H}, c \in \mathbb{C}$. Velja:*

1. $I1 = id$.
2. $I(cf) = cIf$.
3. $I(f + g) = If + Ig$.
4. $I(fg) = (If)(Ig)$.
5. $(If)^* = I\overline{f}$.
6. $\langle (If)x, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y}$.
7. $\langle (If)x, x\rangle = \int_\Omega f dE_{x,x}$.
8. $||(If)x||^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_x$.
9. $||If|| = ||f||_\infty = \max_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| = \max_{j=1,2,\ldots,n} |c_j|$.
10. *Če je $y = (If)x$, je $dE_y = |f|^2 dE_x$.*

Dokaz. Vse trditve dokažemo najprej za enostavne funkcije iz $\mathcal{S}(\mathcal{M})$. Z limitnim prehodom sledi, da veljajo tudi na $L^\infty(\mathcal{M}, E)$. □

Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathcal{M}-$merljiva. Definirajmo

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathcal{H}, \int_\Omega |f|^2 dE_x < \infty\}.$$

Lema 5.2.7. *$\mathcal{D}_f$ je gost linearen podprostor v $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Izberimo $x, y \in \mathcal{D}_f$. Potem je za vsak ω

$$E_{x+y}(\omega) = ||E(\omega)(x+y)||^2 = ||E(\omega)x + E(\omega)y||^2 \leq 2||E(\omega)x||^2 + 2||E(\omega)y||^2.$$

Sledi

$$E_{x+y} \leq 2(E_x + E_y). \tag{5.1}$$

Vzemimo $n \in \mathbb{N}$ in definirajmo

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \leq n\}.$$

Po Trditvi 5.2.3, za poljuben $x \in \mathcal{H}$, velja

$$x = E(\Omega x) = \lim_{n \to \infty} E(\Omega_n)x.$$

Označimo $x_n = E(\Omega_n)x$. Opazimo, da je $x_n = (I(\chi_{\Omega_n}))x$. Dovolj je videti, da je $x_n \in \mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^2 dE_{x_n} &= \int_\Omega |f|^2 dE_{I(\chi_{\Omega_n})x} = \int_\Omega |f|^2 |\chi_{\Omega_n}|^2 dE_x \\ &= \int_{\Omega_n} |f|^2 dE_x \leq n^2 E_x(\Omega_n) \leq n^2 ||x||^2 < \infty. \end{aligned}$$ □

Definicija 5.2.8. Pravimo, da zaporedje $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^\infty(\mathcal{M}, E)$ $\mathcal{M}-$konvergira k merljivi funkciji $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, če velja

- $f_n \to f$ s.p. na E po točkah,
- $|f_n|^2 \lesssim 1 + |f|^2$ s.p. na E.

Rečemo, da zaporedje $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{M}-$konvergira proti f.

Lema 5.2.9. *Naj bo f neka $L^\infty(\mathcal{M}, E)$ merljiva funkcija. Označimo $f_n = \chi_{\{|f|<n\}}$. Zaporedje $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{M}-$konvergira proti f.*

Dokaz. Očitno $f_n \to f$ po točkah in $|f_n| \leq |f|$. □

Izberimo neki zaporedje $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, ki $\mathcal{M}-$konvergira proti f. Naj bo $x \in \mathcal{D}_f$ poljuben. Zaradi $\mathcal{M}-$konvergence lahko ocenimo

$$|f_m - f|^2 \lesssim |f_m| + |f| \lesssim 1 + |f|^2 \in L^1(E_x).$$

Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci sledi

$$\begin{aligned} ||(If_m)x - (If_n)x||^2 &= ||I(f_m - f_n)x||^2 = \int |f_m - f_n|^2 dE_x \\ &\lesssim \int |f_m - f|^2 dE_x + \int |f_n - f|^2 dE_x \to 0, \text{ za } m, n \to \infty. \end{aligned}$$

Sledi da je $\{(If_n)x : n \in \mathbb{N}\}$ Cauchyjevo zaporedje v $\mathcal{H}$. Torej obstaja

$$\lim_{n\to\infty}(If_n)x = (If)x.$$

Definicija je neodvisna od izbire $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Preslikava $I\colon \mathcal{D}_f \to \mathcal{H}$ je linearna in podaja gosto definiran operator

$$If = \int_\Omega f dE$$

na $\mathcal{H}$ z domeno $\mathcal{D}_f$. Navedli bomo nekaj lastnosti operatorja I.

Trditev 5.2.10. *Za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ in $y \in \mathcal{H}$ je*

$$\langle (If)x, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y},$$

$$\langle (If)x, x\rangle = \int_\Omega f dE_x,$$

$$||(If)^2 x|| = \int_\Omega |f|^2 dE_x.$$

Lema 5.2.11. *Za vsako merljivo funkcijo f in $g \in L^\infty(\mathcal{M}, \Omega)$, za vsak $x \in \mathcal{D}_f$, velja*

$$(If)x + (Ig)x = I(f+g)x.$$

Lema 5.2.12. *Naj bo f $\mathcal{M}-$merljiva funkcija in $x \in \mathcal{D}_f$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bodo f_n $\mathcal{M}-$merljive funkcije in $x \in \mathcal{D}_{f_n}$. Če $f_n \to f$ v $L^2(\Omega, E_x)$, potem*

$$(If)x = \lim_{n\to\infty}(If_n)x$$

in

$$dE_{(If)x} = |f|^2 dE_x.$$

Lema 5.2.13. *Za $\mathcal{M}-$merljivi funkciji f in g ter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ velja*

$$\alpha(If) + \beta(Ig) \subseteq I(\alpha f + \beta g).$$

Lema 5.2.14. *Za poljubni $\mathcal{M}-$merljivi funkciji f in g je $\mathcal{D}(If \cdot Ig) = \mathcal{D}_{fg} \cap \mathcal{D}_g$ in $If \cdot Ig \subseteq I(fg)$. Posledično je*

$$If \cdot Ig = I(fg) \Leftrightarrow \mathcal{D}_{fg} \subseteq \mathcal{D}_g.$$

Lema 5.2.15. *Za vsako $\mathcal{M}-$merljivo funkcijo f je $(If)^* = I\overline{f}$.*

Posledica 5.2.16. *Le je f $\mathcal{M}-$merljiva, potem je If zaprt operator. Velja še*

$$(If)(If)^* = I(|f|^2) = (If)^*(If),$$

t.j If je normalen operator. Če f slika v realna števila, potem je $I(f)$ sebi-adjungiran operator.

