UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Jurij Volčič

Homološke lastnosti algeber prirezanih poti

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Matjaž Omladič

Ljubljana, 2014

Podpisani Jurij Volčič izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom *Homološke lastnosti algeber prirezanih poti* izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Matjaža Omladiča in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 10. 6. 2014 Podpis: ....

Zahvale

Mentorju prof. dr. Matjažu Omladiču se zahvaljujem za vse pogovore o magistrski temi, za spodbudo, komentarje in nasvete pri raziskovalnem delu ter za izkazano zaupanje.

Hvala tudi prof. dr. Masoudu Khalkhaliju za predloge in napotke o študiju ciklične homologije in njenem računanju.

Na koncu bi se zahvalil še družini, ki mi je omogočila pogoje za uspešen študij.

Kazalo

Program dela

V svojem magistrskem delu obravnavajte algebre prirezanih poti z vidika homoloških invariant. Do izomorfizma natančno določite Hochschildovo in ciklično homologijo algebre prirezanih poti, pri čemer naj bodo rezultati kar se da splošni glede na obliko tulca in lastnosti kolobarja koeficientov.

Podpis mentorja: ....

Homološke lastnosti algeber prirezanih poti

Povzetek

Naj bo A algebra prirezanih poti nad končnim tulcem in poljubnim komutativnim kolobarjem z enoto. Na primeru algebre A obravnavamo najpomembnejše homološke objekte, ki jih v splošnem lahko priredimo enotski asociativni algebri. Osnovno orodje je Bardzellova projektivna bimodulska resolucija algebre A, s pomočjo katere konstruiramo bikompleks $\mathcal{D}(A)$. Z uporabo teorije spektralnih zaporedij pokažemo, da ta bikompleks nosi vso informacijo o Hochschildovi in ciklični homologiji algebre A. Njegova relativno preprosta struktura nam omogoča, da izračunamo Hocschildove in ciklične homološke module skupaj z njihovo inverzno limito.

Homological properties of truncated quiver algebras

Abstract

Let A be a truncated quiver algebra over a finite quiver and an arbitrary commutative ring with unity. In the case of algebra A, we study the most important homological objects which can in general be assigned to any unital associative algebra. Our basic tool is Bardzell's projective bimodule resolution of algebra A by means of which we construct the double complex $\mathcal{D}(A)$. Using the theory of spectral sequences, we show that this double complex provides all the information about Hochschild and cyclic homology of algebra A. Its relatively simple structure enables us to compute Hochschild and cyclic homology modules together with their inverse limit.

Math. Subj. Class. (2010): 16E05, 16E40, 16G20, 16S36

Ključne besede: algebra prirezanih poti, projektivna bimodulska resolucija, Hochschildova homologija, ciklična homologija

Keywords: truncated quiver algebra, projective bimodule resolution, Hochschild homology, cyclic homology

POGLAVJE 1

Uvod

Pojem homologije se je naprej pojavil kot odgovor na potrebe topologije po številskih oziroma algebrajskih invariantah pri opisu geometrijskih objektov. Kasneje se je ta pristop razvil v samostojno in široko področje, ki ga poznamo pod imenom homološka algebra. Sedaj se homologija in podobni koncepti uporabljajo v večini matematičnih disciplin, med drugim tudi pri študiju asociativnih algeber.

V tej nalogi se ukvarjamo z izračunom dveh znanih homologij, ki ju lahko priredimo unitalni asociativni algebri A nad komutativnim kolobarjem z enoto. Hochschildovo homologijo kot najnaravnejšo homološko invarianto asociativne algebre sta prva predstavila Henri Cartan in Samuel Eilenberg v [**6**] sredi 50. let prejšnjega stoletja; ime sicer nosi po Gerhardu Hochschildu, ki je leta 1946 v [**13**] prvi razvil dualno teorijo, ki jo danes imenujemo Hochschildova kohomologija. Uporaba te homologije v K-teoriji in nekomutativni diferencialni geometriji je v 80. letih prejšnjega stoletja pripeljala do odkritja druge pomembne homološke teorije asociativnih algeber: Boris Tsygan je v [**23**] vpeljal ciklično homologijo, Alain Connes v [**8**] pa ciklično kohomologijo. Danes obe omenjeni homologiji igrata pomembno vlogo v različnih vejah matematike.

Kot se večkrat zgodi z abstraktno definiranimi matematičnimi objekti, je določanje Hochschildove in ciklične homologije neke konkretne algebre običajno netrivialen problem. Seveda je za nekatere najbolj standardne tipe algeber to vprašanje že rešeno; Jean-Louis Loday je na primer v [**16**] zbral opise obeh homologij za prosto algebro, grupno algebro, algebro polinomov in ovojno algebro Liejeve algebre. Določanje Hochschildove in ciklične homologije algebre A navadno poteka v treh korakih. Prvi korak je iskanje čim bolj preproste projektivne bimodulske resolucije dane algebre. To je neskončno eksaktno zaporedje projektivnih A-bimodulov, ki se na desni strani zaključi z epimorfizmom na A-bimodul A. V praksi je konstrukcija ugodne resolucije osnova za določanje vseh homologij in kohomologij algebre. Hochschildovo homologijo algebre A potem dobimo kot homologijo kompleksa, ki ga dobimo iz resolucije po tenzoriranju z bimodulom A. V drugem koraku torej želimo opisati Hochschildove homološke module do izomorfizma natančno. Zadnji korak pa je določanje cikličnih homoloških modulov s pomočjo zveze med Hochschildovo in ciklično homologijo ali uporabo teorije spektralnih zaporedij.

Zgoraj opisano shemo v tej nalogi uporabimo na primeru algebre prirezanih poti A nad poljubnim komutativnim kolobarjem z enoto. Ta algebra je po definiciji kvocient algebre poti nad tulcem oziroma usmerjenim multigrafom po odlikovanih idealih. Raziskovanje homoloških lastnosti teh algeber se je začelo s člankom [**3**] Michaela Bardzella leta 1997, v katerem je predstavil njihovo projektivno bimodulsko resolucijo, ki je dovolj enostavna, da dopušča nadaljnje izračune. Ta konstrukcija je temelj vseh kasnejših rezultatov, od katerih omenimo zgolj glavne. Leta 1999 je Ana Claudia Locateli v [**15**] določila dimenzije Hochschildove kohomologije algebre A nad poljem karakteristike 0, Emil Sköldberg pa v [**20**] Hochschildovo homologijo algebre A nad poljubnim komutativnim kolobarjem. Zadnjo referenco je Rachel Taillefer leta 2001 uporabila v [**22**] pri izračunu dimenzij ciklične homologije algebre A nad poljem karakteristike 0. Po nekaj letih zatišja so leta 2009 naslednji korak naredili Guillermo Ames, Leandro Cagliero in Paulo Tirao s člankom [**1**], v katerem so eksplicitno podali inverzni homotopski ekvivalenci med standardno resolucijo in Bardzellovo resolucijo. Sami so ta rezultat uporabili pri raziskovanju strukture Hochschildovega kohomološkega kolobarja algebre A, Tomohiro Itagaki in Katsunori Sanada pa sta s pomočjo tega rezultata v članku [**14**], ki je bil objavljen v tem letu, izračunala dimenzije ciklične homologije algebre A nad poljem pozitivne karakteristike. Ciklična homologija algebre prirezanih poti nad splošnim komutativnim kolobarjem je opisana v letos sprejetem avtorjevem članku [**26**].

Namen te naloge je opisati projektivno bimodulsko resolucijo in prej omenjeni homologiji za algebro prirezanih poti A nad poljubnim komutativnim kolobarjem z enoto. V drugem poglavju vpeljemo definicije in rezultate homološke algebre, ki so ključni za vso nadaljnjo vsebino; obravnavani objekti so kompleksi, resolucije, bikompleksi, spektralna zaporedja, inverzne limite in stopničaste strukture. Tretje poglavje je namenjeno definiciji Hochschildove in ciklične homologije ter predstavitvi njunih najosnovnejših lastnosti, med katerimi je najbolj pomembna povezava s projektivnimi bimodulskimi resolucijami. V četrtem poglavju vpeljemo tulce, algebre poti in algebre prirezanih poti skupaj z zgledi. Sledi peto poglavje, v katerem obravnavamo homološke lastnosti algeber poti; ta primer je precej lažji od glavnega cilja naloge, vendar je poučen in vsekakor v kontekstu. V šestem poglavju najprej obravnavamo Bardzellovo resolucijo in nato konstruiramo nov bikompleks, ki nosi vso informacijo o Hochschildovih in cikličnih homoloških modulih algebre A; zadnje dejstvo dokažemo s pomočjo spektralnih zaporedij. Ker je novi bikompleks dovolj preprost, ga v sedmem poglavju uporabimo za izračun Hochschildove in ciklične homologije. Iz glavnih izrekov, ki opisujejo Hochschildove in ciklične homološke module do izomorfizma natančno, izpeljemo tudi kvalitativno naravnane posledice in komentiramo položaj, ki ga zavzema razred algeber prirezanih poti v Happelovi in Hanovi domnevi.

POGLAVJE 2

Osnovna orodja

Najprej potrebujemo nekaj glavnih pojmov homološke algebre. Na začetku poglavja obravnavamo komplekse in bikomplekse, ki so potrebni za vpeljavo in obravnavo Hochschildove in ciklične homologije algebre; glavna vira tega poglavja sta [**18**] in [**16**], spektralna zaporedja pa so natančneje obravnavana v [**17**]. V drugem delu poglavja definiramo še inverzno limito in stopničaste kolobarje. V tem poglavju naj bo Λ poljuben kolobar; vsi moduli in homomorfizmi modulov pripadajo kategoriji ${}_{\Lambda}\mathbf{Mod}$. Kompozitum funkcij f in g označimo s fg.

1. Kompleksi in resolucije

Definicija 2.1. *Kompleks* $X = (X_\bullet, d)$ je zaporedje modulov in homomorfizmov

$$\cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \to \cdots ,$$

v katerem velja $d_{n+1}d_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

Homomorfizme d imenujemo *robne preslikave*; po definiciji velja $\operatorname{im} d \subseteq \ker d$. Elemente modula $\ker d$ imenujemo *cikli*, elemente modula $\operatorname{im} d$ pa *robovi*.

Definicija 2.2. *Homologija* kompleksa X je zaporedje $H_*(X) = \{H_n(X)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, kjer je $H_n(X) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$ n-ti homološki modul.

Definicija 2.3. *Preslikava kompleksov* $F : X \to X'$ je družina homomorfizmov $F_n : X_n \to X'_n$, za katere velja $d'_n F_n = F_{n+1} d_n$ za vse $n \in \mathbb{Z}$.

Definicija 2.4. Preslikavi $F, G : X \to X'$ sta *homotopni*, če obstaja družina homomorfizmov $h_n : X_n \to X'_{n+1}$, imenovana *homotopija preslikav*, da velja

$$F_n - G_n = d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$$

za vse $n \in \mathbb{Z}$. Tedaj pišemo $F \simeq G$.

Zaradi večje preglednosti indekse modulov in preslikav navadno spuščamo, kadar to ne vodi v dvoumnost.

Naj bodo oznake kot zgoraj; po definiciji preslikave kompleksov sklepamo, da velja $F(\ker d) \subseteq \ker d'$ in $F(\operatorname{im} d) \subseteq \operatorname{im} d'$; torej F inducira družino homomorfizmov med homološkimi moduli $F_* : H_*(X) \to H_*(X')$. Če je še $G : X' \to X''$ preslikava kompleksov, očitno velja $(FG)_* = F_* G_*$. Na tem mestu navedimo še klasičen rezultat o preslikavah kompleksov, katerega dokaz najdemo v [**18**] (izrek 4.1). Naj bo

$$0 \to X' \xrightarrow{F} X \xrightarrow{G} X'' \to 0$$

eksaktno zaporedje kompleksov; tu 0 pomeni ničelni kompleks. Potem obstaja funktorialno dolgo eksaktno zaporedje homologij

$$\cdots \to H_{n+1}(X'') \to H_n(X') \to H_n(X) \to H_n(X'') \to H_{n-1}(X') \to \cdots .$$

Brez podrobnosti opišimo preslikave, ki nastopajo v zgornjem zaporedju. Homomorfizma F_n in G_n inducirata $H_n(X') \to H_n(X)$ in $H_n(X) \to H_n(X'')$. Naj bo sedaj $[x''] \in H_{n+1}(X'')$ ekvivalenčni razred cikla $x'' \in \ker d''_{n+1}$. Potem je $x'' = g_{n+1}(x)$ za neki $x \in X_{n+1}$ in velja $g_n d_{n+1}(x) = d''_{n+1} g_{n+1}(x) = 0$, zato obstaja $x' \in X'_n$, da je $f_n(x') = d_{n+1}(x)$. Nato preverimo, da je predpis $[x''] \mapsto [x']$ dobro definiran homomorfizem $H_{n+1}(X'') \to H_n(X')$.

Homotopnost preslikav je ekvivalenčna relacija; ohranja se tudi pri aditivnih funktorjih, kot so recimo tenzoriranje z leve in desne ter kovariantna in kontravariantna verzija funktorja Hom. Ni težko premisliti, da homotopni preslikavi inducirata enaki družini homomorfizmov med homologijama. Naj bosta $F : X \to X'$ in $G : X' \to X$ taki preslikavi, da velja $FG \simeq \mathrm{id}_{X'}$ in $GF \simeq \mathrm{id}_X$; po prejšnjem razmisleku so homomorfizmi $F_* : H_*(X) \to H_*(X')$ in $G_* : H_*(X') \to H_*(X)$ paroma inverzni. V tem primeru se F in G imenujeta *homotopski ekvivalenci*, za kompleksa X in X' pa pravimo, da sta *homotopsko ekvivalentna*. Če za kompleks X velja $\mathrm{id}_X \simeq 0$, je X kompleks *kontraktibilen*; v tem primeru je X eksaktno zaporedje, homotopijo med identiteto in ničelno preslikavo pa imenujemo *skrčitvena homotopija*.

Sedaj se osredotočimo na poseben tip kompleksov, ki igra ključno vlogo pri določanju Hochschildove in ciklične homologije v konkretnih primerih. Naj bo M poljuben modul.

Definicija 2.5. Kompleks P skupaj s homomorfizmom $\mu : P_0 \to M$, ki ga imenujemo *augmentacija*, je *resolucija modula* M, če velja $P_n = 0$ za $n < 0$ in je

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\mu} M \to 0$$

eksaktno zaporedje. Resolucija je *prosta* oziroma *projektivna*, če so P_n prosti oziroma projektivni moduli za vse $n \geq 0$. Če za neki $n_0 \in \mathbb{N}$ velja $P_{n_0} \neq 0$ in $P_n = 0$ za vse $n > n_0$, je n_0 *dolžina* resolucije P.

Ker je vsak modul homomorfna slika prostega modula, proste resolucije modula M vedno obstajajo. Uporabnost projektivnih resolucij je razvidna iz naslednje trditve.

Trditev 2.6. *Naj bosta M in M' poljubna modula s projektivnima resolucijama P in P'. Potem za vsak homomorizem $f : M \to M'$ obstaja preslikava $F : P \to P'$, ki razširi f; to pomeni, da diagram*

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\mu} & M \\ \downarrow{\scriptstyle F_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ P'_0 & \xrightarrow{\mu'} & M' \end{array}$$

komutira. Poljubni taki preslikavi sta homotopni.

Dokaz te trditve najdemo v **[18]** (izrek 6.1), kjer je formulirana nekoliko močnejša različica. Ideja dokaza je v tem, da iskane homomorfizme konstruiramo induktivno s standardno uporabo projektivnosti modulov v zgornji vrstici in eksaktnosti v spodnji vrstici.

Če trditev 2.6 uporabimo v primeru dveh projektivnih resolucij P in P' modula M in postavimo $f = \mathrm{id}_M$, dobimo preslikavi $F : P \to P'$ in $F' : P' \to P$, ki razširjata identiteto na M. Drugi del trditve pove, da je preslikava FF' oziroma $F'F$

homotopna $\mathrm{id}_{P'}$ oziroma id_P. To pa pomeni, da sta poljubni projektivni resoluciji danega modula homotopsko ekvivalentni.

Denimo, da nas zanima homologija kompleksa X, ki pa je izomorfen $T(P)$, kjer je P projektivna resolucija nekega modula M in T aditiven funktor. Po prejšnjem premisleku lahko P nadomestimo s kakšno drugo projektivno resolucijo istega modula M, ki pa ima bolj enostavno strukturo in je primernejša za uporabo. To pomeni, da iščemo bolj praktične resolucije, ki so na primer končne ali periodične ali imajo druge posebne lastnosti.

2. Bikompleksi in spektralna zaporedja

DEFINICIJA 2.7. *Bikompleks* $X = (X_{\bullet,\bullet}, d^v, d^h)$ je mreža

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots & X_{p-1,q+1} \arrow[l] \arrow[d, "d^v_{p-1,q+1}"] & X_{p,q+1} \arrow[l, "d^h_{p,q+1}"'] \arrow[d, "d^v_{p,q+1}"] & X_{p+1,q+1} \arrow[l, "d^h_{p+1,q+1}"'] \arrow[d, "d^v_{p+1,q+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & X_{p-1,q} \arrow[l] \arrow[d, "d^v_{p-1,q}"] & X_{p,q} \arrow[l, "d^h_{p,q}"'] \arrow[d, "d^v_{p,q}"] & X_{p+1,q} \arrow[l, "d^h_{p+1,q}"'] \arrow[d, "d^v_{p+1,q}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & X_{p-1,q-1} \arrow[l] \arrow[d] & X_{p,q-1} \arrow[l, "d^h_{p,q-1}"'] \arrow[d] & X_{p+1,q-1} \arrow[l, "d^h_{p+1,q-1}"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

modulov in homomorfizmov, v kateri je vsak stolpec in vsaka vrstica kompleks, kvadrati pa antikomutirajo: $d^h_{p,q-1}d^v_{p,q} + d^v_{p-1,q}d^h_{p,q} = 0$.

Naslednjo definicijo omogoča identiteta

$$(d^v + d^h)^2 = (d^v)^2 + (d^v d^h + d^h d^v) + (d^h)^2 = 0.$$

DEFINICIJA 2.8. Vsakemu bikompleksu X priredimo *totalni kompleks* $\operatorname{Tot} X$ z moduli in robnimi preslikavami

$$(\operatorname{Tot} X)_n = \bigoplus_{p+q=n} X_{p,q}, \quad d = d^v + d^h : (\operatorname{Tot} X)_{n+1} \to (\operatorname{Tot} X)_n$$

za $n \in \mathbb{Z}$. *Homologija bikompleksa* X je definirana kot homologija totalnega kompleksa $\operatorname{Tot} X$.

DEFINICIJA 2.9. *Preslikava bikompleksov* $F : X \to X'$ je družina homomorfizmov $F_{p,q} : X_{p,q} \to X'_{p,q}$, ki je preslikava kompleksov na vsaki vrstici in vsakem stolpcu bikompleksa X.

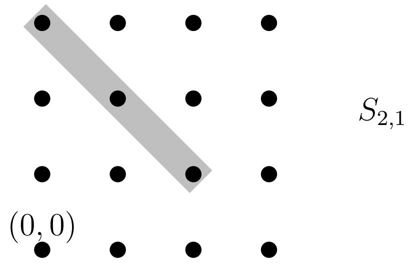
Od tu naprej se omejimo na bikomplekse, ki ležijo v prvem kvadrantu; to pomeni, da je $X_{p,q} = 0$ za $p < 0$ ali $q < 0$.

Homologijo totalnega kompleksa je navadno težko izračunati po definiciji, zato si pomagamo s spektralnimi zaporedji. Ta teorija obstaja v precej širšem kontekstu, kot pa je predstavljena v nadaljevanju; tu predstavimo le eno izmed dveh spektralnih zaporedij, ki ju priredimo bikompleksu. Naša izpeljava je podobna zapiskom [**24**]; splošnejšo različico teorije najdemo v [**17**].

Naj bo torej $X = (X_{\bullet,\bullet}, d^v, d^h)$ bikompleks v prvem kvadrantu. Za $p, q \in \mathbb{Z}$ označimo

$$S_{p,q} = \bigoplus_{l \geq 0} X_{p-l,q+l} \subseteq (\operatorname{Tot} X)_{p+q};$$

to je torej diagonalni trak v X od modula na položaju (p,q) do leve stranice, kot prikazuje naslednja skica.



Vidimo, da velja $S_{p,q} = S_{p-1,q+1} \oplus X_{p,q}$ in $d(S_{p,q}) \subseteq S_{p,q-1}$, kjer je $d = d^v + d^h$ robna preslikava totalnega kompleksa. Zato lahko za $r \geq 0$ definiramo

$$S^r_{p,q} = \{x \in S_{p,q} \colon d(x) \in S_{p-r,q+r-1}\}.$$

Ni težko premisliti, da imajo ti moduli naslednje lastnosti.

(a) $S^0_{p,q} = S_{p,q}$ in $d(S^r_{p,q}) \subseteq S_{p-r,q+r-1}$.
(b) Če je $x \in S_{p,q}$ cikel glede na d, je $x \in S^r_{p,q}$ za vse $r \geq 0$. V posebnem to velja za robove glede na d.
(c) Zaporedje $\{S^r_{p,q}\}_{r\geq 0}$ je padajoče glede na inkluzijo in je od $(p+1)$. člena dalje konstantno; dovolj pozni členi so enaki $S_{p,q} \cap \ker d$.
(d) Zaporedje $\{S^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}\}_{r\geq 1}$ je naraščajoče in konstantno od $(q+3)$. člena dalje. Za dovolj pozne člene velja $d(S^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}) = S_{p,q} \cap \operatorname{im} d$.
(e) $S^{r-1}_{p-1,q+1} = S^r_{p,q} \cap S_{p-1,p+1}$.

Po točkah (a), (b) in (e) lahko za $r \geq 1$ definiramo module

$$E^r_{p,q} = S^r_{p,q} \big/ \big(d(S^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}) + S^{r-1}_{p-1,q+1} \big) .$$

Po (a) in (b) robna preslikava d inducira homomorfizem

$$\partial^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}.$$

Za to preslikavo očitno velja $\partial^r \partial^r = 0$. Triparametrično družino modulov $E^r_{p,q}$ in robnih preslikav ∂^r imenujemo *spektralno zaporedje bikompleksa X (z ozirom na filtracijo po stolpcih)*. Pri danem številu r družino $\{E^r_{p,q}, \partial^r\}$ imenujemo *r-ti list* spektralnega zaporedja.

Po točkah (c) in (d) je pri fiksnih p in q zaporedje $\{E^r_{p,q}\}_{r\geq 1}$ od nekega člena naprej konstantno; ta limitni modul označimo z $E^\infty_{p,q}$. Naslednja lema povezuje homologijo bikompleksa z moduli E^∞.

