UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Matematika - 2. stopnja

Matej Filip

Calabi-Yau raznoterosti podane kot popolni preseki v projektivnih prostorih

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Anita Buckley
Somentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2013

Podpisani Matej Filip izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom *Calabi-Yau raznoterosti podane kot popolni preseki v projektivnih prostorih* izdelal samostojno pod mentorstvom doc. dr. Anite Buckley in sometorstvom prof. dr. Tomaža Koširja in

- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 2013 Podpis: ....

Zahvala

Zahvaljujem se mentorici Aniti Buckley za pomoč in spodbudo pri raziskovanju ter za temeljit pregled dela. Zahvalil bi se tudi somentorju Tomažu Koširju ter Danielu Faenziju in Girivaruju Ravindri za koristne nasvete in razlage. Na koncu bi se zahvalil še moji družini za podporo tekom študija.

Kazalo

Program dela

Gladko kubično ploskev v $\mathbb{P}^3$ lahko podamo kot Pfaffovo determinanto linearne poševno-simetrične matrike velikosti 5×5. Pfaffovo upodobitev eksplicitno konstruiramo iz petih točk v splošni legi.

Posplošite te rezultate na Calabi-Yau raznoterosti; najprej na kvintike v $\mathbb{P}^4$ in nato na popolne preseke v projektivnih prostorih.

Osnovna literatura:

- A. Beauville, *Determinantal hypersurfaces*, Michigan Math. J. **48** (2000) 39–64.
- D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, New York, 1995.
- R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, New York, 1977.
- J.P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. **61** (1955) 197–278.
- F. Tanturri, *Pfaffian representations of cubic surfaces*, verzija 17.12.2012, [ogled 26. 7. 2013], dostopno na `http://arxiv.org/abs/1203.0999`, sprejeto v objavo v Geomtriae Dedicata.

Povzetek

V delu klasificiramo aritmetično Cohen-Macaulayjeve (ACM) svežnje ranga 2 na generični 3-dimenzionalni Calabi-Yau raznoterosti podani kot popolni presek v projektivnem prostoru (CICY3). Pokažemo tudi obstoj nekaterih izmed teh svežnjev. Raziskujemo nove geometrijske lastnosti krivulj, ki pripadajo svežnjem ranga 2 po Serrovi korespondenci. Te lastnosti sledijo iz minimalnih prostih resolucij krivulj v primerno izbranih 4-dimenzionalnih raznoterostih, ki vsebujejo CICY3 kot hiperploskev. Konstruiramo tudi nerazcepne svežnje višjega ranga na CICY3 tipa (2,4).

Abstract

The aim of this thesis is to classify indecomposable rank 2 arithmetically Cohen-Macaulay (ACM) bundles on general complete intersection Calabi-Yau threefolds (CICY3) and prove the existence of some of them. New geometric properties of the curves corresponding to rank 2 ACM bundles (by Serre correspondence) are obtained. These follow from minimal free resolutions of curves in suitably chosen fourfolds (containing CICY3 as hypersurfaces). Additionally an indecomposable vector bundle of higher rank on a general CICY3 of type (2,4) is constructed.

Math. Subj. Class. (2010): 14J60, 14M10, 14J32, 14J30

Ključne besede: aritmetično Cohen-Macaulayjevi svežnji, Calabi-Yau raznoterosti dimenzije 3, Chernovi razredi, minimalne resolucije

Keywords: arithmetically Cohen-Macaulay bundles, Calabi-Yau threefolds, Chern classes, minimal resolutions

1 Uvod

Calabi-Yau raznoterosti so bile v zadnjih desetletjih predmet številnih raziskav v algebraični geometriji in fiziki. Problem štetja krivulj (predvsem racionalnih) na raznoterostih je veliko doprinesel k razvoju kvantne kohomologije. To je vodilo do presenetljivega odkritja povezave med geometrijo Calabi-Yau raznoterosti in zrcalno simetrijo v teoriji strun.

V tem delu nas posebej zanimajo tridimenzionalne projektivne Calabi-Yau raznoterosti, ki so hkrati popolni preseki (CICY3).

Imamo 5 različnih tipov CICY3:

- kvintika X_5 v $\mathbb{P}^4$ (hiperploskev stopnje 5),
- popolni presek X_8 tipa (2,4) v $\mathbb{P}^5$,
- popolni presek X_9 tipa (3,3) v $\mathbb{P}^5$,
- popolni presek X_{12} tipa (2,2,3) v $\mathbb{P}^6$ in
- popolni presek X_{16} tipa (2,2,2,2) v $\mathbb{P}^7$,

kjer popolni presek tipa $(r_1, ..., r_k)$ na kratko označimo z $X_{r_1+\cdots+r_k} \subset \mathbb{P}^{3+k}$.

Najbolj znan in raziskan CICY3 je kvintika. Razlog je v tem, da lahko kvintiko zapišemo kot Pfaffovo determinanto, ki pripada 10×10 poševno simetrični matriki s homogenimi linearnimi elementi. Tako lahko geometrijske lastnosti povežemo z linearno algebro.

Obstoj svežnjev na raznoterostih nam razkrije veliko informacij in lastnosti raznoterosti same. Raziskovali bomo nerazcepne aritmetično Cohen-Macaulayjeve (ACM) svežnje ranga 2 na CICY3. Pri tem pa si bomo poleg geometrijskih lastnosti CICY3 pomagali tudi z:

- algebro: vlakna ACM svežnjev so Cohen-Macaulayjevi moduli,
- algebraičnimi krivuljami: svežnji ranga 2 na tridimenzionalnih raznoterostih so po Serrovi korespondenci [50] bijektivni krivuljam, ki so subkanonične in lokalni popolni preseki.