Izrek 5.2.17. *Naj bo f $\mathcal{M}-$merljiva funkcija. Če $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ komutira s spektralno mero, tj. za vsak $\omega \in \Omega$ je $TE(\omega) = E(\omega)T$, tedaj je $T(If) \subseteq (If)T$.*

Izrek 5.2.18. *Za poljubno $\mathcal{M}-$merljivo funkcijo f je $\mathcal{D}_f = \mathcal{H}$ natanko tedaj, ko je $f \in L^\infty(\mathcal{M}, E)$.*

Primer 5.2.19. Če je $\Omega = \mathbb{R}$ in E neka spektralna mera na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, potem je

$$I(id) = \int_{\mathbb{R}} s dE(s)$$

v splošnem neomejen sebi-adjungiran operator na

$$\mathcal{D}(I(id)) = \{x \in \mathcal{H} : \int s^2 dE_x(s) < \infty\}.$$

Primer 5.2.20. Privzemimo definicije in oznake iz Primera 5.2.4. Potem je

$$\mathcal{D}(I(f)) = \Big\{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)|^2 ||P_n x||^2 < \infty\Big\},$$
$$I(f)x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x, \text{ za } x \in \mathcal{D}(I(f)).$$

5.2.3 Spektralni izrek

Izrek 5.2.21. *Naj bo A sebi-adjungiran operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Potem obstaja natanko ena spektralna mera $E \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(\mathcal{H})$, za katero je*

$$A = \int_{\mathbb{R}} t dE(t).$$

Nosilec spektralne mere je enak spektru operatorja A.

Definicija 5.2.22. Naj bo A sebi-adjungiran, $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ in E spektralna mera iz Izreka 5.2.21. Za vsako Borelovo merljivo funkcijo $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lahko definiramo

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f dE.$$

Preslikavi $f \mapsto f(A)$ rečemo *funkcijski račun* za sebi-adjungiran operator A.

Trditev 5.2.23. *Za funkcijski račun opertorja A veljajo naslednje lastnosti*

1. *$f(A)$ je gosto definiran v $\mathcal{H}$ z domeno*

$$\mathcal{D}(f(A)) = \{x \in \mathcal{H} : f \in L^2(\mathbb{R}, E_x)\}.$$

2. *$f(A)$ je omejen operator na $\mathcal{H}$ natanko tedaj, ko je $f \in L^\infty(\mathbb{R}, E)$. Tedaj je $||f(A)|| = ||f||_{L^\infty(\mathbb{R},E)}$. Po definiciji je vsaka omejena Borelova funkcija f tudi esencialno omejena glede na mero E, tj $||f||_{L^\infty(\mathcal{M},E)} < \infty$.*

3. *Operator $f(A)$ je normalen in $f(A)^* = \overline{f(A)}$. Torej je $f(A)$ sebi-adjungiran natanko tedaj, ko spekter A vsebuje sama realna števila.*

4. *Če sta f, g merljivi in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tedaj je $\alpha f(A) + \beta g(A) \subseteq (\alpha f + \beta g)(A)$.*

5. *$\mathcal{D}(f(A)g(A)) = \mathcal{D}((fg)(A)) \cap \mathcal{D}(g(A))$ in $f(A)g(A) \subseteq (fg)(A)$.*

Primer 5.2.24. Privzemimo oznake iz Primera 5.2.4 in si oglejmo operator

$$A = \int_\Lambda \lambda dE(\lambda).$$

Po Posledici 5.2.16 je operator A sebi-adjungiran in

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x,$$
$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 ||P_n x||^2 < \infty \Big\}.$$

Označimo $\Lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. Po Trditvi 5.2.23 lahko za vsako omejeno Borelovo funkcijo f definiramo operator

$$f(A)x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x = \int_\Lambda f(\lambda) dE(\lambda),$$
$$\mathcal{D}(f(A)) = \Big\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)|^2 ||P_n x||^2 < \infty \Big\}.$$

Primer 5.2.25. Izberimo si $t \geq 0$. V Primeru 5.2.4 izberimo $\lambda_n = n$ in $f(\xi) = e^{-t\xi}$. Potem je s predpisom

$$e^{-tA}x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn} P_n x$$

definiran sebi-adjungiran operator z domeno

$$\mathcal{D}(e^{-tA}) = \Big\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2tn} ||P_n x||^2 < \infty \Big\} = \mathcal{H}.$$

Pri določitvi domene smo upoštevali, da je $\sum_{n=1}^{\infty} ||P_n x||^2 < \infty$.

Primer 5.2.26. Fiksirajmo $t \geq 0$. V Primeru 5.2.4 izberimo $\lambda_n = n$ in $f(\xi) = \xi$. Potem je s predpisom

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n x$$

definiran sebi-adjungiran operator z domeno

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 ||P_n x||^2 < \infty \Big\}.$$

Trditev 5.2.27. *Za f in g funkciji na $(\Omega, \mathcal{M}, E)$. Veljajo naslednje trditve*

- *Če je $f(t) = g(t)$ za $E-$skoraj vsak $t \in \Omega$, potem je $I(f) = I(g)$.*
- *Če ima f $E-$ s.g. realno zalogo vrednosti, potem je $I(f)$ sebi-adjungiran.*
- *Če je $f(t) \geq 0$ $E-$s.g. na Ω, potem je $I(f)$ pozitiven in sebi-adjungiran.*
- *Če je $g(t) \geq 0$ $E-$s.g. na Ω, potem je $I(\sqrt{g})$ pozitiven sebi-adjungiran operator in velja $(I(\sqrt{g}))^2 = I(g)$.*

5.3 Operatorske polgrupe

5.3.1 Osnovni pojmi

Definicija 5.3.1. Operator $\mathcal{A}$ je kontrakcija, kadar za vsak $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ velja

$$||\mathcal{A}f|| \leq ||f||.$$

Definicija 5.3.2. Družina $Q = \{Q(t); t \geq 0\}$ omejenih operatorjev na Hilbertovem prostoru X se imenuje *enoparametrična operatorska polgrupa*, če veljata zahtevi

1. $Q(0) = id$,
2. $Q(t + t') = Q(t)Q(t')$ za vsaka $t, t' \geq 0$.

Opomba 5.3.3. Včasih pod istim imenom pojmujemo preslikavo $t \mapsto Q(t)$. Pogosto dodamo še kak dodaten pogoj, npr. za vsak $x \in X$ velja

$$\lim_{t \to 0} ||Q(t)x - x|| = 0.$$

V tem primeru rečemo, da je polgrupa *krepko zvezna*.

Pogoj 2 implicira, da za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$Q(-t) = Q(t)^{-1}.$$

Opomba 5.3.4. Enako definiramo enoparamatrično operatorsko polgrupo na Banachovem prostoru. Razlika je le v pogoju krepke zveznosti. Na Banachovem prostoru zahtevamo, da za vsak $x \in \mathcal{H}$ in vsak $t_0 \geq 0$ velja

$$\lim_{t \to t_0} ||Q(t)x - x|| = 0.$$

Definicija 5.3.5. Polgrupa $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ na X je *kontrakcijska*, kadar je vsak $Q(t)$ kontrakcija na X. Polgrupa je Q je *simetrična*, kadar so vsi $Q(t), t \geq 0$ simetrični.

