

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Renata Babič

BÉZIEROVE KRIVULJE V PROJEKTIVNEM PROSTORU

Magistrsko delo

Mentor: izred. prof. dr. Gašper Jaklič

Ljubljana, 2013

Podpisana Renata Babič izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom Bézierove krivulje v projektivnem prostoru izdelala samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Gašperja Jakliča in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 27. november 2013

Podpis:

ZAHVALA

Rada bi se zahvalila svojemu mentorju, ki je potrpežljivo odgovarjal na moja vprašanja in vztrajno popravljaj in pregledoval moje nedokončane verzije. Hkrati bi se rada zahvalila še Gašperju Zadniku in svojim staršem ter bratu za neizpodbitno ljubezen in neomajano vero vame. Hvala.

KAZALO

Uvod	13
1. Osnove	14
1.1. Bézierove krivulje	16
1.2. De Casteljau-jev algoritem	17
1.3. Lastnosti Bézierovih krivulj	21
1.4. Farinove točke	23
2. Projektivni prostor	24
2.1. Realna projektivna ravnina	24
2.2. Realni projektivni prostor	25
2.3. Krivulje v projektivnem prostoru	27
3. Dualni prostor	30
3.1. Dualna ravnina	32
3.2. Krivulje v dualnem prostoru	32
4. Racionalna Bézierova krivulja	37
4.1. de Casteljau-jev algoritem	38
4.2. Geometrijski kontrolni sistem	39
4.3. Projektivna lastnost manjšanja variacije	40
5. Dualne Bézierove krivulje	42
5.1. Dualni kontrolni sistem	43
6. Uporabnost in prednosti dualne oblike	45
6.1. Izračun pritisnjenih hiperravnin na c skozi poljubno točko	45
6.2. Konveksnost	45
6.3. Racionalne krivulje z racionalnimi odtisi	47
7. Pogoji za regularnost duala Bézierove krivulje stopnje 3	48
Literatura	54

PROGRAM DELA

V magistrskem delu obravnavajte racionalne Bézierove krivulje v projektivnem prostoru. Študirajte njihovo predstavitev s točkami iz istega prostora in njihove lastnosti. Predstavite še dualno obliko krivulje.

Osnovna literatura: H. Pottman, J. Wallner, Computational Line Geometry, Springer, Heidelberg, 2001.

mentor: izred. prof. dr. Gašper Jaklič

POVZETEK

V tem delu bomo podrobno predstavili racionalne Bézierove krivulje. Najprej jih bomo gledali v Evklidskem prostoru, nato pa v projektivnem prostoru. Pokazali bomo, da je teorija Bézierovih krivulj v projektivnem prostoru analogna teoriji teh krivulj v Evklidskem prostoru. Definirali bomo še dualni projektivni prostor in dual krivulje ter pokazali, da je dual Bézierove krivulje spet Bézierova krivulja. Dodali bomo še nekaj primerov uporabe te teorije. V zadnjem razdelku pa prilagam še svoje lastno delo — poiskala sem pogoj, pri katerem je dualna krivulja Bézierove krivulje stopnje 3 regularna.

ABSTRACT

In this paper we introduce rational Bézier curves in Euclidean space and in projective space. We show that the theory of Bézier curves in Euclidean space is analogous to the theory of Bézier curves in projective space. We also define dual projective space, dual curve and show that dual Bézier curve is again a Bézier curve. We present some examples, where the theory is used. My own work is in the last section — I find conditions under which the dual of a Bézier curve of degree 3 is regular.

Math. Subj. Class. (2010): 65D17, 68U07, U14H50

Ključne besede: projektivni prostor, Bézierova krivulja, dualna krivulja

Keywords: projective space, Bézier curve, dual curve

UVOD

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (angl. CAGD) je razmeroma mlado področje matematike, ki posega tudi na druga področja, kot so inženirstvo, računalništvo, grafično in industrijsko oblikovanje ... Kot "rojstni dan" tega področja se šteje prva konferenca na to temo leta 1974 na Univerzi Utah, ki sta jo organizirala R. Barnhill in R. Reisenfeld.

Konkretno je zasnova Bézierovih krivulj prišla iz avtomobilske industrije. Čeprav se krivulje imenujejo le po enem človeku, sta do njih neodvisno prišla dva raziskovalca. Pierre Bézier je delal kot inženir pri Renault-u, Paul de Paget de Casteljau pa kot matematik pri Citroën-u. Obe podjetji sta delovali v Parizu. De Casteljau je do svojega odkritja prišel v poznih 50. letih 20. stoletja v obliki algoritma, ki ga imenujemo de Casteljau-jev algoritem. Spoznali ga bomo v algoritmu 1.1. V nadaljevanju pa bomo spoznali še nekatere različice (algoritma 1.2, 4.1). Najpomembnejše odkritje pri tem je bilo, da oblike krivulje ne nadziramo s točkami na njej, ampak s točkami, ki so ji blizu. Te točke tvorijo kontrolni poligon.

V zgodnjih 60. letih istega stoletja je bil Pierre Bézier vodja oblikovalskega oddelka pri Renault-u. Pokazala se je potreba po računalniški predstavitvi mehaničnih delov. Njegova ideja je bila predstavitev "osnovne krivulje" kot presek dveh eliptičnih cilindrov (za podrobnosti glej 1. poglavje v [2]). Kasneje se je odločil za polinomsko formulacijo istega koncepta, kar je za rezultat dalo isto krivuljo kot de Casteljau-jev algoritem.

Torej, dva raziskovalca, vsak pri svojem avtomobilskem podjetju, sta prišla do istega rezultata. Povezavo je naredil A. R. Forrest, ki je ugotovil, da lahko Bézierovo krivuljo zapiše z Bernsteinovimi polinomi, kot je to naredil že de Casteljau. Njegov članek o Bézierovih krivuljah z naslovom *Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials*, objavljen v reviji *The computer J* leta 1972, je precej populariziral Bézierove krivulje. Na to kaže tudi dejstvo, da so članek objavili še v reviji *Computer-Aided Design* leta 1990.

Od skromnega začetka v 70. letih prejšnjega stoletja se je računalniško podprto geometrijsko oblikovanje zelo razbohotilo. V tem delu bomo predstavili nekaj osnov. V kontekstu Bézierovih krivulj bomo predstavili že znane matematične strukture, kot so prevoj, ost, projektivni prostor, dualizacija ...

V zadnjem razdelku prilagam še svoj prispevek k tej teoriji. Poiskala sem pogoje za regularnost duala Bézierove krivulje stopnje 3. Dokazi trditve 3.10, 3.14, 6.3 so moji, saj jih nisem našla v literaturi v željeni obliki. Pri raziskovanju prevoja na projektivnih krivuljah sem sama prišla še do trditve 3.13.

1. OSNOVE

V tem razdelku bomo podali nekaj osnovnih gradnikov teorije računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja. Predstavili bomo njihove definicije in izpeljali lastnosti, ki za njih veljajo. Še prej pa moramo povedati, v kakšnem prostoru bomo delali. Tekom tega dela bomo uporabljali tri različne prostore: Evklidski, afini in projektivni prostor. Začnimo z definicijami prvih dveh.

Definicija 1.1. Naj bo V vektorski prostor. Afini podprostor \mathcal{A} je množica vektorjev $a + U = \{a + u : u \in U\}$, kjer je a nek vektor iz V in U nek vektorski podprostor prostora V .

Zgled. Naj bo $V = \mathbb{R}^3$ in naj bo $\{e_1, e_2, e_3\}$ njegova baza. V tej bazi naj bo $a = (0, 0, 1)$ in $U = \mathcal{L}in\{e_1, e_2\}$. Afini podprostor $a + U$ je ravnina z bazo $\{e_1, e_2\}$. premaknjena za vektor a .

Trditev 1.2. Naj bo V vektorski prostor nad obsegom \mathcal{O} , U njegov vektorski podprostor in a vektor iz V . Naj bodo b_1, b_2, \dots, b_n elementi afinega podprostora $\mathcal{A} = a + U$ in naj bodo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{O}$, za katere velja $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Potem je $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ tudi element afinega podprostora \mathcal{A} .

Dokaz. Ker je $b_i \in a + U$ za $i = 1, 2, \dots, n$, obstajajo $u_i \in U$ za $i = 1, 2, \dots, n$, da velja $b_i = a + u_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Potem je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a + u_i) = a \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = a + \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i.$$

Ker je U vektorski prostor, je $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in U$ in zato $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in a + U$. □

Opomba. Kombinaciji $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, kjer so b_i elementi afinega prostora in α_i elementi obsega s pogojem $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, pravimo afina kombinacija.

Definicija 1.3. Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} dva afina podprostora v vektorskem prostoru V . Preslikava $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je afina, če za vsako afino kombinacijo $\sum_{i=0}^n \alpha_i a_i \in \mathcal{A}$ velja

$$\Phi \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i a_i \right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Phi(a_i).$$

Naj bo V vektorski prostor in \mathcal{A} nek afini podprostor. Potem obstajata $a \in V$ in podprostor $U \subset V$, da je $\mathcal{A} = a + U$. Če gledamo U kot samostojni prostor, je vektorski prostor. Evklidski prostor bomo definirali kot vektorski prostor U , pri tem pa bomo njegove elemente obravnavali kot elemente afinega prostora $a + U$ za nek $a \in V$. Torej za elemente Evklidskega prostora velja trditev 1.2. Da bomo ločevali med elementi Evklidskega in vektorskega prostora, bomo elemente Evklidskega prostora imenovali točke. Evklidski prostor je torej afini prostor, le da ga ne gledamo znotraj prostora V .

Definicija 1.4. Naj bo V vektorski prostor in $\mathcal{A} = a + U$ afini podprostor za nek $a \in V$ in $U \leq V$. Evklidski prostor imenujemo prostor U , pri čemer njegove elemente imenujemo točke in zaprtost za vsote in množenje s skalarjem zamenjamo za zaprtost za afine kombinacije. Evklidski prostor bomo označevali z \mathbb{E}^m , kjer je m dimenzija prostora U .

Definirajmo še podprostore Evklidskega prostora.

Definicija 1.5. Naj bo \mathbb{E}^m Evklidski prostor. Kot smo zgoraj zapisali, si ga predstavljamo kot $a + U$ za nek $a \in V$ in podprostor $U \subset V$, kjer je V vektorski prostor. Evklidski podprostor je spet Evklidski prostor, ki si ga predstavljamo kot $a + Z$, kjer je Z podprostor v U . Evklidska hiperravnina je Evklidski podprostor, ki ima dimenzijo za eno manjšo od dimenzije celotnega Evklidskega prostora.

Zdaj, ko smo definirali prostor, definirajmo še Bernsteinove polinome in naštejmo nekaj pomembnih lastnosti, katerih dokaze bomo na kratko orisali. Podrobne dokaze lahko bralec najde v [1].

Definicija 1.6. Naj bo n neko naravno od 0 različno število. Potem polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

za $i = 0, 1, \dots, n$ imenujemo i -ti Bernsteinov polinom stopnje n .

Trditve 1.7. Za Bernsteinove polinome stopnje n velja:

1. tvorijo particijo enote, torej velja

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

za vsak $t \in [0, 1]$,

2. velja rekurzivno pravilo

$$(1) \quad B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t),$$

kjer je

$$B_0^0(t) = 1$$

in

$$(2) \quad B_j^n(t) = 0 \text{ za } j \notin \{0, 1, \dots, n\},$$

3. na intervalu $[0, 1]$ so nenegativni,

4. velja

$$B_i^n(0) = \delta_{i,0} \text{ in } B_i^n(1) = \delta_{i,n},$$

kjer je

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

5. na intervalu $[0, 1]$ imajo natanko en maksimum; polinom B_i^n doseže maksimalno vrednost, ki je enaka 1, pri parametru $t = \frac{i}{n}$,

6. odvod i -tega Bernsteinovega polinoma stopnje n je enak

$$\frac{dB_i^n}{dt}(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)),$$

7. $\{B_i^n(t) : i = 0, 1, \dots, n\}$ je baza prostora polinomov stopnje manjše ali enake n .

Dokazi prvih šestih točk trditve 1.7 so enostavni. Izpostavimo le idejo dokaza prve in druge točke. Pri prvi točki uporabimo dejstvo

$$1 = 1^n = ((1-t) + t)^n,$$

pri drugi točki pa uporabimo rekurzivno zvezo

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}.$$

Dokaze vseh točk lahko bralec najde v [1].

1.1. Bézierove krivulje. Najosnovnejši gradnik teorije računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja je Bézierova krivulja. Poglejmo si dve definiciji; eno za polinomsko in drugo za racionalno Bézierovo krivuljo. Parametrizacija obeh krivulj bo definirana za vsak realen parameter, a nas bo zanimal le kos krivulje nad intervalom $[0, 1]$, zato uvedimo globalno oznako $I = [0, 1]$.

Definicija 1.8. *Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n točke iz Evklidskega prostora \mathbb{E}^m . Polinomska Bézierova krivulja je krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{E}^m$ s parametrizacijo*

$$(3) \quad c(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t).$$

Točkam p_i pravimo kontrolne točke, številu n pa stopnja Bézierove krivulje.

Racionalno Bézierovo krivuljo v \mathbb{E}^m definiramo kot projekcijo polinomske Bézierove krivulje v \mathbb{E}^{m+1} , ki ne gre skozi izhodišče, na afini podprostor, ki je v koordinatah x_0, x_1, \dots, x_m podan z $x_0 = 1$. Denimo, da so $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n \in \mathbb{E}^{m+1}$ kontrolne točke neke polinomske Bézierove krivulje v \mathbb{E}^{m+1} , ki ne gre skozi izhodišče. Potem obstajajo realna števila w_0, w_1, \dots, w_n in točke $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{E}^m$, da je

$$\sum_{i=0}^n \bar{p}_i B_i^n(t) = \left(\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t), \sum_{i=0}^n w_i p_i B_i^n(t) \right) = \sum_{i=0}^n (w_i, w_i p_i) B_i^n(t).$$

Zdaj lahko zapišemo definicijo racionalne Bézierove krivulje.

Definicija 1.9. *Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n točke iz \mathbb{E}^m in w_0, w_1, \dots, w_n neka realna števila, med katerimi je vsaj eno neničelno. Racionalna Bézierova krivulja je krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{E}^m$ s parametrizacijo*

$$(4) \quad c(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i p_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

Točkam p_i pravimo kontrolne točke, številom w_i pa uteži točk p_i . Število n je stopnja krivulje c .

Definicija 1.10. *Kontrolni poligon Bézierove krivulje, polinomske ali racionalne, je poligon, ki zaporedoma povezuje njene kontrolne točke.*

Hitro lahko opazimo naslednji dve lastnosti:

1. Imejmo dve racionalni Bézierovi krivulji z istimi kontrolnimi točkami in sorazmernimi utežmi: če ima ena krivulja uteži w_i in druga \tilde{w}_i , obstaja neničelno realno število λ , da je $w_i = \lambda \tilde{w}_i$. Potem sta ti dve krivulji enaki.
2. Racionalna Bézierova krivulja, katere uteži so enake nekemu neničelnemu realnemu številu w , je enaka polinomske Bézierovi krivulji z istimi kontrolnimi točkami.

Zaradi druge lastnosti bodo trditve, dokazane za racionalne Bézierove krivulje, veljale tudi za polinomske Bézierove krivulje.

Ker bomo v naslednjem razdelku potrebovali izraz za odvode polinomske Bézierove krivulje, zapišimo naslednjo trditev.

Trditev 1.11. Naj bo $c(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t)$ polinomska Bézierova krivulja za neke točke $p_i \in \mathbb{E}^m$. Potem je r -ti odvod krivulje c enak

$$c^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r p_i B_i^{n-r}(t),$$

kjer je Δ definirana kot

$$\begin{aligned} \Delta p_i &= p_{i+1} - p_i, \\ \Delta^r p_i &= \Delta^{r-1} p_{i+1} - \Delta^{r-1} p_i. \end{aligned}$$

Dokaz. Pokažimo z indukcijo. Naj bo $r = 1$. Potem je

$$\begin{aligned} c^{(1)}(t) &= \sum_{i=0}^n p_i \frac{dB_i^n(t)}{dt} = n \sum_{i=0}^n p_i (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) = \\ &= n \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1} B_i^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i B_i^{n-1}(t) \right) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta p_i B_i^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Predpostavimo, da je velja

$$c^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k p_i B_i^{n-k}(t)$$

za $k \leq r$. Dokažimo, da velja tudi za $r+1$.

$$\begin{aligned} c^{(r+1)}(t) &= \frac{dc^{(r)}(t)}{dt} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r p_i \frac{dB_i^{n-r}(t)}{dt} = \\ &= \frac{n!}{(n-r-1)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r p_i (B_{i-1}^{n-r-1}(t) - B_i^{n-r-1}(t)) = \\ &= \frac{n!}{(n-r-1)!} \left(\sum_{i=0}^{n-r-1} \Delta^r p_{i+1} B_i^{n-r-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-r-1} \Delta^r p_i B_i^{n-r-1}(t) \right) = \\ &= \frac{n!}{(n-r-1)!} \sum_{i=0}^{n-r-1} \Delta^{r+1} p_i B_i^{n-r-1}(t). \end{aligned}$$

□

Opomba. Bralec lahko preveri, da velja tudi

$$(5) \quad \Delta^r p_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} p_{i+j}.$$

1.2. De Casteljau-jev algoritem. Za izračun točke na Bézierovi krivulji pri parametru $t \in I$ namesto direktne formule (3) ali (4) uporabljamo de Casteljau-jev algoritem.

Algoritem 1.1. Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n kontrolne točke polinomske Bézierove krivulje v \mathbb{E}^m . De Casteljau-jev algoritem pri parametru $t \in I$ izračuna naslednje točke:

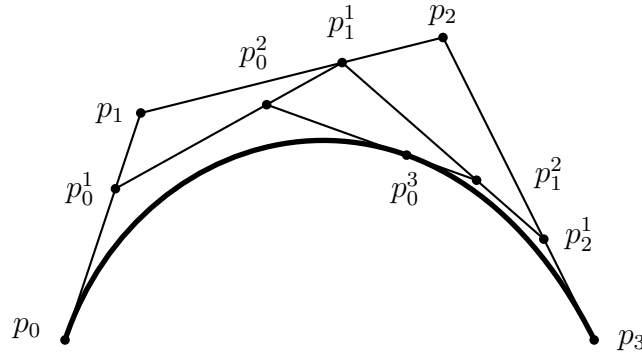
$$\begin{aligned} p_i^0(t) &= p_i \text{ za } i = 0, 1, \dots, n, \\ p_i^j(t) &= (1-t)p_i^{j-1}(t) + tp_{i+1}^{j-1}(t) \text{ za } j = 1, 2, \dots, n \text{ in } i = 0, 1, \dots, n-j. \end{aligned}$$

Rezultat algoritma je točka $p_0^n(t)$, ki leži na Bézierovi krivulji pri parametru t (to bomo pokazali v posledici 1.14). Točkam $p_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n-j$ rečemo de Casteljau-jeve točke pri parametru t .