LEMA 2.10. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja zaporedje modulov*

$$0 = Q_{-1} \subseteq Q_0 \subseteq \cdots \subseteq Q_n = H_n(\operatorname{Tot} X),$$

imenovano filtracija, za katerega velja

$$E^\infty_{p,n-p} \cong Q_p / Q_{p-1}$$

za $p = 0, \ldots, n$.

Opomba. V dokazu te leme uporabimo modularni zakon za mrežo podmodulov danega modula: za podmodule L in $L_1 \subseteq L_2$ v modulu M velja

$$(L + L_1) \cap L_2 = L \cap L_2 + L_1.$$

Dokaz leme 2.10. Naj bo $q = n - p$. Po definiciji $E^r_{p,q}$ ter točkah (c) in (d) velja

$$E^\infty_{p,q} = (S_{p,q} \cap \ker d)/(S_{p,q} \cap \operatorname{im} d + S_{p-1,q+1} \cap \ker d).$$

Označimo

$$Q_p = (S_{p,q} \cap \ker d + \operatorname{im} d)/\operatorname{im} d;$$

po definiciji velja $Q_{p-1} \subseteq Q_p$, $Q_{-1} = 0$ in $Q_n = H_n(\operatorname{Tot} X)$. Po izrekih o izomorfizmih in modularnem zakonu za mrežo podmodulov sledi

$$\begin{aligned} Q_p/Q_{p-1} &\cong (S_{p,q} \cap \ker d + \operatorname{im} d)/(S_{p-1,q+1} \cap \ker d + \operatorname{im} d) \\ &= (S_{p,q} \cap \ker d + S_{p-1,q+1} \cap \ker d + \operatorname{im} d)/(S_{p-1,q+1} \cap \ker d + \operatorname{im} d) \\ &\cong (S_{p,q} \cap \ker d)/((S_{p,q} \cap \ker d) \cap (S_{p-1,q+1} \cap \ker d + \operatorname{im} d)) \\ &= (S_{p,q} \cap \ker d)/(S_{p-1,q+1} \cap \ker d + S_{p,q} \cap \operatorname{im} d) \\ &= E^\infty_{p,q}. \end{aligned}$$

□

Ker je ∂^r robni homomorfizem, lahko obravnavamo homologijo r-tega lista glede na ∂^r; izkaže se, da tako dobimo naslednji list.

Lema 2.11. *Velja* $E^{r+1}_{p,q} \cong \ker \partial^r_{p,q}/\operatorname{im} \partial^r_{p+r,q-r+1}$.

Dokaz. Naj bo $x \in S^r_{p,q}$ predstavnik elementa iz $\ker \partial^r_{p,q}$. Tedaj je $d(x) = d(y) + z$ za neka $y \in S^{r-1}_{p-1,q+1}$ in $z \in S^{r-1}_{p-r-1,q+r}$. Potem je $x - y \in S_{p,q}$ in $d(x-y) \in S_{p-r-1,q+r}$, od tod pa sledi $x - y \in S^{r+1}_{p,q}$. Torej je $x = y + (x - y) \in S^{r-1}_{p-1,q+1} + S^{r+1}_{p,q}$. Obratno, če sta $u_1 \in S^{r-1}_{p-1,q+1}$ in $u_2 \in S^{r+1}_{p,q}$, potem je $d(u_1 + u_2) \in d(S^{r-1}_{p-1,q+1}) + S^{r-1}_{p-r-1,q+r}$. Dokazali smo, da velja

$$\ker \partial^r_{p,q} = \left(S^{r-1}_{p-1,q+1} + S^{r+1}_{p,q}\right)/\left(d(S^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}) + S^{r-1}_{p-1,q+1}\right).$$

Naj bo sedaj $x \in S^r_{p,q}$ predstavnik elementa iz $\operatorname{im} \partial^r_{p+r,q-r+1}$; tedaj obstajajo

$$u \in S^r_{p+r,q-r+1}, \quad y \in S^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}, \quad z \in S^{r-1}_{p-1,q+1},$$

da velja $x - d(u) = d(y) + z$. Torej je $x \in d(S^r_{p+r,q-r+1}) + S^{r-1}_{p-1,q+1}$. Zato lahko sklepamo, da velja

$$\operatorname{im} \partial^r_{p+r,q-r+1} = \left(d(S^r_{p+r,q-r+1}) + S^{r-1}_{p-1,q+1}\right)/\left(d(S^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}) + S^{r-1}_{p-1,q+1}\right).$$

Po točki (b) velja $d(S^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}) \subseteq S^r_{p,q}$; z uporabo izrekov o izomorfizmih in modularnega zakona za mrežo podmodulov dobimo

$$\begin{aligned} \ker \partial^r_{p,q}/\operatorname{im} \partial^r_{p+r,q-r+1} &\cong \left(S^{r-1}_{p-1,q+1} + S^{r+1}_{p,q}\right)/\left(d(S^r_{p+r,q-r+1}) + S^{r-1}_{p-1,q+1}\right) \\ &\cong S^{r+1}_{p,q}/\left(S^{r+1}_{p,q} \cap \left(d(S^r_{p+r,q-r+1}) + S^{r-1}_{p-1,q+1}\right)\right) \\ &= S^{r+1}_{p,q}/\left(d(S^r_{p+r,q-r+1}) + S^{r+1}_{p,q} \cap S^{r-1}_{p-1,q+1}\right). \end{aligned}$$

S tem smo dokaz zaključili, saj je

$$S^{r+1}_{p,q} \cap S^{r-1}_{p-1,q+1} = \{x \in S_{p-1,q+1} \colon d(x) \in S_{p-r,q+r-1}\} = S^r_{p,q}.$$

□

Denimo, da za neki $r \geq 1$ velja $\partial^s_{p,q} = 0$ za vse $p, q \geq 0$ in $s \geq r$. Po lemi 2.11 so od r-tega lista dalje vsi listi spektralnega zaporedja izomorfni; zato je $E^\infty = E^r$.

Naša definicija spektralnega zaporedja je precej tehnične narave; bolj uporabno obliko tega koncepta dobimo tako, da prva dva lista opišemo še na drug način.

Označimo s $\pi : S_{p,q} \to X_{p,q}$ kanonično projekcijo. Stolpci v X so kompleksi, zato lahko obravnavamo vertikalno homologijo vsakega stolpca. Definirajmo epimorfizem

$$S^1_{p,q} \to H^v_q(X_{p,\bullet}), \quad x \mapsto [\pi(x)];$$

ta predpis je smiseln, saj po definiciji robne preslikave d iz $d(x) \in S_{p-1,q}$ sledi $d^v(\pi(x)) = 0$. Naj bo sedaj $x \in S^1_{p,q}$ v jedru tega epimorfizma. Torej obstaja $y \in X_{p,q+1}$, da velja $\pi(x) = d^v(y)$. Potem je

$$x = d(y) + (x - \pi(x) - d^h(y)) \in d(S_{p,q+1}) + S_{p-1,q+1}.$$

Obratno, vsak element iz te vsote je v jedru zgornjega epimorfizma. Tako smo dokazali, da projekcija π inducira izomorfizem

$$E^1_{p,q} \cong H^v_q(X_{p,\bullet}).$$

Ker velja $d^v d^h + d^h d^v = 0$, preslikava d^h inducira homomorfizem vertikalnih homoloških modulov, ki ga označimo z δ^1; enostavno je preveriti, da diagram

$$\begin{tikzcd}
E^1_{p-1,q} \arrow[d, "\cong"] & E^1_{p,q} \arrow[l, "\partial^1"'] \arrow[d, "\cong"] \\
H^v_q(X_{p-1,\bullet}) & H^v_q(X_{p,\bullet}) \arrow[l, "\delta^1"]
\end{tikzcd}$$

komutira. Označimo s $H^h_p H^v_q(X)$ homološki modul na mestu (p, q) glede na robno preslikavo δ^1; potem po lemi 2.11 in pravkar dokazanem velja

$$E^2_{p,q} \cong H^h_p H^v_q(X).$$

Sedaj želimo poiskati preslikavo, ki v tem kontekstu ustreza ∂^2. Iščemo torej homomorfizem modulov δ^2, ki je natančno določen s komutativnostjo diagrama

$$\begin{tikzcd}
E^2_{p-2,q+1} \arrow[d, "\cong"] & E^2_{p,q} \arrow[l, "\partial^2"'] \arrow[d, "\cong"] \\
H^h_{p-2} H^v_{q+1}(X) & H^h_p H^v_q(X) \arrow[l, "\delta^2"]
\end{tikzcd}$$

Naj bo $x_0 \in X_{p,q}$ predstavnik elementa iz $H^h_p H^v_q(X)$. Potem je $x_0 \in \ker \delta^1$; to pomeni, da je $d^v(x_0) = 0$ in $d^h(x_0) = d^v(y_0)$ za neki $y_0 \in X_{p-1,q+1}$. Z desnim vertikalnim izomorizmom v zadnjem diagramu se ekvivalenčni razred elementa x_0 zato preslika v razred elementa $x_0 + y_0 \in S_{p,q}$. Ta se z ∂^2 preslika v razred elementa

$$d(x_0 - y_0) = d^v(x_0) + d^h(x_0) - d^v(y_0) - d^h(y_0) = -d^h(y_0) \in S_{p-2,q+1},$$

ki pa se z levim vertikalnim izomorfizmom preslika v razred elementa $-d^h(y_0)$ v $H^h_{p-2} H^v_{q+1}(X)$. Konstrukcijo preslikave δ^2 lahko ponazorimo z diagramom

$$\begin{tikzcd}
\star & \star \arrow[l, "-d^h"] \arrow[d, "d^v"] & \\
& \star & x_0 \arrow[l, "d^h"]
\end{tikzcd}$$

Ta postopek nadaljujemo induktivno in na vsakem koraku uporabimo lemo 2.11. Tako ugotovimo, da lahko modul $E^r_{p,q}$ realiziramo kot podkvocient na mestu (p,q) v bikompleksu. Ta opis je v konkretnih primerih priročnejši kot prvotna definicija, ki služi predvsem za izpeljavo lem 2.10 in 2.11.

Spektralna zaporedja so močno orodje pri dokazovanju v homološki algebri, vendar se ne pojavijo nujno v formulaciji problema. Tako je tudi pri naslednji pomembni trditvi. Homotopsko ekvivalentna kompleksa imata izomorfni homologiji; na podoben način si lahko pomagamo pri računanju homologije bikompleksov.

Trditev 2.12. *Naj bo $F : X \to X'$ preslikava bikompleksov, ki je homotopska ekvivalenca na vsakem stolpcu. Tedaj F inducira izomorfizem med $H_n(\operatorname{Tot} X)$ in $H_n(\operatorname{Tot} X')$.*

Dokaz. Po predpostavki F inducira izomorfizem $F^1 : E^1_{p,q} \to {E'}^1_{p,q}$. Ker je F preslikava bikompleksov, velja $Fd = d'F$ in zato $F^1\partial^1 = {\partial'}^1 F^1$. Potem F^1 po lemi 2.11 porodi izomorfizem $F^2 : E^2_{p,q} \to {E'}^2_{p,q}$. Glede na to, da je ∂^2 induciran z d, spet velja $F^2\partial^2 = {\partial'}^2 F^2$. Tako nadaljujemo z indukcijo in za vsak $r \geq 1$ dobimo družino izomorfizmov $F^r : E^r_{p,q} \to {E'}^r_{p,q}$, ki so inducirani s preslikavo F. V posebnem to pomeni, da preslikava F porodi izomorfizme $F^\infty : E^\infty_{p,q} \to {E'}^\infty_{p,q}$.

Naj bo sedaj $n \geq 0$ poljuben. Lema 2.10 nam da filtraciji $Q_0 \subseteq \cdots \subseteq Q_n$ in $Q'_0 \subseteq \cdots \subseteq Q'_n$ modulov $H_n(\operatorname{Tot} X)$ in $H_n(\operatorname{Tot} X')$. Ker velja $Fd = d'F$, je iz dokaza leme 2.10 razvidno, da F inducira homomorizme $\tilde{F}_i : Q_i \to Q'_i$, za katere velja $\tilde{F}_i(Q_{i-1}) \subseteq Q'_{i-1}$. Torej velja $Q_0 = E^\infty_{0,n} \cong {E'}^\infty_{0,n} = Q'_0$, za $p = 1, \ldots, n$ pa obstajajo komutativni diagrami

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{F}_{i-1}"] & Q_i \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{F}_i"] & E^\infty_{i,n-i} \arrow[r] \arrow[d, "F^\infty"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q'_{i-1} \arrow[r] & Q'_i \arrow[r] & {E'}^\infty_{i,n-i} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

z eksaktnimi vrsticami. Desna vertikalna preslikava je vedno izomorfizem. Pri $i = 1$ je tudi leva vertikalna preslikava izomorfizem, zato je po kratki lemi o petih tudi srednja vertikalna preslikava izomorfizem. Nadaljujemo na enak način z indukcijo; na koncu ugotovimo, da je $H_n(\operatorname{Tot} X) = Q_n \cong Q'_n = H_n(\operatorname{Tot} X')$. $\square$

3. Inverzna limita

V tem razdelku naj bo **Kat** kategorija kolobarjev ali kategorija modulov.

Definicija 2.13. Naj bosta $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\{f_n : X_n \to X_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedji objektov in morfizmov iz **Kat**. Objekt X skupaj z morfizmi $\pi_n : X \to X_n$ imenujemo *inverzna (ali projektivna) limita sistema* objektov X_n in morfizmov f_n, če veljajo enakosti $f_n\pi_n = \pi_{n-1}$ in naslednja univerzalna lastnost: za vsak objekt Y in morfizme $g_n : Y \to X_n$, ki zadoščajo $f_n g_n = g_{n-1}$, obstaja enolično določen morfizem

$\varphi : Y \to X$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ diagram

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[ddl, "g_n"'] \arrow[ddr, "g_{n-1}"] & \\
& X \arrow[dl, "\pi_n"] \arrow[dr, "\pi_{n-1}"'] & \\
X_n \arrow[rr, "f_n"'] & & X_{n-1}
\end{tikzcd}$$

komutira. Tedaj označimo $X = \varprojlim X_n$.

Splošnejšo definicijo in natančnejšo obravnavo najdemo v **[19]** (razdelek 5.2). V naši kategoriji je to konstrukcijo vedno mogoče narediti; definiramo

$$X = \left\{ (x_n)_n \in \prod_n X_n \colon f_n(x_n) = x_{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

za morfizme π_n pa izberemo ustrezne projekcije. Da se preveriti, da ima ta objekt željeno univerzalno lastnost, ki potem implicira enoličnost; natančen dokaz najdemo v prej navedenem viru.

ZGLED 2.14. Naj bo p praštevilo. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja naraven homomorfizem kolobarjev $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Inverzno limito $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ imenujemo *kolobar p-adičnih celih števil*. Njegove lastnosti so izčrpno opisane v **[10]**. Enostavno je preveriti, da je $\mathbb{Z}_p$ cel kolobar s karakteristiko 0, v katerem so vsi naravni večkratniki enote, ki so tuji glede na p, obrnljivi. Kasneje bomo potrebovali še eno netrivialno lastnost tega kolobarja, ki je dokazana v razdelku 3.4 prej navedene knjige: za vsak $m \in \mathbb{N}$, ki deli $p-1$, obstaja m-ti primitivni koren enote v $\mathbb{Z}_p$.

Po univerzalni lastnosti ni težko preveriti naslednjih dveh lastnosti inverzne limite.

- Če so v sistemu $\cdots \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0$ vse preslikave f_n izomorfizmi, potem lahko za inverzno limito izberemo modul X_0 skupaj s preslikavami $\pi_0 = \mathrm{id}$ in $\pi_n = (f_1 \cdots f_n)^{-1}$.
- Naj bo modul X s preslikavami $\pi_n : X \to X_n$ inverzna limita sistema $\cdots \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0$. Naj bo sedaj $f : X_0 \to X'$ poljubna linearna preslikava; potem je modul X s preslikavami π_n in $f\pi_0$ inverzna limita sistema $\cdots \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f} X'$.

V kasnejših poglavjih inverzne limite določamo zgolj s kombiniranjem in večkratno uporabo teh dveh lastnosti.

4. Stopničasti kolobarji in moduli

DEFINICIJA 2.15. Kolobar Λ je *stopničast*, če je enak direktni vsoti abelovih podgrup

$$\Lambda = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda_i,$$

za katere velja $\Lambda_i \Lambda_j \subseteq \Lambda_{i+j}$ za vse $i, j \in \mathbb{N}_0$; tej direktni vsoti pravimo tudi *stopničenje kolobarja*. Abelovo podgrupo Λ_i imenujemo *i-ta stopnica* kolobarja, njeni elementi pa so *homogeni stopnje i*; za $x \in \Lambda_i$ pišemo $|x| = i$.

Vsak kolobar Λ ima trivialno stopničenje $\Lambda_0 = \Lambda$ in $\Lambda_i = 0$ za $i \in \mathbb{N}$. Če ima kolobar enoto, k definiciji stopničenja dodamo še $1 \in \Lambda_0$. V definiciji stopničaste algebre nad komutativnim kolobarjem k (s trivialnim stopničenjem) dodatno zahtevamo, da so stopnice k-podmoduli.

Definicija 2.16. Ideal I v stopničastem kolobarju Λ je *homogen*, če je vsak njegov element vsota homogenih elementov iz tega ideala.

Po definiciji homogenega ideala sklepamo, da je tudi kvocientni kolobar stopničast, saj ima dekompozicijo

$$\Lambda/I = \bigoplus_{i=0}^{\infty}(\Lambda_i + I)/I.$$

Definicija 2.17. Modul M nad Λ je *stopničast*, če je enak direktni vsoti abelovih podgrup

$$M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i,$$

za katere velja $\Lambda_i M_j \subseteq M_{i+j}$. Homomorfizem $f : M \to M'$ je *stopničasta preslikava*, če velja $f(M_i) \subseteq M'_i$. *Stopničast podmodul* $N \subseteq M$ je podmodul s stopničenjem, ki zadošča $N_i = N \cap M_i$.

Ni težko premisliti, da sta jedro in slika stopničaste preslikave stopničasta podmodula. Enako kot prej razmislimo, da na kvocientu stopničastega modula po stopničastem podmodulu obstaja naravno stopničenje.

Te ugotovitve bodo kasneje zelo pomembne v naslednjem primeru: denimo, da je X bikompleks stopničastih modulov s stopničastimi robnimi preslikavami. Potem je tudi robna preslikava totalnega kompleksa stopničasta, stopničasti pa so tudi vsi členi spektralnega zaporedja kot v prejšnjem razdelku. Prav tako so vsi izomorfizmi, ki nastopajo v lemah 2.10 in 2.11, stopničaste preslikave. Potrebovali bomo tudi naslednji preprost rezultat.

Trditev 2.18. *Naj bo*

$$0 \to L \to M \to N \to 0 \tag{1}$$

kratko eksaktno zaporedje stopničastih modulov in denimo, da za vsak $i \in \mathbb{N}_0$ *velja* $L_i = 0$ *ali* $N_i = 0$. *Potem je vrstica* (1) *razcepna.*

Dokaz. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $L \subseteq M$ in $N = M/L$. Torej za vsak i velja $L \cap M_i = 0$ ali $(M_i + L)/L = 0$ oziroma $L_i = 0$ ali $L_i = M_i$. Označimo $S = \{j \colon L_j \neq 0\}$; potem je

$$\begin{aligned} M &= \bigoplus_{j \in S}(M_j \cap L) \oplus \bigoplus_{j \notin S} M_j/(M_j \cap L) \\ &\cong \bigoplus_{j \in S} L_j \oplus \bigoplus_{j \notin S}(M_j + L)/L \\ &\cong L \oplus M/L. \end{aligned}$$

□

POGLAVJE 3

Dve homološki teoriji

Naj bo k komutativen kolobar z enoto in A unitalna asociativna algebra nad k. V naslednjih dveh razdelkih definiramo Hochschildovo in ciklično homologijo algebre A. Zvezo med njima in njune skupne lastnosti obravnavamo v zadnjem razdelku. Definicije in oznake črpamo iz [**16**]. Tenzorski produkti v tem poglavju so večinoma tenzorski produkti k-modulov, zato namesto $\otimes_k$ pišemo $\otimes$. Zavoljo krajše notacije uporabljamo še zapis $(x_1, \dots, x_n)$ namesto $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.

1. Hochschildova homologija

Naj bo M A-*bimodul*; to pomeni, da je M levi in desni A-modul, pri čemer za delovanji velja $a(xb) = (ax)b$ in $\alpha x = x\alpha$ za vse $a, b \in A$, $x \in M$ in $\alpha \in k$. Za $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo k-module $C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$ in k-linearne preslikave $d_i : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$ s predpisi

$$\begin{aligned}
d_0(x, a_1, \dots, a_n) &= (xa_1, a_2, \dots, a_n), \\
d_i(x, a_1, \dots, a_n) &= (x, a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) \quad 0 < i < n, \\
d_n(x, a_1, \dots, a_n) &= (a_n x, a_1, \dots, a_{n-1})
\end{aligned}$$

ter označimo

$$b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i.$$

Preslikava b je na prvih dveh modulih tako podana s predpisoma

$$b(x, a_1) = xa_1 - a_1 x, \quad b(x, a_1, a_2) = (xa_1, a_2) - (x, a_1 a_2) + (a_2 x, a_1).$$

Ni težko preveriti, da velja $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ za $i < j$. Potem je

$$\begin{aligned}
b^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j d_j \right) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} d_i d_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i d_j \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} d_{j-1} d_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i d_j \\
&= \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j+1} d_j d_i + \sum_{j \geq i} (-1)^{j+i} d_j d_i = 0,
\end{aligned}$$

zato je b robna preslikava. Kompleks

$$\cdots \to C_n(A, M) \xrightarrow{b} C_{n-1}(A, M) \to \cdots \to C_1(A, M) \xrightarrow{b} C_0(A, M)$$

označimo s $C(A, M)$ in imenujemo *Hochschildov kompleks*.

Definicija 3.1. *Hochschildova homologija algebre A s koeficienti v M* je homologija Hochschildovega kompleksa. Označimo jo s $H_*(A, M)$.

Vlogo A-bimodula M najpogosteje igra kar algebra A, pri čemer je levo oziroma desno delovanje algebre A definirano kot množenje z leve oziroma z desne. V tem posebnem primeru uporabljamo oznaki $C(A) = C(A, A)$ in $HH_*(A) = H_*(A, A)$. Uvedba Hochschildove homologije je pravzaprav zelo naravna, saj natančno posnema definicijo simplicialne homologije v algebraični topologiji.

Hochschildov kompleks lahko dobimo tudi preko bimodulske resolucije algebre A. Z A^{op} označimo *nasprotno algebro*; ta algebra je kot k-modul enaka A, množenje v njej pa je definirano kot $a \cdot b = ba$, kjer je prva operacija produkt v A^{op}, druga operacija pa produkt v A. Sedaj definiramo *ovojno algebro* $A^e = A \otimes A^{op}$, katere množenje je definirano s predpisom $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes db$. S uvedbo tega pojma lahko A-bimodule predstavimo tudi na drugačen način; opazimo namreč, da lahko leve A^e-module identificiramo z A-bimoduli preko zveze $(a \otimes b)x = axb$.