Definicija 5.3.6. Pravimo, da je funkcija $F\colon [0,\infty) \to \mathcal{H}$ odvedljiva in $F'(t) = h \in \mathcal{H}$, če velja

$$h = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon}.$$

Definicija 5.3.7. *Generator* B krepko zvezne enoparametrične polgrupe na $\mathcal{H}$ je operator podan z

$$-Bx = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(T(h) - I)x,$$

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \text{ obstaja } \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(T(h) - I)x \right\}$$

Opomba 5.3.8. Enako definiramo generator na Banachovem prostoru. Definicijo lahko razširimo na primer, ko je $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{H}$.

5.3.2 Primer operatorske polgrupe

Naj bo A pozitiven, sebi-adjungiran linearni operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ in E njemu prirejena spektralna mera iz Izreka 5.2.21. Za vsak $t \geq 0$ definiramo

$$Q(t) = e^{-tA},$$

preko funkcijskega računa, v smislu $Q(t) = \phi_t(A)$, kjer je $\phi_t(x) = e^{-tx}$:

$$e^{-tA} = \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} dE(\lambda).$$

Lema 5.3.9. *Za vsak $t \geq 0$ je $Q(t)$ omejen sebi-adjungiran kontrakcijski operator na $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Po Trditvi 5.2.6 lahko izračunamo

$$Q(t)^* = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t\lambda} dE(\lambda) \right)^* = \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{-t\lambda}} dE(\lambda) = Q(t)$$

in ocenimo

$$||e^{-tA}x||^2 = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-2t\lambda} \langle E_A(\lambda)x, x\rangle \leq \int_{\mathbb{R}^+} \langle E_A(\lambda)x, x\rangle = ||x||.$$

Upoštevali smo, da je spekter pozitivnega operatorja nenegativen. □

Lema 5.3.10. *Družina $\{Q(t); t \geq 0\}$ je enoparametrična operatorska polgrupa.*

Dokaz. Po Trditvi 5.2.6 za vsaka $t, t' \geq 0$ velja

$$Q(t)Q(t') = e^{tA}e^{t'A} = \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} dE(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{t'\lambda} dE(\lambda) = \int e^{(t+t')\lambda} dE(\lambda) = Q(t+t').$$ □

Lema 5.3.11. *Funkcija $t \to Q(t)$ je krepko zvezna na $[0,\infty)$.*

Dokaz. Izberimo $x \in \mathcal{H}$ in definirajmo $f_t(\lambda) = e^{-t\lambda} - 1$. Za $t, \lambda \geq 0$ velja $|f_t(\lambda)| \leq 2$ in $\lim_{t\to 0} f_t(\lambda) = 0$. Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci sledi

$$||Q(t)x - x||^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_t(\lambda)|^2 d\langle E_A(\lambda)x, x\rangle \to 0, \text{ ko gre } t \to 0.$$

Torej velja $\lim_{t\to 0} Q(t)x = x$ in Q je krepko zvezna. $\square$

Trditev 5.3.12. *Če je $f \in \mathcal{D}(A)$, tedaj v $\mathcal{H}$ velja*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{Q(t)f - f}{t} = -Af.$$

Če je $f \notin \mathcal{D}(A)$, tedaj

$$\frac{Q(t)f - f}{t}$$

ne konvergira v $\mathcal{H}$, ko $t \to 0^+$.

Dokaz. Naj bo $f \in \mathcal{D}(A)$. Označimo $g_t(\lambda) = \frac{e^{-t\lambda}+1}{t} - \lambda$. Potem je

$$\lim_{t\to 0} g_t(\lambda) = 0.$$

Opazimo, da za $\lambda, t \geq 0$ velja

$$|g_t'(\lambda)| = |-e^{-t\lambda} - 1| \leq 2.$$

Po Lagrangeovem izreku sledi

$$|g_t(\lambda)|^2 = |g_t(\lambda) - g_t(0)|^2 \leq 4\lambda^2.$$

Zato je

$$\int 4\lambda^2 d\langle E_A(\lambda)x, x\rangle = ||2Ax||^2 < \infty.$$

Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci velja

$$||\frac{(Q(t) - I)f}{t} + Ax||^2 = \int_{\mathbb{R}} |g_t(\lambda)|^2 d\langle E_A(\lambda)x, x\rangle \to 0, \text{ ko gre } t \to 0.$$

Pokazali smo, da za $f \in \mathcal{D}(A)$ velja

$$-Af = \lim_{t\to 0} \frac{(Q(t) - I)f}{t}.$$

Definirajmo operator T s predpisom

$$Tf = \lim_{t\to 0} \frac{(Q(t) - I)f}{t}$$

in domeno

$$\mathcal{D}(T) = \Big\{ f \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \frac{(Q(t)-I)f}{t} \text{ obstaja} \Big\}.$$

Pokazali smo že, da je $-A \subseteq T$. Operator T je simetričen, kar lahko preverimo z računom

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_{t\to +} \langle \frac{Q(t)-I}{t} x, y\rangle = \lim_{t\to 0^+} \langle x, \frac{Q(t)-I}{t} y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Operator A je sebi-adjungiran, zato je $A = T$.

Denimo, da obstaja

$$y = \lim_{t\to 0^+} \frac{(Q(t)-I)f}{t}.$$

Potem velja

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(Q(-t)-I)f}{-t} = \lim_{t\to 0^+} Q(-t) \frac{(Q(t)-I)f}{t} = Iy = y.$$

Sledi

$$\lim_{t\to 0} \frac{(Q(t)-I)f}{t} = y,$$

oziroma $f \in \mathcal{D}(A)$ in $y = -Af$. $\square$

Opomba 5.3.13. Pokazali smo še, da za vsak $f \in \mathcal{D}(A)$ velja

$$-Af = \frac{d^+}{dt}\Big|_{t=0} Q(t)f.$$

Posledica 5.3.14. *Družina $\{e^{-tA} : t \geq 0\}$ iz Primera 5.2.25 je simetrična kontrakcijska krepko zvezna polgrupa z generatorjem A, kot v Primeru 5.2.26.*

Trditev 5.3.15. *Če je $x \in \mathcal{D}(A)$ in $t \in \mathbb{R}$, potem je $Q(t)x \in \mathcal{D}(A)$ in*

$$\frac{d}{dt} Q(t)x = -AQ(t)x = -Q(t)Ax.$$

Dokaz. Izberimo $f \in \mathcal{D}(A)$ in $t \geq 0$. Velja

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(Q(h)-I)Q(t)f}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(Q(t+h)-Q(t))f}{h} \\
&= Q(t) \lim_{h\to 0} \frac{(Q(h)-I)f}{h} = -Q(t)Af \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(Q(h)-I)\big(Q(t)f\big)}{h} = -AQ(t)f.
\end{aligned}$$

Sledi, da je $Q(t)f \in \mathcal{D}(A)$ in

$$-AQ(t)f = \frac{d}{dt} Q(t)f = -Q(t)Ax.$$ $\square$

5.3.3 Krepko zvezne simetrične operatorske polgrupe

Pokazali bomo še v obrat Trditve 5.3.15. Naj bo $Q = \{Q(t); t \geq 0\}$ krepko zvezna simetrična kontrakcijska enoparametrična operatorska polgrupa.