Zaradi preglednosti de Casteljau-jeve točke zapišemo v trikotniški shemi. Poglejmo si primer $n = 3$:

$$\begin{array}{r}
 p_0^0(t) = p_0, \\
 p_1^0(t) = p_1, \quad p_0^1(t), \\
 p_2^0(t) = p_2, \quad p_1^1(t), \quad p_0^2(t), \\
 p_3^0(t) = p_3, \quad p_2^1(t), \quad p_1^2(t), \\
 \quad \quad \quad p_2^1(t), \quad p_0^3(t).
 \end{array}$$

Geometrijsko gledano je de Casteljau-jev algoritem zaporedje linearnih interpolacij (glej sliko 1).



SLIKA 1. De Casteljau-jev algoritem za $n = 3$ in $t = \frac{2}{3}$.

De Casteljau-jev algoritem za racionalno Bézierovo krivuljo s kontrolnimi točkami p_0, p_1, \dots, p_n in utežmi w_0, w_1, \dots, w_n dobimo tako, da uporabimo de Casteljau-jev algoritem za polinomsko Bézierovo krivuljo s točkami $\bar{p}_i = (w_i, w_i p_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Dobljene točke nato projiciramo na Evklidski podprostor.

Iz točk \bar{p}_i za $i = 0, 1, \dots, n$ de Casteljau-jev algoritem za parameter $t \in I$ izračuna točke

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_i^0(t) &= \bar{p}_i \text{ za } i = 0, 1, \dots, n, \\
 \bar{p}_i^j(t) &= (1-t)\bar{p}_i^{j-1} + t\bar{p}_{i+1}^{j-1} \text{ za } j = 1, 2, \dots, n \text{ in } i = 0, 1, \dots, n-j.
 \end{aligned}$$

Če označimo $\bar{p}_i^0(t) = (w_i^0(t), w_i^0(t)p_i^0(t))$ in $\bar{p}_i^j(t) = (w_i^j(t), w_i^j(t)p_i^j(t))$, lahko zapišemo uteži in točke, ki jih vrne de Casteljau-jev algoritem za racionalno Bézierovo krivuljo.

Algoritem 1.2. Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n in w_0, w_1, \dots, w_n kontrolne točke in uteži racionalne Bézierove krivulje. De Casteljau-jev algoritem pri parametru $t \in I$ izračuna naslednje točke:

$$\begin{aligned}
 w_i^0(t) &= w_i \text{ za } i = 0, 1, \dots, n, \\
 w_i^j(t) &= (1-t)w_i^{j-1}(t) + tw_{i+1}^{j-1}(t) \text{ za } j = 1, 2, \dots, n \text{ in } i = 0, 1, \dots, n-j
 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
 p_i^0(t) &= p_i \text{ za } i = 0, 1, \dots, n, \\
 p_i^j(t) &= (1-t)\frac{w_i^{j-1}(t)}{w_i^j(t)}p_i^{j-1}(t) + t\frac{w_{i+1}^{j-1}(t)}{w_i^j(t)}p_{i+1}^{j-1}(t) \\
 &\quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n \text{ in } i = 0, 1, \dots, n-j.
 \end{aligned}$$

Rezultat algoritma sta utež $w_0^n(t)$ in točka $p_0^n(t)$. Utežem $w_i^j(t)$ in točkam $p_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - i$ rečemo de Casteljau-jeve uteži in točke pri parametru t .

Trditev 1.12. Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n točke iz \mathbb{E}^m in $t \in I$. Naj bodo $p_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - j$ de Casteljau-jeve točke pri parametru t . Potem velja

$$p_i^j(t) = \sum_{k=0}^j p_{i+k} B_k^j(t).$$

Dokaz. Dokažimo z indukcijo na j . Naj bo $j = 0$. Ker po algoritmu 1.1 velja $p_i^0(t) = p_i$, je prvi indukcijski korak dokazan. Predpostavimo sedaj, da velja

$$(6) \quad p_i^s(t) = \sum_{k=0}^s p_{i+k} B_k^s(t)$$

za nek $s < j$. Če uporabimo algoritem 1.1 in zvezo (6), dobimo

$$\begin{aligned} p_i^{s+1}(t) &= (1-t)p_i^s(t) + tp_{i+1}^s(t) = (1-t) \sum_{k=0}^s p_{i+k} B_k^s(t) + t \sum_{k=0}^s p_{i+1+k} B_k^s(t) = \\ &= (1-t) \sum_{l=i}^{i+s} p_l B_{l-i}^s(t) + t \sum_{l=i+1}^{i+1+s} p_l B_{l-i-1}^s(t). \end{aligned}$$

Zaradi lastnosti (2) in (1) je zgornji izraz enak

$$\begin{aligned} &(1-t) \sum_{l=i}^{i+s+1} p_l B_{l-i}^s(t) + t \sum_{l=i}^{i+1+s} p_l B_{l-i-1}^s(t) = \\ &= \sum_{l=i}^{i+1+s} p_l ((1-t) B_{l-i}^s(t) + t B_{l-i-1}^s(t)) = \\ &= \sum_{l=i}^{i+1+s} p_l B_{l-i}^{s+1}(t) = \sum_{k=0}^{s+1} p_{i+k} B_k^{s+1}(t). \end{aligned}$$

□

Podobna trditev velja tudi za racionalno Bézierovo krivuljo.

Trditev 1.13. Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n kontrolne točke in w_0, w_1, \dots, w_n uteži neke racionalne Bézierove krivulje. Naj bodo $p_i^j(t)$ in $w_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - j$ de Casteljau-jeve točke in uteži pri parametru $t \in I$. Potem velja

$$(7) \quad \begin{aligned} w_i^j(t) &= \sum_{k=0}^j w_{i+k} B_k^j(t), \\ p_i^j(t) &= \frac{\sum_{k=0}^j w_{i+k} p_{i+k} B_k^j(t)}{\sum_{k=0}^j w_{i+k} B_k^j(t)}. \end{aligned}$$

Dokaz. Definirajmo točke $\bar{p}_i = (w_i, w_i p_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$. To so kontrolne točke polinomske Bézierove krivulje, katere projekcija je racionalna Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami p_0, p_1, \dots, p_n in utežmi w_0, w_1, \dots, w_n . Naj bodo $\bar{p}_i^j(t)$ de Casteljau-jeve točke pri parametru t , dobljene algoritmom 1.1 na točkah \bar{p}_i . Naj

bodo še $w_i^j(t)$ in $p_i^j(t)$ de Casteljau-jeve uteži in točke pri parametru t , dobljene z algoritmom 1.2 na utežeh w_i in točkah p_i . Po trditvi 1.12 velja zveza

$$\bar{p}_i^j(t) = \sum_{k=0}^j \bar{p}_{i+k} B_k^j(t).$$

Ker je $\bar{p}_i^j(t) = (w_i^j(t), w_i^j(t)p_i^j(t))$ in $\bar{p}_i = (w_i, w_i p_i)$, dobimo (7). \square

Posledica 1.14. 1. Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n kontrolne točke polinomske Bézierove krivulje c in naj bodo $p_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n$ in $i = 0, 1, \dots, n-j$ de Casteljau-jeve točke pri parameteru $t \in I$. Potem točka $p_0^n(t)$ leži na c pri parametru t .

2. Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n kontrolne točke in w_0, w_1, \dots, w_n uteži racionalne Bézierove krivulje c in naj bodo $p_i^j(t)$ in $w_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n$ in $i = 0, 1, \dots, n-j$ de Casteljau-jeve točke in uteži pri parametru $t \in I$. Potem točka $p_0^n(t)$ leži na krivulji c pri parametru t .

Dodajmo še eno pomembno trditev, ki nam bo prišla prav, ko se bomo premaknili v dualni projektivni prostor.

Trditev 1.15. Naj bo $c(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t)$ polinomska Bézierova krivulja v \mathbb{E}^m . Naj bodo $p_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n-j$ de Casteljau-jeve točke pri parametru $t \in I$. Potem je

$$c^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_0^{n-r}(t).$$

Dokaz. Po trditvah 1.11 in 1.12 in izrazu (5) velja

$$\begin{aligned} c^{(r)} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r p_i B_i^{n-r}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} p_{i+j} B_i^{n-r}(t) = \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \sum_{i=0}^{n-r} p_{i+j} B_i^{n-r}(t) = \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} p_j^{n-r}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_0^{n-r}(t). \end{aligned}$$

\square

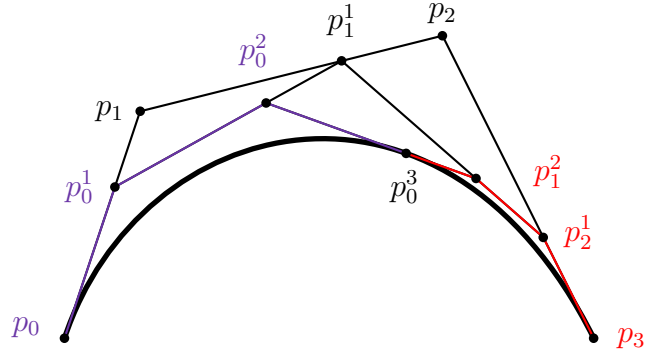
Posledica 1.16. Tangenta na polinomsko Bézierovo krivuljo s kontrolnimi točkami $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{E}^m$ pri parametru $t \in I$ ima smer $p_1^{n-1}(t) - p_0^{n-1}(t)$.

Posledica 1.16 nakazuje na širšo uporabnost de Casteljau-jevih točk. V naslednjem izreku bomo zapisali še eno presenetljivo lastnost teh točk.

Izrek 1.17. Naj bo c racionalna Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami p_0, p_1, \dots, p_n in utežmi w_0, w_1, \dots, w_n . Naj bodo $p_i^j(t)$ in $w_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n-j$ de Casteljau-jeve točke in uteži pri parametru $t \in I$. Točka $p_0^n(t)$ razdeli krivuljo c na dva dela. Velja:

1. kos krivulje c med p_0 in $p_0^n(t)$ je Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami $p_0^j(t)$ in utežmi $w_0^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n$,
2. kos krivulje c med $p_0^n(t)$ in p_n je Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami $p_{n-j}^j(t)$ in utežmi $w_{n-j}^j(t)$ za $j = n, n-1, \dots, 0$.

Opisana situacija iz izreka je predstavljena na sliki 2. Dokaz izreka lahko bralec najde v [1].



SLIKA 2. Kontrolna poligona obeh delov krivulje.

1.3. Lastnosti Bézierovih krivulj. Lastnosti Bézierovih krivulj bomo zapisali v zaporedju trditev.

Trditev 1.18 (Afina invariantnost). Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n točke in w_0, w_1, \dots, w_n uteži, ki določajo neko racionalno Bézierovo krivuljo c v Evklidskem prostoru \mathbb{E}^m . Naj bo Φ afina preslikava. Potem je slika krivulje c s preslikavo Φ enaka racionalni Bézierovi krivulji s kontrolnimi točkami $\Phi(p_0), \Phi(p_1), \dots, \Phi(p_n)$ in utežmi w_0, w_1, \dots, w_n .

Dokaz. Definirajmo

$$\alpha_i(t) = \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n.$$

Ker je $\sum_{i=0}^n \alpha_i(t) = 1$ za vsak $t \in I$, je

$$\begin{aligned} \Phi(c(t)) &= \Phi\left(\sum_{i=0}^n \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} p_i\right) = \Phi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i(t) p_i\right) = \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) \Phi(p_i) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \Phi(p_i) B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)}. \end{aligned}$$

□

Definicija 1.19. Konveksna ovojnica točk p_0, p_1, \dots, p_n iz \mathbb{E}^m je množica

$$\left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i : \lambda_i \geq 0 \text{ za } i = 0, 1, \dots, n \text{ in } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Trditev 1.20 (Lastnost konveksne ovojnice). Če so vse uteži strogo pozitivne, racionalna Bézierova krivulja leži v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk.

Dokaz. Naj bo racionalna Bézierova krivulja c določena s točkami p_0, p_1, \dots, p_n in utežmi w_0, w_1, \dots, w_n . Ker smo predpostavili, da so uteži w_i strogo negativne, je

$$\frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} \geq 0 \text{ za vsak } t \in I.$$

Ker velja še

$$\sum_{i=0}^n \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} = 1 \text{ za vsak } t \in I,$$

točka

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} \right) p_i$$

leži v konveksni ovojnici točk p_0, p_1, \dots, p_n . \square

Trditev 1.21 (Interpolacija v robnih točkah). *Za racionalno Bézierovo krivuljo c s kontrolnimi točkami p_0, p_1, \dots, p_n in utežmi w_0, w_1, \dots, w_n velja*

$$c(0) = p_0 \text{ in } c(1) = p_n.$$

Dokaz. V izraz (4) vstavimo $t = 0$ in $t = 1$. \square

Vse tri navedene lastnosti hkrati veljajo le za racionalne Bézierove krivulje s strogo pozitivnimi utežmi, zato bomo od tu naprej strogo pozitivnost uteži racionalne Bézierove krivulje globalno predpostavili.

Izrek 1.22 (Lastnost manjšanja variacije). *Hiperravnina seka polinomsko Bézierovo krivuljo, ki ni vsebovana v njej, največ tolikokrat, kot seka njen kontrolni poligon.*

Dokaz lahko bralec najde v [1].

Podobno trditev bomo pokazali tudi za racionalno Bézierovo krivuljo, le da se bomo iz Evklidskega prostora premaknili v projektivni prostor. Poglejmo si sedaj eno neposredno posledico izreka 1.22.

Definicija 1.23. *Podmnožica \mathcal{G} v \mathbb{E}^2 je konveksna, če vsaka premica seka njen rob največ dvakrat.*

Definicija 1.24. *Ravninska krivulja je konveksna, če je del roba neke konveksne množice.*

Posledica 1.25. *Ravninska polinomsko Bézierova krivulja c je konveksna, če je množica točk, ki je omejena s kontrolnim poligonom in daljico med prvo in zadnjo kontrolno točko, konveksna.*

Dokaz. Z \mathcal{G} označimo množico točk, omejeno s kontrolnim poligonom krivulje c in daljico med prvo in zadnjo kontrolno točko, in z \mathcal{O} množico točk med krivuljo in daljico, ki povezuje prvo in zadnjo kontrolno točko. Če želimo dokazati konveksnost krivulje c , moramo poiskati konveksno množico, katere rob bo vseboval krivuljo c . Da je iskana množica ravno \mathcal{O} , bomo pokazali s protislovjem. Denimo, da \mathcal{O} ni konveksna množica. Potem obstaja premica l , ki seka rob \mathcal{O} v vsaj treh točkah. Označimo množico teh presečnih točk s \mathcal{P} . Ločimo dva primera:

1. Denimo, da nobena točka iz \mathcal{P} ne leži na premici med prvo in zadnjo kontrolno točko. Torej, vse točke iz \mathcal{P} ležijo na krivulji c . Ker je \mathcal{G} konveksna množica, premica l seka kontrolni poligon v največ dveh točkah. Po izreku 1.22 je to protislovje.
2. Denimo, da ena izmed točk iz \mathcal{P} leži na premici med prvo in zadnjo kontrolno točko. Potem preostale točke iz \mathcal{P} ležijo na krivulji c ; te sta vsaj dve. Ker je \mathcal{G} po predpostavki konveksna množica, premica l seka kontrolni poligon v največ eni točki. Po izreku 1.22 je to protislovje.

Pokazali smo, da je \mathcal{O} konveksna množica, torej je krivulja c konveksna. \square

Kasneje se bomo iz prostora \mathbb{E}^m premaknili v projektivni prostor. Tam bomo prišli do pogoja za konveksnost racionalne Bézierove krivulje, ki je zapisan v izreku 6.3.

1.4. **Farinove točke.** Povejmo še nekaj o tem, kaj se zgodi, če i -to utež racionalne Bézierove krivulje spremenimo. Zaradi pete lastnosti Bernsteinovih polinomov iz trditve 1.7 se krivulja približa ali oddalji od i -te kontrolne točke — odvisno, ali smo utež povečali ali zmanjšali. Pojasnimo. Denimo, da so p_0, p_1, \dots, p_n kontrolne točke in w_0, w_1, \dots, w_n uteži naše krivulje. Denimo še, da utež w_i spremenimo v \tilde{w}_i . Krivulja se točki p_i najbolj približa, ko je parameter t v okolici vrednosti $\frac{i}{n}$, saj v tej okolici koeficient

$$\frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)},$$

ki v izrazu (4) stoji pred točko p_i , doseže globalni maksimum. Če torej spremenimo i -to utež v \tilde{w}_i , bo krivulja bližje ali bolj oddaljena od točke p_i kot prejšnja krivulja — odvisno, ali je $\tilde{w}_i > w_i$ ali $\tilde{w}_i < w_i$ (glej sliko 3).

Racionalno Bézierovo krivuljo stopnje n sedaj opisujemo z $n + 1$ točk iz \mathbb{E}^m in $n + 1$ števil iz \mathbb{R} . Da bomo racionalno Bézierovo krivuljo znali opisati z elementi istega prostora, bomo uvedli Farinove točke.

Definicija 1.26. Naj točke $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{E}^m$ in uteži $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ določajo neko racionalno Bézierovo krivuljo. Točkam, definiranim z

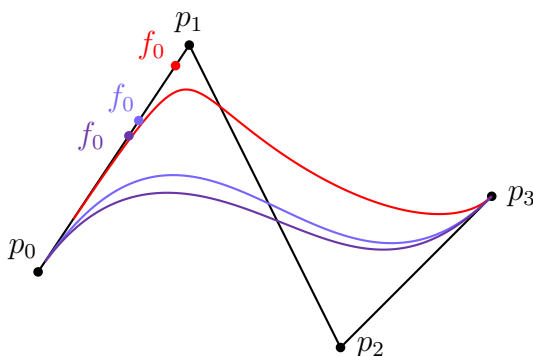
$$f_i = \frac{w_i p_i + w_{i+1} p_{i+1}}{w_i + w_{i+1}} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n - 1,$$

pravimo Farinove točke.

Opomba. Opazimo, da so Farinove točke res iz \mathbb{E}^m , saj smo jih dobili kot afino kombinacijo točk iz \mathbb{E}^m .