Svežnje ranga r bomo **klasificirali** s pomočjo Chernovih razredov c_i, $1 \leq i \leq r$. Na CICY3 Chernove razrede lahko identificiramo s celimi števili. Za nerazcepne svežnje ranga 2 na CICY3 poleg tega velja $-3 < c_1 < 5$. Za vsak možni c_1 bomo podali vse možne c_2. Dokazali bomo **obstoj** nekaterih svežnjev z danima Chernovima razredoma.

Najprej na kratko povzemimo obstoječo literaturo o svežnjih in krivuljah na CICY3. V [32] je Kley predstavil metodo za določanje obtoja krivulj s predpisano stopnjo in rodom. Idejo je črpal iz [15], kjer je Clemens raziskoval obstoj racionalnih krivulj. Clemens je K3 ploskev, ki vsebuje racionalno krivuljo (obstoj racionalnih krivulj na K3 ploskvah je dokazan v [34]), vložil v singularni CICY3, nato pa s pomočjo teorije deformacij dokazal obstoj racionalne krivulje na gladki CICY3. Kley je to idejo z uporabo kompletnega linearnega sistema posplošil na poljubne krivulje.

Šele pred kratkim je Knutsen [33] našel napako v Kleyevem članku. To napako je odpravil in s pomočjo [16] razvil metodo, s katero je dokazal obstoj številnih gladkih krivulj dane stopnje in roda na CICY3. Yu je Knutsenovo metodo dodatno izboljšal in zbral vse do sedaj znane krivulje na CICY3 v tabeli [53, priloga C].

Chiantini in Madonna sta klasificirala ACM svežnje ranga 2 na generični kvintiki [14, p. 247] in skonstruirala nekatere izmed teh svežnjev. Rao in Kumar [40] sta naknadno dokazala obstoj vseh ACM svežnjev iz [14]. Vsi rezultati sledijo iz zgoraj omenjene Pfaffove determinante, zato njunih rezultatov ne moremo posplošiti na preostale CICY3. Poskus klasifikacije vseh CICY3 najdemo v [36], a se izkaže za napačnega (glej [21]).

Nadaljujmo z orisom poglavij in rezultatov našega dela. V drugem in tretjem poglavju bomo predstavili snope in teorijo presekov, v četrtem poglavju pa Serrovo korespondenco. V petem poglavju s pomočjo algebraičnih izrekov (Hilbertov izrek o vezeh, Auslander-Buchsbaumova formula, Auslander-Buchsbaum-Serrov izrek ter izrek Kaplanskega [30]) dokažemo, da je vsak koherenten ACM snop na gladki raznoterosti vektorski sveženj. Slednji izrek in Horrocksov kriterij (vsak sveženj na $\mathbb{P}^n$ je direktna vsota svežnjev premic) nam v šestem poglavju zagotovi obstoj eksaktnega zaporedja snopov

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0,$$

kjer sta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ direktni vsoti svežnjev premic, $\mathcal{E}$ pa je sveženj ranga 2 na hiperploskvi stopnje d v $\mathbb{P}^4$. Dodatno velja $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}(c_1 - d)$, kar je Beauville [5] utemeljil s pomočjo Grothendieckove dualnosti. Zvezo med $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ bomo na bolj preprost način dokazali s pomočjo ideje omenjene v [41]. Slednje nam bo koristilo tudi pri raziskovanju svežnjev premic na CICY3, ki niso hiperploskve: naj bo $\mathcal{E}$ vektorski sveženj ranga 2 na generičnem tridimenzionalnem popolnem preseku $X \subset \mathbb{P}^{3+k}$ tipa $(d_1, ..., d_k)$. Označimo z Y_i štiridimenzionalni popolni presek tipa $(d_1, .., \hat{d}_i, ..., d_k)$, ki vsebuje X kot hiperploskev. Naravno vprašanje je, ali v tem primeru obstaja eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0,$$

kjer sta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ direktni vsoti svežnjev premic na Y_i. Odgovor je v splošnem ne, kajti Horrocksov kriterij velja le na $\mathbb{P}^n$. Kljub temu pa bomo našli primere, kjer zgornje eksaktno zaporedje obstaja.

Pri klasifikaciji svežnjev v sedmem poglavju bomo potrebovali Grothendieck-Riemann-Rochovo formulo, ki jo izpeljemo v lemi 3.34. Pri dokazu obstoja nekaterih izmed teh svežnjev pa nam bo pomagala povezava minimalnih resolucij svežnjev na CICY3 z minimalnimi resolucijami pripadajočih krivulj, ki jo eksplicitno zapišemo v izreku 6.13.

Povezavo med minimalnima resolucijama sta v dimenziji nižje uporabila že Chiantini in Faenzi v [13, izrek 2.1]. Raziskovala sta minimalne resolucije svežnjev in minimalne resolucije točk na ploskvah. V njunem primeru se stvari poenostavijo, zato naš dokaz ne bo imel nič skupnega z njunim. Obratno pa iz našega dokaza izreka 6.13 na nov način sledi [13, izrek 2.1].