Izberimo $h \in \mathcal{H}$ in si oglejmo preslikavo $K\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, podano s predpisom

$$f \mapsto \int_0^\infty e^{-t} \langle Q(t)f, h\rangle dt.$$

Očitno je K linearna. Ker je

$$|Kh| \leq \int_0^\infty e^{-t} |\langle Q(t)f, h\rangle dt \leq \int_0^\infty e^{-t} ||Q(t)h||\ ||f|| dt \leq ||h||\ ||f||,$$

je K omejen linearni funkcional na $\mathcal{H}$. Po Rieszovem izreku obstaja natanko en $Rf \in \mathcal{H}$, da za vsak $h \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle Rf, h\rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle Q(t)f, h\rangle dt.$$

Z $f \in \mathcal{H}$ smo definirali integral

$$Rf = \int_0^\infty e^{-t} Q(t) f dt$$

v šibkem smislu. Očitno je R linearen operator.

Lema 5.3.16. *Operator R je pozitiven sebi-adjungiran kontrakcijski operator na $\mathcal{H}$, ki komutira z vsemi $Q(t), t \geq 0$.*

Dokaz. Pokažimo, da je R simetričen. Naj bosta $f, g \in \mathcal{H}$ poljubna, potem velja

$$\begin{aligned}\langle Rf, g\rangle &= \langle \int_0^\infty e^{-t} Q(t) f dt, g\rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle Q(t)f, g\rangle dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \langle f, Q(t)g\rangle dt = \langle f, \int_0^\infty e^{-t} Q(t) g dt\rangle = \langle f, Rg\rangle.\end{aligned}$$

Ker je $\mathcal{D}(R) = \mathcal{H}$ je R sebi-adjungiran. Lahko je videti, da je R pozitiven

$$\langle Rf, f\rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle Q(t)f, f\rangle dt \geq 0.$$

Za vsak $t \geq 0$ operator $Q(t)$ komutira z operatorjem R. □

Lema 5.3.17. *Operator R je injektiven in ima gosto sliko.*

Dokaz. Pokažimo, da je R injektiven. Denimo, da obstaja $f \in \mathcal{H}, f \neq 0, Rf = 0$. Velja

$$0 = \langle Rf, f\rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle Q(t)f, f\rangle dt > 0.$$

Zašli smo v protislovje, zato je R injektiven.

Pokažimo, da je $\mathcal{R}(R)$ gosta v $\mathcal{H}$. Denimo, da obstaja $f \in \mathcal{H}$ in $f \notin \overline{\mathcal{R}(R)}$. Potem mora biti $\langle Rf, f\rangle = 0$. Zadnje pa je možno le za $f = 0$, saj je R injektiven. Posledično je zaloga vrednosti R gosta v $\mathcal{H}$ in obstaja inverz R^{-1}. □

Posledica 5.3.18. *Obstaja gosto definirani linearni operator $R^{-1}\colon \mathcal{R}(R) \to \mathcal{H}$, tako da je $R^{-1}R = id_{\mathcal{H}}$ in $RR^{-1} = id_{\mathcal{R}(R)}$.*

Trditev 5.3.19. *Operator R^{-1} je sebi-adjungiran.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{D}(R^{-1}) = \mathcal{R}(R)$ obstaja tudi $(R^{-1})^*$. Ker je $\mathcal{R}(R)$ gosta v $\mathcal{H}$, je $\mathcal{N}(R^*)$ trivialno. Zato obstaja $(R^*)^{-1}$. Radi bi videli, da je $(R^*)^{-1}) = (R^{-1})^*$. Označimo z U in V operatorja s predpisoma

$$V\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H}, (x, y) \mapsto (y, x),$$

$$U\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H}, (x, y) \mapsto (-y, x).$$

Velja

$$\begin{aligned}\mathcal{G}((R^{-1})^*) &= U(\mathcal{G}(R^{-1})^{\perp}) = U(V(\mathcal{G}(R))^{\perp}) = U(V(\mathcal{G}(R)^{\perp})) \\ &= U^{-1}\mathcal{G}(R^*) = \mathcal{G}((R^*)^{-1}).\end{aligned}$$

Sledi, da je $(R^*)^{-1} = (R^{-1})^*$. □

Uvedimo operator $L = R^{-1} - I$. Operator I je omejen, R^{-1} pa ima gosto domeno, zato je po Lemi 5.1.16

$$L^* = (R^{-1})^* - I^* = R^{-1} - I = L$$

in L je sebi-adjungiran.

Trditev 5.3.20. *Za vsak $t \geq 0$ velja $Q(t)L \subseteq LQ(t)$.*

Dokaz. Izberimo $f \in \mathcal{D}(L)$. Ker je $\mathcal{D}(L) = \mathcal{R}(R)$, obstaja $g \in \mathcal{H}$, da je $f = Rg$. Poračunamo lahko

$$\langle Lf, f\rangle = \langle g, (R - R^2)g\rangle.$$

Naj bo E spektralna mera iz Izreka 5.2.21 za operator R. Nosilec mere E je vsebovan v $[0, 1]$, zato lahko ocenimo

$$\langle g, (R - R^2)g\rangle = \int_0^1 (\lambda - \lambda^2) d\langle E(\lambda)g, g\rangle \geq 0.$$

Posledično je operator L pozitiven.