Ker pri definiciji racionalne Bézierove krivulje predpostavljamo, da so uteži strogo pozitivne, Farinove točke f_i ležijo na daljici med p_i in p_{i+1} za vsak $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Če točko f_i premaknemo proti p_i , spremenimo uteži krivulje — utež w_i smo povečali in zato se krivulja približa točki p_i . Če f_i po daljici premaknemo k p_{i+1} , se utež w_{i+1} poveča in krivulja se premakne k p_{i+1} . Torej lahko Farinove točke uporabimo kot oblikovalsko orodje.

Pokažimo, da kontrolne točke p_0, p_1, \dots, p_n in Farinove točke f_0, f_1, \dots, f_{n-1} natančno določajo racionalno Bézierovo krivuljo.



SLIKA 3. Prvotni krivulji (modra) premaknemo f_0 . Enkrat jo potisnemo k p_1 (rdeča), drugič k p_0 (vijolična).

Trditev 1.27. Naj bodo p_0, p_1, \dots, p_n in f_0, f_1, \dots, f_{n-1} kontrolne in Farinove točke neke racionalne Bézierove krivulje. Potem obstajajo strogo pozitivne uteži $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$, tako da točke p_0, p_1, \dots, p_n in te uteži določajo isto krivuljo.

Dokaz. Zaradi komentarja pod definicijo 1.9 lahko predpostavimo $w_0 = 1$. Vse nadaljne uteži izračunamo iz

$$f_i = \frac{w_i p_i + w_{i+1} p_{i+1}}{w_i + w_{i+1}} \text{ za } i = 1, 2, \dots, n.$$

Od tod dobimo enakost:

$$(8) \quad w_{i+1}(f_i - p_{i+1}) = w_i(p_i - f_i).$$

Torej je

$$|w_{i+1}| = \frac{|w_i| \|p_i - f_i\|}{\|f_i - p_{i+1}\|}.$$

Ker za vektorja $p_i - f_i$ in $f_i - p_{i+1}$ obstaja stogo pozitivno število μ , da je $p_i - f_i = \mu(p_{i+1} - f_i)$, imata w_i in w_{i+1} enak predznak. Ker smo predpostavili $w_0 = 1$, so tudi vse nadaljne uteži strogo pozitivne. Torej je

$$w_{i+1} = w_i \frac{\|p_i - f_i\|}{\|f_i - p_{i+1}\|}.$$

□

2. PROJEKTIVNI PROSTOR

Motivacija za projektivni prostor izhaja iz Evklidske ravnine. Ključna je ideja, ki \mathbb{E}^2 povzdigne v projektivno ravnino. Višje dimenzionalni projektivni prostori nato sledijo kot naravna posplošitev.

2.1. Realna projektivna ravnina. V Evklidski ravnini se dve premici sekata ali sta vzporedni. Iz perspektivnega risanja je prišel izraz, da se vzporedni premici sekata na horizontu. Torej, Evklidski ravnini dodamo točke s horizonta. Pri tem vsaka premica iz šopa vzporednic vsebuje isto točko s horizonta. To pomeni, da se vsaki dve premici sekata, tudi vzporedni.

Projektivno ravnino lahko definiramo na različne načine. Aksiomatsko definicijo lahko bralec najde v [5], mi pa si bomo ogledali enega izmed mnogih modelov realne projektivne ravnine, ki ga bomo uporabljali v nadaljevanju. Najenostavnejši model realne projektivne ravnine je model, v katerem točke predstavljajo 1-razsežni in premice 2-razsežni linearni podprostori vektorskega prostora \mathbb{R}^3 . Da bo ta model otipljivejši, bomo vpeljali še koordinatni sistem (koordinato z bomo pisali na prvem mestu, da bo posplošitev na višje dimenzije jasnejša). Definirajmo naslednjo ekvivalenčno relacijo.

Definicija 2.1. Naj bo \sim ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, podana s predpisom

$$(z_1, x_1, y_1) \sim (z_2, x_2, y_2) \iff \exists \lambda \neq 0 \ni: (z_1, x_1, y_1) = \lambda(z_2, x_2, y_2).$$

Ekvivalenčni razred s predstavnikom (z, x, y) označimo z $(z, x, y)\mathbb{R}$.

Oglejmo si množico ekvivalenčnih razredov $(\mathbb{R}^3 \setminus 0)/\sim$. Naj bo $(z, x, y) \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ smerni vektor premice skozi izhodišče, ki predstavlja neko projektivno točko. Želimo, da $(z, x, y)\mathbb{R}$ predstavlja koordinate točke, ki je predstavljena z izbrano premico skozi izhodišče. Da bo to res, mora biti ta predpis dobro definiran in bijektiven. To je očitno res. Preverimo le dobro definiranost. Naj bo (z, x, y) smerni vektor neke premice skozi izhodišče. Potem je $\lambda(z, x, y)$ za $\lambda \neq 0$ tudi smerni vektor iste

premice. Po definiciji ekvivalenčne relacije velja $(z, x, y)\mathbb{R} = \lambda(z, x, y)\mathbb{R}$ in dokaz je zaključen. Množico točk projektivne ravnine bomo označevali s

$$\mathbb{P}^2 = \{(z, x, y)\mathbb{R} : (z, x, y) \in \mathbb{R}^3 \setminus 0\}.$$

V uvodu smo povedali, da projektivno ravnino dobimo tako, da Evklidski ravnini dodamo točke s horizonta. Med točkami iz \mathbb{P}^2 moramo poiskati tiste, ki jih lahko identificiramo s točkami iz \mathbb{E}^2 . Točke, ki bodo ostale, bodo točke s horizonta. Najprej \mathbb{E}^2 vložimo v \mathbb{R}^3 s preslikavo $\iota(x, y) = (1, x, y)$. To preslikavo komponiramo s kvocientno preslikavo $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, ki je porojena z ekvivalenčno relacijo \sim . Inverz preslikave $q \circ \iota$ je definiran na $\{(z, x, y)\mathbb{R} : z \neq 0\}$ s predpisom $(q \circ \iota)^{-1}(z, x, y) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Geometrijsko si inverz predstavljamo kot presek z afinim podprostorom $z = 1$ prostora \mathbb{R}^3 . Točke iz Evklidske ravnine tako identificiramo z enorazsežnimi linearnimi prostori (tj. projektivnimi točkami), ki ne ležijo na ravnini $z = 0$. Točke, ki preostanejo, imajo koordinate $(0, x, y)\mathbb{R}$ in te imenujemo točke s horizonta oziroma točke v neskončnosti. Premici, ki jo predstavlja linearni podprostor $z = 0$, rečemo premica v neskončnosti.

Preverimo, da se vsaki vzporedni premici iz Evklidske ravnine v projektivni ravnini sekata ravno v točki v neskončnosti, kot smo želeli. Najprej opazimo, da vsaka premica vsebuje točko v neskončnosti, saj vsaka ravnina skozi izhodišče seka ravnino $z = 0$ v neki premici, torej v projektivni točki. Vzemimo sedaj dve premici v projektivni ravnini, ki v Evklidski ravnini predstavljata vzporedni premici. Naj bosta Π_1 in Π_2 ravnini skozi izhodišče, ki v \mathbb{R}^3 predstavljata izbrani projektivni premici. Po predpostavki sta premici, ki sta presek ravnin Π_1 in Π_2 z ravnino $z = 1$, vzporedni. Torej imata enak smerni vektor, ki je oblike $v = (0, x, y)$. V projektivni ravnini je v eden od predstavnikov točke v neskončnosti $(0, x, y)\mathbb{R}$. Ker obe ravnini Π_1 in Π_2 vsebujeta premico skozi izhodišče s smernim vektorjem v , vsebujeta pripadajoči projektivni premici isto točko v neskončnosti in se zato v njej sekata.

2.2. Realni projektivni prostor. Posplošitev iz \mathbb{P}^2 na \mathbb{P}^m je naravna. Podobno kot v definiciji 2.1 definiramo ekvivalenčno relacijo na $\mathbb{R}^{m+1} \setminus 0$.

Definicija 2.2. Naj bo \sim ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}^{m+1} \setminus 0$, podana s predpisom

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) \sim (y_0, y_1, \dots, y_m) \iff \exists \lambda \neq 0 \exists : (x_0, x_1, \dots, x_m) = \lambda(y_0, y_1, \dots, y_m).$$

Ekvivalenčni razred s predstavnikom (z_0, z_1, \dots, z_m) označimo z $(z_0, z_1, \dots, z_m)\mathbb{R}$.

Naj bodo (x_0, x_1, \dots, x_m) koordinate v prostoru \mathbb{R}^{m+1} . Potem Evklidski prostor E^m vložimo v \mathbb{R}^{m+1} na afino hiperravnino $x_0 = 1$ s preslikavo

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \iota : & \mathbb{E}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^{m+1}, \\ & (x_1, x_2, \dots, x_m) & \mapsto & (1, x_1, x_2, \dots, x_m). \end{array}$$

Preslikavo ι spet komponiramo s kvocientno preslikavo q , porojeno z ekvivalenčno relacijo \sim . Dobimo

$$q \circ \iota : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (1, x_1, x_2, \dots, x_m)\mathbb{R}.$$

Ta preslikava ima inverz na množici $\{(x_0, x_1, \dots, x_m)\mathbb{R} : x_0 \neq 0\}$. Točke oblike $(0, x_1, \dots, x_m)\mathbb{R}$ so točke v neskončnosti in hiperravnina $x_0 = 0$ je hiperravnina v neskončnosti. Projektivni prostor je torej

$$\mathbb{P}^m = \{(x_0, x_1, \dots, x_m)\mathbb{R} : (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus 0\}.$$

Velja omeniti, da lahko Evklidski prostor v \mathbb{R}^{m+1} vložimo tudi drugače, npr. na afino hiperravnino $x_1 = 1$. Potem so točke v neskončnosti točke $(x_0, 0, \dots, x_m)\mathbb{R}$. Bolj splošno lahko rečemo, da si v \mathbb{R}^{m+1} izberemo hiperravnino skozi izhodišče, ki predstavlja točke v neskončnosti.

Naj bodo a_0, a_1, \dots, a_m realna števila, za katera velja $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2 \neq 0$. Potem obstaja $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, da je $a_j \neq 0$. Naj bo e_0, e_1, \dots, e_m baza \mathbb{R}^{m+1} . Preslikava

$$\tilde{\iota} : \begin{array}{ccc} \mathbb{E}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_m) & \mapsto & (y_0, \dots, y_m), \end{array}$$

kjer je

$$\begin{aligned} y_i &= x_i && \text{za } i \neq j, \\ y_j &= \frac{1 - \sum_{i \neq j} a_i y_i}{a_j}, \end{aligned}$$

preslika \mathbb{E}^m v afino hiperravnino Π , ki je v izbrani bazi množica $\{(y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_m y_m = 1\}$. S spremembo baze vektorskega prostora \mathbb{R}^{m+1} lahko dosežemo, da je Π enaka množici $\{(1, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : y_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, 2, \dots, m\}$. Naj bo e_0, e_1, \dots, e_m baza \mathbb{R}^{m+1} , v kateri je $\Pi = \{(y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_m y_m = 1\}$. Definirajmo novo bazo E_0, E_1, \dots, E_m na naslednji način:

$$\begin{aligned} e_j &= a_j E_j, \\ e_i &= a_i E_j + E_i \text{ za } i \neq j. \end{aligned}$$

Potem za vektor iz Π , zapisan kot (y_0, y_1, \dots, y_m) v bazi e_0, e_1, \dots, e_m , velja

$$y_0 e_0 + y_1 e_1 + \dots + y_m e_m = (a_0 y_0 + \dots + a_m y_m) E_j + \sum_{i \neq j} y_i E_i = E_j + \sum_{i \neq j} y_i E_i.$$

V novi bazi ima ta vektor koordinate $(y_0, \dots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \dots, y_m)$, zato je sedaj Π podana z množico $\{(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : y_i \in \mathbb{R}\}$. Z zamenjavo vektorjev E_0 in E_j dosežemo še, da je Π zapisana kot $\{(1, y_1, \dots, y_m) : y_i \in \mathbb{R}\}$. Ker gre torej le za spremembo baze prostora \mathbb{R}^{m+1} , lahko vedno predpostavimo, da smo \mathbb{E}^m vložili v \mathbb{R}^{m+1} s preslikavo ι .

Definirajmo še projektivne podprostore.

Definicija 2.3. *Podmnožica U projektivnega prostora \mathbb{P}^m je projektivni podprostor, če obstaja tak linearni podprostor $U' \subset \mathbb{R}^{m+1}$, da je $U = \{x\mathbb{R}; x \in U' \setminus 0\}$.*

Definicija 2.4. *Naj bosta U in V projektivna podprostora v \mathbb{P}^m ter U' in V' pripadajoča linearna podprostora v \mathbb{R}^{m+1} . Projektivna ogrinjača prostorov U in V je $\text{Proj}(U, V) = \{x\mathbb{R} : x \in \text{Lin}(U', V') \setminus 0\}$.*

Definicija 2.5. *Dimenzijo projektivnega podprostora U definiramo kot $\dim U' - 1$, kjer je $\dim U'$ dimenzija pripadajočega linearnega podprostora U' .*

Definirajmo še operacije na projektivnih podprostorih.

Definicija 2.6. *Naj bosta U in V projektivna podprostora v \mathbb{P}^m in naj bosta U' in V' pripadajoča linearna podprostora v \mathbb{R}^{m+1} . Potem je*

1. $U \cup V = \{x\mathbb{R} : x \in (U' \cup V') \setminus 0\}$,
2. $U \cap V = \{x\mathbb{R} : x \in (U' \cap V') \setminus 0\}$,
3. $U^\perp = \{x\mathbb{R} : x \in U'^\perp \setminus 0\}$.

2.3. Krivulje v projektivnem prostoru. Krivuljo v \mathbb{R}^m definiramo kot preslikavo intervala v prostor \mathbb{R}^m . Tu bo definicija podobna, le da moramo še z dodatnim pogojem zagotoviti, da slika res leži v \mathbb{P}^m .

Definicija 2.7. Krivulja v projektivnem prostoru \mathbb{P}^m je preslikava $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ s predpisom $c(t) = C(t)\mathbb{R}$, kjer je $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ preslikava, za katero velja

$$C(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t)) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ za vsak } t \in I.$$

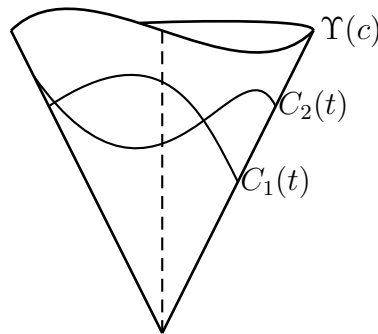
Preslikavi C rečemo predstavnik krivulje c .

Krivuljo c iz zgornje definicije si predstavljamo kot posplošeni stožec v \mathbb{R}^{m+1} brez izhodišča. Vsaka točka na krivulji c je ena izmed premic skozi izhodišče, ki tvorijo stožec. Označimo ga z $\Upsilon(c)$. Potem velja $\Upsilon(c) = \{\lambda C(t) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0, t \in I\}$. Pripomnimo še, da je $\Upsilon(c)$ mnogoterost v \mathbb{R}^{m+1} . Ostali predstavniki krivulje c so oblike $\lambda(t)C(t)$, kjer je λ poljubna realna neničelna funkcija na I , in tudi ležijo na stožcu $\Upsilon(c)$ (glej sliko 4).

Definicija 2.8. Naj bo c projektivna krivulja v \mathbb{P}^m in \mathcal{E} afini podprostor v \mathbb{R}^{m+1} . Afini del krivulje c je presek stožca $\Upsilon(c)$ in afinega prostora \mathcal{E} . Afinitim delom glede na $\mathcal{E}_i = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_i = 1\}$ za $i = 0, 1, \dots, m$ rečemo koordinatni afini deli.

Naj bo c projektivna krivulja iz definicije 2.7. Potem je afini del krivulje c krivulja v \mathbb{R}^{m+1} . Če bomo govorili o afinem delu brez omembe afine hiperravnine \mathcal{E} , bomo imeli v mislih $\mathcal{E}_0 = \{(1, x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, 2, \dots, m\}$. V tem primeru ima afini del parametrizacijo

$$(10) \quad \bar{c}(t) = \left(1, \frac{c_1(t)}{c_0(t)}, \dots, \frac{c_m(t)}{c_0(t)} \right).$$



SLIKA 4. Dva predstavnika projektivne krivulje c

Definicija 2.9. Za projektivno krivuljo c pravimo, da je \mathcal{C}^r krivulja, če obstaja predstavnik C , ki je r -krat zvezno odvedljiv in velja $c(t) = C(t)\mathbb{R}$.

Naj bo C eden od predstavnikov krivulje c in naj bo $C(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))$ vsaj \mathcal{C}^1 krivulja. Če je $\dot{C}(t) \neq 0$ za vsak t , pravimo, da je C regularna krivulja v \mathbb{R}^{m+1} .

Definicija 2.10. Projektivna krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ razreda vsaj \mathcal{C}^1 je regularna v $t_0 \in I$, če je vsaj eden izmed koordinatnih afinitih delov tudi regularen v t_0 .

Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ projektivna krivulja razreda vsaj \mathcal{C}^1 s parametrizacijo $c(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))\mathbb{R}$. Naj bo $t_0 \in I$ parameter, pri katerem želimo preveriti regularnost krivulje c . Najti moramo vsaj en koordinatni afini del krivulje c , ki je regularen pri parametru t_0 . Koordinatni afini deli, ki pridejo v poštev, so

$$\bar{c}_i(t) = \left(\frac{c_0(t)}{c_i(t)}, \dots, \frac{c_{i-1}(t)}{c_i(t)}, 1, \frac{c_{i+1}(t)}{c_i(t)}, \dots, \frac{c_m(t)}{c_i(t)} \right)$$

za $i \in \{j : c_j(t_0) \neq 0\} \subseteq \{0, 1, \dots, m\}$. Za take i točka $c(t_0)$ ni točka v neskončnosti glede na \mathcal{E}_i .

Ker definicija 2.10 ni zelo uporabna, podajamo ekvivalentno definicijo v obliki naslednje trditve.