Zgornje, skupaj s teorijo eliptičnih in kanoničnih krivulj ([4], [9], [19], [43] in [48]), nam bo v sedmem poglavju služilo pri dokazu našega glavnega izreka:

Izrek 1.1. *Naj bo $X_r \subset \mathbb{P}^{3+k}$ (kjer je $k = \lfloor \frac{r}{4} \rfloor$) generičen CICY3 in naj bo $\mathcal{E}$ nerazcepen ACM sveženj ranga 2 na X_r. Potem normalizacija $\mathcal{E}$ pripada enemu izmed naslednjih Chernovih razredov:*

- $c_1 = -2$, $c_2 = 1$,
- $c_1 = -1$, $c_2 = 2$,
- $c_1 = 0$, $3 \leq c_2 \leq 4 + k$,
- $c_1 = 1$, $4 \leq c_2 \leq 6 + 2k$ *in* c_2 *je sod,*
- $c_1 = 2$, $c_2 \leq 7 + 2k + r$
- $c_1 = 3$, $c_2 = 8 + 2k + 2r$
- $c_1 = 4$,
  - ◇ $c_2 = 30$ *pri* $r = 5$,
  - ◇ $c_2 = 44$ *pri* $r = 8$,
  - ◇ $c_2 = 48$ *pri* $r = 9$,
  - ◇ $c_2 = 62$ *pri* $r = 12$,
  - ◇ $c_2 = 80$ *pri* $r = 16$.

Pri $c_1 = -2, -1$ in 0 svežnji obstajajo za vse možne r in c_2 predstavljene zgoraj, razen v primeru $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ na X_{16}. Obstajajo tudi svežnji na X_8 s $c_1 = 1$, $c_2 = 6$ in $c_1 = 1$, $c_2 = 10$; na X_9 s $c_1 = 1$, $c_2 = 6$ in $c_1 = 1$, $c_2 = 10$; na X_{12} s $c_1 = 1$, $c_2 = 8$ in $c_1 = 1, c_2 = 12$.

Pred kratkim je bil v [40] prvič preverjen obstoj svežnjev s $c_1 = 2$ in $c_2 = 11$ na kvintiki X_5. Dokazali bomo, da tem svežnjem po Serrovi korespondenci pripadajo singularne krivulje. Po [36] obstajajo tudi svežnji višjega ranga na kvintiki. V zadnjem poglavju bomo dokazali obstoj svežnjev višjega ranga tudi na CICY3 tipa $(2, 4)$.

2 Snopi in kohomologija

Delamo nad poljem kompleksnih števil $\mathbb{C}$. V tem poglavju definiramo snope in opišemo njihove lastnosti. Posebej zanimivi so koherentni snopi, ki zadoščajo pomembni lastnosti: če sta v eksaktnem zaporedju snopov dva izmed njih koherentna, je tudi tretji. Spoznamo osnove homološke algebre in kohomologije snopov. Definiramo strukturni snop, enega izmed najpomembnejših snopov na raznoterostih. Čechove kohomološke grupe na projektivnih raznoterostih so končno dimenzionalni vektorski prostori nad $\mathbb{C}$. Če ima snop strukturo vektorskega svežnja, si pri izračunu Čechovih kohomoloških grup pomagamo s Serrovo dualnostjo.

2.1 Snopi

Definicija 2.1 (Prva definicija snopa)**.** *Snop abelovih grup* $\mathcal{F} = (F, \pi, X)$ je preslikava $\pi : F \to X$ med topološkima prostoroma F in X, za katero velja:

- π je lokalni homeomorfizem,
- za vsak $x \in X$ je $\pi^{-1}(x)$ abelova grupa,
- preslikava $s : F \times F \to F$, ki paru (f, g) priredi $f + g$, je zvezna.

Definicija 2.2. *Vlakno* $\mathcal{F}_x$ snopa $\mathcal{F}$ pri $x \in X$ je množica $\pi^{-1}(x)$. *Prerez* snopa $\mathcal{F}$ nad množico $U \subset X$ je zvezna preslikava $f : U \to F$ z lastnostjo $\pi \circ f = \mathrm{id}$. Abelovo grupo prerezov nad U označimo z $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Ničelni elemet te grupe je *ničelni prerez*, elementom iz $\Gamma(X, \mathcal{F})$ pa pravimo *globalni prerezi*.

Primer 2.3. Vsak vektorski sveženj je snop abelovih grup, pri katerem je preslikava π surjektivna, vlakna pa imajo strukturo vektorskega prostora. Poleg tega je lokalno trivialen: za vsak $x \in X$ obstaja okolica U, da velja $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{C}^r$, $r \in \mathbb{N}$. Pravimo, da je sveženj *ranga* r, če so vsa vlakna r-dimenzionalni vektorski prostori. Vektorski svežnj ranga 1 je *sveženj premic*.

Snop lahko podamo tudi drugače:

Definicija 2.4 (Druga definicija snopa)**.** $\mathcal{F}$ je *predsnop* na X, če vsaki odprti množici $U \subset X$ priredi abelovo grupo $\mathcal{F}(U)$, tako da za $U \subset V \subset X$ zožitev

$$\mathrm{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

zadošča pogojema:

- $\mathrm{res}_{U,U} = \mathrm{id}$,
- $\mathrm{res}_{V,U} \circ \mathrm{res}_{W,V} = \mathrm{res}_{W,U}$ za vse $U \subset V \subset W \subset X$.