Za vsak $t \geq 0$ po definiciji sledi $Q(t)R \subseteq RQ(t)$. Ker je $\mathcal{D}(Q(t)R) = \mathcal{H}$, sledi $Q(t)R = RQ(t)$. Potem je

$$R^{-1}Q(t) \supseteq R^{-1}Q(t)RR^{-1} = R^{-1}RQ(t)R^{-1} = Q(t)R^{-1}.$$

Sledi

$$Q(t)L = Q(t)R^{-1} - Q(t) \subseteq R^{-1}Q(t) - Q(t) = LQ(t).$$ □

Lema 5.3.21. *Za vsako sebi-adjungirano operatorsko polgrupo $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ in vsaka $t \geq 0, x \in \mathcal{H}$ velja*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} Q(s)x ds = Q(t)x.$$

Dokaz. Operatorska polgrupa Q je krepko zvezna, zato za vsak $\varepsilon > 0$, obstaja $\delta > 0$, da je za vsak $s \in [t, t+\delta]$

$$||(Q(s) - Q(t))x|| < \varepsilon.$$

Za $h \in (0, \delta]$ potem velja

$$||\frac{1}{h} \int_t^{t+h} (Q(s)x - Q(t)x) ds|| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} ||(Q(s) - Q(t))x|| ds \leq \varepsilon.$$

Sledi trditev leme. □

Lema 5.3.22. *Kadar sta izraza definirana, velja*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-h}Q(h) - I}{h} f = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-h}Q(h) - I}{h} f - f.$$

Dokaz. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-h}Q(h) - I}{h} f &= \lim_{h \to 0^+} \frac{(Q(h) - f) + (Q(h)(e^{-h} - 1))}{h} f \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{Q(h) - I}{h} f + \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h} \lim_{h \to 0^+} Q(h)x \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{Q(h) - I}{h} f - f. \end{aligned}$$

□

Trditev 5.3.23. *Za poljuben $\in \mathcal{H}$ in $t \geq 0$ velja*

$$\frac{d}{dt} Q(t)Rf = -LQ(t)Rf$$

$$\frac{d}{dt} e^{-tL}Rf = -Le^{-tL}Rf.$$

Dokaz. Spomnimo se definicije operatorja T s predpisom

$$Tf = \lim_{t \to 0^+} \frac{(Q(t) - I)f}{t}$$

in domeno

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ f \in \mathcal{H} : \lim_{t \to 0^+} \frac{(Q(t) - I)f}{t} \text{ obstaja} \right\}.$$

Radi bi videli, da je T gosto definiran. Po Lemi 5.3.21 velja

$$\begin{aligned} T\int_0^t Q(s)f ds &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big(\int_h^{t+h} Q(s)f ds - \int_0^t Q(s)f ds\Big) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big(\int_t^{t+h} Q(s)f ds - \int_0^h Q(s)f ds\Big) \\ &= Q(t)f - f. \end{aligned}$$

Pokazali smo

$$T\int_0^t Q(s)f ds = Q(t)f - f. \tag{5.2}$$

Zato je $\int_0^t Q(t)f ds \in \mathcal{D}(T)$. Po Lemi 5.3.21 sledi, da je $\mathcal{D}(T)$ gosta v $\mathcal{H}$.

Po Trditvi 5.3.15 vemo, da za $t \geq 0$ in $x \in \mathcal{H}$ velja

$$\frac{d}{dt}Q(t)x = TQ(t)x = Q(t)Tx. \tag{5.3}$$

Pokažimo, da za vsak $f \in \mathcal{H}$ velja

$$(T-I)^{-1} = -\int_0^\infty e^{-t}Q(t)f dt.$$

Oglejmo si polgrupo

$$\{e^{-t}Q(t) : t \geq 0\}.$$

Po Lemi 5.3.22 in Lemi 5.3.21 za vsak $f \in \mathcal{H}$ sledi

$$\begin{aligned} (T-I)\int_0^t e^{-s}Q(s)f ds &= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{e^{-h}Q(h)-I}{h} - I\right)\int_0^t e^{-s}Q(s)f ds \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-h}Q(h)-I}{h}\int_0^t e^{-s}Q(s)f ds \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_0^t e^{-(h+s)}Q(h+s)f ds - \int_0^t e^{-s}Q(s)f ds\right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_t^{h+t} e^{-s}Q(s)f ds - \int_0^h e^{-s}Q(s)f ds\right) \\ &= e^{-t}Q(t)f - f. \end{aligned}$$

Po Trditvi 5.3.15 in krepke zveznosti za vsak $g \in \mathcal{D}(T)$ velja

$$\begin{aligned} e^{-t}Q(t)g - g &= \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-s}Q(s))g ds \\ &= \int_0^t e^{-s}Q(t)Tg - e^{-s}Q(s)g ds \\ &= \int_0^t e^{-s}Q(t)(T-I)g ds. \end{aligned}$$

Pokazali smo

$$e^{-t}Q(t)f - f = (T-I)\int_0^t e^{-s}Q(s)f ds$$

in

$$e^{-t}Q(t)g - g = \int_0^t e^{-s}Q(s)(T-I)gds.$$

Operatorska polgrupa Q je kontrakcijska, zato je za vsak $f \in \mathcal{H}$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}Q(t)f = 0$$

in

$$\int_0^t e^{-s}Q(s)fds \to \int_0^\infty e^{-s}Q(s)fds.$$

Izkaže se, da je operator $T - I$ zaprt, zato po Trditvi 5.1.9 sledi

$$-f = (T-I)\int_0^\infty e^{-s}Q(s)fds$$

in

$$-g = \int_0^\infty e^{-s}Q(s)(T-I)gds.$$

Sledi $(T-I)^{-1} = -\int_0^\infty e^{-s}Q(s)fds$. Posledično je

$$T = I - R^{-1} = -L.$$

Ravnokar smo pokazali, da je $\mathcal{R}(R) \subseteq \mathcal{D}(T)$ in

$$\frac{d}{dt}Q(t)Rf = -LQ(t)Rf.$$

Hkrati smo videli, da je L generator enoparametrične polgrupe $\{e^{-tL} : t \geq 0\ \}$. Ker je $\mathcal{R}(R) \subseteq \mathcal{D}(B)$ po Trditvi 5.3.15 sledi

$$\frac{d}{dt}e^{-tL}Rf = -Le^{-tL}Rf. \qquad \square$$

Izrek 5.3.24. *Naj bo $\mathcal{H}$ separabilen Hilbertov prostor in $Q = \{Q(t); t \geq 0\}$ krepko zvezna enoparametrična operatorska polgrupa, ki sestoji iz samih sebi-adjungiranih operatorjev z normo največ 1. Tedaj obstaja natanko en pozitiven sebi-adjungiran linearen operator L, tako da velja*

$$Q(t) = e^{-tL}.$$

L je generator polgrupe Q.