Za $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo leve A^e-bimodule $C'_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ z delovanjem

$$(c_1 \otimes c_2)(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = (c_1 a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} c_2).$$

Definiramo še preslikave $b' : C'_{n-1}(A) \to C'_{n-2}(A)$ s predpisi

$$b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i,$$

pri čemer smo $C'_{n-1}(A)$ kot k-modul identificirali s $C_n(A)$ na samoumeven način. To so homomorfizmi levih A^e-modulov; kot prej premislimo, da velja $(b')^2 = 0$. Trdimo, da je kompleks $C'(A) = (C'_\bullet(A), b')$ skupaj z augmentacijo

$$d_0 : C'_0(A) \to A, \quad (x_0, x_1) \mapsto x_0 x_1$$

A^e-resolucija levega A^e-bimodula A. Označimo $C'_{-1}(A) = A$; dovolj je dokazati, da je kompleks k-modulov

$$\cdots \to C'_2(A) \xrightarrow{b'} C'_1(A) \xrightarrow{b'} C'_0(A) \xrightarrow{b'} C'_{-1}(A) \to 0$$

kontraktibilen. Za $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo k-linearno preslikavo $s : C'_{n-1}(A) \to C'_n(A)$ s predpisom $s(a_0, \ldots, a_n) = (1, a_0, \ldots, a_n)$. Ni težko preveriti, da velja $d_0 s = \mathrm{id}$ in $d_i s = s d_{i-1}$ za $i > 0$. Od tod po krajšem računu sklepamo, da je $sb' + b's = \mathrm{id}$, torej je s skrčitvena homotopija zgornjega kompleksa. $C'(A)$ imenujemo tudi *standardna bimodulska resolucija* algebre A.

Naj bo M A-bimodul; ekvivalentno lahko M opišemo kot desni A^e-modul z delovanjem $x(a \otimes b) = bxa$. Potem lahko preverimo, da je za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ linearna preslikava $\phi : M \otimes_{A^e} C'_n(A) \to C_n(A, M)$ s predpisom

$$x \otimes_{A^e} (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_{n+1} x a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

izomorfizem z inverzom $(x, a_1, \ldots, a_n) \mapsto x \otimes_{A^e} (1, a_1, \ldots, a_n, 1)$. Ker diagram

$$\begin{tikzcd} M \otimes_{A^e} C'_n(A) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes_{A^e} b'"] \arrow[d, "\phi"] & M \otimes_{A^e} C'_{n-1}(A) \arrow[d, "\phi"] \\ C_n(A, M) \arrow[r, "b"] & C_{n-1}(A, M) \end{tikzcd}$$

komutira, je ϕ izomorfizem kompleksov $M \otimes_{A^e} C'(A)$ in $C(A, M)$. Ta ugotovitev v večini konkretnih primerov zelo olajša računanje Hochschildove homologije. Če je A prost k-modul z bazo S, je

$$\{(1, x_1, \ldots, x_n, 1) \colon x_i \in S\}$$

baza A^e-modula $C'_n(A)$; torej je $C'(A)$ prosta bimodulska resolucija algebre A. Po zadnjem odstavku razdelka 2.1 je Hochschildova homologija $H_*(A, M)$ izomorfna homologiji kompleksa $M \otimes_{A^e} P$, kjer je P poljubna projektivna bimodulska resolucija algebre A.

Za Hochschildovo homologijo algebre veljajo rezultati splošne homološke teorije, ki jih najdemo na primer v [**18**]; z vidika asociativnih algeber ima še druge lastnosti, ki jih na kratko obravnavamo v zadnjem razdelku tega poglavja. Sedaj si oglejmo le interpretacijo nižjih homoloških modulov. Elemente modula

$$H_0(A, M) = M/\{ax - xa\colon a \in A,\ x \in M\}$$

imenujemo tudi *kovariante modula M glede na A*. V posebnem primeru $M = A$ velja $HH_0(A) = A/[A, A]$; če je A komutativna, je $HH_0(A) = A$.

Višji homolški moduli so v primeru komutativne algebre A tesno povezani z diferencialnimi formami na A. Najprej definiramo levi A-modul *Kählerjevih diferencialov $\Omega^1_{A|k}$*. Ta je generiran s simboli da za $a \in A$, ki zadoščajo relacijama

$$d(\lambda a + \mu b) = \lambda da + \mu db$$

in

$$d(ab) = adb + bda$$

za $\lambda, \mu \in k$ ter $a, b \in A$. Naj bo M simetričen A-bimodul; to pomeni, da je $ax = xa$ za $x \in M$ in $a \in A$. Trdimo, sta k-modula $H_1(A, M)$ in $M \otimes_A \Omega^1_{A|k}$ izomorfna. Ni težko premisliti, da je jedro surjektivne k-linearne preslikave $M \otimes A \to M \otimes_A \Omega^1_{A|k}$ s predpisom $(x, a) \mapsto x \otimes_A da$ generirano z elementi oblike

$$(x, ab) - (xa, b) - (xb, a).$$

Ker je M simetričen A-bimodul, je preslikava $b : C_1(A, M) \to C_0(A, M)$ enaka 0, zgornji elementi pa generirajo sliko preslikave $b : C_2(A, M) \to C_1(A, M)$. Torej zgornja preslikava inducira izomorfizem $\varphi : H_1(A, M) \to M \otimes_A \Omega^1_{A|k}$. V posebnem velja $HH_1(A) \cong \Omega^1_{A|k}$.

Kählerjeve diferenciale imenujemo tudi 1-forme; na enak način kot v analizi na mnogoterostih lahko z $\Omega^1_{A|k}$ konstruiramo višje diferencialne forme. Levi A-modul n-form definiramo kot

$$\Omega^n_{A|k} = \bigwedge_A^n \Omega^1_{A|k},$$

kjer je

$$M \wedge_A N = M \otimes_A N / \langle x \otimes_A y + y \otimes_A x\colon x \in M, y \in N\rangle$$

vnanji produkt A-bimodulov M in N. Kot v primeru 1-form obstajajo naravne linearne preslikave med $H_n(A, M)$ in $M \otimes_A \Omega^n_{A|k}$ za $n \geq 2$, ki pa niso nujno bijekcije za poljubno komutativno algebro A; več o tej temi najdemo v [**16**] (razdelek 1.3). Te ugotovitve so motivirale uporabo Hochschildove homologije kot nadomestek za diferencialne forme na nekomutativnih algebrah.

Omenimo še, da obstaja tudi kohomološka verzija koncepta, obravnavanega v tem razdelku. Hochschildova homologija je homologija kompleksa, ki ga dobimo iz standardne resolucije algebre A z uporabo funktorja $M \otimes_{A^e} \_$; *Hochschildovo kohomologijo* pa lahko definiramo kot homologijo kompleksa, ki ga dobimo iz standardne resolucije s funktorjem $\mathrm{Hom}_{A^e}(\_, M)$.

2. Ciklična homologija

Privzemimo vse oznake iz prejšnjega razdelka. Na k-modulu $C_n(A)$ lahko definiramo delovanje grupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; njen generator t_n deluje kot

$$t_n(a_0, \ldots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

Ta predpis linearno razširimo do *cikličnega operatorja* $t_n : C_n(A) \to C_n(A)$. Preverimo lahko, da t_n zadošča enakostim

$$\begin{aligned} d_0 t_n &= (-1)^n d_n, \\ d_i t_n &= -t_{n-1} d_{i-1} \quad 0 < i \leq n. \end{aligned}$$

Zavoljo poenostavljene notacije indeks n pri generatorju $t = t_n$ spuščamo, kadar to ne povzroča zmede; potem je

$$\begin{aligned} bt &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i t_n \\ &= (-1)^n d_n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i t_{n-1} d_{i-1} \\ &= (-1)^n d_n + t_{n-1} b' \\ &= b - b' + tb'. \end{aligned}$$

Označimo še $N = \mathrm{id} + t + \cdots + t^n$ in si oglejmo izraz

$$\begin{aligned} b'N &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} t_n^j \right) \\ &= \sum_{i \geq j} (-1)^i d_i t_n^j + \sum_{i<j} (-1)^i d_i t_n^j \\ &= \sum_{i \geq j} (-1)^i (-1)^j t_{n-1}^j d_{i-j} + \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^{n+j-1} t_{n-1}^{j-1} d_{i+n-j+1}; \end{aligned}$$

koeficient pred $(-1)^l d_l$ v zgornjem izrazu je enak

$$\sum_{0 \leq j \leq n-1-l} t^j + \sum_{n-l \leq j \leq n} t^j = N.$$

Torej t in N zadoščata relacijama

$$b(\mathrm{id} - t) = (\mathrm{id} - t) b', \quad Nb = b'N.$$

Ker je $t_n^{n+1} = \mathrm{id}$, velja še $(\mathrm{id} - t)N = N(\mathrm{id} - t) = 0$. Sedaj definiramo k-linearne preslikave $B : C_n(A) \to C_{n+1}(A)$ kot $B = (\mathrm{id} - t)sN$ oziroma eksplicitno s predpisoma

$$\begin{aligned} B(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} \Big(&(-1)^{ni} (1, a_i, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_{i-1}) \\ &+ (-1)^{n(i+1)} (a_{i-1}, 1, a_i, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_{i-2}) \Big). \end{aligned}$$

Preslikava B torej na prvih dveh modulih deluje s predpisom

$$B(a_0) = (1, a_0) + (a_0, 1), \quad B(a_0, a_1) = (1, a_0, a_1) - (a_1, 1, a_0) - (1, a_1, a_0) + (a_0, 1, a_1).$$

Po zgornjih enakostih velja

$$B^2 = (\mathrm{id} - t)sN(\mathrm{id} - t)sN = 0$$

in

$$\begin{aligned} Bb + bB &= (\mathrm{id} - t)sNb + b(\mathrm{id} - t)sN \\ &= (\mathrm{id} - t)sb'N + (\mathrm{id} - t)b'sN \\ &= (\mathrm{id} - t)(sb' + b's)N \\ &= (\mathrm{id} - t)N = 0, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je s skrčitvena homotopija standardne resolucije. To pomeni, da diagram

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
C_3(A) \arrow[d, "b"] & C_2(A) \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & C_0(A) \arrow[l, "B"'] \\
C_2(A) \arrow[d, "b"] & C_1(A) \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & C_0(A) \arrow[l, "B"'] & \\
C_1(A) \arrow[d, "b"] & C_0(A) \arrow[l, "B"'] & & \\
C_0(A) & & &
\end{tikzcd}$$

predstavlja bikompleks, ki ga označimo z $\mathcal{B}(A)$.

Definicija 3.2. *Ciklična homologija algebre* A je homologija bikompleksa $\mathcal{B}(A)$. Označimo jo s $HC_*(A)$ (franc. *homologie cyclique*).

V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko poleg Hochschildove homologije definiramo tudi Hochschildovo kohomologijo. Podobno obstaja pojem, ki je dualen ciklični homologiji. Homologijo bikompleksa, ki ga dobimo tako, da $\mathcal{B}(A)$ preslikamo s funktorjem $\mathrm{Hom}_k(\_, k)$, imenujemo *ciklična kohomologija algebre A*.

Če primerjamo načina vpeljave Hochschildove in ciklične homologije, je že na prvi pogled jasno, da je drugi koncept bolj skrivnosten kot prvi. Seveda izbira preslikav B v bikompleksu $\mathcal{B}(A)$ ni naključna, ampak izvira iz poglobljenega študija Hochschildove homologije. Zgodovinsko gledano so bile namreč preslikave B najprej definirane na nivoju homoloških modulov $HH_n(A)$, Connes pa je v [**8**] pokazal, da jih lahko smiselno definiramo že na ravni modulov $C_n(A)$. Namen te naloge ni raziskati razlogov za vpeljavo ciklične homologije, zato je nadaljevanje razdelka poteka na bolj informativni ravni.

Po definiciji je $HC_0(A) = HH_0(A)$. Naj bo sedaj A komutativna algebra. Kählerjeve diferenciale smo uvedli v prejšnjem razdelku; pokazali bomo, da velja

$$HC_1(A) \cong \Omega^1_{A|k}/dA.$$

V predhodnem razdelku smo pokazali, da predpis $(a, b) \mapsto adb$ določa izomorfizem $\varphi : HH_1(A) \to \Omega^1_{A|k}$. Elemente v $HH_1(A)$ zaradi enostavnosti zapisa enačimo z njihovimi predstavniki v $A \otimes A$. Ker je $b(1,1,a) = (1,a) - (1,a) + (a,1)$, v $HH_1(A)$ velja $(a,1) = 0$. Jasno je tudi, da je

$$HC_1(A) \cong HH_1(A)/\{(1,a) + (a,1)\colon a \in A\} = HH_1(A)/\{(1,a)\colon a \in A\}.$$

Ker se k-modul $\{(1,a)\colon a \in A\}$ s φ preslika natanko v k-modul dA, nam predpis $(a,b) \mapsto adb$ inducira iskani izomorfizem.

Naj bo A komutativna algebra; na koncu prejšnjega razdelka smo omenili, da so Hochschildovi homološki moduli povezani z diferencialnimi formami. Na formah algebre A lahko definiramo vnanji diferencial kot v klasičnem primeru diferencialnih form na mnogoterosti. Izkaže se (natančno obravnavo najdemo v [**16**], razdelek 2.3), da glede na korespondenco med diferencialnimi formami in Hochschildovo homologijo vlogo tega diferenciala igra preslikava B_*, ki jo inducira B iz bikompleksa $\mathcal{B}(A)$. Zato je ciklična homologija tesno povezana z de Rhamovo kohomologijo.

Posplošitev tega pogleda na nekomutativne algebre je pomembna v nekomutativni geometriji. Ciklična homologija kot analog de Rhamove kohomologije in ciklična kohomologija kot analog de Rhamove homologije sta se izkazali za pomembni orodji pri prenosu klasičnih rezultatov diferencialne geometrije v nekomutativno okolje. Uporaba ciklične (ko)homologije pa sega tudi v algebraično K-teorijo, teorijo števil in kvantno mehaniko.

3. Povezava med homologijama

Vsi stolpci v bikompleksu $\mathcal{B}(A)$ so Hochschildovi kompleksi $C(A)$, pri čemer je vsak naslednji pomaknjen za eno mesto navzgor. Oglejmo si vložitve in projekcije

$$C_n(A) \xrightarrow{I} C_n(A) \oplus C_{n-2}(A) \oplus \cdots \oplus C_{0/1}(A) \xrightarrow{S} 0 \oplus C_{n-2}(A) \oplus \cdots \oplus C_{0/1}(A)$$

za $n \in \mathbb{N}_0$; zapis $0/1$ v indeksu označuje ostanek pri deljenju n z 2. Enostavno je premisliti, da diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "b"] & C_n(A) \oplus C_{n-2}(A) \oplus \cdots \oplus C_{0/1}(A) \arrow[d, "b+B"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "I"] & C_{n-1}(A) \oplus C_{n-3}(A) \oplus \cdots \oplus C_{1-0/1}(A)
\end{tikzcd}$$

in

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \oplus C_{n-2}(A) \oplus \cdots \oplus C_{0/1}(A) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "b+B"] & 0 \oplus C_{n-2}(A) \oplus \cdots \oplus C_{0/1}(A) \arrow[d, "b+B"] \\
C_{n-1}(A) \oplus C_{n-3}(A) \oplus \cdots \oplus C_{1-0/1}(A) \arrow[r, "S"] & 0 \oplus C_{n-3}(A) \oplus \cdots \oplus C_{1-0/1}(A)
\end{tikzcd}$$

komutirata. Torej imamo kratko eksaktno zaporedje kompleksov

$$0 \to C(A) \xrightarrow{I} \operatorname{Tot} \mathcal{B}(A) \xrightarrow{S} \operatorname{Tot} \mathcal{B}(A)[2] \to 0,$$

kjer $[2]$ označuje zamik kompleksa za 2 člena v levo: $X[2]_\bullet = X_{\bullet-2}$. Po izreku o dolgem eksaktnem zaporedju homologij iz razdelka 2.1 dobimo *Connesovo eksaktno zaporedje*

$$\cdots \to HH_n(A) \xrightarrow{I_*} HC_n(A) \xrightarrow{S_*} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B_*} HH_{n-1}(A) \to \cdots.$$

Iz skice dokaza o konstrukciji vezne preslikave v dolgem zaporedju je razvidno, da je preslikava $HC_{n-2}(A) \to HH_{n-1}(A)$ res inducirana z B: če za $x \in (\operatorname{Tot}\mathcal{B}(A))_{n-2}$ velja $(b+B)(x) = 0$, za $0_n \oplus x \in (\operatorname{Tot}\mathcal{B}(A))_n$ velja

$$(b+B)(0 \oplus x) = B(x_{n-2}) \oplus 0 \in C_{n-1}(A) \oplus (\operatorname{Tot}\mathcal{B}(A))_{n-3}.$$

Opazimo, da so sodi oziroma lihi ciklični homološki moduli v zgornjem eksaktnem zaporedju povezani z linearnimi preslikavami S_*. Torej lahko z ozirom na razdelek 2.3 obravnamo inverzni limiti teh dveh sistemov.

Definicija 3.3. *Soda ciklična homologija algebre A je* k-modul

$$HC_{even}(A) = \varprojlim HC_{2n}(A),$$

liha ciklična homologija algebre A pa k-modul

$$HC_{odd}(A) = \varprojlim HC_{2n+1}(A).$$

Ta modula sta zanimiva, ker včasih povzemata bistvene lastnosti ciklične homologije. Pri algebrah, ki jih obravnavamo v tej nalogi, je slednje dobro razvidno v petem in sedmem poglavju; ta pojem nam namreč omogoča formulirati elegantne izreke.

Connesovo eksaktno zaporedje nam da pomembno zvezo med Hochschildovo in ciklično homologijo algebre. Običajno je precej lažje izračunati Hochschildovo homologijo kot ciklično homologijo, včasih pa nam to zaporedje lahko zelo pomaga tudi pri izračunu slednje, kot denimo v naslednjem primeru.

Naj bo sedaj A stopničasta algebra (na k privzamemo trivialno stopničenje). Potem je $A^{\otimes n+1}$ stopničast k-modul, v katerem velja

$$|(a_0, \ldots, a_n)| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|,$$

kjer so $a_i \in A$ homogeni elementi. Ničelna stopnica A_0 je k-podalgebra z enoto v A in velja $(A^{\otimes n+1})_0 = A_0^{\otimes n+1}$. Iz predpisov je razvidno, da so preslikave b in B stopničaste. Zato so tudi k-moduli $HH_n(A)$ in $HC_n(A)$ stopničasti, po prejšnjem pa velja $HH_n(A)_0 = HH_n(A_0)$ in $HC_n(A)_0 = HC_n(A_0)$. Zato sta upravičeni oznaki $\overline{HH}_n(A) = HH_n(A)/HH_n(A_0)$ in $\overline{HC}_n(A) = HC_n(A)/HC_n(A_0)$. Brez dokaza navedimo trditev, katere dokaz najdemo v **[16]** (izrek 4.1.13), ki pove, da lahko v tem primeru ob dodatnih pogojih na kolobar k Connesovo eksaktno zaporedje razcepimo na kratka eksaktna zaporedja.

Trditev 3.4. *Naj bo A stopničasta algebra nad komutativnim kolobarjem k, v katerem so vsi naravni večkratniki enote obrnljivi ($\mathbb{Q} \subseteq k$). Potem za $n \in \mathbb{N}$ obstajajo kratka eksaktna zaporedja*

$$0 \to \overline{HC}_{n-1}(A) \to \overline{HH}_n(A) \to \overline{HC}_n(A) \to 0.$$

Recimo, da je k polje karakteristike 0 in A stopničasta algebra. Homološki moduli so tedaj vektorski prostori in zato natanko določeni z dimenzijo nad poljem k. Označimo

$$\begin{aligned} h(n) &= \dim_k HH_n(A), \\ h_0(n) &= \dim_k HH_n(A_0), \\ c(n) &= \dim_k HC_n(A), \\ c_0(n) &= \dim_k HC_n(A_0). \end{aligned}$$

Če poznamo $HH_*(A)$ in $HC_*(A_0)$, lahko določimo tudi $HC_*(A)$, saj je po definiciji $c(0) = h(0)$, po trditvi 3.4 pa velja rekurzivna formula

$$c(n) = c_0(n) + (h(n) - h_0(n)) - (c(n-1) - c_0(n-1)).$$

Brez dokazov navedimo še nekaj skupnih lastnosti Hochschildove in ciklične homologije; sedaj je k spet splošen komutativen kolobar z enoto, A in A' pa enotski k-algebri.

- Naj bo $f : A \to A'$ homomorfizem enotskih k-algeber, za katerega velja $f(1) = 1$; potem za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ inducira k-linearno preslikavo

  $$C_n(A) \to C_n(A'), \quad (a_0, \ldots, a_n) \mapsto (f(a_0), \ldots, f(a_n)).$$

  Te preslikave k-modulov določajo preslikavo bikompleksov $\mathcal{B}(A) \to \mathcal{B}(A')$ ter zato inducirajo preslikave $HH_*(A) \to HH_*(A')$ in $HC_*(A) \to HC_*(A')$. To pomeni, da sta naši homologiji funktorja iz kategorije enotskih k-algeber v kategorijo zaporedij k-modulov.
- Homomorfizem algeber $f : A \to A'$ inducira izomorfizem Hochschildovih homologij natanko tedaj, ko inducira izomorfizem cikličnih homologij. Res, po prejšnji točki in funktorialnosti dolgega eksaktnega zaporedja imamo komutativen diagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HC_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & HH_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{n-2}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & HC_{n-1}(A') \arrow[r] & HH_n(A') \arrow[r] & HC_n(A') \arrow[r] & HC_{n-2}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HC_0(A) \arrow[r] \arrow[d] & HH_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & HC_0(A') \arrow[r] & HH_1(A') \arrow[r] & HC_1(A') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

  z eksaktnimi vrsticami, kjer so vertikalne preslikave inducirane s f. Obe implikaciji dokažemo induktivno glede na n, pri čemer baza indukcije velja zaradi enakosti $HH_0(A) = HC_0(A)$ in $HH_0(A') = HC_0(A')$, indukcijski korak pa dokažemo s pomočjo leme o petih.
- Po izreku 1.2.15 v [**16**] imamo kanonični izomorfizem

  $$HH_*(A \times A') \cong HH_*(A) \oplus HH_*(A'),$$

  ki je induciran s projekcijama. Ker pa ti projekciji inducirata tudi preslikavo Connesovih eksaktnih zaporedij za A in A', po lemi o petih z indukcijo sledi še

  $$HC_*(A \times A') \cong HC_*(A) \oplus HC_*(A').$$
- Po definiciji 1.2.5 v [**16**] sta algebri A in A' *Morita ekvivalentni*, če obstajata $A-A'$-bimodul P in $A'-A$-bimodul Q, da imamo izomorfizem A-bimodulov $P \otimes_{A'} Q \cong A$ in izomorfizem A'-bimodulov $Q \otimes_A P \cong A'$. Potem sta tudi njuni kategoriji levih modulov (ali desnih modulov ali bimodulov) naravno ekvivalentni. Po izrekih 1.2.7 in 2.2.9 v [**16**] sta Hochschildova in ciklična homologija invariantni glede na to ekvivalenco: če sta algebri A in A' Morita ekvivalentni, velja $HH_*(A) \cong HH_*(A')$ in $HC_*(A) \cong HC_*(A')$.