Naj bo U poljubna odprta množica. Vzemimo poljubno odprto pokritje $U = \bigcup_{a\in A} U_a$ in nabor elementov $f_a \in \mathcal{F}(U_a)$, z lastnostjo $\mathrm{res}_{U_a,U_a\cap U_b} f_a = \mathrm{res}_{U_b,U_a\cap U_b} f_b$ za vse $a, b \in A$. Predsnop $\mathcal{F}$ postane snop, če zadošča *aksiomu snopa*: obstaja enoličen element $f \in \mathcal{F}(U)$, tako da za vsak $a \in A$ velja $\mathrm{res}_{U,U_a} f = f_a$.

V literaturi se najprej pojavi prva, analitična definicija snopa. Šele nato se je razvila druga, bolj algebraična definicija snopa.

Obe definiciji snopa sta ekvivalentni ([49, str. 9] ali [20, str.14]). Res, za snop $\mathcal{F}$ podan s prvo definicijo označimo $\mathcal{F}'(U) := \Gamma(U, \mathcal{F})$ in preverimo, da je $\mathcal{F}'$ snop po drugi definiciji. Če pa je $\mathcal{F}'$ podan z drugo definicijo, si pomagamo z direktno limito:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}''_x &= \varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}'(U) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{disjunktna unija grup } \mathcal{F}'(U)\text{, kjer unija teče po vseh odprtih množi-} \\ \text{cah } x \in U\text{, modulo ekvivalenčna relacija: za } \sigma \in \mathcal{F}'(U) \text{ in } \tau \in \mathcal{F}'(V) \\ \text{velja } \sigma \sim \tau\text{, ko obstaja odprta okolica } x \in W \subset U \cap V \text{ za katero je} \\ \mathrm{res}_{\mathrm{U,W}}\sigma = \mathrm{res}_{V,W}\tau. \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Za vsak $x \in X$ obstaja naravna preslikava $\mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}''_x$, ki elementu $s \in \mathcal{F}'(U)$ priredi ekvivalenčni razred (U, s). Ta ekvivalenčni razred označimo z s_x in ga imenujemo *zarodek* elementa s v točki x. Sedaj vpeljimo topologijo na disjunktni uniji $F'' = \coprod_{x\in X} \mathcal{F}''_x$: bazne odprte množice so

$$(U, s) := \{(x, s_x) \mid x \in U)\},$$

kjer je U odprta množica v X in $s \in \mathcal{F}'(U)$. Enostavno je preveriti, da naravna preslikava $\pi : F'' \to X$ določa snop $\mathcal{F}''$, ki zadošča prvi definiciji.

Zgoraj smo definirali snop abelovih grup. Če pa imamo na snopu $\mathcal{F}$ še kakšno dodatno strukturo, lahko definiramo tudi:

- *Snop kolobarjev*, če je $\mathcal{F}_x$ kolobar in je $(f, g) \mapsto f \cdot g$ zvezna preslikava iz $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

- Pri danem snopu kolobarjev $\mathcal{A}$, je $\mathcal{F}$ *snop $\mathcal{A}$-modulov*, če ima $\mathcal{F}_x$ strukturo $\mathcal{A}_x$-modula in je $(a, f) \mapsto a \cdot f$ zvezna preslikava iz $\mathcal{A} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Definicija 2.5. Naj bosta $\mathcal{F} = (F, \pi_1, X)$ in $\mathcal{G} = (G, \pi_2, X)$ snopa na X. Zvezna preslikava $\varphi : F \to G$ je *homomorfizem snopov* $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ nad X, če diagram

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & G \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

komutira in je $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ homomorfizem ustreznih algebrskih struktur za vsak $x \in X$. Abelovo grupo homomorfizmov $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ označimo s $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

S pomočjo vlaken lahko definiramo tudi preostale osnovne pojme (podsnop, kvocientni snop, jedro, kojedro homomorfizma, tenzorski produkt snopov ter direktno vsoto snopov). Natančne definicije najdemo v [49, str.14-15].

Iz dokaza ekvivalence prve in druge definicije snopa sledi, da sta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}''$ izomorfna snopa, zato bomo od sedaj naprej zanju uporabljali isto oznako $\mathcal{F}$. Prav tako bomo identificirali prereze $\Gamma(U, \mathcal{F})$ in $\mathcal{F}(U)$. Če ne bomo posebej poudarili, bomo z $\mathcal{F}$ označili tudi pripadajoči topološki prostor; le ta zasluži posebno ime "espace étalé", kajti njegove odprte množice so ploščato razprostrte med odprtimi množicami X. Posebnost te topologije se izraža v naslednjih trditvah.

Trditev 2.6. *Prerez je odprta preslikava.*

Dokaz. Naj bo f prerez snopa $\mathcal{F}$ in $\pi : F \to X$ homeomorfizem. Vemo, da velja $\pi \circ f = id$. Za odprto množico $U \subset X$ pokažimo, da je $f(U)$ odprta. Vzemimo poljubno točko $f(u) \in f(U)$ in poiščimo odprto okolico $f(u)$, ki je vsebovana v $f(U)$. Ker je π lokalni homeomorfizem, obstaja odprta okolica V točke $f(u)$ za katero je $V \cong \pi(V)$. Zaradi zveznosti f obstaja odprta okolica $u \in W \subset U$, da velja $f(W) \subset V$. Vidimo, da velja $f(W) \cong \pi(f(W)) = W$. Torej je $f(W)$ odprta okolica za $f(u)$ in hkrati $f(W) \subset f(U)$. □

Trditev 2.7 ([17]). *Vsak homomorfizem snopov $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ nad X je lokalni homeomorfizem. Če je $g : X \to \mathcal{F}$ prerez snopa $\mathcal{F}$, potem je $\varphi \circ g : X \to \mathcal{G}$ prerez snopa $\mathcal{G}$.*

Definicija 2.8. *Nosilec snopa $\mathcal{F}$* na X označimo s $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ in ga definiramo kot $\{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$.