Dokaz. Za $t \geq 0$ uvedimo funkcijo

$$\phi(t) = ||Q(t)Rf - e^{-tL}Rf||^2.$$

Po Trditvi 5.2.6 operatorja L in e^{-tL} komutirata. Ker je je $LR = I - R$, lahko po Leibnitzovem pravilu izračunamo

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(t) &= \frac{d}{dt}\langle Q(t)Rf - e^{-tL}Rf, Q(t)Rf - e^{-tL}Rf\rangle \\
&= \langle -LQ(t)Rf + Le^{-tL}Rf, Q(t)Rf - e^{-tL}Rf\rangle \\
&+ \langle Q(t)Rf - e^{-tL}Rf, -LQ(t)Rf + Le^{-tL}Rf\rangle \\
&= 2\langle Le^{-tL}Rf, Q(t)Rf\rangle - \langle LQ(t)Rf, Q(t)Rf\rangle - \langle Le^{-tL}Rf, e^{-tL}Rf\rangle \\
&= 2\langle e^{-tL}(I-R)f, Q(t)Rf\rangle - \langle Q(t)(I-R)f, Q(t)Rf\rangle \\
&\quad - \langle e^{-tL}(I-R)f, e^{-tL}Rf\rangle \\
&= 2\langle Q(t)e^{-tL}(I-R)f, Rf\rangle - \langle Q(2t)(I-R)f, Rf\rangle - \langle e^{-2tL}(I-R)f, Rf\rangle \\
&= \langle [2Q(t)e^{-tL} - Q(2t) - e^{-2tL}]f - [2Q(t)e^{-tL} - Q(2t) - e^{-2tL}]Rf, Rf\rangle \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da so nam ostali še sami omejeni operatorji in da je $||R|| \leq 1$. $\square$

Lema 5.3.25. *Naj bo (Ω, ν) verjetnostni prostor in $\mathcal{A}\colon L^2(\Omega,\nu) \to L^2(\Omega,\nu)$ nenegativen sebi-adjungiran operator. Označimo z $\{Q(t) = e^{-t\mathcal{A}}\}$ operatorsko polgrupo, ki jo generira $\mathcal{A}$. Ortogonalna projekcija $\mathcal{P}_0$ na $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ je za $f \in L^2(\Omega,\nu)$ podana z*

$$\mathcal{P}_0 f = \lim_{t\to\infty} Q(t)f.$$

Za poljuben $p \in (0,\infty)$ velja

1. *Operator $\mathcal{P}_0$ lahko razširimo do kontrakcijske projekcije na $L^p(\Omega,\nu)$. Velja $L^p(\Omega,\nu) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)} \oplus \mathcal{N}(\mathcal{A}_p)$.*

2. *$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{A}_p)$ je gost podprostor v $L^p(\Omega,\nu)$ in v $L^2(\Omega,\nu)$. Hkrati je $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}) \cap L^2(\Omega,\nu)$ gost v $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_p)}$.*

Dokaz. Izberimo $f \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$. Mera E_f je pozitivna in končna. Zato po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci sledi

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} ||Q(t)f - f||^2 &= \lim_{t\to\infty} ||\int_{\mathbb{R}^+} (e^{-t\lambda} - 1)dE(\lambda)f||^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} (1 - e^{-t\lambda})^2 dE_f(\lambda) \\
&\leq \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} (\lambda t)^2 dE_f(\lambda) \\
&= \lim_{t\to\infty} ||\int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)f||^2 t^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Pokazali smo, da je $\mathcal{P}_0 f = 0$ v krepkem smislu.

Izberimo še $f \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^{\perp}$. Potem za vsak $g \in \mathcal{H}$ velja $\langle f, \mathcal{A}g\rangle = 0$. Sledi

$$\langle \lim_{t\to\infty} e^{-t\mathcal{A}} f, \mathcal{A}g\rangle = \lim_{t\to\infty} \langle e^{-t\mathcal{A}} f, \mathcal{A}g\rangle = \lim_{t\to\infty} \langle f, e^{-t\mathcal{A}} \mathcal{A}g\rangle = \langle f, \lim_{t\to\infty} e^{-t\mathcal{A}} \mathcal{A}g\rangle = 0.$$

Sledi, da je $\mathcal{P}_0$ ortogonalna projekcija na $L^2(\Omega, \nu)$. Mera ν je končna, zato lahko operator $\mathcal{P}_0$ razširimo do kontrakcijske projekcije na $L^p(\Omega, \nu)$. Ostale trditve sledijo. □

5.3.4 Rešitev toplotne enačbe

Izrek 5.3.26. *Naj bo $\mathcal{D}$ gost podprostor v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ in $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ nenegativen simetričen operator. Privzemimo, da za vsak $f \in \mathcal{D}$ obstaja zvezno odvedljiva funkcija $u_f\colon [0, \infty) \to \mathbb{D}$, ki reši Cauchyjevo nalogo*

$$\begin{aligned} u_f' + Lu_f &= 0, \ \text{na } [0, \infty) \\ u_f(0) &= f. \end{aligned}$$

Potem lahko operator L zapremo in njegovo zaprtje je sebi-adjungiran operator.

Dokaz. Denimo, da obstajata dve rešitvi u_1 in u_2 za Cauchyjevo nalogo. Naj bo $v = u_1 - u_2$. Tedaj je $v' + Lv_f = 0$ in $v(0) = 0$. Sledi

$$\frac{d}{dt}||v(t)||^2 = -2\langle Lv(t), v(t)\rangle \leq 0.$$

Iz $v(0) = 0$ tedaj sledi $v \equiv 0$ oziroma $u_1 = u_2$. Posledično lahko za vsak $t \geq 0$ definiramo preslikavo

$$S(t)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

$$f \to u_f(t).$$

Naj bo L_F Friedrichova razširitev (glej [32]) operatorja L. Pokazali bomo, da je rešitev Cauchyjeve naloge na $\mathcal{D}(L_F)$ enaka

$$u_f(t) = e^{-tL_F} f.$$

Izberimo $t > 0$ in za $s > 0$ in $|h| < \frac{t}{2}$ uvedimo funkciji

$$f_h(\lambda) = \frac{1}{h}(e^{-(t+\lambda)x} - e^{-t\lambda}) + \lambda e^{-t\lambda}$$

in

$$g_s(\lambda) = e^{-s\lambda} - 1.$$

Po točkah velja $\lim_{h\to 0} f_h(\lambda) = 0$ in $\lim_{s\to 0} g_s(\lambda) = 0$. Ocenimo lahko

$$|g_s(\lambda)| \leq 2.$$

Po Lagrangeovem izreku za funkcijo $r(x) = e^{-x} + x - 1$ vemo, da obstaja $\eta \in (0, x)$, da velja

$$r(x) - r(0) = r'(\eta)|x|.$$

Torej lahko ocenimo

$$|e^{-x} + x - 1| \leq |x||1 - e^{-x}| \leq |x|e^{|x|}.$$

Sledi

$$|f_h(\lambda)| = \frac{1}{|h|}e^{-t\lambda}|e^{-h\lambda} - 1 + h\lambda| \leq \lambda e^{-t\lambda + |h|\lambda} \leq \lambda e^{-\frac{t\lambda}{2}} \leq \frac{2}{t}.$$