POGLAVJE 4

Algebra prirezanih poti

Povezan usmerjen multigraf v teoriji upodobitev asociativnih algeber imenujemo tulec, vsakemu tulcu pa lahko priredimo asociativno k-algebro z enoto. Kvocienti teh algeber so zelo pomembni; natančno obravnavo in študij njihovih lastnosti najdemo v knjigi [**2**]. S homološkega vidika obravnavamo le algebre prirezanih poti, ki so kvocienti algeber poti po idealih, generiranih z vsemi potmi dane dolžine. Po uvedbi glavnih pojmov in oznak predstavimo njihove osnovne lastnosti, nekaj primerov in reducirano obliko standardne resolucije iz razdelka 3.1.

1. Algebre poti in njihovi kvocienti

DEFINICIJA 4.1. *Tulec* (angl. *quiver*) je četverka $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, o, t)$, kjer sta Δ_0 in Δ_1 množici *vozlišč* in *puščic*, preslikavi $o, t : \Delta_1 \to \Delta_0$ pa predstavljata začetek (angl. *origin*) in konec (angl. *termination*) puščice. Tulec je *končen*, če sta množici vozlišč in puščic končni, in *povezan*, če je njemu prirejeni graf povezan.

Tulcu prirejeni graf iz zgornje definicije ima enako množico vozlišč kot tulec, povezava med vozliščema e in f v grafu pa obstaja natanko tedaj, ko za neko puščico a velja $o(a) = e$ in $t(a) = f$ ali $o(a) = f$ in $t(a) = e$.

Poleg glavne definicije uvedemo še nekaj izrazov in oznak. Zaporedje puščic $\alpha = a_1 \cdots a_l$ je *pot* dolžine $l \geq 1$, če velja $t(a_i) = o(a_{i+1})$ za vse $i = 1, \ldots, l-1$; tedaj pišemo $|\alpha| = l$. Množico vseh poti dolžine l označimo z Δ_l. Preslikavi o in t razširimo na Δ_l na samoumeven način: $o(\alpha) = o(a_1)$ in $t(\alpha) = t(a_l)$. Puščice identificiramo s potmi dolžine 1, vozlišča pa obravnavamo kot poti dolžine 0; torej za $e \in \Delta_0$ velja $o(e) = t(e) = e$.

Pot $\gamma \in \Delta_l$ imenujemo *cikel*, če velja $t(\gamma) = o(\gamma)$. Množico ciklov dolžine l označimo s $\mathcal{C}_l \subseteq \Delta_l$; v posebnem je $\mathcal{C}_0 = \Delta_0$, vozliščem pa pravimo tudi trivialni cikli. Cikle lahko vrtimo oziroma rotiramo; bolj formalno, na $\mathcal{C}_l$ imamo naravno delovanje grupe $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ z generatorjem $\rho(c_1 c_2 \cdots c_{l-1} c_l) = c_2 \cdots c_l c_1$; to delovanje je trivialno na množicah $\mathcal{C}_0$ in $\mathcal{C}_1$.

Naj bo k kolobar kot v prejšnjih poglavjih in označimo s $k\Delta_l$ (oziroma $k\mathcal{C}_l$) prost k-modul z bazo Δ_l (oziroma $\mathcal{C}_l$). Na modulu $k\Delta = \oplus_{l \geq 0} k\Delta_l$ definiramo produkt poti kot stik:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha\beta & t(\alpha) = o(\beta) \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

S k-linearno razširitvijo te delne operacije do množenja na $k\Delta$ dobimo strukturo asociativne algebre, ki jo imenujemo *algebra poti* (angl. *path algebra* ali *quiver algebra*). Ta je enotska natanko tedaj, ko je množica vozlišč končna; tedaj je njena enota enaka $1 = \sum_{e \in \Delta_0} e$. Od tu naprej obravnavamo zgolj končne povezane tulce. Če ima namreč tulec Δ dve komponenti Δ' in Δ'', potem velja $k\Delta = (k\Delta') \times (k\Delta'')$. Končnost pa je za nas pomembna, ker smo Hochschildovo in ciklično homologjio definirali le za enotske algebre.

Kasneje bo za nas pomembno naslednje preprosto opažanje. Algebra poti je stopničasta algebra, pri čemer so homogeni elementi natanko k-linearne kombinacije poti enake dolžine, njihova stopnja pa je enaka dolžini teh poti. Ničta stopnica $k\Delta_0$ je komutativna podalgebra z enoto, izomorfna direktnemu produktu $|\Delta_0|$ kopij kolobarja k, vse ostale stopnice pa so $k\Delta_0$-bimoduli.

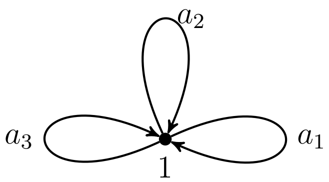
Sedaj si oglejmo dve vrsti tulcev, iz katerih dobimo z zgornjo konstrukcijo dobro poznane algebre.

Zgled 4.2. Tulec T_n ima vozlišča $e_1, \ldots, e_n$ in puščice $a_1, \ldots, a_{n-1}$, za katere velja $o(a_i) = e_i$ in $t(a_i) = e_{i+1}$. Slika

$$\begin{tikzcd} e_1 \arrow[r, "a_1"'] & e_2 \arrow[r, "a_2"'] & e_3 \end{tikzcd}$$

predstavlja T_3. Potem je kT_n izomorfna algebri zgornje trikotnih $n \times n$ matrik nad k. Izomorfizem podamo na bazi: enolično določeno pot od e_i do e_j za $i \leq j$ preslikamo v standardno bazno matriko E_{ij}.

Zgled 4.3. Naj bo tulec F_n podan z enim vozliščem in n zankami $a_1, \ldots, a_n$. Na sliki je prikazan F_3.



Očitno je kF_n prosta k-algebra nad simboli $a_1, \ldots, a_n$.

Ideal $I \subseteq k\Delta$ je *dopusten*, če velja $\langle \Delta_m \rangle \subseteq I \subseteq \langle \Delta_2 \rangle$ za neki $m \geq 2$; tedaj kvocient $A = k\Delta/I$ imenujemo *algebra omejenih poti*. Ta razred algeber je izjemno pomemben v teoriji upodobitev, ker obstajajo dobri opisi enostavnih, injektivnih in projektivnih levih A-modulov (**[2]**, tretje poglavje). Po drugi strani pa je ta družina precej velika; če je k algebraično zaprto polje, je po posledici 6.10 in izreku 3.7 v **[2]** vsaka končno razsežna k-algebra Morita ekvivalentna neki algebri omejenih poti.

Homološke lastnosti tega razreda algeber so v zadnjih dveh desetletjih intenzivno preučevali. Hochschildova in ciklična homologija splošne algebre omejenih poti danes še nista poznani, ker so s tega vidika dopustni ideali zaenkrat premalo obvladljivi. Z ozirom na definicijo algebre omejenih poti se je zato smiselno najprej omejiti na kvociente oblike $A = k\Delta/\langle \Delta_m \rangle$ za $m \geq 2$, ki bodo glavni objekti obravnave v nadaljevanju. Pravzaprav vse nadaljnje leme držijo tudi za primer $m = 1$, ki pa je tako ali tako trivialen, saj velja $k\Delta/\langle \Delta_1 \rangle \cong k^{|\Delta_0|}$. Algebro A imenujemo *algebra prirezanih poti* (angl. *truncated quiver algebra*).

Zavoljo bolj preglednega zapisa elemente algebre A, ki so sicer odseki po idealu $\langle \Delta_m \rangle$, označujemo kar z njihovimi predstavniki v $k\Delta$. Kot kvocient po homogenem idealu algebra A podeduje enoto in stopničenje $A = \bigoplus_{l=0}^{m} k\Delta_l$. Potrebujemo še oznako

$$A_+ = A/k\Delta_0 = \bigoplus_{l=1}^{m} k\Delta_l;$$

ta k-modul lahko obravnavamo kot kvocient ali podmodul k-modula A. Tako A kot A_+ sta $k\Delta_0$-bimodula.

Predstavimo še dva primera algeber prirezanih poti.

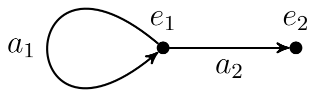
ZGLED 4.4. Naj bo A podalgebra v $m \times m$ matrikah nad k, ki je kot enotska k-algebra generirana z idempotentom in nilpotentom

$$x = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \end{bmatrix}.$$

Ni težko premisliti, da algebro A lahko podamo tudi z relacijami:

$$A = k\langle x, y \mid x^2 = x,\ y^m = 0,\ xy = 0\rangle.$$

V algebri poti $k\Delta$ tulca

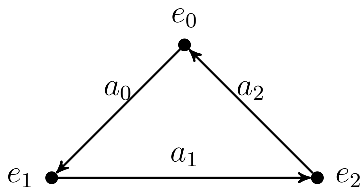


velja $e_1 = 1 - e_2$, $a_2 = (a_1 + a_2)e_2$ in $a_1 = (a_1 + a_2)(1 - e_2)$. Premislimo lahko, da je preslikava $k\Delta/\langle\Delta_m\rangle \to A$ s predpisom

$$e_2 \mapsto x, \quad a_1 + a_2 \mapsto y$$

izomorfizem algeber.

ZGLED 4.5. Za $m \geq 2$ lahko *kvazi-Frobeniusovo Nakayama algebro* ([**2**], razdelek 3, peto poglavje) definiramo kot $N_{n,m} = k\Delta/\langle\Delta_m\rangle$, kjer je Δ usmerjen cikel dolžine n: množici vozlišč in puščic sta enaki $\{e_i \colon i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ in $\{a_i \colon i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$, pri čemer velja $o(a_i) = e_i$ in $t(a_i) = e_{i+1}$ za vse $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; slika



torej predstavlja usmerjen cikel dolžine 3. Zaradi karakterističnih lastnosti, ki jih tu sicer ne obravnavamo, je ta družina algeber v teoriji upodobitev še posebno pomembna ([**2**], peto poglavje).

Če velja $m = n$ in je k cel kolobar, ki vsebuje n-ti primitivni koren enote ζ, dobimo *Taftovo algebro* Λ_n, ki jo je prvi obravnaval Earl Taft v [**21**]. Kolobar k je lahko na primer algebraično zaprto polje ustrezne karakteristike, kolobar $\mathbb{Z}[\zeta]$ za $\zeta = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$, ali pa kolobar p-adičnih celih števil $\mathbb{Z}_p$ iz zgleda 2.14 za tako praštevilo p, da n deli $p - 1$. Ponavadi to algebro podamo z relacijami

$$\Lambda_n = k\langle x, y \mid x^n = 1,\ y^n = 0,\ yx = \zeta xy\rangle.$$

To predstavitev dobimo iz opisa s tulcem tako, da postavimo $x = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i e_i$ in $y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$. Obratno, vozlišča e_i lahko predstavimo kot linearne kombinacije elementov x^j, saj je zaradi primitivnosti korena enote ζ Vandermondova matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-1} \\ 1 & \zeta^2 & \cdots & (\zeta^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \cdots & (\zeta^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix}$$

obrnljiva; puščice pa nato dobimo kot $a_i = e_i y$. Taftova algebra je zanimiva zaradi naslednje lastnosti, ki je natančneje obravnavana v [**21**]; če na njej definiramo

- komnoženje s predpisom $x \mapsto x \otimes x$, $y \mapsto 1 \otimes y + y \otimes x$,
- koenoto $x \mapsto 1$, $y \mapsto 0$ in
- antipodno preslikavo $x \mapsto x^{-1}$, $y \mapsto -\zeta^{-1}x^{-1}y$,

dobimo nekomutativno in nekokomutativno končno razsežno Hopfovo algebro, v kateri antipodna preslikava ni identiteta.

2. Reducirana standardna resolucija

Pokazali bomo, da lahko v primeru algebre prirezanih poti A standardno resolucijo iz razdelka o Hochschildovi homologiji nadomestimo z reducirano verzijo, ki je vmesni korak do še bolj poenostavljene projektivne resolucije, ki jo uvedemo kasneje. Preko te resolucije dobimo reducirano obliko bikompleksa $\mathcal{B}(A)$. Vsi rezultati tega razdelka veljajo tudi za algebro poti $k\Delta$ (pri tem je $(k\Delta)_+ = k\Delta/k\Delta_0$). Pri zapisu resolucij in kompleksov iz prejšnjega poglavja zaradi poenostavitve izpuščamo oznako za algebro.

Naslednjo lemo je v splošnejši obliki dokazal Claude Cibils v [**7**]. Kot je že bilo izpostavljeno, je $k\Delta_0$ komutativna algebra; za tenzorski produkt $\otimes_{k\Delta_0}$ nad tem kolobarjem uporabimo simbol $\bar{\otimes}$, namesto $x_1\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}x_n$ pa pišemo $(x_1, \ldots, x_n)$.

LEMA 4.6. *Za $n \geq 0$ naj bo*

$$\bar{C}'_n = A\bar{\otimes}A_+^{\bar{\otimes}n}\bar{\otimes}A.$$

Potem je zaporedje

$$\cdots \to \bar{C}'_2 \xrightarrow{\bar{b}'} \bar{C}'_1 \xrightarrow{\bar{b}'} \bar{C}'_0 \xrightarrow{\bar{b}'} A \to 0$$

projektivna A^e-resolucija algebre A, kjer so preslikave $\bar{b}'$ podane z analognimi predpisi kot homomorfizmi b' v definiciji standardne bimodulske resolucije iz razdelka 3.1.

DOKAZ. Dokaz eksaktnost zgornjega zaporedja je povsem enak kot dokaz eksaktnosti standardne bimodulske resolucije algebre A v razdelku 3.1. Zato je potrebno pokazati le, da so $\bar{C}'_n$ projektivni levi A^e-moduli.

Najprej opazimo, da imamo direktno vsoto A^e-modulov

$$A^e = \bigoplus_{e,f\in\Delta_0} Ae \otimes fA.$$

Zato so vsi A^e-moduli $Ae \otimes fA$ projektivni. Ker velja $\bar{C}'_0 = \bigoplus_{e\in\Delta_0} A(e,e)A$ in $A(e,e)A \cong Ae \otimes eA$ za vsak $e \in \Delta_0$, je $\bar{C}'_0$ projektiven modul. Naj bo sedaj $n \geq 1$ in označimo z U_n množico vseh elementov v $\bar{C}'_n$ oblike $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$, kjer so $\alpha_i \in A_+$ poti, ki zadoščajo $t(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1})$. Ni težko premisliti, da imamo razcep $\bar{C}'_n = \bigoplus_{u\in U_n} AuA$ v smislu A^e-modulov. Zato je dovolj pokazati, da so moduli AuA projektivni. To pa je res, saj velja

$$A(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)A \cong Ao(\alpha_1) \otimes t(\alpha_n)A.$$

$\square$

Iz reducirane standardne resolucije najprej izpeljemo reduciran Hochschildov kompleks. Naj bo $\pi : A \to A_+$ kanonična projekcija. Potem predpisi

$$\phi : C'_n \to \bar{C}'_n, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \mapsto (\alpha_0, \pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n), \alpha_{n+1})$$

tvorijo preslikavo kompleksov $\phi : C' \to \bar{C}'$; ker je A prost k-modul, je po ugotovitvi iz razdelka 3.1, trditvi 2.6 in lemi 4.6 preslikava ϕ homotopska ekvivalenca. Ker v $A \otimes_{A^e} \bar{C}'_n$ velja

$$\begin{aligned} 1 \otimes_{A^e} (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) &= 1 \otimes_{A^e} (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\alpha_0) \\ &= 1 \otimes_{A^e} (\alpha_{n+1}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1), \end{aligned}$$

ni težko premisliti, da elementi k-modula $A \otimes_{A^e} \bar{C}'_n$ oblike

$$\alpha_0 \otimes_{A^e} (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1), \quad t(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1}),\ t(\alpha_n) = o(\alpha_0),$$

kjer so α_i poti, tvorijo k-bazo. Potem očitno obstaja izomorfizem $A \otimes_{A^e} \bar{C}'_n \cong \bar{C}_n$, kjer je k-modul $\bar{C}_n \subseteq A \bar{\otimes} A_+^{\bar{\otimes} n}$ generiran z elementi oblike

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n), \quad t(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1}),\ t(\alpha_n) = o(\alpha_0).$$

Preko tega izomorfizma lahko robne preslikave $1 \otimes_{A^e} \bar{b}'$ nadomestimo s preslikavami $\bar{b}$, ki so na nivoju oznak podane z enakimi predpisi kot robne preslikave b v običajnem Hochschildovem kompleksu C. Zato velja $\Phi b = \bar{b}\Phi$, kjer je

$$\Phi : C \xrightarrow{\cong} A \otimes_{A^e} C' \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{A^e} \phi} A \otimes_{A^e} \bar{C}' \xrightarrow{\cong} \bar{C}$$

homotopna ekvivalenca kompleksov; torej je $HH_*(A) \cong H_*(\bar{C})$.

Naj bo $\bar{B} : \bar{C}_n \to \bar{C}_{n+1}$ podana s predpisom

$$\bar{B}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} (1, \alpha_i, \ldots, \alpha_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}).$$

Najprej opazimo, da diagram

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xleftarrow[B]{} & C_n \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ \bar{C}_{n+1} & \xleftarrow[\bar{B}]{} & \bar{C}_n \end{array}$$

komutira; iz enakosti

$$(\bar{B}^2)\Phi = \Phi(B^2) = 0, \quad (\bar{b}\bar{B} + \bar{B}\bar{b})\Phi = \Phi(bB + Bb) = 0$$

zaradi surjektivnosti preslikave Φ sledi $\bar{B}^2 = 0$ in $\bar{b}\bar{B} + \bar{B}\bar{b} = 0$. Zato diagram

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] \\
\bar{C}_3 \arrow[d, "\bar{b}"] & \bar{C}_2 \arrow[l, "\bar{B}"'] \arrow[d, "\bar{b}"] & \bar{C}_1 \arrow[l, "\bar{B}"'] \arrow[d, "\bar{b}"] & \bar{C}_0 \arrow[l, "\bar{B}"'] \\
\bar{C}_2 \arrow[d, "\bar{b}"] & \bar{C}_1 \arrow[l, "\bar{B}"'] \arrow[d, "\bar{b}"] & \bar{C}_0 \arrow[l, "\bar{B}"'] & \\
\bar{C}_1 \arrow[d, "\bar{b}"] & \bar{C}_0 \arrow[l, "\bar{B}"'] & & \\
\bar{C}_0 & & &
\end{tikzcd}$$

predstavlja bikompleks, ki ga označimo z $\bar{\mathcal{B}}$, preslikavo Φ pa lahko obravnavamo kot preslikavo bikompleksov $\mathcal{B} \to \bar{\mathcal{B}}$. Sedaj velja $HC_*(A) \cong H_*(\operatorname{Tot} \bar{\mathcal{B}})$ po trditvi 2.12.

Reducirani bikompleks $\bar{\mathcal{B}}$ nosi vso informacijo o Hochschildovi in ciklični homologiji algebre (prirezanih) poti, vendar ju iz njega še ne moremo izračunati; konec koncev je ta kompleks še vedno zelo podoben začetnemu bikompleksu $\mathcal{B}$. Služi pa kot posrednik do bolj priročnega bikompleksa, ki je predstavljen v nadaljevanju.

POGLAVJE 5

Homološke lastnosti algebre poti

V tem poglavju najprej konstruiramo kratko projektivno bimodulsko resolucijo algebre poti $k\Delta$. S tenzoriranjem dobimo kompleks, katerega homologija je izomorfna Hochschildovi homologiji po trditvi 2.6. Določimo tudi eksplicitno homotopsko ekvivalenco med tem kompleksom in reduciranim Hochschildovim kompleksom. Izkaže se, da lahko kopije novega kompleksa povežemo s horizontalnimi preslikavami in tako dobimo bikompleks, pri čemer se prej omenjena homotopska ekvivalenca razširi do preslikave med novim bikompleksom in bikompleksom $\bar{\mathcal{B}}$. Ker je bimodulska resolucija dovolj kratka, je novi bikompleks zelo enostaven, zato ni težko izračunati njegove totalne homologije, ki je po trditvi 2.12 izomorfna ciklični homologiji algebre $k\Delta$.

LEMA 5.1. *Označimo $P_0 = k\Delta\bar{\otimes}k\Delta$ in $P_1 = k\Delta\bar{\otimes}k\Delta_1\bar{\otimes}k\Delta$; zaporedje*

$$\cdots \to 0 \to P_1 \xrightarrow{d_1'} P_0 \xrightarrow{d_0'} k\Delta \to 0$$

je projektivna $(k\Delta)^e$-resolucija algebre $k\Delta$, kjer sta homomorfizma d_0' in d_1' podana s predpisoma

$$d_0'(1,1) = 1, \quad d_1'(1,a,1) = (a,1) - (1,a)$$

za poljuben $a \in \Delta_1$.