Trditev 2.11. *Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ projektivna krivulja in naj bo C njen vsaj \mathcal{C}^1 predstavnik. Krivulja c je regularna v $t_0 \in I$ natanko tedaj, ko je C regularna v t_0 in velja $C(t_0)\mathbb{R} \neq \dot{C}(t_0)\mathbb{R}$.*

Dokaz. Naj velja $C(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_m(t))$. Poglejmo si, kaj mora veljati, da ima koordinatni afini del krivulje c singularnost pri parametru t_0 . Naj bo i tak indeks, da zanj velja $c_i(t_0) \neq 0$. Potem je

$$\bar{c}(t) = \left(\frac{c_0(t)}{c_i(t)}, \dots, \frac{c_{i-1}(t)}{c_i(t)}, 1, \frac{c_{i+1}(t)}{c_i(t)}, \dots, \frac{c_m(t)}{c_i(t)} \right)$$

eden izmed koordinatnih afinih delov krivulje c . Ker smo predpostavili, da je C vsaj enkrat zvezno odvedljiv, lahko odvajamo:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}} &= \left(\frac{\dot{c}_0 c_i - c_0 \dot{c}_i}{c_i^2}, \dots, \frac{\dot{c}_{i-1} c_i - c_{i-1} \dot{c}_i}{c_i^2}, 0, \frac{\dot{c}_{i+1} c_i - c_{i+1} \dot{c}_i}{c_i^2}, \dots, \frac{\dot{c}_m c_i - c_m \dot{c}_i}{c_i^2} \right) = \\ &= \frac{1}{c_i} (\dot{c}_0, \dots, \dot{c}_{i-1}, 0, \dot{c}_{i+1}, \dots, \dot{c}_m) - \frac{\dot{c}_i}{c_i^2} (c_0, \dots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \dots, c_m) = \\ &= \frac{1}{c_i} \dot{C} - \frac{\dot{c}_i}{c_i^2} C. \end{aligned}$$

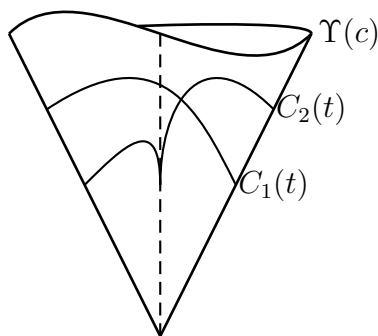
Od tod sledi $\dot{\bar{c}}(t_0) = 0 \iff c_i(t_0)\dot{C}(t_0) = \dot{c}_i(t_0)C(t_0)$ ali $\dot{C}(t_0) = 0$. Pokazati moramo, da je $\dot{\bar{c}}(t_0) = 0 \iff C(t_0)\mathbb{R} = \dot{C}(t_0)\mathbb{R}$ ali $\dot{C}(t_0) = 0$. V desno smer je očitno. Pokažimo še obrat. Če je $\dot{C}(t_0) = 0$, je $\dot{c}_i(t_0) = 0$ in zato $\dot{\bar{c}}(t_0) = 0$. Naj bo $C(t_0)\mathbb{R} = \dot{C}(t_0)\mathbb{R}$. Potem obstaja $\lambda \neq 0$, da je $\dot{C}(t_0) = \lambda C(t_0)$. Iz zapisa te enakosti po koordinatah dobimo $\lambda = \frac{\dot{c}_i(t_0)}{c_i(t_0)}$, torej $c_i(t_0)\dot{C}(t_0) = \dot{c}_i(t_0)C(t_0)$.

Od tod vidimo, da je $\dot{\bar{c}}(t_0) = 0$ natanko tedaj, ko sta $C(t_0)$ in $\dot{C}(t_0)$ linearno odvisna ali $\dot{C}(t_0) = 0$ oziroma natanko tedaj, ko je $C(t_0)\mathbb{R} = \dot{C}(t_0)\mathbb{R}$ ali $\dot{C}(t_0) = 0$. Od tod sledi, da bo vsaj en koordinatni afini del regularen pri t_0 natanko tedaj, ko bo $C(t_0)\mathbb{R} \neq \dot{C}(t_0)$ in $\dot{C}(t_0) \neq 0$. □

Vprašati se moramo še, ali je trditev 2.11 neodvisna od \mathcal{C}^1 predstavnika krivulje c . Naj bo $D(t) = \lambda(t)C(t)$ nek drug \mathcal{C}^1 predstavnik krivulje c . Predpostavimo, da je $\dot{C}(t_0) \neq 0$ in $C(t_0)\mathbb{R} \neq \dot{C}(t_0)\mathbb{R}$. To pomeni, da vektorja $C(t_0)$ in $\dot{C}(t_0)$ nista vzporedna. Od tod sledi:

1. $\dot{D}(t_0) = \lambda(t_0)\dot{C}(t_0) + \dot{\lambda}(t_0)C(t_0) \neq 0$,
2. $D(t_0)\mathbb{R} = \lambda(t_0)C(t_0)\mathbb{R} \neq (\lambda(t_0)\dot{C}(t_0) + \dot{\lambda}(t_0)C(t_0))\mathbb{R} = \dot{D}(t_0)\mathbb{R}$.

Pokazali smo, da je tudi D regularna v t_0 in $D(t_0)\mathbb{R} \neq \dot{D}(t_0)$.



SLIKA 5. Dva predstavnika - C_1 je \mathcal{C}^1 , C_2 samo \mathcal{C}^0

Definicija 2.12. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ krivulja razreda \mathcal{C}^1 . Če točka $c(t_0)$ ni regularna za $t_0 \in I$, pravimo, da ima krivulja c pri parametru t_0 ost.

Tangento na projektivno krivuljo c v regularni točki bomo definirali s pomočjo tangentne ravnine na $\Upsilon(c)$.

Trditev 2.13. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ regularna krivulja. Potem v vsaki točki stožca $\Upsilon(c)$ obstaja tangentna ravnina na $\Upsilon(c)$.

Dokaz. Naj bo $c(t) = C(t)\mathbb{R}$, kjer je C predstavnik razreda \mathcal{C}^1 . Ker je c regularna, velja $\dot{C}(t) \neq 0$ in $\dot{C}(t)\mathbb{R} \neq C(t)\mathbb{R}$ za vsak $t \in I$. Stožec $\Upsilon(c)$ lahko parametriziramo na naslednji način:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \setminus 0 \times I &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \\ (s, t) &\rightarrow sC(t). \end{aligned}$$

Vemo, da vektorja $\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t) = C(t)$ in $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t) = s\dot{C}(t)$, če sta linearno neodvisna, tvorita bazo tangentne ravnine na stožec v točki $\sigma(s, t)$. Linearna neodvisnost teh dveh vektorjev sledi iz regularnosti krivulje c . \square

Sedaj lahko zapišemo definicijo tangente na projektivno krivuljo.

Definicija 2.14. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ krivulja s predpisom $c(t) = C(t)\mathbb{R}$. Tangenta na c v regularni točki $c(t_0)$ je premica, ki jo predstavlja tangentna ravnina na stožec $\Upsilon(c)$ v točki $C(t_0)$ v \mathbb{R}^{m+1} .

Trditev 2.15. Definicija 2.14 je neodvisna od \mathcal{C}^1 predstavnika krivulje c .

Dokaz. V trditvi 2.13 smo že pokazali, da sta vektorja $C(t_0)$ in $\dot{C}(t_0)$ baza tangentne ravnine na $\Upsilon(c)$ v točki $C(t_0)$. Naj bo D drugi \mathcal{C}^1 predstavnik krivulje c . Potem je oblike $D(t) = \lambda(t)C(t)$, kjer je λ neničelna funkcija razreda \mathcal{C}^1 . Ker je

$$\dot{D}(t_0) = \dot{\lambda}(t_0)C(t_0) + \lambda(t_0)\dot{C}(t_0)$$

in ker sta $C(t_0)$ in $\dot{C}(t_0)$ linearno neodvisna, vektorja $D(t_0)$ in $\dot{D}(t_0)$ tvorita bazo iste ravnine. \square

Posledica 2.16. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ projektivna krivulja s \mathcal{C}^1 predstavnikom C . Tangenta na c v regularni točki $c(t_0)$ za $t_0 \in I$ je premica, ki gre skozi točki $C(t_0)\mathbb{R}$ in $\dot{C}(t_0)\mathbb{R}$.

Če je $m > 2$ lahko definiramo tudi projektivne prostore, dimenzije strogo več kot 1, ki dano projektivno krivuljo c v neki točki $c(\tau)$ aproksimirajo do nekega reda k . Torej iščemo vektorske prostore, dimenzije strogo več kot 2, ki stožec $\Upsilon(c)$ na celi premici $c(t)$ aproksimirajo do reda k .

Definicija 2.17. Naj bo σ parametrizacija neke ploskve v \mathbb{R}^m in Π parametrizacija nekega premaknjenega vektorskega prostora, ki se dotika ploskve σ v neki točki $q_0 \in \mathbb{R}^m$. Pravimo, da Π aproksimira ploskev σ v točki q_0 do reda k , če se njuni Taylorjevi vrsti (razviti okoli točke q_0) ujemata do reda k .

Definicija 2.18. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ projektivna krivulja s \mathcal{C}^r predstavnikom C in $0 < k < m$ ter $\tau \in I$. Naj bo $V_k(\tau) \leq \mathbb{R}^{m+1}$ vektorski prostor dimenzije $k + 1$, ki stožec $\Upsilon(c)$ aproksimira do reda k na celi premici pri $(s, \tau) \subset (\mathbb{R} \setminus 0) \times \{\tau\}$. Pritisnjen podprostor reda k krivulje c pri parametru τ je projektivni podprostor dimenzije k , ki je določen z $V_k(\tau)$.

V naslednji trditvi bomo našli bazo za $V_k(\tau)$.

Trditev 2.19. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ projektivna krivulja s \mathcal{C}^r predstavnikom C . Vektorski prostor $V_k(\tau)$, ki določa projektivni pritisnjen podprostor na krivuljo c pri parametru τ , ima bazo $\{C(\tau), \dot{C}(\tau), \dots, C^{(k)}(\tau)\}$.

Dokaz. Stožec $\Upsilon(c)$ ima parametrizacijo

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \setminus 0 \times I &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \\ (s, t) &\mapsto sC(t). \end{aligned}$$

Njen Taylorjev razvoj okoli točke (s_0, τ) je enak

$$\sigma(s_0 + s, \tau + t) = \sigma(s_0, \tau) + (\sigma_s s + \sigma_t t) + \dots + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n \sigma}{\partial s^k \partial t^{n-k}} s^k t^{n-k} \right) + \dots$$

Ker je

$$\frac{\partial^{i+j} \sigma}{\partial s^i \partial t^j}(s_0, \tau) = \begin{cases} s_0 C^{(j)}(\tau), & i = 0, \\ C^{(j)}(\tau), & i = 1, \\ 0, & i > 1, \end{cases}$$

je Taylorjev razvoj parametrizacije σ enak

$$\sigma(s_0 + s, \tau + t) = \sigma(s_0, \tau) + (sC + s_0 t \dot{C}) + \dots + (s_0 C^{(n)} t^n + n C^{(n-1)} s t^{n-1}) + \dots$$

Od tod sledi, da je $V_k(\tau) = \mathcal{L}in\{C(\tau), \dot{C}(\tau), \dots, C^{(k)}(\tau)\}$. \square

Opomba. Bralec lahko preveri, da je trditev 2.19 neodvisna od predstavnika.

3. DUALNI PROSTOR

Dualni prostor ni nič drugega kot še ena kopija projektivnega prostora \mathbb{P}^m , le da v njem podprostor U iz \mathbb{P}^m vidimo kot U^\perp . Gre torej le za spremembo pogleda na podprostore iz \mathbb{P}^m . Če vzamemo za primer $m = 2$, je točka iz \mathbb{P}^2 v dualni ravnini pravzaprav premica. V $m = 3$ je dual točke ravnina, itd. Tej spremembi pogleda bomo rekli dualizacija. Zdaj pa napišimo formalno definicijo in pokažimo, da je vse to, kar smo zapisali, res.

Definicija 3.1. Dualni prostor projektivnega prostora \mathbb{P}^m je prostor hiperravnin iz \mathbb{P}^m . Označimo ga z \mathbb{P}^{m*} .

Poglejmo si, kaj lahko rečemo za prostor hiperravnin iz \mathbb{P}^m . Po definiciji 2.3 je projektivni podprostor U hiperravnina v \mathbb{P}^m , če obstaja hiperravnina $U' \subset \mathbb{R}^{m+1}$, da je $U = \{x\mathbb{R} : x \in U' \setminus 0\}$. Za vsako hiperravnino U' v \mathbb{R}^{m+1} obstaja vektor $u = (u_0, u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, da je $u_0x_0 + u_1x_1 + \dots + u_mx_m = 0$ za vsak $x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in U'$. Vektor u za hiperravnino U' ni enolično določen, saj vsi večkratniki $\lambda u, \lambda \neq 0$ tudi določajo U' . Torej lahko U' oziroma U enolično predstavimo z $u\mathbb{R}$. S tem smo vsaki hiperravnini v \mathbb{P}^m priredili točko v \mathbb{P}^m oziroma prostoru hiperravnin smo dali koordinate. Da ločimo koordinate točk od koordinat hiperravnin, namesto $u\mathbb{R}$ pišemo $\mathbb{R}u$.

Pokažimo še obrat, da vsaka točka iz \mathbb{P}^m določa natanko eno hiperravnino v \mathbb{P}^m . Naj bo $u\mathbb{R} \in \mathbb{P}^m$. Potem lahko vektor u dopolnimo do ortogonalne baze prostora \mathbb{R}^{m+1} . Naj bo $\{u, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ortogonalna baza \mathbb{R}^{m+1} . Linearni podprostor U' z bazo $\{u_1, \dots, u_m\}$ je hiperravnina v \mathbb{R}^{m+1} in $U = \{x\mathbb{R} : x \in U' \setminus 0\}$ je projektivna hiperravnina. Torej, U ima koordinate $\mathbb{R}u$.

Pokazali smo, da je \mathbb{P}^{m*} tudi projektivni prostor in da sta \mathbb{P}^{m*} in \mathbb{P}^m kot množici enaki.

Definicija 3.2. Preslikavi $\chi : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{m*}$, ki podprostor $U \subset \mathbb{P}^m$ preslika v $U^\perp \subset \mathbb{P}^{m*}$, pravimo dualizacija.

Poglejmo si, kako se relacije med podprostori v \mathbb{P}^m spremenijo pri dualizaciji.

Trditev 3.3. 1. Naj bosta U in V podprostora v \mathbb{P}^m in naj velja $U \subset V$. Potem velja $\chi(U) \supset \chi(V)$.
2. Naj bo $U = \mathcal{P}roj(V_1, V_2) \leq \mathbb{P}^m$. Potem velja $\chi(U) = \chi(\mathcal{P}roj(V_1, V_2)) = \chi(V_1) \cap \chi(V_2)$.

Dokaz. 1. Naj bosta U' in V' pripadajoča linearna podprostora. Potem velja

$$U \subset V \iff U' \subset V' \iff (U')^\perp \supset (V')^\perp \iff U^\perp \supset V^\perp$$

in trditev je dokazana.

2. Izračunajmo levo in desno stran enakosti, ki jo želimo dokazati:

$$\begin{aligned} \chi(U) &= \{x\mathbb{R} : x \in (\mathcal{L}in(V_1', V_2'))^\perp\} = \{x\mathbb{R} : x \in (V_1')^\perp \cap (V_2')^\perp\}, \\ \chi(V_1) \cap \chi(V_2) &= V_1^\perp \cap V_2^\perp = \{x\mathbb{R} : x \in (V_1^\perp)' \cap (V_2^\perp)'\}. \end{aligned}$$

Pokazati moramo, da je $(V_1^\perp)' \cap (V_2^\perp)' = (V_1')^\perp \cap (V_2')^\perp$. Po definiciji 2.6 velja naslednje zaporedje ekvivalentnih trditev:

$$x \in (V_1')^\perp \cap (V_2')^\perp \iff x\mathbb{R} \in V_1^\perp \cap V_2^\perp \iff x \in (V_1^\perp)' \cap (V_2^\perp)'. \quad \square$$

Ker je $\chi(\chi(U)) = U$, velja tudi, da se pri dualizaciji \supset spremeni v \subset in \cap spremeni v $\mathcal{P}roj$.

Izrek 3.4 (Princip dualnosti). Če je trditev o podprostori in relacijah med njimi $(\subset, \supset, \mathcal{P}roj, \cap)$ v projektivnem prostoru resnična, potem je resnična tudi dualna različica te trditve.

Dokaz. Naredimo dualno različico dokaza prvotne trditve. □

3.1. Dualna ravnina. V nekaterih primerih se bomo omejili le na dualno ravnino, zato si jo ogledjmo podrobneje. Navedli bomo tri trditve, ki so lahko preverljive.

Trditev 3.5. 1. *Hiperravnine v projektivni ravnini so premice, ki si jih predstavljamo kot ravnine v \mathbb{R}^3 skozi izhodišče. Potem je normala te ravnine ravno predstavnik točke v \mathbb{P}^{2*} , ki je dual izbrane premice.*
 2. *Če sta $a\mathbb{R}$ in $b\mathbb{R}$ dve točki, ki ležita na projektivni premici p , potem ima premica p koordinate $\mathbb{R}(a \times b)$.*
 3. *Naj bosta $\mathbb{R}u$ in $\mathbb{R}v$ dve premici. Njuno presečišče je točka $(u \times v)\mathbb{R}$.*

3.2. Krivulje v dualnem prostoru. Poglejmo si najprej, kaj je dual krivulje v \mathbb{P}^2 .

Definicija 3.6. *Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ regularna C^1 krivulja. Krivuljo $c^* : I \rightarrow \mathbb{P}^{2*}$, kjer $c^*(t)$ predstavlja tangento na c v točki $c(t)$, imenujemo dual krivulje c .*

Od tu naprej se bomo ukvarjali le s polinomskimi krivuljami, zato zapišimo njihovo definicijo.

Definicija 3.7. *Krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ je polinomska krivulja, če obstaja polinomska krivulja $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus 0$, za katero velja $c(t) = C(t)\mathbb{R}$.*

Globalna predpostavka je torej, da je $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus 0$ polinomska krivulja. Poglejmo sedaj, kakšna je parametrizacija dualne krivulje v primeru $m = 2$. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ regularna krivulja s parametrizacijo $c(t) = C(t)\mathbb{R}$. Vemo, da tangenta na c pri parametru t vsebuje točki $C(t)\mathbb{R}$ in $\dot{C}(t)\mathbb{R}$ (posledica 2.16). Potem po drugi točki trditve 3.5 velja

$$c^*(t) = \mathbb{R}(C(t) \times \dot{C}(t)).$$

Če je c vsaj C^r krivulja, potem je c^* vsaj C^{r-1} krivulja. Kaj pa se zgodi v primeru, ko krivulja c ni regularna? Takrat obstaja parameter $\tau \in I$, da je $C(\tau) \times \dot{C}(\tau) = 0$. Ker je $C \times \dot{C}$ polinom, ga lahko zapišemo kot

$$C(t) \times \dot{C}(t) = (t - \tau)^k D(t),$$

kjer je k stopnja ničle τ in D nek drug polinom. Če je τ edini parameter, pri katerem ima c ost, je $c^*(t) = \mathbb{R}D(t)$, sicer za polinom D ponovimo zgornji postopek za ostale parametre osti.