Označimo z E_F spektralno mero prirejeno operatorju L_F. Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci je

$$||\frac{1}{|h|}(u_f(t+h) - u_f(t)) + L_F u_f(t)||^2 = \int_0^\infty |f_h(\lambda)|^2 d\langle E_F(\lambda)f, f\rangle \to 0, \text{ za } h \to 0$$

in

$$||u_f(s) - u_f(0)||^2 = \int_0^\infty |g_s(\lambda)|^2 d\langle E_F(\lambda)f, f\rangle \to 0, \text{ za } s \to 0.$$

Sledi, da je $e^{-tL_F}f = u_f(t)$ rešitev Cauchyjeve naloge. Le-ta je enolična na $\mathcal{D}(L_F) \supseteq \mathcal{D}(L)$, zato $S(t) = e^{-tL_F}$ na $\mathcal{D}(L_F)$. Izberimo $f \in \mathcal{D}(L_F)$ in ocenimo

$$||S(t)f|| = ||e^{-tL_F}f|| \leq ||f||.$$

Torej je $S(t)$ omejen operator na gostem podprostoru v $\mathcal{H}$. Zato ga lahko enolično razširimo do omejenega sebi-adjungiranega operatorja na $\mathcal{H}$ z normo največ 1, ki ga zopet označimo s $S(t)$.

Na $\mathcal{D}(L_F)$ je

$$S(s+t) = \int_0^\infty e^{-(s+t)\lambda} dE_F = \int_0^\infty e^{-s\lambda} dE_F \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_F = S(s)S(t).$$

Zaradi omejenosti sledi enakost na celem $\mathcal{H}$. Po Lemi 5.3.11 je $S(t)$ krepko zvezna operatorska polgrupa.

Pokažimo sedaj, da je L esencialno sebi-adjungiran. Po Trditvi 5.3.18 je operator $(L_F + I)$ obrnljiv in njegov inverz je omejen. Zato je dovolj videti, da ima operator $L^* + I$ gosto sliko v $\mathcal{H}$ (glej [32, Trditev 3.8]). Denimo, da obstaja $x \in \mathcal{D}(L^*), L^*x = -x$. Za vsak $y \in \mathcal{D}(L)$ velja

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle x, S(t)y\rangle &= \langle x, \frac{d}{dt}S(t)y\rangle = \langle x, -L_F S(t)y\rangle \\ &= -\langle x, LS(t)y\rangle = -\langle L^*x, S(t)y\rangle = \langle x, S(t)y\rangle.\end{aligned}$$

Ob začetnem pogoju $S(0) = id$ je

$$\langle x, S(t)y\rangle = \langle x, y\rangle e^t$$

rešitev dobljene diferencialne enačbe za $t \geq 0$. Opazimo, da za vsak $t \geq 0$ velja ocena

$$e^t|\langle x, y\rangle| = |\langle x, S(t)y\rangle| \leq ||x||||S(t)y|| \leq ||x||||y||.$$

Sledi, da je $x \in \mathcal{D}(L)^\perp$, oziroma $x = 0$, saj je $\mathcal{D}(L)$ gosta v $\mathcal{H}$.

Pokazali smo, da je L esencialno sebi-adjungiran. Po Lemi 5.1.24 sledi, da je $\overline{L} = L_F$. □

5.3.5 Dokaz Trditve 2.1.1

Operator $u(t)$ je dobro definiran in $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Očitno je $u(0) = f$. Pokazati moramo še, da je $u(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Izberimo $t \in \mathbb{R}$. Vpeljimo oznake

$$\phi(x) = \cos(x) \quad \text{in} \quad \psi(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

$$\phi_t(x) = \phi(tx) \quad \text{in} \quad \psi_t(x) = \psi(tx).$$

Potem je

$$u(t) = \phi_t(\sqrt{\mathcal{A}})f + t\psi_t(\sqrt{\mathcal{A}})g.$$

Naj bosta za $|h| \leq |t|$ funkciji a_h in b_h podani s predpisoma

$$a_h(\lambda) = \frac{1}{h}\Big(\phi_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) - \phi_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) + h\lambda^{\frac{1}{2}}\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big),$$

$$b_h(\lambda) = \frac{1}{h}\Big((t+h)\psi_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) - t\psi_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) - h\cos(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big).$$

Po točkah velja $\lim_{h\to 0} a_h(\lambda) = 0$ in $\lim_{h\to 0} b_h(\lambda) = 0$. Po Lagrangeovem izreku obstajata $\zeta \in (t, t+h)$ in $\eta \in (t, t+h)$, da velja

$$\begin{aligned}
|a_h(\lambda)| &= \frac{1}{|h|}\Big|h\frac{\partial}{\partial t}\phi_t(\lambda^{\frac{1}{2}})\Big|_{t=\zeta} + h\lambda^{\frac{1}{2}}\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big| \\
&= \lambda^{\frac{1}{2}}|\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}t) - \sin(\lambda^{\frac{1}{2}}\zeta)| \\
&\leq 3\lambda|t|
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
|b_h(\lambda)| &= \frac{1}{|h|}\Big|h\frac{\partial}{\partial t}(t\psi_t(\lambda^{\frac{1}{2}}))\Big|_{t=\eta} - h\cos(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big| \\
&= |\cos(\lambda^{\frac{1}{2}}\eta) - \cos(\lambda^{\frac{1}{2}}t)| \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Označimo z E spektralno mero za $\mathcal{A}$ in z E' spektralno mero za $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$ (glej Trditev 6.7 [32]). Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci sledi

$$
\begin{aligned}
&||\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \Big(\cos(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)g - \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)f\Big)||^2 \\
=&\frac{1}{|h|}||[\phi_{t+h}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) - \phi_t(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) + h\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)]f \\
&\quad + [(t+h)\psi_{t+h}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) - t\psi_t(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) - h\cos(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)]g||^2 \\
=&\frac{1}{|h|}\Big(\int_0^\infty \Big|\phi_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) - \phi_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) + h\lambda^{\frac{1}{2}}\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big|^2 d\langle E(\lambda)f,f\rangle \\
+&\int_0^\infty \Big|(t+h)\psi_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) - t\psi_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) - h\cos(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big|^2 d\langle E'(\lambda)g,g\rangle\Big) \\
=&\int_0^\infty |a_h(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda)f,f\rangle + \int_0^\infty |b_h(\lambda)|^2 d\langle E'(\lambda)g,g\rangle \to 0, \quad \text{za} \quad h\to 0
\end{aligned}
$$

in

$$||g_s(\mathcal{A}) - f||^2 = \int_0^\infty |g_s(\lambda)|^2 d\langle E_A(\lambda)f,f\rangle \to 0 \text{ za } s\to 0.$$

Posledično je

$$u'(t) = \cos(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)g - \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)f.$$