Trditev 2.9. *Nosilec snopa $\mathcal{F}$ je zaprta množica.*

Dokaz. Pokažimo, da je za dani prerez $f : U \to \mathcal{F}$ množica $A = \{x \in U \mid f(x) = 0_x\}$ odprta. Označimo z $0(U)$ sliko ničelnega prereza. Velja $A = \pi(f(U) \cap 0(U))$. Torej je A odprta množica, saj je $f(U) \cap 0(U)$ odprta množica po trditvi 2.6 in je π odprta preslikava (π je lokalni homeomorfizem). □

S $\mathbb{P}^n$ označimo n-dimenzionalni projektivni prostor nad poljem $\mathbb{C}$. Topološki prostori, ki se pojavljajo v (projektivni) algebraični geometriji, so projektivne raznoterosti opremljene s topologijo Zariskega. Podane so kot množica ničel homogenih polinomov v $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.

Od sedaj naprej za vsako raznoterost privzemimo, da je projektivna.

Trditev 2.10. *Naj bo $\mathcal{F}$ snop na nerazepni raznoterosti X, ki ima nosilec različen od X. Za poljuben svežen $\mathcal{G}$ na X je* $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$.

Dokaz. Po trditvi 2.9 je nosilec zaprta množica in ker je $\operatorname{Supp} \mathcal{F} \neq X$, je $\mathcal{F}_x = 0$ za vsak x iz neke goste odprte množice, saj je X nerazcepna. Rezultat sledi iz definicije homomorfizma snopov. □

Sestavni del vsake raznoterosti je strukturni snop, ki je posplošitev polja racionalnih funkcij.

Definicija 2.11. Naj bo X raznoterost. Definirajmo *polje racionalnih funkcij* $\mathbb{C}(X) := \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n] \mid f, g$ homogena in enakih stopenj, $g \not\equiv 0$ na $X\}$.

Definicija 2.12. Racionalna funkcija $f \in \mathbb{C}(X)$ je *regularna* pri točki x, če jo lahko zapišemo kot $f = \frac{g}{h}$, kjer je $h(x) \neq 0$.

Definicija 2.13. Naj bo

$$\mathcal{O}_{X,x} := \{f \in \mathbb{C}(X) \mid f \text{ je regularen pri } x\}$$

lokalni kolobar z maksimalnim idealom

$$m_{X,x} := \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}.$$

Množica vseh točk, kjer je f regularna je *domena funkcije* $\operatorname{dom}(f)$. Za odprto množico $U \subset X$ definiramo *kolobar regularnih funkcij* na U kot

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f \in \mathbb{C}(X) \mid U \subset \operatorname{dom}(f)\}.$$

Preverimo lahko, da je $\mathcal{O}_X$ snop ([20] ali [29]). Imenujemo ga *snop regularnih funkcij* ali *strukturni snop*. Snopu, ki je izomorfen $\mathcal{O}_X$ pravimo *trivialni snop*.

Opomba 2.14. Od sedaj naprej je vsak snop abelovih grup tudi snop $\mathcal{O}_X$-modulov.

V nadaljevanju bomo rabili tudi zasuk strukturnega snopa, ki ga definiramo s pomočjo svežnjev premic.

Trditev 2.15 ([52, trditev 2.1.3])**.** *Izberimo pokritje $(U_i)_{i\in I}$ in nabor holomorfnih preslikav $g_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}^*$, ki zadoščajo $g_{ii} = 1$, $g_{ij}g_{ji} = 1$, $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ (temu pravimo, da g_{ij} zadoščajo kocikelnemu pogoju). Potem lahko konstruiramo sveženj premic $\mathcal{E}$:*

$$\mathcal{E} = \coprod_{i\in I}(U_i \times \mathbb{C})/\sim,$$

kjer je $(x, v) \sim (y, w)$, natanko tedaj ko $x = y$ in $w = g_{ij}v$.

Sedaj si oglejmo svežnje premic na $\mathbb{P}^n$ s standardnim pokritjem

$$(U_i = \{x_i \neq 0\})_{i\in\{0,...,n\}}.$$

Po trditvi 2.15 lahko sveženj premic podamo z naborom preslikav. Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ definirajmo sveženj premic

$$\mathcal{O}_X(n) \text{ z naborom preslikav } g_{ij} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^n,$$

ki očitno zadoščajo kocikelnemu pogoju.

Opomba 2.16. Strukturni snop $\mathcal{O}_X$ in $\mathcal{O}_X(0)$ sta izomorfna snopa.

Trditev 2.17. *Naj bo $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{O}_X$-modulov na X. Potem velja*

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}).$$

Dokaz. Po trditvi 2.7 vsak element iz $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ porodi element iz $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Obratno, prerez s inudira enoličen homomorfizem $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ s predpisom $f \mapsto f \cdot s$. Enostavno preverimo, da sta preslikavi inverzni in definirata izomorfizem med $\Gamma(X, \mathcal{F})$ in $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$. $\square$

2.2 Koherentni snopi

Koherentni snopi so posplošitev pojma vektorskih svežnjev.