DOKAZ. Očitno je $d_0'd_1' = 0$. Definiramo homomorfizma levih $k\Delta$-modulov

$$h_0 : k\Delta \to P_0, \quad 1 \mapsto (1,1)$$

in

$$h_1 : P_0 \to P_1, \quad (1, a_1 \cdots a_m) \mapsto -\sum_{j=1}^{m}(a_1 \cdots a_{j-1}, a_j, a_{j+1} \cdots a_m).$$

Zadnjo definicijo razumemo v naslednjem smislu: $h_1(1,e) = 0$ za $e \in k\Delta_0$,

$$h_1(1,a) = (1,a,1), \quad h_1(1,ab) = (1,a,b) + (a,b,1)$$

in tako naprej. Z enostavnim računom preverimo, da veljajo enakosti

$$\begin{aligned} d_0'h_0 &= \mathrm{id}, \\ h_0d_0' + d_1'h_1 &= \mathrm{id}, \\ h_1d_1' &= \mathrm{id}; \end{aligned}$$

zato je $\{h_0, h_1\}$ skrčitvena homotopija. Torej je dano zaporedje res bimodulska resolucija algebre $k\Delta$. Projektivnost bimodulov P_0 in P_1 utemeljimo na enak način kot v dokazu leme 4.6 iz prejšnjega poglavja; pri tem upoštevamo, da velja

$$A(1,a,1)A \cong Ao(a) \otimes t(a)A.$$

□

POSLEDICA 5.2. *Za poljuben $k\Delta$-bimodul M in vse $n \geq 2$ velja $H_n(k\Delta, M) = 0$ in $H^n(k\Delta, M) = 0$.*

Dokaz. Sledi neposredno iz leme 5.1 in trditve 2.6 oziroma komentarja po njej. $\square$

Opazimo, da lahko za bazi k-modulov P_0 in P_1 izberemo množici

$$\{(\alpha, \beta)\colon \alpha \text{ in } \beta \text{ poti}, \ t(\alpha) = o(\beta)\}$$

in

$$\{(\alpha, a, \beta)\colon a \in \Delta_1, \ \alpha \text{ in } \beta \text{ poti}, \ t(\alpha) = o(a), \ t(a) = o(\beta)\}.$$

Na enak način kot v razdelku 4.2 razmislimo, da imata k-modula $k\Delta \otimes_{(k\Delta)^e} P_0$ in $k\Delta \otimes_{(k\Delta)^e} P_1$ bazi

$$\{\gamma \otimes_{(k\Delta)^e} (1,1)\colon \gamma \text{ cikel}\}, \quad \{\gamma' \otimes_{(k\Delta)^e} (1,c,1)\colon c \in \Delta_1, \ \gamma' c \text{ cikel}\}.$$

Zato imamo za $i \in \{0,1\}$ izomorfizma k-modulov

$$k\Delta \otimes_{(k\Delta)^e} \otimes P_i \cong \oplus_{l \geq i} k\mathcal{C}_l =: R_i$$

s predpisoma na bazi

$$\gamma \otimes_{(k\Delta)^e} (1,1) \mapsto \gamma, \quad \gamma' \otimes_{(k\Delta)^e} (1,c,1) \mapsto c\gamma'.$$

Z $d : R_1 \to R_0$ označimo k-linearno preslikavo, ki jo dobimo, če preslikavo $\mathrm{id} \otimes_{(k\Delta)^e} d_1'$ konjugiramo s tema izomorfizmoma.

Lema 5.3. *Naj bo γ poljuben cikel dolžine vsaj 1. Potem je $d(\gamma) = \rho\gamma - \gamma$.*

Dokaz. Naj bo $\gamma = c\gamma'$. Potem je

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes_{(k\Delta)^e} d_1')(\gamma' \otimes_{(k\Delta)^e} (1,c,1)) &= \gamma' \otimes_{(k\Delta)^e} ((c,1) - (1,c)) \\ &= \gamma' c \otimes_{(k\Delta)^e} (1,1) - c\gamma' \otimes_{(k\Delta)^e} (1,1).\end{aligned}$$

Ker ρ deluje na ciklu tako, da ga zavrti za eno mesto v levo, je lema dokazana. $\square$

Sedaj že vemo, da je $HH_0(k\Delta) \cong \operatorname{coker} d$ in $HH_1(k\Delta) \cong \ker d$. Za izračun ciklične homologije algebre poti pa se moramo še malo potruditi.

Ker smo konstruirali kompleks $d : R_1 \to R_0$, ki nadomesti Hochschildov kompleks, je upravičeno upati, da lahko z njim zgradimo nov bikompleks, ki v smislu trditve 2.12 nadomesti bikompleks $\bar{\mathcal{B}}$. Najprej torej potrebujemo homotopsko ekvivalenco med novim kompleksom in reduciranim Hochschildovim kompleksom, potem pa še tak homomorfizem $D : R_0 \to R_1$, da prej omenjena homotopska ekvivalenca postane tudi preslikava med bikompleksoma

(2)

$$\begin{tikzcd}
 & & & {} \arrow[d] \\
 & & R_1 \arrow[d, "d"] & R_0 \arrow[l, "D"] \\
 & R_1 \arrow[d, "d"] & R_0 \arrow[l, "D"] & \\
R_1 \arrow[d, "d"] & R_0 \arrow[l, "D"] & & \\
R_0 & & &
\end{tikzcd}$$

in $\bar{\mathcal{B}}$. Definirajmo homomorfizem A-bimodulov $\varphi' : \bar{C}'_1 \to P_1$ s predpisom

$$(1, a_1 \cdots a_m, 1) \mapsto \sum_{i=1}^{m} (\cdots a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \cdots).$$

Potem ni težko premisliti, da diagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \bar{C}'_2 \arrow[r, "\bar{b}'"] \arrow[d, "0"] & \bar{C}'_1 \arrow[r, "\bar{b}'"] \arrow[d, "\varphi'"] & \bar{C}'_0 \arrow[r, "\bar{b}'"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & P_1 \arrow[r, "d'_1"] & P_0 \arrow[r, "d'_0"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

komutira; po krajšem računu namreč sledi $\bar{b}'_1 = d'_1\varphi'$ in $\varphi'\bar{b}'_2 = 0$, preslikavi $\bar{b}'_0$ in d'_0 pa sta enaki. Torej ta diagram predstavlja preslikavo projektivnih A^e-resolucij levega A^e-modula A, ki je po komentarju za trditvijo 2.6 homotopska ekvivalenca. Po tenzoriranju z desnim A^e-modulom A dobimo homotopsko ekvivalenco kompleksov $\varphi : \bar{C} \to (R_1 \xrightarrow{d} R_0)$, pri čemer je φ_0 identiteta,

$$\varphi_1 : \bar{C}_1 \to R_1, \quad (\alpha, a_1 \cdots a_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_{i+1} \cdots a_m \alpha a_1 \cdots a_i$$

in $\varphi_n = 0$ za $n \geq 2$.

Lema 5.4. *Linearna preslikava k-modulov $D : R_0 \to R_1$, ki je na bazi podana s predpisom $D(\gamma) = \sum_{i=0}^{|\gamma|-1} \rho^i \gamma$ (v posebnem $D(e) = 0$ za $e \in \Delta_0$), zadošča enakostim $dD = Dd = 0$ in $\varphi_1 \bar{B}_0 = D\,\mathrm{id}$.*

Dokaz. Na ekvivalenčnem razredu cikla γ imamo

$$(\rho - \mathrm{id}) \left(\sum_{i=0}^{|\gamma|-1} \rho^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{|\gamma|-1} \rho^i \right) (\rho - \mathrm{id}) = \rho^{|\gamma|} - \mathrm{id} = 0,$$

zato veljata prvi enakosti. Zadnja enakost sledi iz neposredno iz definicij obravnavanih preslikav. □

Po lemi 5.4 je φ preslikava bikompleksov $\bar{\mathcal{B}}$ in (2); trditev 2.12 nam pove, da lahko ciklično homologijo algebre poti izračunamo iz bikompleksa (2). Ta bikompleks je izjemno enostaven, zato po definiciji totalne homologije velja $HC_{2n}(k\Delta) \cong \ker D / \operatorname{im} d$ in $HC_{2n-1}(k\Delta) \cong \ker d / \operatorname{im} D$ za $n \geq 1$.

Ker so skoraj vsi Hochschildovi homološki moduli enaki 0, so vse preslikave S_* iz Connesovega eksaktnega zaporedja razen $S_* : HC_2(k\Delta) \to HC_0(k\Delta)$ izomorfizmi k-modulov. Po lastnostih inverze limite iz razdelka 2.3 je soda ciklična homologija izomorfna $HC_2(k\Delta)$, liha ciklična homologija pa $HC_1(k\Delta)$.

Na tem mestu vpeljemo številske karakteristike tulca, ki jih kasneje uporabljamo še v sedmem poglavju. Z a_l označimo število ekvivalenčnih razredov delovanja ρ na $\mathcal{C}_l$. Če cikel potenciramo, spet dobimo cikel; tiste cikle, ki niso potence krajših ciklov, imenujemo *osnovni cikli.* Z b_l označimo število tistih ekvivalenčnih razredov delovanja ρ na $\mathcal{C}_l$, ki vsebujejo kakšen osnoven cikel; pravzaprav so v takih razredih vsi cikli osnovni. Po definiciji je $a_0 = b_0 = |\Delta_0|$, za $l \geq 1$ pa očitno velja zveza

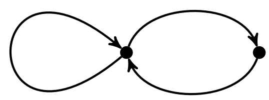
$$a_l = \sum_{r|l} b_r.$$

Po klasičnem izreku o Möbiusovi inverziji, ki ga najdemo na primer v [**25**] (izrek 10.4), sledi

$$b_l = \sum_{r|l} \mu\left(\tfrac{l}{r}\right) a_r,$$

kjer je μ Möbiusova funkcija. Velja opozoriti, da teh števil ni vedno lahko izračunati, kot je razvidno iz naslednjega primera, pri katerem potrebujemo Pólyevo teorijo iz preštevalne kombinatorike.

ZGLED 5.5. Izračunajmo a_l in b_l za relativno preprost tulec, ki ga prikazuje naslednja slika.



Označimo s f_{ij} število ogrlic z i belimi in j črnimi kroglicami; ogrlica se ohranja pri vrtenju, ne pa pri zrcaljenju. Po [**25**] (izrek 37.2 in primer 37.4) velja

$$f_{ij} = \frac{1}{i+j} \sum_{d|(i,j)} \varphi(d) \binom{\frac{i+j}{d}}{\frac{i}{d}},$$

kjer je (i,j) največji skupni delitelj števil i in j, φ pa Eulerjeva funkcija. Z ozirom na naš tulec očitno velja

$$a_l = \sum_{i+2j=l} f_{ij}.$$

Števila b_l sedaj izračunamo z Möbiusovo inverzno formulo. Zaporedji $\{a_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ in $\{b_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ sta tako enaki

$$1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 10, 15, 19, 31, 41, 64, 94, 143, 211, 329, 493, 766, \ldots$$

in

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 18, 25, 40, 58, 90, 135, 210, 316, 492, 750, \ldots.$$

Sedaj je vse pripravljeno za opis homoloških modulov algebre $k\Delta$, seveda do izomorfizma natančno. Opazimo, da preslikavi d in D ohranjata k-linearne ogrinjače ekvivalenčnih razredov; zato lahko jedri in sliki po potrebi zapišemo kot direktni vsoti jeder in slik zožitev preslikav na linearne ogrinjače ekvivalenčnih razredov.

IZREK 5.6. *Za Hochschildovo homologijo algebre poti velja*

$$HH_0(k\Delta) \cong \bigoplus_{l\geq 0} k^{a_l},$$
$$HH_1(k\Delta) \cong \bigoplus_{l\geq 1} k^{a_l}$$

in $HH_n(k\Delta) = 0$ za $n \geq 2$. Za njeno ciklično homologijo velja

$$HC_{2s-1}(k\Delta) \cong HC_{odd}(k\Delta) \cong \bigoplus_{l\geq 1}\bigoplus_{r|l} \left(k/\tfrac{l}{r}k\right)^{b_r},$$

$$HC_{2s}(k\Delta) \cong HC_{even}(k\Delta) \cong \bigoplus_{l\geq 0} \mathrm{ann}_k(l)^{a_l}$$

za $s \geq 1$.

Opomba. Za $n \in \mathbb{N}_0$ označimo $\mathrm{ann}_k(n) = \mathrm{ann}_k(n\cdot 1) = \{c \in k \colon nc = 0\}$.

Dokaz izreka 5.6. Tekom poglavja smo že ugotovili, da rezultat sledi iz opisa k-modulov $\operatorname{coker} d$, $\ker d$, $\ker d/\operatorname{im} D$ in $\ker D/\operatorname{im} d$.

- Glede na predpis preslikave d je jasno, da je $\operatorname{coker} d$ prost k-modul z bazo iz ekvivalenčnih razredov ciklov.
- Oglejmo si jedro zožitve preslikave d na ogrinjačo nekega ekvivalenčnega razreda. Naj bo $\gamma \in \mathcal{C}_l$, $l \geq 1$, potenca nekega osnovnega cikla dolžine r. Pripadajoči ekvivalenčni razred ima zato natanko r elementov in velja
$$\sum_{i=0}^{r-1} c_i\rho^i\gamma \in \ker d \iff c_0 = \cdots = c_{r-1}.$$
Zato modul $\ker d$ generirajo vsote vseh ciklov v ekvivalenčnem razredu.
- Za γ in r kot v prejšnji alineji velja $D(\gamma) = \frac{l}{r}\sum_{i=0}^{r-1}\rho^i\gamma$; zato je zožitev kvocienta $\ker d/\operatorname{im} D$ na razred cikla γ izomorfna $k/(\frac{l}{r}k)$.
- Naj bo $\gamma \in \mathcal{C}_l$ za $l \geq 0$. Ker v $\operatorname{coker} d$ velja $D(\gamma) + \operatorname{im} d = l\gamma + \operatorname{im} d$, je zožitev kvocienta $\ker D/\operatorname{im} d$ na razred cikla γ izomorfna $\mathrm{ann}_k(l)$.

□

Kvalitativni vidik zadnjega izreka je zajet v dveh posledicah.

Posledica 5.7. *Naslednje trditve so ekvivalentne za poljuben tulec Δ in enotski komutativen kolobar k:*

i) *ničti Hochschildov homološki modul algebre $k\Delta$ je končno generiran;*
ii) *prvi Hochschildov homološki modul algebre poti $k\Delta$ je trivialen;*
iii) *v tulcu Δ ni netrivialnih ciklov.*

Dokaz. Če Δ vsebuje netrivialen cikel, vsebuje tudi vse njegove potence. Trditev potem sledi neposredno iz izreka 5.6. □

Posledica 5.8. *Liha ciklična homologija algebre $k\Delta$ je trivialna natanko tedaj, ko Δ ne vsebuje netrivialnih ciklov ali $\mathbb{Q} \subseteq k$.*

Soda ciklična homologija je prosta z dimenzijo $|\Delta_0|$ natanko tedaj, ko Δ ne vsebuje netrivialnih ciklov ali naravni večkratniki enote niso delitelji niča v k.

Dokaz. Če Δ ne vsebuje netrivialnih ciklov ali $\mathbb{Q} \subseteq k$, potem po izreku 5.6 velja $HC_{odd}(k\Delta) = 0$. Denimo sedaj, da $q \cdot 1$ ni obrnljiv v k za naravno število $q > 1$, tulec Δ pa vsebuje netrivialen osnovni cikel dolžine r. Potem $(k/\frac{qr}{r}k)^{b_r} \neq 0$ in prva trditev sledi.

Tudi drugo trditev dokažemo s podobnim sklepanjem; pri tem upoštevamo, da je vsak večkratnik delitelja niča spet delitelj niča. □

POGLAVJE 6

Bikompleks algebre prirezanih poti

Podobno kot v prejšnjem poglavju lahko tudi za algebro prirezanih poti poiščemo bolj preprosto bimodulsko resolucijo. Za razliko od kratke resolucije algebre poti je ta resolucija neskončna. Možno je poiskati tudi eksplicitna predpisa inverznih homotopskih ekvivalenc med novo resolucijo in reducirano standardno resolucijo. Izkaže se, da lahko s temi gradniki konstruiramo bikompleks, ki je dober kandidat za nadomestek bikompleksa $\bar{\mathcal{B}}$. Na koncu poglavja z nekaj truda in uporabe teorije spektralnih zaporedij in stopničastih modulov pokažemo, da je homologija novega bikompleksa res izomorfna ciklični homologiji algebre prirezanih poti.

1. Bardzellova resolucija

Naj bo $A = k\Delta/\langle\Delta_m\rangle$ algebra prirezanih poti. Za $s \geq 0$ označimo A-bimodule

$$P_{2s} = A\bar{\otimes}k\Delta_{sm}\bar{\otimes}A, \quad P_{2s+1} = A\bar{\otimes}k\Delta_{sm+1}\bar{\otimes}A$$

in homomorfizme bimodulov $d'_0 : P_0 \to A$ in $d'_n : P_n \to P_{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$ s predpisi na generatorjih

$$\begin{aligned} d'_0(1,1) &= 1, \\ d'_{2s}(1, v_1 \cdots v_{sm}, 1) &= \sum_{i=0}^{m-1}(v_1 \cdots v_i, \overbrace{v_{i+1} \cdots v_j}^{(s-1)m+1}, v_{j+1} \cdots v_{sm}), \\ d'_{2s+1}(1, v_1 \cdots v_{sm+1}, 1) &= (v_1, v_2 \cdots v_{sm+1}, 1) - (1, v_1 \cdots v_{sm}, v_{sm+1}). \end{aligned}$$

Te module in homomorfizme je v nekoliko širšem kontekstu prvi vpeljal Bardzell v [**3**], kjer je dokazal naslednjo trditev, ki sicer služi kot temelj za študij vseh nadaljnih homoloških in kohomoloških lastnosti obravnavane družine algeber.

LEMA 6.1. *zaporedje*

$$\cdots \to P_3 \xrightarrow{d'_3} P_2 \xrightarrow{d'_2} P_1 \xrightarrow{d'_1} P_0 \xrightarrow{d'_0} A \to 0$$

je projektivna A^e-resolucija algebre A.

DOKAZ. Računske podrobnosti dokaza izpustimo, najdemo pa jih v [**1**]. Ni težko preveriti, da velja $d'_{n-1}d'_n = 0$ za $n \in \mathbb{N}$. Za dokaz eksaktnosti je dovolj pokazati, da je kompleks iz leme kontraktibilen. V ta namen uvedemo homomorfizme desnih A-modulov $h_{-1} : A \to P_0$ in $h_n : P_n \to P_{n+1}$ za $n \geq 0$ s predpisi

$$\begin{aligned} h_{-1}(1) &= (1,1), \\ h_{2s}(a_1 \cdots a_l, v_1 \cdots v_{sm}, 1) &= \sum_{i=1}^{l}(a_1 \cdots a_{i-1}, \overbrace{a_j \cdots a_l v_1 \cdots v_j}^{sm+1}, v_{j+1} \cdots v_{sm}), \\ h_{2s+1}(a_1 \cdots a_l, v_1 \cdots v_{sm+1}, 1) &= \begin{cases} (1, a_1 \cdots a_l v_1 \cdots v_{sm+1}, 1) & l = m-1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

Z nekaj računanja lahko na generatorjih modulov preverimo, da veljajo enakosti $d'_0 h_{-1} = \mathrm{id}$ in $h_{n-1} d'_n + d'_{n+1} h_n = \mathrm{id}$ za $n \in \mathbb{N}_0$, torej je družina $\{h_n\}_{n \geq -1}$ iskana skrčitvena homotopija. Upoštevaje $A(1,\alpha,1)A \cong Ao(\alpha) \otimes t(\alpha))A$ kot v lemi 4.6 iz četrtega poglavja sklepamo, da so P_n projektivni bimoduli. □

Vidimo, da je začetek Bardzellove resolucije enak kot pri resoluciji algebre poti v lemi 5.1; v omenjeni lemi je homomorfizem d'_1 injektiven, kar pa ne drži v primeru algebre prirezanih poti. Zato je potrebno dodati nadaljnje projektivne module in homomorfizme.

Takoj lahko opazimo, da je ta resolucija končna natanko tedaj, ko so dolžine poti v Δ omejene; zaradi končnosti tulca je to možno, če in samo če obstaja le končno mnogo poti v Δ, kar pa je naprej ekvivalentno temu, da tulec Δ ne vsebuje usmerjenih ciklov.

POSLEDICA 6.2. *Denimo, da Δ ne vsebuje usmerjenih ciklov. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za poljuben A-bimodul M in vse $n \geq n_0$ velja $H_n(A,M) = 0$ in $H^n(A,M) = 0$.*

V nekaterih posebnih primerih, ko ima tulec določene simetrijske lastnosti, bi lahko to resolucijo še malo popravili. Če je Δ na primer usmerjen cikel, potem lahko iz zgornje resolucije z nekaj popravki dobimo periodično resolucijo s sodo periodo, ki sta jo predstavila Karin Erdmann in Thorsten Holm v [**9**]. Z enakim argumentom kot pri zadnji posledici sklepamo, da sta tedaj Hochschildova homologija in kohomologija s koeficienti v M periodični za vsak A-bimodul M. Kot se bo izkazalo kasneje, pa je za izračun ciklične homologije tudi v tem posebnem primeru bolj priročna resolucija iz leme 6.1.

Ta resolucija je odskočna deska za študij večih homoloških lastnosti, saj je glede na dimenzijo prostih k-modulov, ki nastopajo v njej, precej manjša od standardne resolucije algebre A; še en argument v prid te resolucije je predstavljen v razdelku 7.2. Po trditvi 2.6 je homotopno ekvivalentna reducirani resoluciji iz razdelka 4.2, torej jo iz že znanih razlogov lahko uporabimo za računanje Hochschildove homologije. Za določanje ciklične homologije potrebujemo še inverzni homotopski ekvivalenci med resolucijama, ki ju označimo s $F : P \to \bar{C}'$ in $G : \bar{C}' \to P$. Ti družini preslikav, ki ju definiramo v nadaljevanju, sta bili prvič predstavljeni v članku [**1**], kjer je tudi dokazano, da določata preslikavi kompleksov. Avtorji članka so ju uporabili kot orodje za določanje strukture Hochschildovega kohomološkega kolobarja algebre prirezanih poti.

Naj bo $F_0 = \mathrm{id}$. Ostale bimodulske homomorfizme F_n podamo na generatorjih oblike $p_0 = (1, v_1 \cdots v_{sm}, 1) \in P_{2s}$ in $p_1 = (1, v_1 \cdots v_{sm+1}, 1) \in P_{2s+1}$ za $v_i \in \Delta_1$. Sedaj definiramo

$$F_{2s}(p_0) =$$

$$\sum \Big(1, \overbrace{v_1 \cdots v_{x_1}}^{x_1}, \overbrace{v_{1+x_1}}^{1}, \overbrace{\cdots v_{1+x_1+x_2}}^{x_2}, \overbrace{v_{2+x_1+x_2}}^{1}, \ldots\ldots, \overbrace{v_{s+\sum x_j}}^{1}, \overbrace{\cdots v_{sm}}^{sm-s-\sum x_j}\Big)$$

in

$$F_{2s+1}(p_1) =$$

$$\sum \Big(1, v_1, \overbrace{v_2 \cdots v_{1+x_1}}^{x_1}, \overbrace{v_{2+x_1}}^{1}, \overbrace{\cdots v_{2+x_1+x_2}}^{x_2}, \ldots\ldots, \overbrace{v_{s+1+\sum x_j}}^{1}, \overbrace{\cdots v_{sm+1}}^{sm-s-1-\sum x_j}\Big),$$

kjer vsoti tečeta po vseh s-tericah $(x_1, \ldots, x_s) \in \{1, \ldots, m-1\}^s$.