Definicija 3.8. *Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ polinomska krivulja, ki ima pri parametrih t_1, t_2, \dots, t_l osti. Potem je dual krivulje c krivulja s parametrizacijo $c^*(t) = \mathbb{R}D(t)$, kjer je*

$$D(t) = \frac{1}{(t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_l)^{k_l}} C(t) \times \dot{C}(t)$$

in k_i večkratnost ničle t_i za polinom $C \times \dot{C}$.

Kakšna pa je definicija duala polinomske krivulje v \mathbb{P}^m ? Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ regularna polinomska krivulja s predstavnikom $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Za točko $c^*(t)$ vzamemo koordinate pritisnjenega podprostora reda $m-1$, saj je le-ta hiperravnina v \mathbb{P}^m . Po trditvi 2.19 velja, da je le-ta enak $\{x\mathbb{R} : x \in \mathcal{L}in(C(t), \dot{C}(t), \dots, C^{(m-1)}(t))\}$. Koordinate predstavnika točke $c^*(t)$ zato dobimo iz enačbe

$$\det[C(t), \dot{C}(t), \dots, C^{(m-1)}(t), x] = u_0(t)x_0 + u_1(t)x_1 + \dots + u_m(t)x_m = 0.$$

Vektor $(u_0(t), u_1(t), \dots, u_m(t))$ označimo z $C(t) \times \dot{C}(t) \times \dots \times C^{(m-1)}(t)$. Torej velja

$$c^*(t) = \mathbb{R}(C(t) \times \dot{C}(t) \times \dots \times C^{(m-1)}(t)).$$

Po Laplace-ovem izreku o determinanti velja

$$u_{i-1} = (-1)^{i+m+1} M_{i,m+1},$$

kjer je $M_{i,m+1}$ determinanta matrice $[C(t), \dot{C}(t), \dots, C^{(m-1)}(t), x]$ brez i -te vrstice in zadnjega stolpca. Torej je c^* spet polinomska krivulja.

V primeru, da c ni regularna, naredimo podobno kot v ravninskem primeru.

Definicija 3.9. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ polinomska krivulja s polinomskim predstavnikom $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Denimo, da ima c pri parametrih $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$ osti z večkratnostjo k_1, k_2, \dots, k_l . Potem je dual krivulje c krivulja $c^*(t) = \mathbb{R}D(t)$, kjer je

$$D(t) = \frac{1}{(t - \tau_1)^{k_1} (t - \tau_2)^{k_2} \dots (t - \tau_l)^{k_l}} C(t) \times \dot{C}(t) \times \dots \times C^{(m-1)}(t).$$

Naslednji izrek je zelo pomemben.

Izrek 3.10. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ vsaj \mathcal{C}^2 projektivna krivulja in C njen \mathcal{C}^2 predstavnik. Potem je $c^{**} = (c^*)^* = c$.

Dokaz. Naj bo $c(t) = C(t)\mathbb{R}$, kjer je C vsaj \mathcal{C}^2 predstavnik. Ločimo dve možnosti:

1. Krivulja c je regularna. Potem je $c^* = \mathbb{R}(C \times \dot{C})$. Označimo $D = C \times \dot{C}$. Ponovno ločimo dve možnosti.

(a) Denimo, da je tudi c^* regularna. Potem je

$$\begin{aligned} c^{**} &= (D \times \dot{D})\mathbb{R} = ((C \times \dot{C}) \times (\dot{C} \times \dot{C} + C \times \ddot{C}))\mathbb{R} = \\ &= ((C \times \dot{C}) \times (C \times \ddot{C}))\mathbb{R} = \langle C, \dot{C} \times \ddot{C} \rangle C\mathbb{R} = C\mathbb{R} = c \end{aligned}$$

- (b) Denimo, da ima c^* pri parametrih $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$ ost. To pomeni, da je $D(\tau_i) \times \dot{D}(\tau_i) = 0$ za $i = 1, 2, \dots, l$. Ker je $D \times \dot{D} = \langle C, \dot{C} \times \ddot{C} \rangle C$, je $\langle C(\tau_i), \dot{C}(\tau_i) \times \ddot{C}(\tau_i) \rangle = 0$ za $i = 1, 2, \dots, l$. Ničle polinoma $D \times \dot{D}$ so natanko ničle $\langle C, \dot{C} \times \ddot{C} \rangle$. Potem je

$$\begin{aligned} c^{**}(t) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^l (t - \tau_i)^{k_i}} D(t) \times \dot{D}(t)\mathbb{R} = \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^l (t - \tau_i)^{k_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle C(t)\mathbb{R} \end{aligned}$$

za neke $k_i \in \mathbb{N}$. Ker je

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^l (t - \tau_i)^{k_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle$$

neničelna funkcija na I , je

$$c^{**}(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^l (t - \tau_i)^{k_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle C(t)\mathbb{R} = C(t)\mathbb{R}$$

2. Denimo, da ima c pri parametrih t_1, t_2, \dots, t_r osti. Potem je

$$c^*(t) = \mathbb{R} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{p_i}} C(t) \times \dot{C}(t)$$

za neke $p_i \in \mathbb{N}$. Označimo

$$D(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{p_i}} C(t) \times \dot{C}(t).$$

Ločimo dve možnosti.

(a) Denimo, da je c^* regularna. Potem je

$$\begin{aligned} c^{**}(t) &= D(t) \times \dot{D}(t)\mathbb{R} = \frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{2p_i}} (C(t) \times \dot{C}(t)) \times (C(t) \times \ddot{C}(t))\mathbb{R} = \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{2p_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle C(t)\mathbb{R} \end{aligned}$$

Ker smo predpostavili, da je c^* regularna, je $D \times \dot{D}$ neničelna funkcija na I , torej je

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{2p_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle$$

tudi neničelna funkcija na I in zato $c^{**} = c$.

(b) Denimo, da ima c^* pri parametrih $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$ osti. Potem je $D(\tau_j) \times \dot{D}(\tau_j) = 0$. Torej je

$$\begin{aligned} c^{**}(t) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^l (t - \tau_j)^{k_j}} D(t) \times \dot{D}(t)\mathbb{R} = \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^l (t - \tau_j)^{k_j}} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{2p_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle C(t)\mathbb{R} \end{aligned}$$

za neke $k_j \in \mathbb{N}$. Funkcija

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^l (t - \tau_j)^{k_j}} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{2p_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle$$

je neničelna na I , zato je $c^{**} = C\mathbb{R} = c$.

□

Pokazali smo, da je drugi dual kar prvotna krivulja. Zdaj nas pa zanima, kako se pri dualizaciji spremeni tip točke, oziroma kaj je dual osti? Preden pridemo do odgovora, moramo definirati prevojno točko na projektivni krivulji.

Definicija 3.11. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ projektivna krivulja. Krivulja c ima pri parametru τ prevoj natanko tedaj, ko ravnina, ki v \mathbb{P}^2 predstavlja tangentno premico na c pri $c(\tau)$, aproksimira $\Upsilon(c)$ do drugega reda na celi premici, ki predstavlja $c(\tau)$.

V naslednji trditvi bomo pokazali, čemu je aproksimacija tretjega reda iz zgornje definicije ekvivalentna.

Trditev 3.12. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ projektivna krivulja s predstavnikom $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Krivulja c ima pri parametru $\tau \in I$ prevoj natanko tedaj, ko je

$$\langle \ddot{C}(\tau), C(\tau) \times \dot{C}(\tau) \rangle = 0.$$

Dokaz. Najprej moramo preveriti, da je izraz $\langle \ddot{C}(\tau), C(\tau) \times \dot{C}(\tau) \rangle = 0$ neodvisen od predstavnika krivulje c . Denimo, da imamo še enega \mathcal{C}^2 predstavnika krivulje c . Označimo ga z D . Potem obstaja neničelna in \mathcal{C}^2 funkcija λ , da je $D(t) = \lambda(t)C(t)$. Ker je

$$\langle \ddot{D}, D \times \dot{D} \rangle = \langle \ddot{\lambda}C + 2\dot{\lambda}\dot{C} + \lambda\ddot{C}, \lambda C \times (\dot{\lambda}C + \lambda\dot{C}) \rangle = \lambda^3 \langle \ddot{C}, C \times \dot{C} \rangle,$$

je $\langle \ddot{C}(\tau), C(\tau) \times \dot{C}(\tau) \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $\langle \ddot{D}(\tau), D(\tau) \times \dot{D}(\tau) \rangle = 0$. Sedaj lahko začnemo z dokazovanjem trditve.

Parametrizacija $\Upsilon(c)$ je enaka

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \setminus 0 \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (s, t) &\mapsto sC(t). \end{aligned}$$

Zapišimo Taylorjevi vrsti za $\Upsilon(c)$ in ravnino Π , ki predstavlja tangentno premico na c pri $c(\tau)$, razviti okoli točke (s_0, τ) :

$$\begin{aligned} \sigma(s_0 + s, \tau + t) &= \sigma(s_0, \tau) + (\sigma_s s + \sigma_t t) + (\sigma_{ss} s^2 + 2\sigma_{st} st + \sigma_{tt} t^2) + \dots \\ \Pi(s_0 + \lambda, \tau + \mu) &= \sigma(s_0, \tau) + \lambda\sigma_s + \mu\sigma_t \end{aligned}$$

Če naj se ti Taylorjevi vrsti ujemata do tretjega reda, morata za vsaka dovolj majhna s in t obstajati λ in μ , da je

$$(11) \quad \sigma(s_0, \tau) + (\sigma_s s + \sigma_t t) + (\sigma_{ss} s^2 + 2\sigma_{st} st + \sigma_{tt} t^2) = \sigma(s_0, \tau) + \lambda\sigma_s + \mu\sigma_t.$$

Ker je

$$\begin{aligned} \sigma_s(s_0, \tau) &= C(\tau), \\ \sigma_t(s_0, \tau) &= s_0 \dot{C}(\tau), \\ \sigma_{ss}(s_0, \tau) &= 0, \\ \sigma_{st}(s_0, \tau) &= \dot{C}(\tau), \\ \sigma_{tt}(s_0, \tau) &= s_0 \ddot{C}(\tau), \end{aligned}$$

se enačba (11) preoblikuje v

$$(s - \lambda)C(\tau) + (t - \mu + 2st)\dot{C}(\tau) + t^2 s_0 \ddot{C}(\tau) = 0,$$

kar je ekvivalentno pogoju

$$\langle \ddot{C}(\tau), C(\tau) \times \dot{C}(\tau) \rangle = 0.$$

□

Pokazali bomo še eno ekvivalentno definicijo prevoja, zato da si bomo lažje predstavljali, kako izgleda $\Upsilon(c)$ v okolici premice, ki predstavlja prevojno točko.

Trditev 3.13. *Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ projektivna krivulja. Krivulja c ima pri parametru τ prevoj natanko tedaj, ko ima $\Upsilon(c)$ na celi premici pri parametru τ ničelni glavni ukrivljenosti.*

Dokaz. Naj bo $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ predstavnik krivulje c . Stožec $\Upsilon(c)$ lahko parametriziramo s parametrizacijo

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \setminus 0 \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (s, t) &\mapsto sC(t). \end{aligned}$$

Za to parametrizacijo izračunamo prvo in drugo fundamentalno formo. Dobimo

$$\begin{aligned} E &= \langle C(t), C(t) \rangle \\ F &= \langle C(t), s\dot{C}(t) \rangle \\ G &= s^2 \langle \dot{C}(t), \dot{C}(t) \rangle \\ L &= 0 \\ M &= 0 \\ N &= s \langle \ddot{C}(t), C(t) \times \dot{C}(t) \rangle \end{aligned}$$

Glavni ukrivljenosti dobimo kot lastni vrednosti matrike

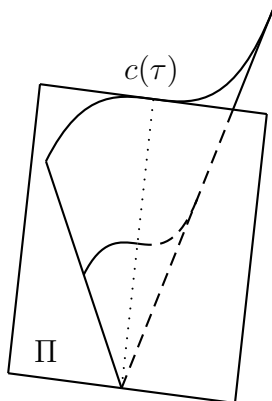
$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\langle C, \dot{C} \rangle \langle \ddot{C}, C \times \dot{C} \rangle}{\langle C, C \rangle \langle \dot{C}, \dot{C} \rangle - \langle C, \dot{C} \rangle^2} \\ 0 & \frac{\langle C, \dot{C} \rangle \langle \ddot{C}, C \times \dot{C} \rangle}{s(\langle C, C \rangle \langle \dot{C}, \dot{C} \rangle - \langle C, \dot{C} \rangle^2)} \end{bmatrix}.$$

Lastni vrednosti matrike A sta

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= \frac{\langle C, C \rangle \langle \ddot{C}, C \times \dot{C} \rangle}{s(\langle C, C \rangle \langle \dot{C}, \dot{C} \rangle - \langle C, \dot{C} \rangle^2)}.\end{aligned}$$

Po definiciji 3.12 ima c pri parametru τ prevoj natanko tedaj, ko je $\langle \ddot{C}(\tau), C(\tau) \times \dot{C}(\tau) \rangle = 0$, kar je ekvivalentno $\lambda_2 = 0$. \square

Pokazali smo, da ima $\Upsilon(c)$ na premici, ki predstavlja prevojno točko krivulje c , ničelni glavni ukrivljenosti. To pomeni, da so vse ukrivljenosti stožca v tisti točki ničelne. Spomnimo se, da glavni ukrivljenosti dobimo kot največjo in najmanjšo ukrivljenost krivulj, ki ležijo na stožcu in gredo skozi tisto točko. Torej so vse ukrivljenosti stožca v tej točki ničelne. Stožec $\Upsilon(c)$ v okolici premice, ki predstavlja prevojno točko, zglada kot na sliki 6.



SLIKA 6. Prevoj na projektivni krivulji

Zdaj bomo odgovorili na prej zastavljeno vprašanje: kaj je dual osti? Pri tem bomo odgovorili tudi na vprašanje, kaj je dual prevoja.

Izrek 3.14. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ projektivna krivulja. Potem velja:

1. Krivulja c ima pri parametru $\tau \in I$ prevoj natanko tedaj, ko ima c^* pri parametru τ ost.
2. Krivulja c ima pri parametru $\tau \in I$ ost natanko tedaj, ko ima c^* pri parametru τ prevoj.

Dokaz. 1. Dualna krivulja c^* ima po definiciji 3.9 parametrizacijo $c^* = \mathbb{R}D$, kjer je

$$D(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^l (t - t_i)^{k_i}} C(t) \times \dot{C}(t)$$

za neke $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $t_i \in I$. Pokazali bomo, da so ničle polinoma $D \times \dot{D}$ (tj. osti krivulje c^*) natanko prevoji krivulje c . Ker je

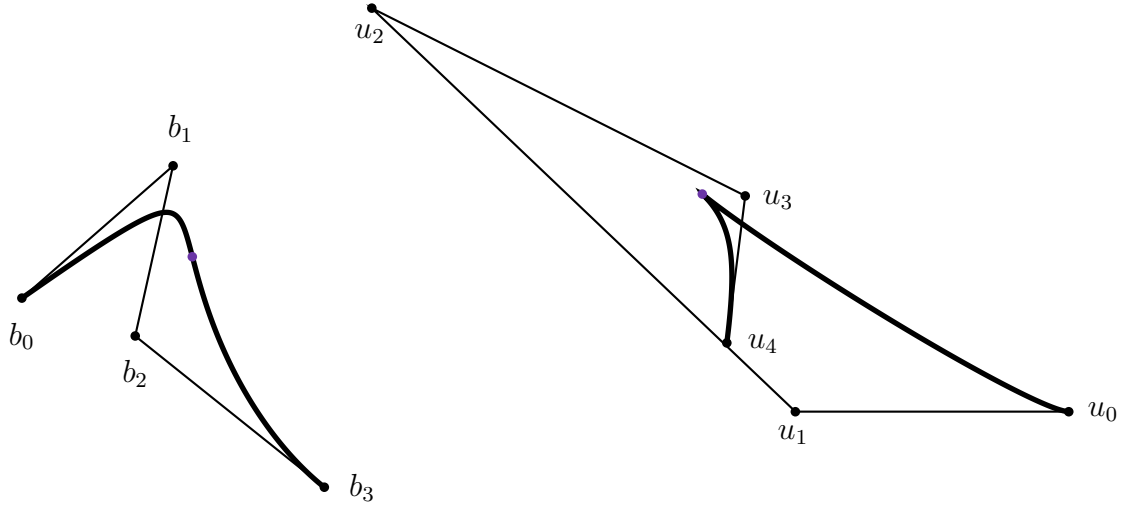
$$D(t) \times \dot{D}(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^r (t - t_i)^{2p_i}} \langle C(t), \dot{C}(t) \times \ddot{C}(t) \rangle C(t),$$

so ničle $D \times \dot{D}$ ničle polinoma $\langle C, \dot{C} \times \ddot{C} \rangle$. Ker je $\langle C, \dot{C} \times \ddot{C} \rangle = \langle \ddot{C}, C \times \dot{C} \rangle$, so po trditvi 3.12 ničle $D \times \dot{D}$ natanko prevoji krivulje c .

2. Uporabimo prvo točko za krivuljo c^* in upoštevamo, da je $c^{**} = c$.

\square

Pokazali smo, da sta si ost in prevoj dualna (glej sliko 7).



SLIKA 7. Levo: krivulja s c prevojem, desno: krivulja c^* z ostjo

4. RACIONALNA BÉZIEROVA KRIVULJA

Racionalno Bézierovo krivuljo smo že definirali v definiciji 1.9. Označimo jo z \bar{c} . Njena parametrizacija je enaka

$$(12) \quad \bar{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i p_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)},$$

za neke točke $p_i \in \mathbb{E}^m$ in strogo pozitivne uteži $w_i \in \mathbb{R}$. Zdaj bomo poiskali tako projektivno krivuljo, da bo \bar{c} eden od koordinatnih afinih delov.

Točko $\bar{c}(t)$, ki leži v \mathbb{E}^m , najprej vložimo v \mathbb{R}^{m+1} s preslikavo ι , definirano v (9). Dobimo vektor

$$\left(1, \frac{\sum_{i=0}^n w_i x_i^1 B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}, \frac{\sum_{i=0}^n w_i x_i^2 B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}, \dots, \frac{\sum_{i=0}^n w_i x_i^m B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \right)$$

kjer je $p_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$. Ta vektor v projektivnem prostoru \mathbb{P}^m določa točko

$$\left(\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t), \sum_{i=0}^n w_i x_i^1 B_i^n(t), \sum_{i=0}^n w_i x_i^2 B_i^n(t), \dots, \sum_{i=0}^n w_i x_i^m B_i^n(t) \right) \mathbb{R}$$

oziroma

$$\left(\sum_{i=0}^n (w_i, w_i x_i^1, \dots, w_i x_i^m) B_i^n(t) \right) \mathbb{R}.$$

Če definiramo nove vektorje $b_i = w_i(1, x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$, lahko zgornjo točko zapišemo kot

$$\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \right) \mathbb{R}.$$

Če namesto vektorjev b_i uporabimo vektorje λb_i za $\lambda \neq 0$ in zgornji postopek obrnemo, da pridemo do oblike (12), dobimo isto krivuljo.