Definicija 2.18. Snop je *lokalno končno generiran*, če za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica U in končno mnogo prerezov $f_1, ..., f_m$ snopa $\mathcal{F}|_U$ nad U, tako da $f_i(y)$ v poljubni točki $y \in U$ generirajo vlakno $\mathcal{F}_y$ kot $\mathcal{O}_y$-modul.

Definicija 2.19. Naj bodo $f_1, ..., f_m : U \to \mathcal{F}$ prerezi snopa $\mathcal{F}$. *Snop relacij* $\mathcal{R}(f_1, ..., f_m)$ je snop z vlakni

$$\mathcal{R}(f_1, ..., f_m)_x = \{(g_1(x), ..., g_m(x)) \in \mathcal{O}_x^m \mid \sum_{j=1}^{m} g_j(x) f_j(x) = 0_x\}, \quad x \in U.$$

Definicija 2.20. Snop $\mathcal{F}$ je *koherenten*, če velja:

- snop je lokalno končno generiran,
- za poljubno družino lokalnih prerezov $f_1, ..., f_m : U \to \mathcal{F}$ snopa $\mathcal{F}$ je snop relacij $\mathcal{R}(f_1, ..., f_m)$ lokalno končno generiran.

Trditev 2.21 ([49, trditev 13.1])**.** *Naj bo $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eksaktno zaporedje homomorfizmov snopov nad X. Če sta dva izmed $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}$ koherentna, je tudi tretji.*

Definicija 2.22. Naj bosta $V \subset X$ projektivni raznoterosti. *Snop idealov $\mathcal{I}_V$* na X definiramo po vlaknih: za vsak $x \in X - V$ je vlakno $\mathcal{I}_{V,x} = \mathcal{O}_x$, za $x \in V$ pa je $\mathcal{I}_{V,x} = \{f \in \mathcal{O}_X \mid f(x) = 0\}$.

Trditev 2.23 ([49, str.46])**.** *Snop idealov je koherentni snop.*

2.3 Homološka algebra

Preden definiramo kohomologijo snopov si oglejmo osnove homološke algebre. Navedemo lemo o petih in lemo o kači, ki nam bosta koristili pri dokazu izreka 6.13. Definiramo pojme homološke algebre kot so kompleks, morfizem kompleksov in kohomološke objekte kompleksa.

Rezultati predstavljeni v tem poglavju veljajo za vse abelove kategorije. Primeri abelovih kategorij so:

- kategorija abelovih grup $\mathfrak{Ab}$,
- kategorija modulov $\mathfrak{Mod}(A)$ nad enotskim komutativnim kolobarjem A,
- kategorija snopov abelovih grup $\mathfrak{Ab}(X)$ na topološkem prostoru X,
- $\mathfrak{Mod}(X)$, kategorija snopov $\mathcal{O}_X$-modulov nad raznoterostjo X.

Več o abelovih kategorijah najdemo v [47, poglavje 5.5].

Lema 2.24 ([47, trditev 2.70])**.** *Vzemimo komutativen diagram z eksaktnima vrsticama:*

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Potem obstaja natanko ena preslikava $h : A'' \to B''$, da zgornji diagram komutira.

Lema 2.25 ([47, trditev 2.71])**.** *Vzemimo komutativen diagram z eksaktnima vrsticama:*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B''. \end{array}$$

Potem obstaja natanko ena preslikava $h : A' \to B'$, da zgornji diagram komutira.

Lema 2.26 ([47], Lema o petih)**.** *Opazujmo komutativen diagram z eksaktnima vrsticama:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & {\scriptstyle h_2}\downarrow & & {\scriptstyle h_3}\downarrow & & {\scriptstyle h_4}\downarrow & & {\scriptstyle h_5}\downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5. \end{array}$$

- *Če sta h_2 in h_4 surjektivna in je h_5 injektivna, potem je h_3 surjektivna.*
- *Če sta h_2 in h_4 injektivna in je h_1 surjektivna, potem je h_3 injektivna.*
- *Če so h_1, h_2, h_4 in h_5 izomorfizmi, potem je h_3 izomorfizem.*

Lema 2.27 ([47], Lema o kači)**.** *Za komutativen diagram*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

obstaja eksaktno zaporedje

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h \to \mathrm{Coker} f \to \mathrm{Coker} g \to \mathrm{Coker} h \to 0.$$

Kompleks $A_\bullet$ v abelovi kategoriji $\mathfrak{A}$ je nabor objektov A^i in morfizmov $A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1}$, tako da velja $d^{i+1} \circ d^i = 0$ za vsak $i \in \mathbb{Z}$. Kvocient $\operatorname{Ker} d^i / \operatorname{im} d^{i-1}$ je i-ti *kohomološki objekt* $h^i(A_\bullet)$ kompleksa $A_\bullet$ Preslikavi $A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet$ pravimo *morfizem* kompleksov, če obstajajo morfizmi $A^i \xrightarrow{f^i} B^i$, za katere spodnji diagram komutira:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{d_i} & A_{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle f_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_{i+1}}\big\downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_i & \xrightarrow{d'_i} & B_{i+1} & \longrightarrow & \cdots . \end{array}$$

Naj bosta $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ abelovi kategoriji. Kovariantni funktor $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ je *aditiven*, če je za poljubna objekta A, A' iz $\mathfrak{A}$ inducirana preslikava $\mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(FA, FA')$ homomorfizem abelovih grup. Funktor F je *levo eksakten*, če je aditiven in hkrati za vsako kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

porodi eksaktno zaporedje

$$0 \to FA' \to FA \to FA''.$$

Če lahko dopišemo 0 na desni namesto na levi strani zaporedja, potem pravimo, da je F *desno eksakten*. Če je F levo in desno eksakten, potem je F *eksakten*.