Naj bo $G_0 = \mathrm{id}$. Za $n \geq 1$ in $q = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1) \in \bar{C}'_n$ naj bo $v_1 \cdots v_{|q|}$ zaporedje puščic, ki določajo pot $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ v $k\Delta$, pri čemer je $|q| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Sedaj definiramo bimodulske homomorfizme

$$G_{2s}(q) = \begin{cases} (1, v_1 \cdots v_{sm}, v_{sm+1} \cdots) & \alpha_{2i-1}\alpha_{2i} = 0 \\ & \text{za } i = 1, \ldots, s; \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$G_{2s+1}(q) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{|\alpha_1|} (v_1 \cdots v_{j-1}, v_j \cdots v_{sm+j}, v_{sm+j+1} \cdots) & \alpha_{2i}\alpha_{2i+1} = 0 \\ & \text{za } i = 1, \ldots, s; \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Trditev 6.3. *Družini homomorfizmov A^e-modulov $F : P \to \bar{C}'$ in $G : \bar{C}' \to P$ sta preslikavi kompleksov.*

Ponavadi je preverjanje dejstva, da neka družina homomorfizmov določa preslikavo kompleksov, lahka naloga, saj zgolj preverimo komutativnost ustreznih diagramov, kar je ob eksplicitno podanih predpisih precej direkten postopek. Izkaže pa se, da je v zgornji situaciji to precej zahtevno tehnično opravilo, pri katerem je potrebno ločiti več primerov in uporabiti nekaj kombinatoričnih premislekov. Zato dokaz zgornje trditve izpustimo; z vsemi podrobnostmi je podan v [**1**].

Ker sta F in G preslikavi projektivnih resolucij, sta po trditvi 2.6 inverzni homotopski ekvivalenci. V naslednjem poglavju z njima konstruiramo k-linearne preslikave, ki igrajo vlogo vertikalnih preslikav $\bar{B}$ v bikompleksu $\bar{\mathcal{B}}$.

2. Robne preslikave

Za začetek si oglejmo, kakšen kompleks dobimo iz Bardzellove resolucije po tenzoriranju z A-bimodulom A.

Naj bo $i \in \mathbb{N}_0$; potem lahko za bazo k-modula $A \bar{\otimes} k\Delta_i \bar{\otimes} A$ izberemo elemente oblike $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, kjer je α_1 pot dožine i, α_0 in α_2 pa sta poti dolžine največ $m-1$. S podobnim razmislekom kot v razdelku 4.2 ugotovimo, da lahko za bazo k-modula $A \otimes_{A^e} (A \bar{\otimes} k\Delta_i \bar{\otimes} A)$ izberemo elemente oblike $1 \otimes_{A^e} (1, \alpha, \beta)$, kjer velja $|\alpha| = i$, $|\beta| < m$, $t(\alpha) = o(\beta)$ in $t(\beta) = o(\alpha)$. Tako dobimo izomorfizem k-modulov

$$A \otimes_{A^e} (A \bar{\otimes} k\Delta_i \bar{\otimes} A) \cong \bigoplus_{l=i}^{i+m-1} k\mathcal{C}_l, \quad 1 \otimes_{A^e} (1, \alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta.$$

Za $s \geq 0$ definiramo proste k-module

$$R_{2s} = \bigoplus_{l=sm}^{sm+m-1} k\mathcal{C}_l, \quad R_{2s+1} = \bigoplus_{l=sm+1}^{(s+1)m} k\mathcal{C}_l;$$

po prejšnjem za vse $n \in \mathbb{N}_0$ velja $A \otimes_{A^e} P_n \cong R_n$. Preko tega izomorfizma sedaj robne preslikave $\mathrm{id} \otimes d'_n$ za $n \in \mathbb{N}$ nadomestimo z robnimi preslikavami $d_n : R_n \to R_{n-1}$. Pri tem velja spomniti, da od tu dalje preslikava d'_0 ni več pomembna, saj služi le kot augmentacija resolucije.

Lema 6.4. *Naj bo γ cikel iz R_{2s} oziroma iz R_{2s+1}. Potem velja*

$$d_{2s}(\gamma) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m-1} \rho^i \gamma & |\gamma| = sm \\ 0 & \textit{sicer} \end{cases}$$

oziroma

$$d_{2s+1}(\gamma) = \begin{cases} 0 & |\gamma| = (s+1)m \\ \rho\gamma - \gamma & \textit{sicer.} \end{cases}$$

DOKAZ. Naj bo $\gamma = v_1 \cdots v_l$. Če je $sm \le l < (s+1)m$, velja

$$(\mathrm{id} \otimes_{A^e} d'_{2s})(1 \otimes_{A^e} (1, v_1 \dots v_{sm}, v_{sm+1} \dots v_l))$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1} 1 \otimes_{A^e} \left(1, \overbrace{v_{i+1} \dots v_j}^{(s-1)m+1}, v_{j+1} \dots v_l v_1 \dots v_i \right);$$

če je $l > sm$, so poti na desni strani daljše od m, zato so vsi členi v vsoti enaki 0. Za $l = sm$ pa trditev velja, saj ρ deluje kot rotacija v levo.

Če je $sm < l \le (s+1)m$, velja

$$(\mathrm{id} \otimes_{A^e} d'_{2s+1})(1 \otimes_{A^e} (1, v_1 \dots v_{sm+1}, v_{sm+2} \dots v_l))$$
$$= 1 \otimes_{A^e} (1, v_2 \dots v_{sm+1}, v_{sm+2} \dots v_l v_1) - 1 \otimes_{A^e} (1, v_1 \cdots v_{sm} \otimes v_{sm+1} \dots v_l);$$

če je $l = (s+1)m$, sta oba člena enaka 0, sicer pa trditev sledi po definiciji delovanja ρ. □

Na tej točki bi Hochschildovo homologijo algebre prirezanih poti že lahko izračunali kot homologijo kompleksa (R, d), kar bomo tudi storili v naslednjem poglavju. Vendar bomo prej še premislili, kako bi ta kompleks lahko izkoristili pri računanju ciklične homologije. Namesto bikompleksa $\bar{\mathcal{B}}$ bi radi uporabili bikompleks enake oblike, katerega stolpci so kopije kompleksa (R, d), vendar še ne vemo, kaj bi bile ustrezne horizontalne preslikave. Ustrezne kandidate iščemo s pomočjo inverznih homotopskih ekvivalenc med reduciranim Hochschildovim kompleksom iz razdelka 4.2 in kompleksom (R, d), ki ju dobimo iz F in G; te k-linearne preslikave so enake

$$f_n : R_n \xrightarrow{\cong} A \otimes_{A^e} P_n \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{A^e} F_n} A \otimes_{A^e} \bar{C}'_n \xrightarrow{\cong} \bar{C}_n,$$
$$g_n : \bar{C}_n \xrightarrow{\cong} A \otimes_{A^e} \bar{C}'_n \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{A^e} G_n} A \otimes_{A^e} P_n \xrightarrow{\cong} R_n.$$

Pri algebri poti smo na tem mestu uporabili trditev 2.12 iz drugega poglavja. Zato bi bilo tudi v primeru algebre prirezanih poti upravičeno upati, da obstajajo robne preslikave $D_n : R_n \to R_{n+1}$, ki antikomutirajo z robnimi preslikavami d_n (oziroma skupaj z njimi tvorijo bikompleks) in komutirajo z vsaj eno družino homotopskih ekvivalenc; potem bi spet lahko uporabili trditev 2.12.

Žal se izkaže, da za nobeno od družin $\{f_n\}_n$ ali $\{g_n\}_n$ ne obstajajo take preslikave; do obstrukcij pride že pri poskusu definiranja preslikav D_0 in D_1. Zato poiskusimo drugače in definiramo preslikave

$$D_n : R_n \xrightarrow{f_n} \bar{C}_n \xrightarrow{\bar{B}_n} \bar{C}_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} R_{n+1}.$$

Ideja je naslednja: te preslikave bi bile zagotovo ustrezne, če bi bili $\{f_n\}_n$ in $\{g_n\}_n$ družini inverznih izomorfizmov. Ker pa sta ti družini le homotopski ekvivalenci, vnaprej ni jasno, zakaj naj bi bile preslikave, dobljene po tem principu, sploh ustrezne. Najprej si poglejmo predpise teh novih preslikav.

LEMA 6.5. *Za $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo $D_n = g_{n+1}\bar{B}_n f_n$. Za cikel γ iz R_{2s} oziroma R_{2s+1} velja*

$$D_{2s}(\gamma) = \begin{cases} 0 & |\gamma| = sm \\ \sum_{i=0}^{|\gamma|-1} \rho^i \gamma & \textit{sicer} \end{cases}$$

oziroma

$$D_{2s+1}(\gamma) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{s} (\rho^{im+1}\gamma - \rho^{im}\gamma) & |\gamma| = (s+1)m \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

DOKAZ. Ker je $F_0 = \mathrm{id}$, za $\gamma \in R_0$ velja $f_0(\gamma) = \gamma$. Naj bo $\gamma = v_1 \cdots v_l$ za $0 < l < m-1$. Ker velja

$$(\mathrm{id} \otimes_{A^e} G_1)(1 \otimes_{A^e} (1, \gamma, 1)) = 1 \otimes_{A^e} \left(\sum_{i=0}^{l-1} (\cdots v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \cdots) \right),$$

trditev za D_0 sledi.

Naj bo sedaj $s \geq 1$ in $\gamma = v_1 \cdots v_{sm}\beta$ za $|\beta| = y < m$. Potem je izraz $f_{2s}(\gamma)$ enak

$$\sum \Big(\overbrace{v_{s+1+\sum_j x_j} \cdots \beta}^{sm-s-\sum x_j + y}, \overbrace{v_1 \cdots v_{x_1}}^{x_1}, v_{1+x_1}, \overbrace{\cdots v_{1+x_1+x_2}}^{x_2}, v_{2+x_1+x_2}, \ldots\ldots, v_{s+\sum x_j} \Big)$$

po vseh $(x_1, \ldots, x_s) \in \{1, \ldots, m-1\}^s$. Ko na tem izrazu uporabimo preslikavo $\bar{B}_{2s}$, dobimo vsoto, katere členi so rotacije tenzorskih produktov iz zgornje vsote z dodano enico na začetku. Glede na predpis preslikave G_{2s+1} je jasno, da g_{2s+1} preslika večino teh členov v 0. Zato si oglejmo le relevantne člene iz $\bar{B}_{2s}(f_{2s}(\gamma))$: to so natanko tisti, v katerih je vsaka pot v tenzorskem produktu krajša od m, vsota dolžin ustreznih parov poti (drugi in tretji faktor, četrti in peti faktor, in tako dalje, pri čemer začnemo z ničtim faktorjem, ki je v dani situaciji vedno enak 1) pa je vsaj m. Ti so

$$\begin{aligned}
&(1, \beta, \overbrace{\cdots v_{m-1}}^{m-1}, v_m, \overbrace{\cdots v_{2m-1}}^{m-1}, v_{2m}, \ldots\ldots, v_{sm}) \\
&+(1, \overbrace{v_1 \cdots v_y}^{y}, v_{1+y}, \overbrace{\cdots v_{m+y}}^{m-1}, v_{m+1+y}, \overbrace{\cdots v_{2m+y}}^{m-1}, \ldots\ldots, \overbrace{v_{(s-1)m+2+y} \cdots \beta}^{m-1}) \\
&+ \sum_{x_1=y}^{m-1} (1, v_{1+x_1}, \overbrace{\cdots v_{m+x_1}}^{m-1}, v_{m+1+x_1}, \overbrace{\cdots v_{2m+x_1}}^{m-1}, v_{2m+1+x_1}, \ldots\ldots, \overbrace{v_1 \cdots v_{x_1}}^{x_1}) \\
&+(1, \overbrace{v_{m+1} \cdots v_{m+y}}^{y}, v_{m+1+y}, \overbrace{\cdots v_{2m+y}}^{m-1}, v_{2m+1+y}, \overbrace{\cdots v_{3m+y}}^{m-1}, \ldots\ldots, v_m) \\
&\cdots .
\end{aligned}$$

Če je $y = 0$, se vsi ti členi preslikajo v 0. Res, prvi člen se preslika v 0, saj je njegov prvi faktor dolžine 0, zato v predpisu za g_{2s+1} nastopa prazna vsota. Enak sklep velja za sode člene. V splošnem je pri lihih členih vsota dolžin zadnjih dveh faktorjev enaka $m-1+y$; če je $y = 0$, je torej manjša od m.

Če pa je $y > 0$, se zgornja vsota preslika v

$$\sum_{i=-y}^{-1} \rho^i\gamma + \sum_{i=0}^{y-1} \rho^i\gamma + \sum_{i=y}^{m-1} \rho^i\gamma + \cdots + \sum_{i=(s-1)m}^{(s-1)m+y-1} \rho^i\gamma + \sum_{i=(s-1)m+y}^{sm-1} \rho^i\gamma.$$

Zato trditev velja za D_{2s}, $s > 0$.

Preverimo še lihe preslikave D_{2s+1} za $s \geq 0$. Naj bo $\gamma = v_1 \cdots v_l$, pri čemer velja $sm < l \leq (s+1)m$; potem je izraz $f_{2s+1}(\gamma)$ enak

$$\sum \Big(\overbrace{v_{s+2+\sum x_j} \cdots v_l}^{l-1-s-1-\sum x_j}, v_1, \overbrace{v_2 \cdots v_{1+x_1}}^{x_1}, v_{2+x_1}, \overbrace{\cdots v_{2+x_1+x_2}}^{x_2}, \ldots\ldots, v_{s+1+\sum x_j} \Big).$$

Sedaj razmišljamo podobno kot prej; preslikava $\bar{B}_{2s+1}$ preslika zgornji izraz v alternirajočo vsoto rotiranih tenzorskih produktov z dodano enico na začetku. Oglejmo si delovanje preslikave g_{2s+2} na takih členih; sedaj opazujemo vsoto dolžin prvega in drugega faktorja, tretjega in četrtega faktorja, in tako dalje. Če je $l < (s+1)m$, se vsi ti členi z g_{2s+2} preslikajo v 0, saj ima tedaj vsaj eden izmed merodajnih parov skupno dolžino največ $m-1$.

Če pa je $l = (s+1)m$, so po zgornjem premisleku relevantni natanko tisti členi, za katere velja $x_1 = \cdots = x_s = m-1$:

$$\begin{aligned}
&(v_{sm+2}\ldots, v_1, v_2\ldots, v_{m+1}, v_{m+2}\ldots, \ldots\ldots, v_{sm+1})\\
-&(v_1, v_2\ldots, v_{m+1}, v_{m+2}\ldots, v_{2m+1}, \ldots\ldots, v_{sm+2}\ldots)\\
+&(v_2\ldots, v_{m+1}, v_{m+2}\ldots, v_{2m+1}, v_{2m+2}\ldots, \ldots\ldots, v_1)\\
-&(v_{m+1}, v_{m+2}\ldots, v_{2m+1}, v_{2m+2}\ldots, v_{3m+1}, \ldots\ldots, v_2\ldots)\\
&\cdots.
\end{aligned}$$

Preslikava g_{2s+2} to vsoto preslika v

$$\rho^{-(m-1)}\gamma - \gamma + \rho\gamma - \rho^m\gamma \pm \cdots + \rho^{(s-1)m+1}\gamma - \rho^{sm}\gamma.$$

$\square$

Kot je že bilo omenjeno, ni nobenega zagotovila, da s preslikavami D_n sploh lahko tvorimo bikompleks. Vendar sedaj po lemi 6.5 očitno velja $D_{n+1}D_n = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$. Po lemi 6.4 pa velja tudi $Dd = 0 = dD$ in zato $dD + Dd = 0$: ločiti je sicer treba nekaj primerov, vendar vse enakosti sledijo iz identitete

$$(\rho - \mathrm{id})\left(\sum_{i=0}^{|\gamma|-1}\rho^i\right)\gamma = \left(\sum_{i=1}^{|\gamma|}\rho^i - \sum_{i=0}^{|\gamma|-1}\rho^i\right)\gamma = 0$$

in enakosti

$$\sum_{i=0}^{m-1}\rho^i\sum_{j=0}^{s-1}(\rho^{jm+1} - \rho^{jm})\gamma = \left(\sum_{i=1}^{sm}\rho^i - \sum_{i=0}^{sm-1}\rho^i\right)\gamma = 0$$

za $\gamma \in \mathcal{C}_{sm}$. Bikompleks

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] \\
R_3 \arrow[d, "d"] & R_2 \arrow[l, "D"'] \arrow[d, "d"] & R_1 \arrow[l, "D"'] \arrow[d, "d"] & R_0 \arrow[l, "D"'] \\
R_2 \arrow[d, "d"] & R_1 \arrow[l, "D"'] \arrow[d, "d"] & R_0 \arrow[l, "D"'] & \\
R_1 \arrow[d, "d"] & R_0 \arrow[l, "D"'] & & \\
R_0 & & &
\end{tikzcd}$$

označimo z $\mathcal{D}(A)$ oziroma krajše kar z $\mathcal{D}$. V naslednjem razdelku je dokazano, da lahko ciklično homologijo algebre prirezanih poti izračunamo s pomočjo tega bikompleksa.

3. Spektralno zaporedje bikompleksa $\mathcal{D}$

Prej smo že omenili, da družini homomorfizmov k-modulov $\{f_n\}_n$ in $\{g_n\}_n$ nista preslikavi bikompleksov med $\bar{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{D}$. Kljub temu bomo z direktno uporabo teorije spektralnih zaporedij in stopničenj iz razdelkov 2.2 in 2.4 pokazali, da inducirata izomorfizme totalnih homoloških modulov. Zato lahko ciklično homologijo računamo kot homologijo bikompleksa $\mathcal{D}$, ki v primerjavi z $\bar{\mathcal{B}}$ bolj priročen za računanje.

Preden se lotimo dokaza glavnega izreka tega razdelka, premislimo še nekaj preprostih, a ključnih dejstev. Moduli R_n imajo naravno stopničenje glede na dolžino ciklov. Prav tako imajo tudi moduli $\bar{C}_n$ stopničasto strukturo s predpisom $|(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)| = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|$ za homogene elemente α_i; to strukturo dobimo iz stopničenja $k\Delta_0$-modulov A in A_+ in naravno prirejenega stopničenja na k-modulu $A\bar{\otimes}A_+^{\bar{\otimes}n}$. Iz predpisov preslikav je jasno, da so vse k-linearne preslikave $\bar{b}$, $\bar{B}$, d, D, f, g tudi stopničaste.

Izrek 6.6. *Spektralni zaporedji bikompleksov $\bar{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{D}$ se ustavita pri drugem listu in sta izomorfni; pri tem velja*

$$E^\infty = E^2 \cong (\ker d \cap \ker D)/(\operatorname{im} d + D(\ker d)).$$

Še več, velja tudi

$$H_n(\operatorname{Tot} \bar{\mathcal{B}}) \cong \bigoplus_{p+q=n} E^\infty_{p,q} \cong H_n(\operatorname{Tot} \mathcal{D}).$$

Dokaz. Uporabili bomo opis spektralnih zaporedij, ki smo ga razvili na koncu razdelka 2.2 pred trditvijo 2.12. Člene spektralnih zaporedij bikompleksov $\bar{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{D}$ označimo z ${}_{\bar{\mathcal{B}}}E^r_{p,q}$ in ${}_{\mathcal{D}}E^r_{p,q}$. Za splošen bikompleks velja, da so stolpci prvega lista spektralnega zaporedja izomorfni vertikalnim homologijam bikompleksa; po konstrukciji stolpcev zato velja ${}_{\bar{\mathcal{B}}}E^1_{p,q} \cong HH_{q-p}(A) \cong {}_{\mathcal{D}}E^1_{p,q}$. V splošnem so vrstice drugega lista izomorfne horizontalnim homologijam na vertikalnih homologijah; glede na definicijo horizontalnih preslikav v bikompleksu $\mathcal{D}$ velja

$${}_{\bar{\mathcal{B}}}E^2_{p,q} \cong H^h_p H^v_q(\bar{\mathcal{B}}) \cong H^h_p H^v_q(\mathcal{D}) \cong {}_{\mathcal{D}}E^2_{p,q},$$

saj po konstrukciji preslikave ${}_{\mathcal{D}}\partial^1$ dobimo tako, da preslikave ${}_{\bar{\mathcal{B}}}\partial^1$ konjugiramo z izomorfizmi med vertikalnimi homološkimi moduli, ki jih inducirajo preslikave f in g. Za dokaz prvega dela izreka je sedaj dovolj pokazati, da so preslikave ${}_{\mathcal{D}}\partial^r$ in ${}_{\bar{\mathcal{B}}}\partial^r$ ničelne za $r \geq 2$.

Za stopničast k-modul M naj bo $S(M) = \{j : M_j \neq 0\}$ množica indeksov neničelnih stopnic. Naj bo $s \geq 0$; potem velja $S(R_{2s}) \subseteq \{sm, \ldots, sm + m - 1\}$ in $S(R_{2s+1}) \subseteq \{sm + 1, \ldots, (s + 1)m\}$. To pomeni, da za $t \geq 0$ in $u \geq 2$ velja $S(R_t) \cap S(R_{t+u}) = \emptyset$. Ker v splošnem modul $E^r_{p,q}$ realiziramo kot podkvocient modula $E^1_{p,q}$, zaradi izomorfnosti prvih listov spektralnih zaporedij in dedovanja stopničenja na kvociente velja

$$S({}_{\mathcal{D}}E^r_{p,q}) \cap S({}_{\mathcal{D}}E^r_{p-r,q+r-1}) = \emptyset, \quad S({}_{\bar{\mathcal{B}}}E^r_{p,q}) \cap S({}_{\bar{\mathcal{B}}}E^r_{p-r,q+r-1}) = \emptyset$$

za vse $r \geq 2$. Po opažanju o stopničastih preslikavah pred formulacijo izreka so robne preslikave med členi spektralnega zaporedja stopničaste, zato velja ${}_{\mathcal{D}}\partial^r = 0$ in ${}_{\bar{\mathcal{B}}}\partial^r = 0$ za $r \geq 2$.

Po lemah 6.4 in 6.5 je jasno, da velja $\operatorname{im} d \cap \operatorname{im} D = 0$. Potem velja

$$[x] \in \ker D_* \iff x \in \ker d \wedge D(x) \in \operatorname{im} d \iff x \in \ker D \cap \ker d$$

in zato

$$_{\mathcal{D}}E^2 \cong H^h H^v(\mathcal{D}) = \ker D_* / \operatorname{im} d_* = (\ker d \cap \ker D)/(\operatorname{im} d + D(\ker d)).$$

Preostane nam še dokaz zadnjega dela izreka. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in

$$0 = Q_{-1} \subseteq Q_0 \subseteq \cdots \subseteq Q_n = H_n(\operatorname{Tot} \bar{\mathcal{B}})$$

filtracija kot v lemi 2.10; torej imamo kratke eksaktne vstice stopničastih modulov

$$0 \to Q_{p-1} \to Q_p \to E^\infty_{p,n-p} \to 0$$

za $p = 0, \ldots, n$. Ker velja $S(R_t) \cap S(R_{t+u}) = \emptyset$ za $u \geq 2$, sledi

$$S({}_{\bar{\mathcal{B}}}E^\infty_{p,n-p}) \cap S({}_{\bar{\mathcal{B}}}E^\infty_{p',n-p'}) = \emptyset$$

za $p \neq p'$. Z indukcijo na p in večkratno uporabo leme 2.18 sledi, da so zgornje eksaktne vrstice razcepne. Torej velja

$$H_n(\operatorname{Tot} \bar{\mathcal{B}}) = Q_n \cong Q_{n-1} \oplus E^\infty_{n,0} \cong \cdots \cong E^\infty_{0,n} \oplus E^\infty_{1,n-1} \oplus \cdots \oplus E^\infty_{n,0}.$$

Popolnoma enaki argumenti držijo tudi za $H_n(\operatorname{Tot} \mathcal{D})$. □

Opomba. V razdelku 6.1 smo omenili, da lahko namesto Bardzellove resolucije uporabimo periodično resolucijo, če je Δ usmerjen cikel. Določeni računi bi se s tem verjetno poenostavili, vendar robne preslikave in homotopske ekvivalence, ki bi jih dobili preko periodične resolucije, ne bi bile stopničaste. Torej v dokazu lastnosti spektralnega zaporedja iz zadnjega izreka ne bi mogli uporabiti argumentov v zvezi s stopničenjem, zato bi imeli težave pri utemeljevanju vloge bikompleksa $\mathcal{D}$ kot orodja za izračun ciklične homologije.