Definicija 4.1. *Projektivna polinomska Bézierova krivulja je krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{P}^m$ s parametrizacijo*

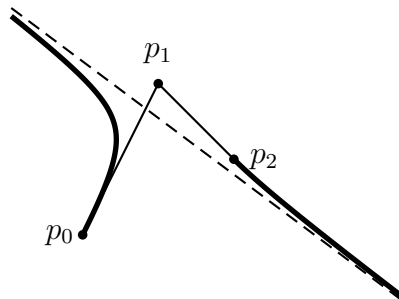
$$c(t) = C(t)\mathbb{R} = \left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \right) \mathbb{R},$$

kjer je $b_i \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus 0$. Vektorjem b_i pravimo tudi kontrolni vektorji.

Z zgornjim postopkom smo dobili polinomske Bézierove krivulje v projektivnem prostoru, katere afini del je oblike (12). Na racionalno Bézierovo krivuljo v Evklidskem prostoru bomo gledali kot na polinomske Bézierove krivulje v projektivnem prostoru.

V projektivnem prostoru ni razlike med racionalno in polinomske Bézierove krivulje, zato bomo pod imenom projektivna Bézierova krivulja mislili na krivuljo iz definicije 4.1.

Opomba. Pri zgornji definiciji bi načeloma potrebovali še pogoj, da so prve koordinate vektorjev b_i pozitivne, ker smo v definiciji 1.9 privzeli, da so uteži $\{w_i\}_{i=0}^n$ strogo pozitivne. Če ta pogoj ni izpolnjen, dobimo krivulje, katerih afini del ne leži več nujno v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk. Če imamo kakšno negativno utež, se namreč lahko zgodi, da ima imenovalc v (12) pri parametru $t_0 \in I$ ničlo. Posledično, ko se s parametrom t približujemo t_0 , gre točka $\bar{c}(t)$ proti neskončnosti, tj. vse komponente $\bar{c}(t)$ gredo proti neskončnosti (glej sliko 8). Torej, množica racionalnih Bézierovih krivulj, definiranih v definiciji 1.9, je podmnožica množice afinih delov projektivnih Bézierovih krivulj, definiranih v 4.1.



SLIKA 8. Racionalna Bézierova krivulja z eno negativno utežjo

4.1. de Casteljau-jev algoritem. Če imamo polinomske ali racionalne Bézierove krivulje v \mathbb{E}^m , smo pokazali, da lahko z de Casteljau-jevim algoritmom (algoritma 1.2 in 1.1) izračunamo točko na krivulji pri parametru $t \in I$. Isto lahko naredimo tudi za projektivno Bézierovo krivuljo.

Algoritem 4.1. *Naj bo $c = (\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t))\mathbb{R}$ projektivna Bézierova krivulja. De Casteljau-jev algoritem pri parametru $t \in I$ izračuna naslednje točke:*

$$\begin{aligned} b_i^0(t) &= b_i, \text{ za } i = 0, 1, \dots, n, \\ b_i^j(t) &= (1-t)b_i^{j-1}(t) + t b_{i+1}^{j-1}(t), \text{ za } j = 1, 2, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n-j. \end{aligned}$$

Rezultat algoritma je vektor $b_0^n(t)$. Vektorjem $b_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n-j$ rečemo de Casteljau-jevi vektorji pri parametru t .

Po posledici 1.14 je $b_0^n(t)$ točka na krivulji $\sum_{i=0}^n b_i B_i^n$ pri parametru $t \in I$, torej je $b_0^n(t)\mathbb{R}$ točka na krivulji $c = (\sum_{i=0}^n b_i B_i^n)\mathbb{R}$ pri parametru t . Jasno je tudi, da za de Casteljau-jeve vektorje $b_i^j(t)$ velja podobna trditev kot trditev 1.12. Velja

$$(13) \quad b_i^j(t) = \sum_{k=0}^{n-j} b_{i+k} B_k^{n-j}(t).$$

Trditev 4.2. Naj bo $c(t) = C(t)\mathbb{R}$ projekтивna Bézierova krivulja, kjer je $C(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$. Potem za $0 \leq k \leq n$ velja

$$\mathcal{L}in\{C(t), C^{(1)}(t), \dots, C^{(k)}(t)\} = \mathcal{L}in\{b_i^{n-k}(t) : i = 0, 1, \dots, k\},$$

kjer so $b_i^j(t)$ de Casteljau-jevi vektorji pri parametru $t \in I$.

Dokaz. Ker lahko uporabimo trditev 1.15 za krivuljo C , je

$$C^{(l)}(t) \in \mathcal{L}in\{b_i^{n-l}(t) : i = 0, 1, \dots, r\}.$$

Po algoritmu 4.1 velja

$$b_i^j(t) \in \mathcal{L}in\{b_l^{j-1}(t) : l = 0, 1, \dots, n - j + 1\}.$$

Zato je

$$C^{(l)}(t) \in \mathcal{L}in\{b_i^{n-l}(t) : i = 0, 1, \dots, n - l\} \subset \mathcal{L}in\{b_i^{n-k}(t) : i = 0, 1, \dots, n - k\}$$

za vsak $l \leq k$. Torej je

$$(14) \quad \mathcal{L}in\{C(t), C^{(1)}(t), \dots, C^{(k)}(t)\} \subset \mathcal{L}in\{b_i^{n-k}(t) : i = 0, 1, \dots, k\}.$$

Ker sta oba podprostora v (14) enake dimenzije, velja enakost namesto vsebovanosti. \square

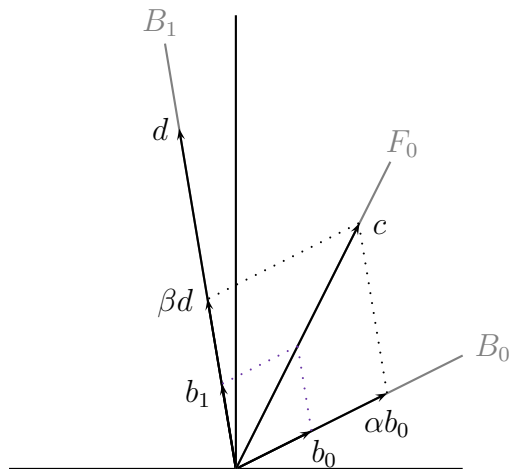
Posledica 4.3. Tangenta na projekтивно Bézierovo krivuljo s kontrolnimi vektorji b_0, b_1, \dots, b_n pri parametru $t \in I$ je premica skozi točki $b_0^{n-1}(t)\mathbb{R}$ in $b_1^{n-1}(t)\mathbb{R}$, kjer so $b_i^j(t)$ za $j = 0, 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - j$ de Casteljau-jevi vektorji pri parametru t .

4.2. Geometrijski kontrolni sistem. Podali smo opis racionalne Bézierove krivulje v projekktivnem prostoru, a smo za njen opis uporabili vektorje iz prostora \mathbb{R}^{m+1} . Želimo poiskati točke iz projektivnega prostora, ki bi dano racionalno Bézierovo krivuljo natanko opisale. Denimo, da imamo vektorje $b_i \in \mathbb{R}^{m+1}$ za $i = 0, 1, \dots, n$ in projekтивно Bézierovo krivuljo $c(t) = (\sum_{i=0}^n b_i B_i^n)\mathbb{R}$ v \mathbb{P}^m . Samo točke $b_i\mathbb{R}$ ne bodo dovolj, saj iz njih ne moremo izluščiti pravega predstavnika b_i . Torej bomo potrebovali še dodatne točke.

Vprašanje je, kaj si moramo poleg točk $b_i\mathbb{R}$ še izbrati, da bomo obdržali informacijo o predstavnikih b_i . Odgovor na to vprašanje je našel Gerald Farin. Izberemo si še n točk, pravimo jim Farinove točke. Definirane so kot $F_i = (b_i + b_{i+1})\mathbb{R}$ za $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Denimo, da je c Bézierova krivulja v \mathbb{P}^m s kontrolnimi vektorji $b_i \in \mathbb{R}^{m+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$ in naj velja $B_i = b_i\mathbb{R}$ ter $F_i = (b_i + b_{i+1})\mathbb{R}$. Sedaj bi radi samo iz poznavanja projektivnih točk B_0, B_1, \dots, B_n in F_0, F_1, \dots, F_{n-1} našli prave predstavnike točk B_i , tj. take, ki določajo krivuljo c . Najprej si izberemo poljubnega predstavnika točke B_0 , označimo ga kar z b_0 . Pokažimo sedaj, da lahko iz vektorja $b_0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ in točke $F_0 \in \mathbb{P}^m$ rekonstruiramo vektor $b_1 \in \mathbb{R}^{m+1}$. Izberemo si predstavnika F_0 in B_1 in ju označimo z c in d . Potem obtajata taki neničelni realni števili λ in μ , da je $c = \lambda(b_0 + b_1)$ in $d = \mu b_1$. Vektorji b_0, c, d so linearno odvisni, zato obstajata neničelna α in β , da je $c = \alpha b_0 + \beta d$. Od tod sledi $\frac{1}{\alpha}c = b_0 + \frac{\beta}{\alpha}d$ in zato $b_1 = \frac{\beta}{\alpha}d$.

Na sliki 9 lahko vidimo geometrijski pomen tega postopka. S podobnim postopkom določimo še ostale vektorje b_2, b_3, \dots, b_n .



SLIKA 9. Določevanje točke b_1 .

Sedaj imamo vektorje b_0, b_1, \dots, b_n , a ker smo si na začetku b_0 izbrali sami, so ostali vektorji odvisni od njega. Poglejmo, kaj se zgodi, če vzamemo drugega predstavnika za B_0 , npr. \bar{b}_0 . Potem obstaja γ , da je $\bar{b}_0 = \gamma b_0$. Če pokažemo, da tudi za \bar{b}_1 , ki ga izračunamo po zgornjem postopku, velja $\bar{b}_1 = \gamma b_1$, je zgornji postopek za določanje kontrolnih vektorjev neodvisen od izbire predstavnika B_0 , saj kontrolni vektorji b_0, \dots, b_n in $\gamma b_0, \dots, \gamma b_n$ določajo isto krivuljo.

Še vedno naj velja $c = \lambda(b_0 + b_1)$ in $d = \mu b_1$. Po zgornjem postopku določimo \bar{b}_1 . Potem obstaja $\bar{\lambda} \neq 0$, da je $c = \bar{\lambda}(\bar{b}_0 + \bar{b}_1)$. Ker obstaja še δ , da je $\bar{b}_1 = \delta b_1$, je

$$\lambda(b_0 + b_1) = \bar{\lambda}\gamma b_0 + \bar{\lambda}\delta b_1.$$

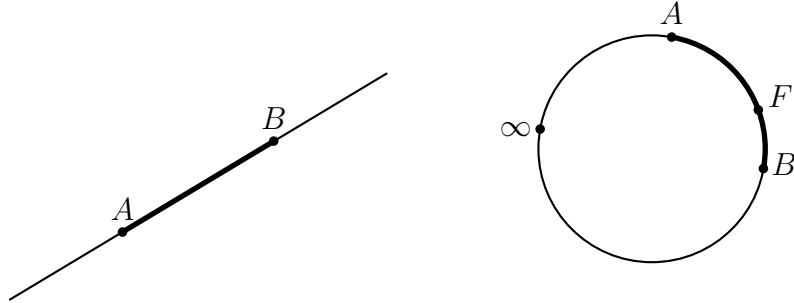
Od tod sledi $\lambda = \bar{\lambda}\gamma = \bar{\lambda}\delta$, torej $\delta = \gamma$.

Definicija 4.4. Naj bo c projektiivna Bézierova krivulja v \mathbb{P}^m s kontrolnimi vektorji $b_i \in \mathbb{R}^{m+1}$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Zaporedju točk $B_0, B_1, \dots, B_n; F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ iz \mathbb{P}^m , kjer je $B_i = b_i\mathbb{R}$ in $F_i = (b_i + b_{i+1})\mathbb{R}$ pravimo geometrijski kontrolni sistem.

Določitev projektiivne Bézierove krivulje z geometrijskim kontrolnim sistemom ni možna v primeru, ko dva zaporedna vektorja b_i in b_{i+1} določata isto projektiivno točko. A to pomeni, da sta dve zaporedni kontrolni točki racionalne Bézierove krivulje v \mathbb{E}^m enaki; le njuni uteži se lahko razlikujeta. Če torej take primere odstranimo, ne bomo za veliko prikrajšani. Potem geometrijski kontrolni sistem vedno obstaja.

4.3. Projektiivna lastnost manjšanja variacije. Lastnost manjšanja variacije že poznamo za polinomske Bézierove krivulje v \mathbb{E}^m (glej izrek 1.22). Pravi, da hiperravnina seka Bézierovo krivuljo največ tolikokrat kot seka njen kontrolni poligon. Pri tem je poligon sestavljen iz daljic med dvema zaporednima kontrolnima točkama. Če sta A in B točki iz \mathbb{E}^m , daljico med točkama A in B definiramo kot kos premice skozi A in B , ki leži med točkama. Kako pa definiramo daljico med A in B , če sta $A, B \in \mathbb{P}^m$? V projektiivnem prostoru premica vsebuje še točko v neskončnosti, zato si premico predstavljamo kot krožnico. Točki A in B projektiivno premico razdelita na dva dela in oba ležita med točkama (glej sliko 10). Kos premice, kateremu bomo rekli daljica med A in B , določimo tako, da izberemo še eno točko F , ki leži na tem kosu.

Definicija 4.5. Naj bo c Bézierova krivulja v \mathbb{P}^m in naj bo zaporedje projektivnih točk $B_0, B_1, \dots, B_n; F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ njen geometrijski kontrolni sistem. Kontrolni poligon krivulje c je zaporedje daljic med B_i in B_{i+1} , določenimi z F_i , za $i = 0, 1, \dots, n-1$.



SLIKA 10. Levo: daljica med A in B v \mathbb{R}^{m+1} . Desno: daljica med A in B v \mathbb{P}^m

Naj bo $B_0, B_1, \dots, B_n; F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ geometrijski kontrolni sistem Bézierove krivulje c v \mathbb{P}^2 . Kot že vemo, lahko najdemo take predstavnike b_i točk B_i , da je $F_i = (b_i + b_{i+1})\mathbb{R}$. Potem je $C(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ eden od predstavnikov krivulje c . Kos premice med B_i in B_{i+1} , ki vsebuje F_i , lahko zapišemo kot $\{(\lambda_1 b_i + \lambda_2 b_{i+1})\mathbb{R} : \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0\}$.

Izrek 4.6. Projektivna hiperravnina H seka projektivno Bézierovo krivuljo največ tolikokrat kot seka njen kontrolni poligon.

Dokaz. Naj bo $c(t) = C(t)\mathbb{R}$, kjer je C polinomska Bézierova krivulja. Ker je H hiperravnina v \mathbb{P}^m , obstaja linearni m -dimenzionalni podprostor H' , da je $H = \{x\mathbb{R} : x \in H' \setminus \{0\}\}$. Po izreku 1.22 vemo, da število presečišč krivulje C s H' ne presega števila presečišč kontrolnega poligona C s H' . Pokažimo naslednji dve trditvi:

1. **Število presečišč kontrolnega poligona C s H' je enako številu presečišč kontrolnega poligona c s H :**

Naj bo x presečišče kontrolnega poligona C s H' . Potem je $x = \lambda_1 b_i + \lambda_2 b_{i+1}$, kjer je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ in $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, in $x \in H'$. Potem je $x\mathbb{R} \in H$ in $x\mathbb{R}$ leži na daljici med B_i in B_{i+1} . Dokažimo še obrat. Naj bo $x\mathbb{R}$ presečišče kontrolnega poligona c s H . Potem je $x\mathbb{R} = (\lambda_1 b_i + \lambda_2 b_{i+1})\mathbb{R}$ za neka $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ in $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ ter $x \in H'$. Torej točka

$$y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} b_i + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} b_{i+1}$$

leži na kontrolnem poligonu C . Ker je tudi $y \in H'$, je y presečišče C s H' .

2. **Število presečišč C s H' je enako številu presečišč c s H :**

Naj bo x presečišče C s H' . Potem je $x\mathbb{R}$ točka na c in $x\mathbb{R} \in H$, torej je $x\mathbb{R}$ presečišče c s H . Naj bo $x\mathbb{R}$ presečišče c s H . Potem obstaja $\lambda \neq 0$, da je λx točka na krivulji C . Ker je $\lambda x \in H'$, je λx presečišče C s H' .

□

5. DUALNE BÉZIEROVE KRIVULJE

Racionalno Bézierovo krivuljo smo v prejšnjem razdelku zapisali kot polinomsko projektivno krivuljo $c(t) = C(t)\mathbb{R}$ v \mathbb{P}^m . Naj bo C polinomski predstavnik c . Po definiciji 3.9 je $c^*(t) = \mathbb{R}D(t)$, kjer je

$$D(t) = \frac{1}{(t - \tau_1)^{k_1}(t - \tau_2)^{k_2} \dots (t - \tau_l)^{k_l}} C(t) \times \dot{C}(t) \times \dots \times C^{(m-1)}(t)$$

za neke $\tau_i \in I$ in $k_i \in \mathbb{N}$. Ker je D polinom, ima družina pritisnjenih hiperravnin na c spet polinomsko parametrizacijo. Denimo, da je n^* maksimalna stopnja polinomov po komponentah. Torej obstajajo $u_i \in \mathbb{R}^{m+1}$ za $i = 0, 1, \dots, n^*$, da je

$$c^*(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^{n^*} u_i B_i^{n^*}(t).$$

Dual Bézierove krivulje je torej spet Bézierova krivulja, le da ta živi v dualnem prostoru. Za izračun točke na c^* pri parametru $t \in I$ lahko uporabimo de Casteljaujev algoritem (algoritem 4.1).

Pokazali smo, kako izračunati dual c^* krivulje c . Naslednje vprašanje je, kako so kontrolni vektorji c^* povezani s kontrolnimi vektorji c . Odgovorili bomo le za ravninski primer.