Za kontravariantni funktor eksaktnost definiramo na analogen način: funktor $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ je *levo eksakten*, če je aditiven in vsako kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

porodi eksaktno zaporedje

$$0 \to FA'' \to FA \to FA'.$$

Primer 2.28. Naj bo A fiksen objekt v abelovi kategoriji $\mathfrak{A}$. Funktor $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{Ab}$ s predpisom $B \mapsto \mathrm{Hom}(A, B)$ je kovariantni levo eksaktni funktor. Označimo ga s $\mathrm{Hom}(A, \cdot)$. Funktor $F' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{Ab}$ podan s predpisom $B \mapsto \mathrm{Hom}(B, A)$ je kontravariantni levo eksaktni funktor, ki ga označimo s $\mathrm{Hom}(\cdot, A)$.

Objekt $I \in \mathfrak{A}$ je *injektiven*, če je funktor $\mathrm{Hom}(\cdot, I)$ eksakten. *Injektivna resolucija* $I_\bullet$ objekta $A \in \mathfrak{A}$ je kompleks $I_0 \to I_1 \to \cdots$, v katerem so vsi objekti injektivni ter obstaja preslikava $\epsilon : A \to I^0$, da je zaporedje

$$0 \to A \xrightarrow{\epsilon} I^0 \to I^1 \to \cdots$$

eksaktno.

Če ima vsak objekt v abelovi kategoriji $\mathfrak{A}$ injektivno resolucijo, potem pravimo, da je $\mathfrak{A}$ *dovolj injektivna*. V taki kategoriji lahko za vsak kovariantni levo eksaktni funktor F definiramo *desni izvedeni funktor* RF^i, $i \geq 0$ na naslednji način: za vsak $A \in \mathfrak{A}$ izberimo in fiksirajmo neko injektivno resolucijo $I_\bullet$ od A. Potem definiramo $RF^i(A) := h^i(F(I_\bullet))$. Po izreku [24, izrek III.1.1.A] je definicija res neodvisna od izbire injektivne resolucije.

Objekt $P \in \mathfrak{A}$ je *projektiven*, če je funktor $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ eksakten. *Projektivna resolucija* $P_\bullet$ objekta A je kompleks $\cdots \to P_1 \to P_0$, v katerem so vsi objekti projektivni ter obstaja preslikava $\epsilon : P_0 \to A$, da je zaporedje

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$$

eksaktno.

Analogno kot zgoraj lahko definiramo *leve izvedene funktorje* za kovariantni desno eksaktni funktor s projektivnimi resolucijami. Prav tako lahko definiramo desne izvedene funktorje od kontravariantnega levo eksaktnega funktorja (s projektivnimi resolucijami) ter leve izvedene funktorje od kontravariantnega desno eksaktnega funktorja (z injektivnimi resolucijami).

2.4 Kohomologija snopov

V tem poglavju definiramo kohomologijo snopov abelovih grup na topološkem prostoru. Na projektivnih raznoterostih se računanje kohomologij koherentnih snopov poenostavi in pogosto odraža geometrijo raznoterosti.

Naj bo $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ odprto pokritje topološkega prostora X in naj bo $\mathcal{F}$ snop abelovih grup na X. Fiksirajmo dobro ureditev množice I. Za končen nabor elementov $i_0, ..., i_q \in I$ označimo $U_{i_0,...,i_q} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}$. Definirajmo:

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < ... < i_q} \mathcal{F}(U_{i_0,...,i_q}),$$

kjer produkt teče po vseh $q + 1$-tericah elementov $i_0 < \cdots < i_q$ iz I. Torej je vsak element $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ določen z naborom

$$f_{i_0,...,i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0,...,i_q}),$$

za vsako $(q + 1)$-terico elementov $i_0 < \cdots < i_q$ iz I.

Sedaj lahko definiramo preslikave $\delta^q : C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ podane z

$$(\delta^q f)_{i_0,\dots,i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j f_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{q+1}}.$$

Tako dobimo kompleks abelovih grup

$$\cdots \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_q} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \cdots,$$

ki ga označimo s $C_\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Definicija 2.29. Kohomološkim grupam kompleksa $C_\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ pravimo *kohomološke grupe* pokritja $\mathcal{U}$ s koeficienti v snopu $\mathcal{F}$ in jih označimo z

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Definicija 2.30. Naj bosta $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} U_i$ in $\mathcal{V} = \bigcup_{j\in J} V_j$ odprti pokritji X. Pokritje $\mathcal{V}$ je *finejše* od pokritja $\mathcal{U}$ natanko takrat, ko obstaja preslikava $r : J \to I$, za katero velja $V_j \subset U_{r(j)}$; to označimo z $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Preslikavi r pravimo *fina preslikava*, ki pripada relaciji $\leq$.

Preslikava r porodi preslikavo $r_q^* : C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ podano s predpisom $(r_q^* f)_{j_0,\dots,j_q} := f_{r(j_0),\dots,r(j_q)}|_{V_{j_0,\dots,j_q}}$. Preslikava r_q^* je homomorfizem abelovih grup in je neodvisna od izbire r. Naslednji diagram komutira

$$\begin{array}{ccccc}
C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_0} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta_1} & \cdots \\
\big\downarrow{\scriptstyle r_0^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle r_1^*} & & \\
C^0(\mathcal{V},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta'_0} & C^1(\mathcal{V},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta'_1} & \cdots
\end{array}$$

in tako inducira homomorfizme $r_q^* : H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$.