O limitnih modulih lahko povemo še malo več. Oglejmo si predpise zožitev robnih preslikav bikompleksa $\mathcal{D}$ na posamezne stopnice. Potem je za poljubna $n \in \mathbb{N}_0$ in $l \geq 0$ ena izmed zožitev d_n in D_n iz modula R_n na l-stopnico enaka 0; prav tako vidimo, da je ena izmed zožitev d_{n+1} in D_{n-1} v modul R_n na l-to stopnico enaka 0. Možne kombinacije so odvisne od deljivosti števila n z 2, deljivosti stopnje l z m ter položaja v mreži bikompleksa, ker je potrebno posebej obravnavati prvi stolpec in glavno antidiagonalo.

Naj bo $s \geq 0$; za $sm < l < (s+1)m$ velja

$$(E^\infty_{p,q})_l = \begin{cases} (\ker d_{2s+1})_l / (\operatorname{im} D_{2s})_l & q - p = 2s+1 \\ (\ker D_{2s})_l / (\operatorname{im} d_{2s+1})_l & p \neq 0,\ q - p = 2s \\ (\operatorname{coker} d_{2s+1})_l & p = 0,\ q = 2s. \end{cases}$$

Če je $l \in \{sm, (s+1)m\}$, potem velja

$$(E^\infty_{p,q})_l = \begin{cases} (\ker d_{2s})_l / (\operatorname{im} D_{2s-1})_l & q - p = 2s > 0 \\ (\ker D_{2s+1})_l / (\operatorname{im} d_{2s+2})_l & p \neq 0,\ q - p = 2s+1 \\ (\operatorname{coker} d_{2s+2})_l & p = 0,\ q = 2s+1 \\ (R_0)_l & q = p. \end{cases}$$

Za vse ostale kombinacije števil p, q in l velja $(E^\infty_{p,q})_l = 0$.

V naslednjem poglavju bomo s temi ugotovitvami poiskali bolj ekspliciten opis ciklične homologije. Na tem mestu pa si bolj natačno oglejmo še ničti stolpec prvega lista spektralnega zaporedja; ti členi so zanimivi za nas, saj je $HH_q(A) \cong E^1_{0,q}$. Podobno kot zgoraj premislimo, da za $sm < l < (s+1)m$ velja

$$(E^1_{0,q})_l = \begin{cases} (\operatorname{coker} d_{2s+1})_l & q = 2s \\ (\ker d_{2s+1})_l & q = 2s+1, \end{cases}$$

za $l \in \{sm, (s+1)m\}$ pa velja

$$(E^1_{0,q})_l = \begin{cases} (\ker d_{2s})_l & q = 2s > 0 \\ (\operatorname{coker} d_{2s+2})_l & q = 2s+1 \\ (R_0)_l & q = 0. \end{cases}$$

Za konec tega razdelka opišimo še sodo in liho ciklično homologijo algebre A. Preslikave S_* iz Connesovega eksaktnega zaporedja po definiciji izvirajo iz zamika bikompleksa za en člen v levo in en člen navzdol; zato je jasno, da S_* spoštujejo dekompozicijo cikličnih homoloških modulov iz izreka 6.6. Najprej obravnavajmo sodo verzijo; ker so sodi ciklični homološki moduli algebre A izomorfni direktnim vsotam po sodih diagonalah v mreži členov spektralnega zaporedja bikompleksa $\bar{\mathcal{B}}$, sistem modulov

$$HC_0(A) \xleftarrow{S_*} HC_2(A) \xleftarrow{S_*} HC_4(A) \xleftarrow{S_*} HC_6(A) \xleftarrow{S_*} \cdots$$

razpade na sisteme limitnih modulov in ustreznih zožitev preslikav S_*, ki jih predstavimo kot antidiagonale v diagramu

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl] & & {} \arrow[dl] & & {} \arrow[dl] \\
E^{\infty}_{0,4} & E^{\infty}_{1,4} & E^{\infty}_{2,4} \arrow[dl] & E^{\infty}_{3,4} & E^{\infty}_{4,4} \arrow[dl] \\
E^{\infty}_{0,3} & E^{\infty}_{1,3} \arrow[dl] & E^{\infty}_{2,3} & E^{\infty}_{3,3} \arrow[dl] \\
E^{\infty}_{0,2} & E^{\infty}_{1,2} & E^{\infty}_{2,2} \arrow[dl] \\
E^{\infty}_{0,1} & E^{\infty}_{1,1} \arrow[dl] \\
E^{\infty}_{0,0}
\end{tikzcd}$$

Po opisu limitnih modulov $E^{\infty}_{p,q}$ iz izreka 6.6 in translacijske simetrije bikompleksa $\bar{\mathcal{B}}$ sklepamo, da so v teh zaporedjih skoraj vse preslikave identitete, razen tistih iz prvega v ničti stolpec. Po lastnostih inverzne limite iz razdelka 2.3 sledi

$$HC_{even}(A) \cong \bigoplus_{s \geq 0} E^{\infty}_{1,2s+1}.$$

Z analognim sklepanjem dokažemo še

$$HC_{odd}(A) \cong \bigoplus_{s \geq 1} E^{\infty}_{1,2s}.$$

POGLAVJE 7

Homologije algebre prirezanih poti

V tem poglavju opišemo homološke module algebre prirezanih poti z lastnostmi kolobarja k in števílskimi karakteristikami a_l in b_l. Pri tem seveda uporabimo bikompleks $\mathcal{D}$.

Izkaže se, da lahko homološke module tako pri Hochschildovi kot pri ciklični homologiji razdelimo na več direktnih sumandov in nato določimo vsakega posebej. Pri obeh homologijah bomo najbolj zahteven primer rešili s pomočjo naslednje leme. Ta rezultat iz komutativne algebre je sicer neodvisen od ostale snovi, obravnavane v prejšnjih poglavjih; podobno lemo najdemo v [**20**].

LEMA 7.1. *Naj bodo r, s, m taka naravna števila, da r deli sm. Naj bosta $f = \sum_{i=0}^{m-1} x^i$ in $g = \sum_{i=0}^{s-1}(x^{im+1} - x^{im})$ elementa kolobarja $k[x]/(x^r - 1)$. Če množenji s f in g obravnavamo kot linearni preslikavi na k-modulu $k[x]/(x^r - 1)$, potem velja*

$$\begin{aligned}
\operatorname{coker}(\cdot f) &\cong k^{d-1} \oplus k/\tfrac{m}{d}k,\\
\ker(\cdot f) &\cong k^{d-1} \oplus \operatorname{ann}_k\left(\tfrac{m}{d}\right),\\
\ker(\cdot f)/\operatorname{im}(\cdot g) &\cong \left(k/\tfrac{ds}{r}k\right)^{d-1} \oplus \operatorname{ann}_k\left(\tfrac{m}{d}\right),\\
\ker(\cdot g)/\operatorname{im}(\cdot f) &\cong \operatorname{ann}_k\left(\tfrac{ds}{r}\right)^{d-1} \oplus k/\tfrac{m}{d}k,
\end{aligned}$$

kjer je $d = (r, m)$ največji skupni delitelj števil r in m.

DOKAZ. Kvocienti iz leme so smiselni, ker velja

$$fg = (x^m - 1)\left(\sum_{i=0}^{s-1} x^{im}\right) = x^{sm} - 1 = 0.$$

V nadaljnjih točkah naj bo $h = \sum_{i=0}^{r-1} c_i x^i \in k[x]/(x^r - 1)$.

- Izraze

  $$x^r - 1, \quad f, \quad x^d - 1, \quad \tfrac{m}{d}\sum_{i=0}^{d-1} x^i$$

  obravnavajmo kot elemente kolobarja $k[x]$. Ker je d največji skupni delitelj števil r in m, je polinom $x^d - 1$ največji skupni delitelj polinomov $x^r - 1$ in $(x-1)f$; poleg tega ni težko premisliti, da se f in $\frac{m}{d}\sum_{i=0}^{d-1} x^i$ razlikujeta za polinomski večkratnik tega polinoma. Zato sta ideala $(x^r - 1, f)$ in $(x^d - 1, \frac{m}{d}\sum_{i=0}^{d-1} x^i)$ v kolobarju $k[x]$ enaka. Torej velja

$$\operatorname{coker}(\cdot f) \cong k[x]/(x^r - 1, f) = k[x]/\left(\tfrac{m}{d}\sum_{i=0}^{d-1} x^i, x^d - 1\right) \cong k/\tfrac{m}{d}k \oplus k^{d-1}.$$

- Enakost $hf = 0$ je ekvivalentna sistemu enačb
$$\sum_{j=0}^{m-1} c_{i-j} = 0$$
za $i = 0, \dots, r-1$, pri čemer v indeksih koeficientov računamo z ostanki pri deljenju z r. Če odštejemo dve zaporedni enačbi, dobimo $c_i - c_{i-m} = 0$; ker to velja za vse $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, sledi $c_i - c_{i-d} = 0$. Če pa seštejemo vse prvotne enačbe, dobimo $\frac{m}{d}\sum_{i=0}^{d-1} c_i = 0$. Od tod sklepamo, da so v $\ker(\cdot f)$ natanko elementi oblike
$$\left(\sum_{i=0}^{d-1} c_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r/d-1} x^{jd}\right), \quad \frac{m}{d}\sum_{i=0}^{d-1} c_i = 0.$$
Ekvivalentna oblika zapisa teh elementov je tudi
$$\left(c_0' + \sum_{i=1}^{d-1} c_i'(x^i - x^{i-1})\right)\left(\sum_{j=0}^{r/d-1} x^{jd}\right), \quad c_0' \in \operatorname{ann}_k\left(\tfrac{m}{d}\right).$$
Zato je $\ker(\cdot f) \cong \operatorname{ann}(\frac{m}{d}) \oplus k^{d-1}$.
- Po predpostavki $\frac{r}{d}$ deli s. Oglejmo si množici $\{0, m, \dots, (s-1)m\}$ in $\{0, d, \dots, (\frac{r}{d}-1)d\}$. Ker je d največji skupni večkratnik števil r in m, za vsak element druge množice obstaja natanko $\frac{ds}{r}$ elementov prve množice, ki imajo enak ostanek pri deljenju z r. Torej v $k[x]/(x^r-1)$ velja
$$\sum_{i=0}^{s-1} x^{im} = \frac{ds}{r}\sum_{j=0}^{r/d-1} x^{jd}$$
in zato
$$\frac{ds}{r}(x^i - x^{i-1})\left(\sum_{j=0}^{r/d-1} x^{jd}\right) \in \operatorname{im}(\cdot g)$$
za $i = 1, \dots, d-1$. Glede na opis modula $\ker(\cdot f)$ iz prejšnje točke potem sledi $\ker(\cdot f)/\operatorname{im}(\cdot g) \cong \operatorname{ann}_k\left(\frac{m}{d}\right) \oplus \left(k/\frac{ds}{r}k\right)^{d-1}$.
- Enakost $hg = 0$ je ekvivalentna sistemu enačb
$$\sum_{j=0}^{s-1} c_{i-1-jm} = \sum_{j=0}^{s-1} c_{i-jm}$$
za $i = 0, \dots, r-1$. Podobno kot v prejšnji točki sklepamo, da množici $\{0, -m, \dots, -(\frac{r}{d}-1)m\}$ in $\{0, d, \dots, (\frac{r}{d}-1)d\}$ dasta enake ostanke pri deljenju z r, zato so zgornje enačbe pravzaprav enake
$$\frac{ds}{r}\sum_{j=0}^{r/d-1} c_{i-1+jd} = \frac{ds}{r}\sum_{j=0}^{r/d-1} c_{i+jd}.$$
Označimo $c_0' = \sum_{j=0}^{r/d-1} c_{jd}$ in $c_i' = \sum_{j=0}^{r/d-1} c_{i+jd} - c_0'$ za $i = 1, \dots, r-1$. Po prejšnjih enačbah velja $c_i' \in \operatorname{ann}_k\left(\frac{ds}{r}\right)$ za $i \geq 1$. V prvi točki smo ugotovili,

da je $x^d - 1 \in \operatorname{im}(\cdot f)$; zato velja

$$\begin{aligned} h + \operatorname{im}(\cdot f) &= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{j=0}^{r/d-1} c_{i+jd} \right) x^i + \operatorname{im}(\cdot f) \\ &= c_0' \sum_{i=0}^{d-1} x^i + \sum_{i=1}^{d-1} c_i' x^i + \operatorname{im}(\cdot f). \end{aligned}$$

Torej sledi $\ker(\cdot g)/\operatorname{im}(\cdot f) \cong k/\frac{m}{d}k \oplus \operatorname{ann}_k\left(\frac{ds}{r}\right)^{d-1}$ po premisleku v prvi točki.

□

V prejšnjem poglavju smo že premislili, da so preslikave d in D stopničaste. Velja pa še več: iz njihovih predpisov je jasno, da ohranjajo linearne ogrinjače ekvivalenčnih razredov ciklov. Torej obstajajo dekompozicije njihovih jeder, slik in ustreznih kvocientov glede na te invariantne podmodule. Zato v nadaljevanju homološke module izračunamo tako, da najprej obravnavamo preslikave d in D na posameznih tipih ekvivalenčnih razredov, rezultat pa potem dobimo kot direktno vsoto manjših kvocientov.

1. Hochschildovi homološki moduli

Hochschildovo homologijo lahko dobimo iz ničtega stolpca bikompleksa $\mathcal{D}$. Zato si pomagamo z opisom prvega lista spektralnega zaporedja iz razdelka 6.3. Pri tem uporabimo naslednje oznake. Za $l \geq 0$ in $\gamma \in \mathcal{C}_l$ naj bo r najmanjše pozitivno število, za katerega velja $\rho^r\gamma = \gamma$; potem r deli l, γ pa je potenca nekega osnovnega cikla γ_0 dolžine r. Ekvivalenčni razred cikla γ je enak $\{\gamma, \rho\gamma, \ldots, \rho^{r-1}\gamma\}$; linearno ogrinjačo te množice označimo z G.

Naj bo $sm < l < (s+1)m$. Po lemi 6.4 je jasno, da velja $\operatorname{coker} d_{2s+1}|_G \cong k$. Ker je element $\sum_{i=0}^{r-1} c_i\rho^i\gamma$ v jedru preslikave d_{2s+1} natanko tedaj, ko velja $c_0 = \cdots = c_{r-1}$, sledi še $\ker d_{2s+1}|_G \cong k$. Zato velja

$$(E^1_{0,2s})_l \cong (E^1_{0,2s+1})_l \cong k^{a_l}.$$

Naj bo $l = sm$ za $s > 0$. Sedaj primerjamo lemi 6.4 in 7.1; vidimo, da je delovanje preslikave d_{2s} na k-modulu G ekvivalentno delovanju elementa f z množenjem na k-modulu $k[x]/(x^r - 1)$. Po lemi 7.1 zato velja

$$(E^1_{0,2s})_l \cong \bigoplus_{r|l} \left(k^{(r,m)-1} \oplus \operatorname{ann}_k\left(\frac{m}{(r,m)}\right)\right)^{b_r},$$

$$(E^1_{0,2s-1})_l \cong \bigoplus_{r|l} \left(k^{(r,m)-1} \oplus k/\frac{m}{(r,m)}k\right)^{b_r}.$$

Cikli dolžine $l = 0$ se pojavijo le v modulu R_0, v tem primeru pa seveda velja $(E^1_{0,0})_0 \cong k^{|\Delta_0|}$.

Zgornje sklepe združimo v izreku, ki do izomorfizma k-modulov natančno opiše Hochschildovo homologijo algebre prirezanih poti. Tega je na podoben način prvi dokazal Sköldberg v **[20]**.

Izrek 7.2. *Naj bo $A = k\Delta/\langle\Delta_m\rangle$ algebra prirezanih poti. Tedaj velja*

$$HH_0(A) \cong k^{\sum_{j=0}^{m-1} a_j}$$

in

$$HH_{2s-1}(A) \cong k^{\sum_{j=1}^{m-1} a_{(s-1)m+j}} \oplus \bigoplus_{r|sm} \left(k^{(r,m)-1} \oplus k/\tfrac{m}{(r,m)}k\right)^{b_r},$$

$$HH_{2s}(A) \cong k^{\sum_{j=1}^{m-1} a_{sm+j}} \oplus \bigoplus_{r|sm} \left(k^{(r,m)-1} \oplus \mathrm{ann}_k\left(\tfrac{m}{(r,m)}\right)\right)^{b_r}$$

za $s \geq 1$.

POSLEDICA 7.3. *Naj bo* $m > 1$ *in* $A = k\Delta/\langle \Delta_m \rangle$. *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

i) *v tulcu* Δ *ni netrivialnih ciklov;*
ii) $HH_n(A) = 0$ *za vse* $n \in \mathbb{N}$*;*
iii) *obstaja* $n_0 \in \mathbb{N}$*, da velja* $HH_n(A) = 0$ *za vse* $n \geq n_0$.

DOKAZ. Implikacija $i) \Rightarrow ii)$ sledi neposredno iz opisa kompleksa, ki ga dobimo pri tenzoriranju Bardzellove resolucije; sklep $ii) \Rightarrow iii)$ je trivialen. Po izreku 7.2 velja še $iii) \Rightarrow i)$: denimo, da Δ vsebuje netrivialen osnovni cikel dožine r. Če sta r in m tuji števili, potem je prvi sumand v $HH_{2s+1}(A)$ neničeln za $s = \lfloor \frac{r}{m} \rfloor$; v nasprotnem primeru pa je neničeln eden izmed ostalih sumandov v $HH_{2r-1}(A)$. □

ZGLED 7.4. Če velja $\mathbb{Q} \subseteq k$, so vsi Hochschildovi homološki moduli prosti in končno generirani; njihove dimenzije so enake

$$\dim_k HH_0(A) = \sum_{j=1}^{m-1} a_j + |\Delta_0|,$$

$$\dim_k HH_{2s-1}(A) = \sum_{j=1}^{m-1} a_{(s-1)m+j} + \sum_{r|sm} ((r,m)-1)b_r,$$

$$\dim_k HH_{2s}(A) = \sum_{j=1}^{m-1} a_{sm+j} + \sum_{r|sm} ((r,m)-1)b_r$$

za $s \geq 1$.

ZGLED 7.5. Naj bo k poljuben komutativen kolobar z enoto; algebro $k[x]/\langle x^m \rangle$ lahko obravnavamo kot algebro prirezanih poti, pri čemer je tulec sestavljen iz enega vozlišča in ene zanke. Zato za $s \geq 1$ velja

$$HH_0(k[x]/\langle x^m \rangle) \cong k^m,$$

$$HH_{2s-1}(k[x]/\langle x^m \rangle) \cong k^{m-1} \oplus k/mk,$$

$$HH_{2s}(k[x]/\langle x^m \rangle) \cong k^{m-1} \oplus \mathrm{ann}_k(m).$$

Člani raziskovalne skupine o ciklični homologiji iz Buenos Airesa so ta rezultat dokazali v **[5]** z uporabo bolj preproste 2-periodične projektivne resolucije.

ZGLED 7.6. Naj bo $N_{r,m}$ kvazi-Frobeniusova Nakayama algebra nad $\mathbb{Z}$ kot v zgledu 4.5; to je torej kvocient $\mathbb{Z}$-algebre poti nad usmerjenim ciklom dolžine r po idealu, generiranim s potmi dolžine m. Hochschildova homologija je v tem primeru kar zaporedje abelovih grup, zato lahko govorimo o njihovi torziji. Vsi sodi moduli so proste abelove grupe po izreku; če m deli r, so tudi vsi lihi moduli proste abelove grupe. V nasprotnem primeru pa ima grupa $HH_{2s-1}(N_{r,m})$ neničelno torzijo, če in samo če $\frac{r}{(r,m)}$ deli s.

ZGLED 7.7. Naj bo k cel kolobar, ki vsebuje primitivni m-ti koren enote. V zgledu 4.5 smo že spoznali Taftovo algebro Λ_m. Po izreku 7.2 so vsi njeni Hochschildovi homološki moduli prosti; njihove dimenzije so enake $\dim_k HH_0(\Lambda_m) = m$ in $\dim_k HH_n(\Lambda_m) = m - 1$ za $n \in \mathbb{N}$.

2. Happelova in Hanova domneva

Ta razdelek je namenjen umestitvi rezultatov iz prejšnjega razdelka v okvir dveh domnev, ki se nanašata na splošne asociativne algebre.

Naj bo A enotska asociativna algebra; njeno *globalno dimenzijo*, *Hochschildovo kohomološko dimenzijo* in *Hochschildovo homološko dimenzijo* definiramo kot

$$\begin{aligned} \operatorname{gl.dim} A &= \min\{n_0 \in \mathbb{N} \colon \text{obstaja končna projektivna} \\ &\qquad\qquad \text{bimodulska resolucija algebre } A \text{ dolžine } n_0\}, \\ \operatorname{hch.dim} A &= \min\{n_0 \in \mathbb{N} \colon HH^n(A) = 0 \text{ za vsak } n > n_0\}, \\ \operatorname{hh.dim} A &= \min\{n_0 \in \mathbb{N} \colon HH_n(A) = 0 \text{ za vsak } n > n_0\}; \end{aligned}$$

pri tem upoštevamo, da je minimum prazne množice enak ∞. V petem poglavju smo tako na primer videli, da velja $\operatorname{gl.dim} k\Delta \leq 1$.