Trditev 5.1. *Naj bo $c(t) = (\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t))\mathbb{R}$ regularna Bézierova krivulja v projektivni ravnini. Potem je c^* tudi Bézierova krivulja s parametrizacijo*

$$c^*(t) = \mathbb{R} \sum_{k=0}^{2n-2} u_k B_k^{2n-2},$$

kjer je

$$u_k = \binom{2n-2}{k}^{-1} \sum_{i+j=k} (b_i \times b_{j+1}) \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j}.$$

Dokaz. Po trditvi 4.3 vemo, da tangenta na c pri parametru t vsebuje točki $\mathbb{R}b_0^{n-1}(t)$ in $\mathbb{R}b_1^{n-1}(t)$. Od tod sledi, da je $c^*(t) = \mathbb{R}(b_0^{n-1}(t) \times b_1^{n-1}(t))$. Vektorja $b_0^{n-1}(t)$ in $b_1^{n-1}(t)$ lahko po trditvi 1.12 izrazimo kot

$$b_j^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+j} B_i^{n-1}(t), j = 0, 1.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
c^*(t) &= \mathbb{R} \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1} \right) \times \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} B_j^{n-1} \right) \right) = \\
&= \mathbb{R} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (b_i \times b_{j+1}) B_i^{n-1} B_j^{n-1} = \\
&= \mathbb{R} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (b_i \times b_{j+1}) \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j} t^{i+j} (1-t)^{2n-2-i-j} = \\
&= \mathbb{R} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{i+j=k} (b_i \times b_{j+1}) \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j} t^k (1-t)^{2n-2-k} = \\
&= \mathbb{R} \sum_{k=0}^{2n-2} \binom{2n-2}{k}^{-1} \left(\sum_{i+j=k} (b_i \times b_{j+1}) \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j} \right) B_k^{2n-2}
\end{aligned}$$

in zato

$$u_k = \binom{2n-2}{k}^{-1} \sum_{i+j=k} (b_i \times b_{j+1}) \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j}.$$

□

Posledica 5.2. Naj bo c regularna Bézierova krivulja stopnje n . Potem je c^* stopnje $n^* = 2n - 2$. Če ima c osti pri parametrih τ_i z večkratnostjo k_i za $i = 1, 2, \dots, l$, je stopnja dualne krivulje c^* enaka

$$n^* = 2n - 2 - \sum_{i=1}^l k_i.$$

Zgled. Dual regularne Bézierove krivulje stopnje 3 je Bézierova krivulja stopnje 4 brez prevojev.

5.1. Dualni kontrolni sistem. Naj bo c^* Bézierova krivulja v \mathbb{P}^{m^*} in naj bodo $u_i, i = 0, 1, \dots, n^*$ njeni kontrolni vektorji, tj.

$$c^*(t) = \mathbb{R} \left(\sum_{i=0}^{n^*} u_i B_i^{n^*}(t) \right).$$

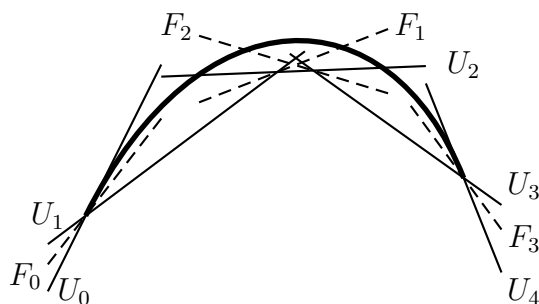
Potem so $U_i = \mathbb{R}u_i$ točke v \mathbb{P}^{m^*} , ki v \mathbb{P}^m predstavljajo hiperravnine.

Definicija 5.3. Naj bo c Bézierova krivulja v projektivnem prostoru \mathbb{P}^m . Naj bodo točke $U_0, U_1, \dots, U_{n^*}; F_0, F_1, \dots, F_{n^*-1}$ geometrijski kontrolni sistem krivulje c^* . Dualni kontrolni sistem krivulje c je družina hiperravnin, ki so v dualni ravnini ravno točke $U_0, \dots, U_{n^*}, F_0, \dots, F_{n^*-1}$.

Primer dualnega kontrolnega sistema je narisano na sliki 11.

Trditev 5.4. Naj bo c regularna Bézierova krivulja v \mathbb{P}^2 s kontrolnimi vektorji b_0, b_1, \dots, b_n in naj bodo premice $U_0, \dots, U_{n^*}, F_0, \dots, F_{n^*-1}$ njen dualni kontrolni sistem. Potem velja:

1. premici U_0 in U_1 se sekata v $b_0\mathbb{R}$,
2. premici U_{n^*-1} in U_{n^*} se sekata v $b_n\mathbb{R}$,
3. premice U_i, F_i in U_{i+1} gredo skozi isto točko.



SLIKA 11. Dualni kontrolni sistem.

- Dokaz.*
1. Po posledici 4.3 gre tangenta na c^* v $c^*(0)$ gre skozi točki U_0 in U_1 . Po trditvi 3.3 se premici U_0 in U_1 v $(\mathbb{P}^2)^{**} = \mathbb{P}^2$ sekata v točki, ki v \mathbb{P}^{2*} predstavlja tangento na c^* v $c^*(0)$. Torej, U_0 in U_1 se sekata v $c^{**}(0) = c(0) = b_0\mathbb{R}$.
 2. Za tangento na c^* v $c^*(1)$ prav tako velja, da gre skozi točki U_{n^*-1} in U_{n^*} . Ponovno sklepamo, da se premici U_{n^*-1} in U_{n^*} sekata v točki, ki v \mathbb{P}^{2*} predstavlja tangento na c^* v $c^*(1)$. Ta je enaka $c^{**}(1) = c(1) = b_b\mathbb{R}$.
 3. V \mathbb{P}^{2*} so točke U_i, F_i, U_{i+1} kolinearne, zato je F_i v \mathbb{P}^2 premica, ki gre skozi presečišče premic U_i in U_{i+1} .

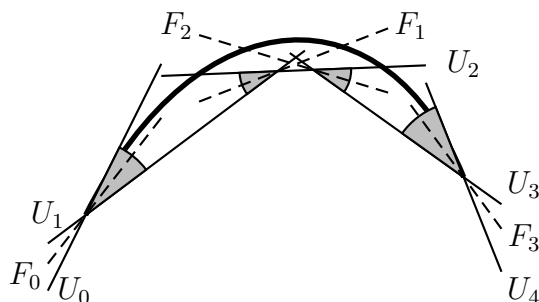
□

Definirajmo še dualni kontrolni poligon.

Definicija 5.5. Naj bo $U_0, U_1, \dots, U_{n^*}; F_0, F_1, \dots, F_{n^*-1}$ dualni kontrolni sistem projektivne Bézierove krivulje c . Družini premic skozi presečišče U_i in U_{i+1} , ki so v istem delu kot premica F_i , pravimo daljica med U_i in U_{i+1} , določena z F_i .

Definicija 5.6. Naj bo c Bézierova krivulja v \mathbb{P}^m in $U_0, U_1, \dots, U_{n^*}; F_0, F_1, \dots, F_{n^*-1}$ njen dualni kontrolni sistem. Dualni kontrolni poligon je zaporedje daljic med U_i in U_{i+1} , določenimi z F_i .

Primer dualnega kontrolnega poligona je narisano na sliki 12.



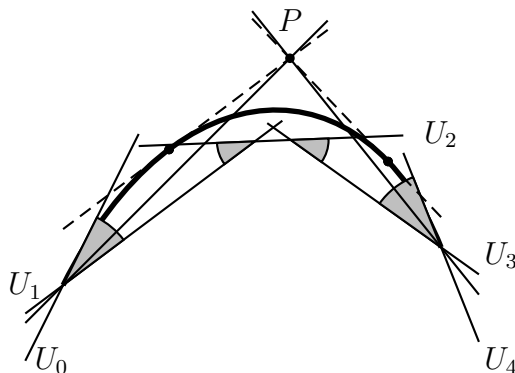
SLIKA 12. Dualni kontrolni poligon.

Izrek 5.7. Naj bo c Bézierova krivulja v \mathbb{P}^m in P izbrana točka iz \mathbb{P}^m . Potem število pritisnjenih hiperravnin na c , ki vsebujejo P , ne presega števila hiperravnin iz dualnega kontrolnega poligona, ki vsebujejo P .

Dokaz. Izrek je dualna različica izreka 4.6.

□

Situacija iz izreka 5.7 za $m = 2$ je prikazana na sliki 13.



SLIKA 13. Skozi P gresta dve tangenti na c in dve premici iz dualnega kontrolnega poligona.

6. UPORABNOST IN PREDNOSTI DUALNE OBLIKE

Do sedaj smo spoznali teoretično ozadje dualnih krivulj, a teorija brez uporabnosti ni veliko vredna. Poglejmo si kaj dualna oblika doprinese k teoriji krivulj.

6.1. Izračun pritisnjenih hiperravnin na c skozi poljubno točko. Naj bo c Bézierova krivulja v \mathbb{P}^m in naj bo $P = p\mathbb{R}$, ki ne leži na c . Najti želimo koordinate pritisnjenih hiperravnin na c , ki vsebujejo P . Z drugimi besedami, zanima nas, za katere $t \in I$ točka $c^*(t)$ leži na hiperravnini $\mathbb{R}p$. Naj bodo $u_i, i = 0, 1, \dots, n^*$ kontrolni vektorji c^* . Pogoj, da $c^*(t)$ leži na hiperravnini $\mathbb{R}p$, izrazimo z

$$\langle c^*(t), p \rangle = 0.$$

Iskani parametri so torej ničle polinoma

$$\sum_{i=0}^{n^*} \langle u_i, p \rangle B_i^{n^*}(t).$$

6.2. Konveksnost. Ponovimo definicijo konveksnosti ravninske krivulje, ki smo jo že zapisali v razdelku 1.3.

Definicija 6.1. *Ravninska krivulja je konveksna, če je del roba neke konveksne množice.*

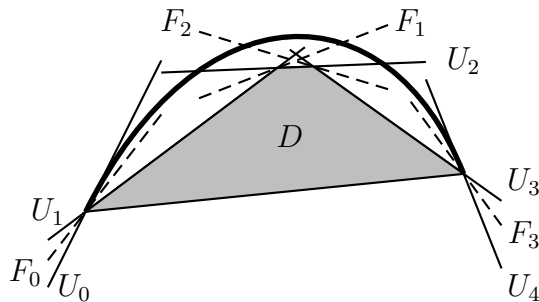
Definicija 6.2. *Podporna premica konveksne množice D je premica, ki gre skozi neko oglišče množice D tako, da celotna množica D leži na eni strani premice.*

Izkaže se, da je pogoj za konveksnost ravninske Bézierove krivulje lahko preveriti, če poznamo njen dualni kontrolni poligon.

Izrek 6.3. *Naj bo $U_0, U_1, \dots, U_m; F_0, F_1, \dots, F_{m-1}$ dualni kontrolni sistem regularne Bézierove krivulje c . Naj bo D taka množica, da vsaka stranica D leži na neki premici U_i in da so ostale premice dualnega kontrolnega sistema podporne premice D ter da so točke $U_i \cap U_{i+1}$ ravno oglišča D . Če je D konveksna množica, je c konveksna krivulja in leži zunaj množice D .*

Situacija iz izreka 6.3 za $m = 2$ je narisana na sliki 14.

Dokaz. Celoten dokaz sloni na izreku 5.7. Dokaz bomo naredili v več korakih.



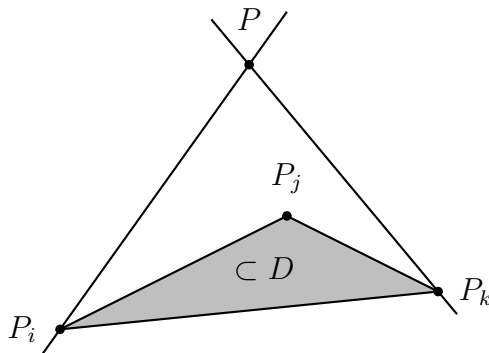
SLIKA 14. Konveksna krivulja

1. **Za točko $P \in D$ ne obstaja tangenta na c , ki gre skozi P :** Zaradi izreka 5.7 je dovolj pokazati, da nobena premica iz dualnega kontrolnega poligona ne gre skozi P . Oglejmo si premico p skozi P in $U_i \cap U_{i+1}$. Želimo pokazati, da p ne more ležati na daljici med U_i in U_{i+1} , določeni z F_i . To je res, saj so vse premice iz dualnega kontrolnega poligona podporne premice območja D , kar pa ni res za premico p .
2. **Krivulja c leži zunaj D :** Ker za vsako točko na regularni krivulji c obstaja tangenta na c , ki jo vsebuje, krivulja c leži zunaj D .
3. **Vsaka premica krivuljo seka največ dvakrat:** Za dokaz tega je dovolj pokazati njeno dualno različico. Za poljubno točko morata obstajati največ dve tangenti na c , ki vsebujeta izbrano točko. Spet je zaradi izreka 5.7 dovolj pokazati, da obstajata največ dve premici iz dualnega kontrolnega poligona, ki gresta skozi izbrano točko. V prvi točki dokaza smo pokazali, da za točke iz množice D takih premic ni.

Izberimo točko P zunaj D . Opazimo, da je vsaka premica iz dualnega kontrolnega poligona podporna premica množice D . Denimo, da imamo tri premice iz dualnega kontrolnega poligona, ki gredo skozi P . Ker so te premice iz dualnega kontrolnega poligona, gredo vsaka posebej še skozi točke $P_i = U_i \cap U_{i+1}$, $P_j = U_j \cap U_{j+1}$ in $P_k = U_k \cap U_{k+1}$, ki so oglišča območja D . Ker je D konveksno območje, je trikotnik z oglišči P_i, P_j, P_k vsebovan v D . Jasno je, da ena izmed izbranih premic iz dualnega kontrolnega poligona seka trikotnik v več kot eni točki (glej sliko 15). Torej ni podporna premica območja D . Dobili smo protislovje.

4. **Krivulja je konveksna:** Krivulja c je konveksna, če obstaja konveksno območje, katere rob vsebuje c . Pokazali bomo, da je iskano konveksno območje omejeno s krivuljo c in daljico, ki povezuje začetno in končno točko krivulje c . Označimo ga za E . Območje E je konveksno, če vsaka premica seka njegov rob največ dvakrat. V prejšnji točki smo že pokazali, da vsaka premica seka c največ dvakrat. Pokazati moramo še, da vsaka premica, ki seka daljico med začetno in končno točko, seka c največ enkrat. Naj bo p premica, ki seka daljico med začetno in končno točko krivulje c . Ker p ločuje začetno in končno točko, tj. točki ležita vsaka na svoji strani ravnine, razdeljene s premico p , mora premica p sekati c v liho točkah. Po prejšnji točki to pomeni največ enkrat. Torej, vsaka premica seka rob E največ dvakrat.

□



SLIKA 15. Skica iz dokaza izreka 6.3

6.3. Racionalne krivulje z racionalnimi odtisi. Vsako racionalno krivuljo c v \mathbb{E}^2 gledamo kot polinomsko krivuljo v \mathbb{P}^2 . V sledečih vrsticah bomo ozadje projektivne geometrije zakrili in se ukvarjali le z afinimi deli projektivnih krivulj, ki so v splošnem racionalne krivulje. Govorili bomo tudi o dualu racionalne krivulje, kjer je mišljen dual projektivne krivulje, katere afini del je prej omenjena racionalna krivulja.

Definicija 6.4. Naj bo $c : I \rightarrow \mathbb{E}^m$ krivulja. Odtis pri razdalji d je krivulja $c_d(t) = c(t) + dn(t)$, kjer je $n(t)$ enotski normalni vektor krivulje c pri parametru t .

Omejimo se na primer $m = 2$. Zanima nas, katere racionalne krivulje imajo tudi racionalne odtise. Če želimo, da je $c_d(t)$ racionalna parametrizacija, mora biti $n(t)$ racionalna parametrizacija, saj za $c(t)$ že vemo, da je racionalna parametrizacija. Odgovor so torej racionalne krivulje, katerih enotski normalni vektorji imajo racionalno parametrizacijo.

Ker je $n(t)$ enotski vektor, je $n(t)$ parametrizacija enotske krožnice oziroma njenega dela. Sedaj bomo poiskali splošno parametrizacijo za n . Enotsko krožnico lahko s stereografsko projekcijo iz točke $(0, 1)$ preslikamo na realno os, kjer točko $(0, 1)$ preslikamo v neskončnost. Označimo to preslikavo s π . Naj bo x_0 točka na realni osi in (x_1, y_1) točka na enotski krožnici. Potem je

$$\pi(x_1, y_1) = -\frac{x_1}{y_1 - 1},$$

$$\pi^{-1}(x_0) = \left(\frac{2x_0}{x_0^2 + 1}, \frac{x_0^2 - 1}{x_0^2 + 1} \right).$$

Obe preslikavi očitno slikata racionalno parametrizacijo v racionalno parametrizacijo. Zato je parametrizacija n slika neke racionalne parametrizacije realne osi s preslikavo π^{-1} . Če je $\frac{a(t)}{b(t)}$ neka racionalna parametrizacija realne osi, je $n(t) = (n_1(t), n_2(t))$, kjer je

$$n_1(t) = \frac{2a(t)b(t)}{a^2(t) + b^2(t)}, \quad n_2(t) = \frac{a^2(t) - b^2(t)}{a^2(t) + b^2(t)}.$$

Iščemo pogoje za parametrizacijo krivulje c , da bo pripadajoči n imel zgornjo parametrizacijo. Tangenta na c pri parametru t ima enačbo

$$n_1(t)x + n_2(t)y = h(t),$$

kjer je $h(t)$ ravno predznačena razdalja od te tangente do izhodišča. Ker $c(t)$ zadošča zgornji enačbi, je $h(t)$ racionalna funkcija. Potem ima afini del krivulje $c^*(t) =$

$\mathbb{R}(-h(t), n_1(t), n_2(t))$ racionalno parametrizacijo. Če h zapišemo kot $h(t) = \frac{e(t)}{f(t)}$, kjer sta e in f brez skupnega delitelja, je

$$c^* = \mathbb{R}(-(a^2 + b^2)e, 2abf, (a^2 - b^2)f).$$

Če tangento na c v $c(t)$ premaknemo za d v smeri $n(t)$, dobimo premico z enačbo $n_1(t)x + n_2(t)y = h(t) + d$. Vprašanje je, ali je ta premica tudi tangenta na c_d v $c_d(t)$? Preveriti je potrebno dvoje: ali $c_d(t)$ leži na premici in ali je $\dot{c}_d(t)$ vzporedna premici. Prvo je jasno, drugo sledi iz naslednje leme.

Lema 6.5. *Naj bo $R : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vsaj C^1 preslikava, za katero velja $\|R(t)\| = 1$ za vsak $t \in I$. Potem je $\langle R(t), \dot{R}(t) \rangle = 0$.*

Dokaz. Enakost $\langle R(t), \dot{R}(t) \rangle = 0$ odvajamo in dobimo $2\langle R(t), \dot{R}(t) \rangle = 0$. \square

Po zgornji lemi sledi, da je $\langle \dot{n}(t), n(t) \rangle = 0$, torej je $\dot{n}(t)$ vzporeden $\dot{c}(t)$. Ker je $\dot{c}_d(t) = \dot{c}(t) + d\dot{n}(t)$, je $\dot{c}_d(t)$ vzporeden $\dot{c}(t)$.