Očitno je $u'(0) = g$. Uvedimo še funkcijo

$$\theta_t(\lambda) = \lambda\sin(\lambda t).$$

Naj bosta za $|h| \le |t|$ funkciji c_h in d_h podani s predpisoma

$$c_h(\lambda) = \frac{1}{h}\Big(\phi_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) - \phi_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) + h\lambda^{\frac{1}{2}}\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big)$$

in

$$d_h(\lambda) = \frac{1}{h}\Big(-\theta_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) + \theta_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) + h\lambda\cos(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big).$$

Po Lagrangeovem izreku obstajata $\zeta, \eta \in (h, t+h)$, s pomočjo katerih zopet ocenimo

$$
\begin{aligned}
|c_h(\lambda)| =& |-\lambda^{\frac{1}{2}}\sin(\zeta\lambda^{\frac{1}{2}}) + \lambda^{\frac{1}{2}}\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}t)| \\
&\le 2\sqrt{\lambda}
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
|d_h(\lambda)| &= |-\lambda\cos(\eta t) + \lambda\cos(\lambda^{\frac{1}{2}}t)| \\
&\le 2\lambda.
\end{aligned}
$$

Po Lesbeguovem izreku o dominirani konvergenci sledi

$$
\begin{aligned}
&||\frac{u'(t+h)-u'(t)}{h} + \Big(\mathcal{A}\cos(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)f + \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)g\Big)||^2 \\
=&\frac{1}{|h|}||[\phi_{t+h}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) - \phi_t(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) + h\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)]g \\
&\quad + [-\theta_{t+h}(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) + \theta_t(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) + h\mathcal{A}\cos(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)]f||^2 \\
=&\frac{1}{|h|}\Big(\int_0^\infty \Big|\phi_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) - \phi_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) + h\lambda^{\frac{1}{2}}\sin(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big|^2 d\langle E'(\lambda)g, g\rangle \\
+&\int_0^\infty \Big| - \theta_{t+h}(\lambda^{\frac{1}{2}}) + \theta_t(\lambda^{\frac{1}{2}}) + h\lambda\cos(\lambda^{\frac{1}{2}}t)\Big|^2 d\langle E(\lambda)f, f\rangle\Big) \\
=&\int_0^\infty |c_h(\lambda)|^2 d\langle E'(\lambda)g, g\rangle + \int_0^\infty |d_h(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda)f, f\rangle \to 0, \quad \text{za} \quad h \to 0.
\end{aligned}
$$

Torej je

$$u''(t) = -\mathcal{A}\cos(t\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})f - \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\sin(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}t)g.$$

Sedaj je jasno, da funkcija (2.1) reši dano Cauchyjevo nalogo. □

Literatura

[1] D. Bakry: Sur l'interpolation complexe des semi-groupes de diffusion, Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Math., Springer, **1372** (1989), 1–20.

[2] J. Bergh, J. Löfstrom, *Interpolation spaces: An introduction*, Springer Verlag, 1976.

[3] M. S. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[4] M. Brojan in J. Globevnik, *Analiza I*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2010.

[5] A. Carbonaro, O. Dragičević, *Functional calculus for generators of symmetric contraction semigroups*, verzija 6. 8. 2013, [ogled, 25. 10. 2013], `http://arxiv.org/abs/1308.1338v1`.

[6] M. Cowling, *Harmonic analysis on semigroups*, Ann. Math. (2). **117** (1983), 26–283.

[7] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, A. Yagi, *Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus*, J. Austral. Math. Soc. **60** (1996), 51–89.

[8] M. Cowling, S. Meda, *Harmonic analysis and ultracontractivity*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 733–752.

[9] G. Da Prato, *An Introduction to Infinite-Dimensional Analysis*, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 2006.

[10] O. Dragičević, S. Treil in A. Volberg, *A theorem about three quadratic forms*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), Art. ID rnn 072.

[11] O. Dragičević, A. Volberg, *Bellman functions and dimensionless estimates of Littlewood-Paley type*, J. Oper. Theory **56** (2006), no. 1, 167–198.

[12] O. Dragičević, A. Volberg, *Linear dimension-free estimates in the embedding theorem for Schrodinger operators*, J. London Math. Soc. (2) **85** (2012), 191–222.

[13] J. García-Cuerva, G. Mauceri, S. Meda, P. Sjögren in J. L. Torrea, *Functional Calculus for the Ornstein-Uhlenbeck Operator*, J. Funct. Anal. **183** (2001), 413–450.

[14] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **249**, Springer Verlag, New York, 2008.

[15] W. Hebisch, G. Mauceri in S. Meda, *Holomorphy of spectral multipliers of the Ornstein- Uhlenbeck operator*, J. Funct. Anal. **210** (2004), no. 1, 101–124.

[16] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in Lp spaces*, Acta Math. **104**, no. 1-2 (1960), 93–140.

[17] A. Klenke, *Probability theory A Comprehensive Course*, Universitext, Springer Verlag, London 2008.

[18] C. Kriegler, *Analyticity angle for non-commutative diffusion semigroups*, J. London Math. Soc. (2) **83** (2011), no. 1, 168–186.

[19] N. V. Krylov, *Introduction to the Theory of Random Processes*, Graduate Studies in Mathematics **43**, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[20] P. C. Kunstmann, Ž. Štrkalj: *H^∞–calculus for submarkovian generators*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**, no. 7 (2003), 2081–2088.

[21] B. Magajna, *Osnove teorije mere*, DMFA založništvo, Ljubljana, 2011.

[22] P. Malliavin, *Stochastic Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **313**, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[23] G. Mauceri, *Spectral multipliers for the Ornstein-Uhlenbeck operator*, (Italian) Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) *7* (2004), no. 3, 563-591.

[24] G. Mauceri, S. Meda in P. Sjogren, *Sharp estimates for the Ornstein-Uhlenbeck operator*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **3** (2004), no. 3, 447–480.

[25] S. Meda, *A general multiplier theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 639–647.

[26] F. Nazarov, S. Treil, *The Hunt for a Bellman function: applications to estimates of singular integral operators and to other classical problems in harmonic analysis*, St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 5, 721–824.

[27] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *The Bellman functions and two-weight inequalities for Haar multipliers*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 909–928.

[28] E. Nualart, *Lectures on Malliavin calculus and its applications*,verzija 2013, [ogled 20.5.2014], dostopno na `http://www.econ.upf.edu/docs/seminars/nualart.pdf`.

[29] E. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Probability and Its Applications, Springer Verlag, Berlin, 2006.

[30] W. Rudin, *Functional Analysis, Second edition*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[31] W. Rudin, *Real and Complex Analysis, Third edition*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[32] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics *265*, Springer Verlag, Dordrecht, 2012.

[33] E. M. Stein, *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970).

[34] A. S. Üstunel, *An Introduction to Analysis on Wiener Space*, Lecture notes in Mathematics **1610**, Springer Verlag, Berlin, 1995.