Če je A prost k-modul, po ugotovitvah iz razdelka 3.1 sledi $\operatorname{gl.dim} A \geq \operatorname{hch.dim} A$ in $\operatorname{gl.dim} A \geq \operatorname{hh.dim} A$. Dieter Happel je leta 1989 v [**12**] postavil obratno vprašanje: če je A končno razsežna algebra nad algebraično zaprtim poljem k, ali iz $\operatorname{hch.dim} A < \infty$ sledi $\operatorname{gl.dim} A < \infty$? Nikalen odgovor je bil dokazan v [**4**] leta 2004; za protiprimer lahko vzamemo algebro

$$k\langle x, y \mid x^2 = 0,\ xy + qyx = 0,\ y^2 = 0\rangle,$$

kjer $q \in k \setminus \{0\}$ ni koren enote. Zato je Yang Han v [**11**] postavil novo domnevo: če je $\operatorname{hh.dim} A < \infty$, potem velja $\operatorname{gl.dim} A < \infty$. V njegovem članku najdemo dokaz te domneve za algebre prejšnjega tipa, komutativne algebre in algebre prirezanih poti. Za slednje smo to dokazali v prejšnjem razdelku: če je A algebra prirezanih poti nad tulcem Δ in velja $\operatorname{hh.dim} A < \infty$, po posledici 7.3 v Δ ni usmerjenih ciklov; ampak potem je v Δ le končno mnogo poti, torej je Bardzellova resolucija končna in velja $\operatorname{gl.dim} A < \infty$. Omenimo še, da tudi Happelova domneva drži za razred algeber prirezanih poti, kot je dokazano v [**15**].

Ker se je Hanova domneva zaenkrat dobro odrezala, bi lahko pomislili, da za prej omenjene družine algeber velja $\operatorname{gl.dim} A = \operatorname{hh.dim} A$ ali pa je vsaj razlika teh dveh števil majhna. Vendar to ne drži, kar dokažemo z naslednjim premislekom.

Naj bo $A = k\Delta/\langle \Delta_m \rangle$ in $m \geq 2$. Definiramo A-bimodul

$$Q = A^e / \langle e \otimes_k a,\ a \otimes_k e \colon e \in \Delta_0,\ a \in \Delta_1 \rangle.$$

Torej velja $\alpha Q = Q\alpha = 0$ za poljubno pot α pozitivne dolžine, v smislu k-modulov pa je Q izomorfen $k\Delta_0 \otimes_k k\Delta_0$. S pomočjo Bardzellove resolucije (P, d') izračunajmo $H_*(A, Q)$. Očitno velja

$$Q \otimes_{A^e} P_{2s} \cong k\Delta_{sm}, \quad Q \otimes_{A^e} P_{2s+1} \cong k\Delta_{sm+1}$$

za vse $s \geq 0$. Ker velja $sm - ((s-1)m + 1) > 0$, po definiciji preslikav d' in prej omenjene lastnosti modula Q sledi $\mathrm{id}_Q \otimes_{A^e} d'_n = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Zato velja

$$H_{2s+i}(A, Q) \cong k\Delta_{sm+i}$$

za $(s, i) \in \mathbb{N}_0 \times \{0, 1\}$.

Sedaj si oglejmo posebni primer: tulec Δ naj bo usmerjena pot dolžine sm kot v zgledu 4.2. Iz strukture Bardzellove resolucije sledi $\operatorname{gl.dim} A \leq 2s$, s pomočjo zadnjega odstavka pa sklepamo $\operatorname{gl.dim} A \geq 2s$; torej je $\operatorname{gl.dim} A = 2s$, ampak po drugi strani posledica 7.3 implicira $\operatorname{hh.dim} A = 0$.

Z ozirom na pravkar izračunano homologijo vidimo, da je Bardzellova resolucija glede minimalističnosti res zelo ugodna izbira projektivne bimodulske resolucije za algebro prirezanih poti: za generično algebro iz tega razreda namreč obstaja bimodul, da je število generatorjev k-modulov Hochschildove homologije s koeficienti v tem bimodulu primerljivo s številom generatorjev bimodulov Bardzellove resolucije.

3. Ciklični homološki moduli

Izrek 6.6 povezuje ciklično homologijo z limitnimi moduli bikompleksa $\mathcal{D}$. Zato si sedaj bolj podrobno oglejmo njihov opis iz razdelka 6.3. Spet privzemimo oznake iz razdelka 7.1: za $l \geq 0$ in cikel $\gamma \in \mathcal{C}_l$ naj bo G linearna ogrinjača ekvivalenčnega razreda cikla γ in $r \in \mathbb{N}$ najmanjše število, da velja $\rho^r\gamma = \gamma$.

Naj bo $s \geq 0$ in $sm < l < (s+1)m$. Modul $\ker d_{2s+1}|_G$ je očitno prost in generiran z elementom $\sum_{i=0}^{r-1} \rho^i\gamma$. Ker velja

$$D_{2s}(\rho^j\gamma) = \sum_{i=0}^{l-1} \rho^{i+j}\gamma = \tfrac{l}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \rho^i\gamma$$

za vsak j, sledi $(\ker d_{2s+1}/\operatorname{im} D_{2s})|_G \cong k/\frac{l}{r}k$ in zato

$$(\ker d_{2s+1}/\operatorname{im} D_{2s})_l \cong \bigoplus_{r|l} \left(k/\tfrac{l}{r}k\right)^{b_r}.$$

Prav tako je jasno, da je $\operatorname{coker} d_{2s+1}|_G$ prost k-modul, generiran z γ. To pomeni, da je preslikava, ki jo D_{2s} inducira na tem modulu, pravzaprav kar množenje z l. Zato velja

$$(\operatorname{coker} d_{2s+1})_l \cong k^{a_l}, \quad (\ker D_{2s}/\operatorname{im} d_{2s+1})_l \cong \operatorname{ann}(l)^{a_l}$$

za $q - p = 2s$ in $p > 0$.

Naj bo sedaj $s \geq 1$ in γ cikel dolžine $l = sm$. Opazimo, da je delovanje preslikav d_{2s} in D_{2s-1} na G ekvivalentno delovanju elementov f in g z množenjem na modulu $k[x]/(x^r - 1)$ iz leme 7.1. Po tej lemi zato sledi

$$(\ker d_{2s}/\operatorname{im} D_{2s-1})_l \cong \bigoplus_{r|l} \left(\left(k/\tfrac{(r,m)s}{r}k\right)^{(r,m)-1} \oplus \operatorname{ann}_k\left(\tfrac{m}{(r,m)}\right)\right)^{b_r},$$

$$(\ker D_{2s-1}/\operatorname{im} d_{2s})_l \cong \bigoplus_{r|l} \left(\operatorname{ann}_k\left(\tfrac{(r,m)s}{r}\right)^{(r,m)-1} \oplus k/\tfrac{m}{(r,m)}k\right)^{b_r},$$

$$(\operatorname{coker} d_{2s})_l \cong \bigoplus_{r|l} \left(k^{(r,m)-1} \oplus k/\tfrac{m}{(r,m)}k\right)^{b_r}.$$

Nazadnje velja še $(R_0)_0 \cong k^{|\Delta_0|}$.

Ugotovitve tega razdelka združimo v izrek, ki do izomorfizma k-modulov natančno opiše ciklično homologijo algeber prirezanih poti.

Izrek 7.8. *Naj bo $A = k\Delta/\langle \Delta_m \rangle$ algebra prirezanih poti. Za $s \geq 0$ velja*

$$HC_{2s}(A) \cong k^{|\Delta_0| + \sum_{j=1}^{m-1} a_{sm+j}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{s-1} \bigoplus_{j=1}^{m-1} \operatorname{ann}_k (im+j)^{a_{im+j}}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{r|im} \left(\left(k/\tfrac{(r,m)i}{r} k \right)^{(r,m)-1} \oplus \operatorname{ann}_k \left(\tfrac{m}{(r,m)} \right) \right)^{b_r}$$

in

$$HC_{2s+1}(A) \cong \bigoplus_{r|(s+1)m} \left(k^{(r,m)-1} \oplus k/\tfrac{m}{(r,m)} k \right)^{b_r} \oplus \bigoplus_{i=0}^{s} \bigoplus_{j=1}^{m-1} \bigoplus_{r|im+j} \left(k/\tfrac{im+j}{r} k \right)^{b_r}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{r|im} \left(\operatorname{ann}_k \left(\tfrac{(r,m)i}{r} \right)^{(r,m)-1} \oplus k/\tfrac{m}{(r,m)} k \right)^{b_r}.$$

Dokaz. Po izreku 6.6 velja

$$HC_n(A) \cong H_n(\operatorname{Tot} \bar{\mathcal{B}}) \cong \bigoplus_{p+q=n} E^{\infty}_{p,q}.$$

Če uporabimo še opise limitnih modulov iz razdelka 6.3, dobimo

$$\begin{aligned}
HC_{2s}(A) &\cong \bigoplus_{i=0}^{s} E^{\infty}_{s-i,s+i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{s} \left((E^{\infty}_{s-i,s+i})_{im} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m-1} (E^{\infty}_{s-i,s+i})_{im+j} \right) \\
&= (R_0)_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} (\ker d_{2i} / \operatorname{im} D_{2i-1})_{im} \right) \\
&\oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} \bigoplus_{j=1}^{m-1} (\ker D_{2i} / \operatorname{im} d_{2i+1})_{im+j} \right) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m-1} (\operatorname{coker} d_{2s+1})_{sm+j}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
HC_{2s+1}(A) &\cong \bigoplus_{i=0}^{s} E^{\infty}_{s-i,s+1+i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{s} \left(\left(\bigoplus_{j=1}^{m-1} (E^{\infty}_{s-i,s+1+i})_{im+j} \right) \oplus (E^{\infty}_{s-i,s+1+i})_{(i+1)m} \right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{s} \bigoplus_{j=1}^{m-1} (\ker d_{2i+1} / \operatorname{im} D_{2i})_{im+j} \\
&\oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} (\ker D_{2i+1} / d_{2i+2})_{(i+1)m} \right) \oplus (\operatorname{coker} d_{2s+2})_{(s+1)m}.
\end{aligned}$$

Izrek sedaj sledi po izračunih v tem razdelku. $\square$

Izrek 7.9. *Za algebro A kot v prejšnjem izreku velja*

$$
\begin{aligned}
HC_{even}(A) \cong k^{|\Delta_0|} &\oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty}\bigoplus_{j=1}^{m-1} \operatorname{ann}_k(im+j)^{a_{im+j}} \\
&\oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty}\bigoplus_{r|im}\left(\left(k/\tfrac{(r,m)i}{r}k\right)^{(r,m)-1}\oplus \operatorname{ann}_k\left(\tfrac{m}{(r,m)}\right)\right)^{b_r}
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
HC_{odd}(A) \cong &\bigoplus_{i=0}^{\infty}\bigoplus_{j=1}^{m-1}\bigoplus_{r|im+j}\left(k/\tfrac{im+j}{r}k\right)^{b_r} \\
&\oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty}\bigoplus_{r|im}\left(\operatorname{ann}_k\left(\tfrac{(r,m)i}{r}\right)^{(r,m)-1}\oplus k/\tfrac{m}{(r,m)}k\right)^{b_r}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Uporabimo opis sode in lihe ciklične homologije iz razdelka 6.3 in nato nadaljujemo kot v dokazu prejšnjega izreka. □

Posledica 7.10. *Naj bo $m > 1$. Liha ciklična homologija algebre A je trivialna natanko tedaj, ko velja eden izmed naslednjih pogojev:*

i) *Δ ne vsebuje netrivialnih ciklov,*
ii) *$\mathbb{Q} \subseteq k$,*
iii) *dolžine ciklov v Δ so deljive z m in naravni večkratniki enote niso delitelji niča v k.*

Dokaz. Implikacija v levo očitno sledi po izreku 7.9. Sedaj predpostavimo, da nobeden izmed zgornjih pogojev ne velja. Ločimo dve možnosti z ozirom na negacijo tretjega pogoja.

Denimo, da obstaja cikel z dolžino, ki ni deljiva z m; potem obstaja osnovni cikel, katerega dolžina r ni deljiva z m. Naj bo $q \in \mathbb{N}$ najmanjše število, da element $q \cdot 1$ ni obrnljiv v k. Če q ni deljiv z $\frac{m}{(r,m)}$, potem qr ni deljiv z m in zato

$$\left(k/\tfrac{qr}{r}k\right)^{b_r} \neq 0.$$

Če pa je q deljiv z $\frac{m}{(r,m)}$, zaradi minimalnosti sledi $\frac{m}{(r,m)} = q$, zato $\frac{m}{(r,m)} \cdot 1$ ni obrnljiv v k in sledi

$$\left(k/\tfrac{m}{(r,m)}k\right)^{b_r} \neq 0.$$

Obravnavamo še drugo možnost: sedaj predpostavimo, da obstajata netrivialen osnoven cikel dolžine r, ki je deljiva z m, in $q \in \mathbb{N}$ delitelj niča v k. Potem velja

$$\operatorname{ann}_k\left(\tfrac{(r,m)qr}{r}\right)^{((r,m)-1)b_r} \neq 0,$$

saj je $(r,m) = m > 1$. □

Posledica 7.11. *Naj bo $m > 1$. Soda ciklična homologija algebre A je prost k-modul dimenzije $|\Delta_0|$ natanko tedaj, ko velja eden izmed naslednjih pogojev:*

i) *Δ ne vsebuje netrivialnih ciklov,*
ii) *$\mathbb{Q} \subseteq k$,*
iii) *dolžine osnovnih ciklov v Δ so tuje z m in naravni večkratniki enote niso delitelji niča v k.*

Dokaz. Sklepamo podobno kot pri dokazu prejšnje posledice; implikacija v levo je jasna. Predpostavimo, da nobeden izmed pogojev v formulaciji ne velja. Spet ločimo dva primera glede na negacijo tretjega pogoja.

Denimo, da obstaja osnovni cikel dolžine r, za katero velja $(r,m) > 1$. Če $q \in \mathbb{N}$ ni obrnljiv v k, potem velja

$$\left(k\tfrac{mqr}{r}k\right)^{((r,m)-1)b_r} \neq 0.$$

Druga možnost nastopi, če obstaja naravni večkratnik enote, ki je delitelj niča. Naj bo $q \in \mathbb{N}$ najmanjše tako število. Naj bo r dolžina nekega osnovnega cikla v Δ. Če q ni deljiv z $\frac{m}{(r,m)}$, potem produkt lr ni deljiv z m in velja

$$\operatorname{ann}_k(lr)^{a_{lr}} \neq 0.$$

Če pa je q deljiv z $\frac{m}{(r,m)}$, zaradi minimalnosti velja $\frac{m}{(r,m)} = q$ in zato

$$\operatorname{ann}_k\left(\tfrac{m}{(r,m)}\right)^{b_r} \neq 0.$$

$\square$

Zgled 7.12. Če je $\mathbb{Q} \subseteq k$, so ciklični homološki moduli algebre A prosti in končno generirani z dimenzijo

$$\dim_k HC_{2s}(A) = |\Delta_0| + \sum_{j=1}^{m-1} a_{sm+j},$$
$$\dim_k HC_{2s+1}(A) = \sum_{r|(s+1)m} ((r,m)-1)b_r$$

za $s \geq 0$.

Če je k polje karakteristike 0, lahko do tega rezultata pridemo na precej bolj preprost način. Ker je algebra A stopničasta, po trditvi 3.4 in komentarju za njeno formulacijo sledi, da so moduli $HC_n(A)$ določeni že z moduli $HH_n(A)$ in $HC_n(A_0)$. Zadnje je zelo lahko izračunati, saj je podalgebra A_0 izomorfna direktnemu produktu $|\Delta_0|$-kopij kolobarja k. To pomeni, da v tem primeru ne potrebujemo poznavanja eksplicitnih homotopskih ekvivalenc med standardno in Bardzellovo resolucijo ter operiranja s spektralnimi zaporedji. Ta pristop je uporabila Taillefer v [**22**].

Zgled 7.13. Naj bo k spet splošen kolobar; vrnimo se k zgledu 7.5 in algebri $k[x]/\langle x^m\rangle$. Po izreku 7.8 velja

$$HC_{2s}(k[x]/\langle x^m\rangle) \cong k^m \oplus \bigoplus_{i=0}^{s-1}\left(\operatorname{ann}_k(m) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m-1}\operatorname{ann}_k(im+j)\right),$$
$$HC_{2s+1}(k[x]/\langle x^m\rangle) \cong \bigoplus_{i=0}^{s}\left(k/mk \oplus \bigoplus_{j=1}^{m-1} k/(im+j)k\right)$$

za $s \geq 0$. Do teh cikličnih homoloških modulov lahko pridemo tudi brez uporabe teorije spektralnih zaporedij; v [**5**] je ta posebni primer dokazan s pomočjo Hochschildovih homoloških modulov in Connesovega eksaktnega zaporedja.

Zgled 7.14. Naj bo $\mathbb{Z}$-algebra $N_{r,m}$ kot v zgledu 7.6. Izrek 7.8 implicira naslednji dve trditvi o torziji cikličnih homoloških grup.

- Če sta r in m tuji števili, je grupa $HC_{2s}(N_{r,m})$ prosta za vse $s \geq 0$. Sicer je $HC_{2s}(N_{r,m})$ prosta natanko tedaj, ko je $s < \frac{2r}{(r,m)}$.

- Če m deli r, je $HC_{2s+1}(N_{r,m})$ prosta za vse $s \geq 0$. Sicer je $HC_{2s+1}(N_{r,m})$ prosta natanko tedaj, ko je $s < \frac{2r}{m} - 1$.

Res, po izreku sta torzijski podgrupi v $HC_{2s}(N_{r,m})$ in $HC_{2s+1}(N_{r,m})$ izomorfni

$$\bigoplus_{\substack{1\leq i\leq s,\\ r|im}} \Big(\mathbb{Z}/\tfrac{(r,m)i}{r}\mathbb{Z}\Big)^{(r,m)-1} \qquad \text{in} \qquad \bigoplus_{\substack{0<jr<(s+1)m,\\ m\nmid jr}} \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{\substack{1\leq i\leq s+1,\\ r|im}} \mathbb{Z}/\tfrac{m}{(r,m)}\mathbb{Z}.$$

Prva dela obeh trditev sta sedaj očitna. Drugi del prve točke sledi iz dejstva, da je najmanjše število $i \in \mathbb{N}$, za katerega je $\frac{(r,m)i}{r}$ naravno število, večje od 1, enako $2\frac{r}{(r,m)}$.

Preostane nam še dokaz drugega dela druge trditve. Druga direktna vsota v zgornjem opisu torzije je enaka 0 natanko tedaj, ko je $s < \frac{r}{(r,m)} - 1$. Sedaj si oglejmo prvo vsoto: če je $\frac{m}{(r,m)} \neq 2$, potem je najmanjše število $j \in \mathbb{N}$, ki zadošča $m \nmid jr$ in $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \neq 0$, enako 2; sicer je najmanjše število s tema lastnostima enako 3. Mejna vrednost za s je v prvem primeru enaka $\frac{2r}{m} - 1$, v drugem primeru pa $\frac{3r}{m} - 1 = \frac{3}{2}\frac{r}{(r,m)} - 1$. Trditev sedaj sledi: če je $\frac{m}{(r,m)} = 2$, velja $\frac{2r}{m} = \frac{r}{(r,m)} < \frac{3}{2}\frac{r}{(r,m)}$, če pa je $\frac{m}{(r,m)} > 2$, velja $\frac{2r}{m} < \frac{r}{(r,m)}$.

Zgled 7.15. Naj bo $m \geq 2$, k cel kolobar, ki vsebuje primitivni m-ti koren enote, in Λ_m Taftova algebra nad k. Naj bo q karakteristika kolobarja k; če je $q > 0$, sta števili m in q tuji. Po izreku 7.8 so lihi ciklični homološki moduli prosti z dimenzijami

$$\dim_k HC_{2s+1}(\Lambda_m) = \begin{cases} m-1 & q = 0 \\ (m-1)\Big(1 + \lfloor \frac{s}{q} \rfloor\Big) & q > 0, \end{cases}$$

sodi ciklični homološki moduli pa so enaki

$$HC_{2s}(\Lambda_m) \cong k^m \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} (k/ik)^{m-1}.$$

Ti moduli niso nujno prosti; za primer lahko vzamemo $k = \mathbb{Z}[\zeta]$ ali $k = \mathbb{Z}_p$ za ustrezno praštevilo p.

Literatura

[1] G. Ames, L. Cagliero in P. Tirao, *Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras*, Journal of Algebra **322.5** (2009) 1466–1497.

[2] I. Assem, D. Simson in A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts **65**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] M. J. Bardzell, *The alternating syzygy behavior of monomial algebras*, Journal of Algebra **188.1** (1997) 69–89.

[4] R. O. Buchweitz, E. L. Green, D. Madsen in Ø. Soldberg, *Finite Hochschild cohomology without finite global dimension*, Mathematical Research Letters **12.5-6** (2005) 805–816.

[5] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *Cyclic homology of algebras with one generator*, K-Theory **5.1** (1991) 51–69.

[6] H. Cartan in S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[7] C. Cibils, *Rigidity of truncated quiver algebras*, Advances in Mathematics **79.1** (1990) 18–42.

[8] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publications Mathematiques de l'IHES **62.1** (1985) 41–144.

[9] K. Erdmann in T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, Forum Mathematicum, **11.2** (1999) 177–201.

[10] F. Q. Gouvêa, *p-adic Numbers. An introduction*, druga izdaja, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[11] Y. Han, *Hochschild (co)homology dimension*, Journal of the London Mathematical Society **73.3** (2006) 657–668.

[12] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, v: Séminaire d'Algebre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, Lecture Notes in Mathematics **1404**, Springer, Berlin, 1989, 108–126.

[13] G. Hochschild, *On the Cohomology Groups of an Associative Algebra*, Annals of Mathematics **47** (1946) 568–579.

[14] T. Itagaki in K. Sanada, *The dimension formula of the cyclic homology of truncated quiver algebras over a field of positive characteristic*, Journal of Algebra **404** (2014) 200–221.

[15] A. C. Locateli, *Hochschild cohomology of truncated quiver algebras*, Communications in Algebra **27.2** (1999) 645–664.

[16] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **301**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[17] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge studies in advanced mathematics **58**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[18] S. Mac Lane, *Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[19] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Universitext, Springer, New York, 2009.

[20] E. Sköldberg, *The Hochschild homology of truncated and quadratic monomial algebras*, Journal of the London Mathematical Society **59.01** (1999) 76–86.

[21] E. J. Taft, *The order of the antipode of finite-dimensional Hopf algebra*, Proceedings of the National Academy of Sciences **68.11** (1971) 2631–2633.

[22] R. Taillefer, *Cyclic homology of Hopf algebras*, K-Theory **24.1** (2001) 69–85.

[23] B. L. Tsygan, *The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology*, Russian Mathematical Surveys **38.2** (1983) 198–199.

[24] R. Vakil, *Spectral sequences: friend or foe?*, [ogled 24. 3. 2014], dostopno na `http://math.stanford.edu/~vakil/0708-216/216ss.pdf`.

[25] J. H. van Lint in R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, druga izdaja, Cambridge University Press, New York, 2001.

[26] J. Volčič, *Cyclic homology of truncated quiver algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra (2014), `http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.04.007`.