Pokazali smo, da je premica z enačbo $n_1(t)x + n_2(t)y = h(t) + d$ res tangenta na c_d v $c_d(t)$, zato je

$$c_d^* = \mathbb{R}(-(h + d)(a^2 + b^2), 2ab, a^2 - b^2)$$

oziroma, če pišemo $h(t) = \frac{e(t)}{f(t)}$, je

$$c_d^* = \mathbb{R}(-(e + df)(a^2 + b^2), 2abf, (a^2 - b^2)f).$$

Povzemimo zgornje razmišljanje z izrekom.

Izrek 6.6. *Če je c racionalna krivulja z racionalnimi odtisi c_d , potem sta duala krivulj c in c_d enaka*

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \mathbb{R}(-h(t)(a^2(t) + b^2(t)), 2a(t)b(t), a^2(t) - b^2(t)), \\ c_d^*(t) &= \mathbb{R}(-(h(t) + d)(a^2(t) + b^2(t)), 2a(t)b(t), a^2(t) - b^2(t)), \end{aligned}$$

kjer sta a in b brez skupnega delitelja in h poljubna racionalna funkcija.

7. POGOJ ZA REGULARNOST DUALA BÉZIEROVE KRIVULJE STOPNJE 3

V tem razdelku bomo poiskali zadostni pogoj, da je dual Bézierove krivulje stopnje 3 regularna krivulja.

Naj bo c dual neke Bézierove krivulje stopnje 3. Torej obstaja Bézierova krivulja d stopnje 3, da je $c = d^*$. Potem vemo, da je tudi c^* Bézierova krivulja stopnje 3, saj je $c^* = d^{**} = d$. Če je torej $d(t) = \mathbb{R} \sum_{i=0}^3 u_i B_i^3(t)$ in $U_i = \mathbb{R}u_i$ za $i = 0, 1, 2, 3$ in $F_i = \mathbb{R}(u_i + u_{i+1})$ za $i = 0, 1, 2$, je potem $U_0, U_1, U_2, U_3; F_0, F_1, F_2$ dualni kontrolni sistem za c . Poiskali bomo zadostni pogoj na U_i in F_i , da je d brez prevojev, kar po izreku 3.14 pomeni, da je c regularna.

Trditve 7.1. *Naj bo $c^*(t) = \mathbb{R}U(t)$, kjer je $U(t) = \sum_{i=0}^3 u_i B_i^3(t)$. Krivulja c^* ima prevoj pri:*

- $t = 0$ natanko tedaj, ko presečišče premic $\mathbb{R}u_1$ in $\mathbb{R}u_2$ leži na premici $\mathbb{R}u_0$,
- $t = 1$ natanko tedaj, ko presečišče premic $\mathbb{R}u_1$ in $\mathbb{R}u_2$ leži na premici $\mathbb{R}u_3$.

Dokaz. Po trditvi 3.12 velja, da ima c^* prevoj pri parametru t natanko tedaj, ko je $\langle U(t), \dot{U}(t) \times \ddot{U}(t) \rangle = 0$. Vstavimo $t = 0$ in dobimo

$$\begin{aligned} \langle U(0), \dot{U}(0) \times \ddot{U}(0) \rangle &= \langle u_0, 3(u_1 - u_0) \times 6(u_2 - 2u_1 + u_0) \rangle = \\ &= 18\langle u_0, (u_1 - u_0) \times u_2 + u_0 \times u_1 \rangle = \\ &= 18\langle u_0, (u_1 - u_0) \times u_2 \rangle = 18\langle u_0, u_1 \times u_2 - u_0 \times u_2 \rangle = \\ &= 18\langle u_0, u_1 \times u_2 \rangle. \end{aligned}$$

de Casteljau-jevi vektorji pri parametru τ . Potem so vektorji $u_0^3(\tau), u_1^2(\tau), u_2^1(\tau), u_3^0(\tau)$ ravno kontrolni vektorji krivulje $d^*(s) = c^*((1-\tau)s + \tau)$, tj. kos krivulje c^* , ki leži desno od $c^*(\tau)$. Krivulja d^* ima začetno točko $d^*(0) = c^*(\tau)$. Naj bo $d^*(s) = \mathbb{R}V(s)$, kjer je $V(s) = \sum_{i=0}^3 u_i^{3-i}(\tau)B_i^3(s)$. Po trditvi 7.1 ima krivulja d^* prevoj pri parametru $s = 0$ natanko tedaj, ko je $\langle u_0^3(\tau), u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle = 0$. Sedaj bomo dobljeni pogoj preobrazili tako, da bodo nastopali le vektorji u_0, u_1, u_2, u_3 . Pri tem si bomo pomagali z izražavo vmesnih vektorjev de Casteljau-jevega algoritma s kontrolnimi vektorji krivulje c^* . Ker je

$$\begin{aligned} u_1^2(\tau) &= (1-\tau)^2u_1 + 2\tau(1-\tau)u_2 + \tau^2u_3 \\ u_2^1(\tau) &= (1-\tau)u_2 + \tau u_3, \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) &= ((1-\tau)^2u_1 + 2\tau(1-\tau)u_2 + \tau^2u_3) \times ((1-\tau)u_2 + \tau u_3) = \\ &= (1-\tau)^3u_1 \times u_2 + \tau(1-\tau)^2u_1 \times u_3 + 2\tau^2(1-\tau)u_2 \times u_3 + \tau^2(1-\tau)u_3 \times u_2 = \\ &= (1-\tau)^3u_1 \times u_2 + \tau(1-\tau)^2u_1 \times u_3 + \tau^2(1-\tau)u_2 \times u_3. \end{aligned}$$

Upoštevamo še, da je $u_0^3(\tau) = \sum_{i=0}^3 u_i B_i^3(\tau)$. Dobimo

$$\begin{aligned} \langle u_0^3(\tau), u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle &= (1-\tau)^3 \langle u_0, u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle + 3\tau^3(1-\tau)^3 \langle u_1, u_2 \times u_3 \rangle + \\ &\quad + 3\tau^3(1-\tau)^3 \langle u_2, u_1 \times u_3 \rangle + \tau^3(1-\tau)^3 \langle u_3, u_1 \times u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Ker velja $\langle u_1, u_2 \times u_3 \rangle = -\langle u_1, u_3 \times u_2 \rangle = -\langle u_2, u_1 \times u_3 \rangle$, se drugi in tretji sumand v zgornjem izrazu izničita. Ostane nam

$$\langle u_0^3(\tau), u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle = (1-\tau)^3 \langle u_0, u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle + \tau^3(1-\tau)^3 \langle u_3, u_1 \times u_2 \rangle.$$

Nadaljujemo z izražavo $\langle u_0^3(\tau), u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle$ z vektorji u_0, u_1, u_2, u_3 :

$$\begin{aligned} \langle u_0^3(\tau), u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle &= (1-\tau)^3 \langle u_0, u_1^2(\tau) \times u_2^1(\tau) \rangle + \tau^3(1-\tau)^3 \langle u_3, u_1 \times u_2 \rangle = \\ &= (1-\tau)^6 \langle u_0, u_1 \times u_2 \rangle + \tau(1-\tau)^5 \langle u_0, u_1 \times u_3 \rangle + \tau^2(1-\tau)^4 \langle u_0, u_2 \times u_3 \rangle + \\ &\quad + \tau^3(1-\tau)^3 \langle u_3, u_1 \times u_2 \rangle = \\ &= (1-\tau)^3 \langle (1-\tau)^3 u_0 + \tau^3 u_3, u_1 \times u_2 \rangle + \langle \tau(1-\tau)^2 u_1 + \tau^2(1-\tau) u_2, u_3 \times u_0 \rangle = \\ &= (1-\tau)^3 \langle (1-\tau)^3 u_0 + \tau(1-\tau)^2 u_1 + \tau^2(1-\tau) u_2 + \tau^3 u_3, u_1 \times u_2 + u_3 \times u_0 \rangle = \\ &= (1-\tau)^3 \langle u_0 B_0^3(\tau) + \frac{1}{3} u_1 B_1^3(\tau) + \frac{1}{3} u_2 B_2^3(\tau) + u_3 B_3^3(\tau), u_1 \times u_2 + u_3 \times u_0 \rangle. \end{aligned}$$

Označimo $e^*(t) = \mathbb{R}(u_0 B_0^3(t) + \frac{1}{3} u_1 B_1^3(t) + \frac{1}{3} u_2 B_2^3(t) + u_3 B_3^3(t))$ in $r = u_1 \times u_2 + u_3 \times u_0$. Ker je $\tau \neq 1$, je zgornji izraz enak 0 natanko tedaj, ko točka $r\mathbb{R}$ leži na premici $e^*(\tau)$. \square

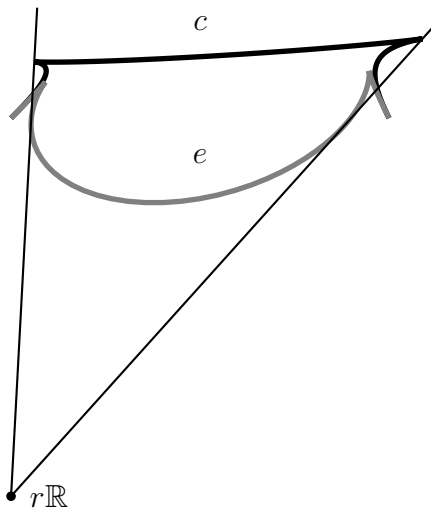
Ohranimo oznake iz zadnjega dokaza. V naslednjim pogojju bomo pokazali, kakšen je geometrijski zadostni pogoj, da krivulja c nima osti.

Izrek 7.4. *Naj bo c dual neke Bézierove krivulje stopnje 3 in naj bo p začetna in q končna točka krivulje c . Naj bodo točke $U_0, U_1, U_2, U_3; F_0, F_1, F_2$ njen dualni kontrolni sistem. Krivulja c je brez osti, če veljajo naslednji pogoji:*

1. Nobena premica iz daljice med U_2 in U_3 , določene s F_2 , ne sme vsebovati točke p .
2. Nobena premica iz daljice med U_0 in U_1 , določene s F_0 , ne sme vsebovati točke q .
3. Nobena premica iz daljice med U_1 in U_2 , določene s F_1 , ne sme vsebovati presečišča premic U_0 in U_3 .

Dokaz. Najprej bomo poiskali zadostni pogoj, da c nima osti na intervalu $(0, 1)$. Nato bomo videli, da vključuje tudi pogoj, da c nima osti v robnih točkah.

Pogoj iz trditve 7.3 je ekvivalenten pogoj, da točka $r\mathbb{R}$ leži na tangenti na e v $e(\tau)$. Če torej želimo, da je c brez osti na $(0, 1)$, mora biti c^* brez prevojev. Torej mora biti izraz $\langle u_0 B_0^3(\tau) + \frac{1}{3}u_1 B_1^3(\tau) + \frac{1}{3}u_2 B_2^3(\tau) + u_3 B_3^3(\tau), u_1 \times u_2 + u_3 \times u_0 \rangle$ neničeln za vsak $\tau \in (0, 1)$. To je ekvivalentno pogoj, da nobena tangenta na e ne sme vsebovati točke $r\mathbb{R}$ (glej sliko 17). To lahko zagotovimo s pomočjo izreka 5.7.



SLIKA 17. Krivulja z dvema ostema.

Če torej zagotovimo, da točka $r\mathbb{R}$ ne leži na nobeni premici iz dualnega kontrolnega poligona, ne bo ležala na nobeni tangenti na e .

Preverimo najprej, kakšeni so pogoji, da točka $r\mathbb{R}$ ne leži na kontrolnih premicah krivulje e^* . Pogoje zapišemo takole:

$$\langle u_0, r \rangle = \langle u_0, u_1 \times u_2 \rangle \neq 0,$$

$$\langle \frac{1}{3}u_1, r \rangle = \frac{1}{3}\langle u_1, u_3 \times u_0 \rangle \neq 0,$$

$$\langle \frac{1}{3}u_2, r \rangle = \frac{1}{3}\langle u_2, u_3 \times u_0 \rangle \neq 0,$$

$$\langle u_3, r \rangle = \langle u_3, u_1 \times u_2 \rangle \neq 0.$$

Prvi in zadnji pogoj povesta, da presečišče premic $\mathbb{R}u_1$ in $\mathbb{R}u_2$ ne sme ležati na $\mathbb{R}u_0$ in na $\mathbb{R}u_3$. Drugi in tretji pogoj pa povesta, da presečišče premic $\mathbb{R}u_0$ in $\mathbb{R}u_3$ ne sme ležati na $\mathbb{R}u_1$ in $\mathbb{R}u_2$. Opazimo, da prvi in zadnji pogoj zagotavljata, da krivulja c nima prevoja v robnih točkah.

Poiščimo še pogoj, da točka $r\mathbb{R}$ ne leži na premicah iz dualnega kontrolnega poligona, ki niso U_i . Kontrolne točke krivulje e^* so iste kot kontrolne točke krivulje c^* , le njihovi predstavniki so drugi. Predstavnike kontrolnih točk krivulje e^* označimo z u'_i za $i = 0, 1, 2, 3$. Velja $u'_i = u_i$ za $i = 0, 3$, $u'_i = \frac{1}{3}u_i$ za $i = 1, 2$ in $U_i = \mathbb{R}u_i = \mathbb{R}u'_i$. Dualni kontrolni poligon je množica premic, ki ležijo na tistem kosu med U_i in U_{i+1} , ki vsebuje premico F'_i . Ker je $F'_i = \mathbb{R}(u'_i + u'_{i+1})$, premice iz dualnega kontrolnega

poligona, ki niso U_i , opišemo z $u'_i + \lambda u'_{i+1}$ za $\lambda > 0$. Potem dobimo naslednje pogoje:

$$\begin{aligned} \langle u'_0 + \alpha u'_1, r \rangle = \langle u_0 + \frac{1}{3}\alpha u_1, r \rangle &= \langle u_0, u_1 \times u_2 \rangle + \frac{1}{3}\alpha \langle u_1, u_3 \times u_0 \rangle = \\ &= \langle u_2 + \frac{1}{3}\alpha u_3, u_0 \times u_1 \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u'_3 + \beta u'_2, r \rangle = \langle u_3 + \frac{1}{3}\beta u_2, r \rangle &= \langle u_3, u_1 \times u_2 \rangle + \frac{1}{3}\beta \langle u_2, u_3 \times u_0 \rangle = \\ &= \langle u_1 + \frac{1}{3}\beta u_0, u_2 \times u_3 \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

$$\langle u'_1 + \gamma u'_2, r \rangle = \langle \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}\gamma u_2, r \rangle = \frac{1}{3} \langle u_1 + \gamma u_2, u_0 \times u_3 \rangle \neq 0.$$

Označimo s p začetno in s q končno točko. Potem je $p = (u_0 \times u_1)\mathbb{R}$ in $q = (u_2 \times u_3)\mathbb{R}$.

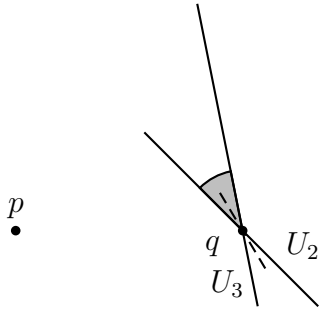
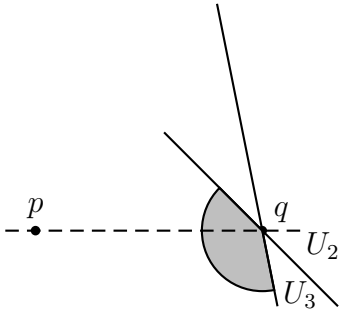
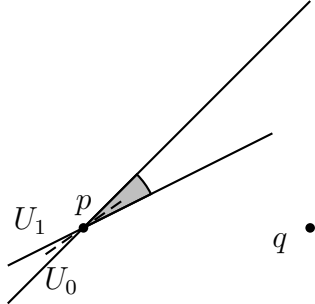
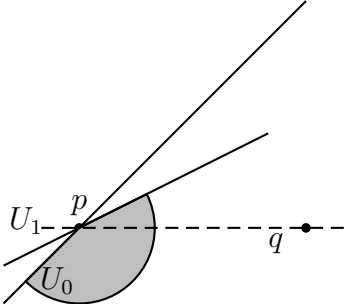
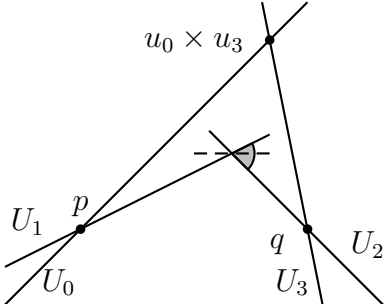
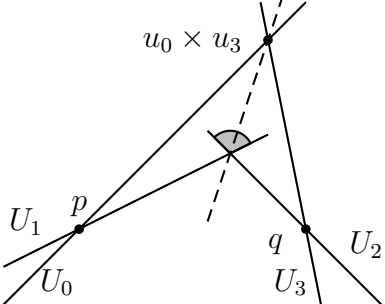
Če te pogoje prevedemo v geometrijski jezik, pomenijo

1. Nobena premica iz daljice med U_2 in U_3 , določene z F_2 , ne sme vsebovati točke p .
2. Nobena premica iz daljice med U_0 in U_1 , določene z F_0 , ne sme vsebovati točke q .
3. Nobena premica iz daljice med U_1 in U_2 , določene z F_1 , ne sme vsebovati presečišča premic U_0 in U_3 .

□

V tabeli 1 so izpeljani pogoji za regularnost krivulje c prikazani v geometrijski obliki. Daljica med U_i in U_{i+1} , določena z F_i , je označena s sivim krožnim izsekom.

TABELA 1. Pogoji za regularno krivuljo stopnje 4.

USTREZNO	NEUSTREZNO
	
	
	

LITERATURA

- [1] G. Farin, Curves and surfaces in CAGD: A practical guide, Fifth edition, Morgan Kaufmann, 2001.
- [2] G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim, Handbook of Computer Aided Geometric Design, Elsevier Science B.V., 2002.
- [3] H. Pottman, J. Wallner, Computational Line Geometry, Springer, Heidelberg, 2001.
- [4] H. Pottman, Rational curves and surfaces with rational offsets, Comp. Aided Geom. Design, 1995, Volume 12, Issue 2, str. 175 – 192.
- [5] I. Vidav, Afina in projektivna geometrija, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1981.