Čechova kohomologija prostora X s koeficienti v snopu $\mathcal{F}$ je definirana kot

$$\begin{aligned}
H^q(X,\mathcal{F}) &= \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\
&= \left\{\begin{array}{l}
\text{disjunktna unija grup } H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \text{, kjer unija teče po vseh pokritjih,} \\
\text{modulo ekvivalenčna relacija: za } c \in H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \text{ in } c' \in H^q(\mathcal{V},\mathcal{F}) \\
\text{velja } c \sim c' \text{, ko obstaja pokritje } \mathcal{W} \text{ finejše od } \mathcal{U} \text{ (s fino preslikavo} \\
r \text{) in finejše od } \mathcal{V} \text{ (s fino preslikavo } r' \text{) za katero je } r^*c = (r')^*c' \in \\
H^q(\mathcal{W},\mathcal{F})
\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Takoj iz definicij sledi naslednja lema.

Lema 2.31 ([47, str. 386])**.** *Velja* $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ *ter* $H^j(X, \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{F}_i) = \bigoplus_{i=0}^n H^j(X,\mathcal{F}_i)$.

Trditev 2.32 ([49, izrek 66.1])**.** *Naj bo X raznoterost v $\mathbb{P}^n$. Za koherentni snop $\mathcal{F}$ je grupa $H^q(X,\mathcal{F})$ končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ za vsak $q \in \mathbb{N}_0$. Poleg tega velja $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$ za $q > \dim X$.*

Definicija 2.33. Naj bo $\mathcal{F}$ snop na raznoterosti X. Dimenzijo vektorskega prostora $H^q(X,\mathcal{F})$ označimo s $h^q(X,\mathcal{F})$. Število

$$\chi(X,\mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{\infty} h^i(X,\mathcal{F})$$

se imenuje *Euler-Poincarejeva karakteristika* snopa $\mathcal{F}$ na raznoterosti X.

Po trditvi 2.32 je $\chi(X,\mathcal{F})$ dobro definirano, kajti $h^i(X,\mathcal{F}) = 0$ za $i > \dim(X)$.

Trditev 2.34 ([45], Bottova formula)**.**

$$h^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) := \begin{cases} \binom{n+k}{k} & \textit{za } q = 0,\ k \geq 0 \\ \binom{-k-1}{-k-1-n} & \textit{za } q = n,\ k \leq -n-1 \\ 0 & \textit{drugače} \end{cases}$$

Iz Bottove formule sledi $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = 0$ za $k < 0$ in $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = \binom{n+k}{k}$, za $k \geq 0$. Po lemi 2.31 torej vidimo, da $\mathcal{O}(k)$ nima globalnih prerezov za $k < 0$.

2.5 Serrova dualnost

S pomočjo Serrove dualnosti je možno pokazati, da so določene kohomološke grupe med sabo izomorfne.

Naj bosta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ snopa $\mathcal{O}_X$-modulov na X. Snop $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ na odprtih množicah definiramo z $U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Za dani $\mathcal{F}$ je $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\cdot)$ levo eksaktni kovariantni funktor iz $\mathfrak{Mod}(X)$ v $\mathfrak{Ab}$, $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\cdot)$ pa je levo eksaktni kovariantni funktor iz $\mathfrak{Mod}(X)$ v $\mathfrak{Mod}(X)$.

Definicija 2.35. Naj bo funktor $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\cdot)$ desni izvedeni funktor od $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\cdot)$, funktor $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\cdot)$ pa desni izvedeni funktor od $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\cdot)$.

Za vsak objekt iz $\mathfrak{Mod}(X)$ je možno skonstruirati injektivno resolucijo, zato je zgornja definicija dobra.

Trditev 2.36 ([24, trditev 6.4])**.** *Naj bo*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0 \tag{1}$$

kratko eksaktno zaporedje. Za poljuben snop $\mathcal{G}$ *lahko delujemo s funktorjem* $\mathrm{Hom}(\cdot,\mathcal{G})$ *na* (1) *in dobimo dolgo eksaktno zaporedje*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'',\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}',\mathcal{G}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'',\mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \cdots . \end{aligned}$$

Delovanje funktorja $\mathrm{Hom}(\mathcal{G},\cdot)$ *na* (1) *pa porodi dolgo eksaktno zaporedje*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{F}'') \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G},\mathcal{F}') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G},\mathcal{F}) \to \cdots . \end{aligned}$$

Analogno delovanji funktorjev $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{G})$ oziroma $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \cdot)$ porodita dolgi eksaktni zaporedji

$$\begin{aligned}0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to \\ \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \cdots,\end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned}0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F}') \to \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F}'') \to \\ \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{G}, \mathcal{F}') \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \cdots.\end{aligned}$$

Trditev 2.37 ([24, trditev 6.3])**.** *Za vsak $G \in \mathfrak{Mod}(X)$ velja:*

- $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$,
- $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$ *za* $i > 0$,
- $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong H^i(X, \mathcal{G})$ *za vsak* $i \geq 0$.

Definicija 2.38. Naj bo $\mathcal{E}$ snop na raznoterosti X. Snop $\mathcal{E}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O})$ imenujemo *dual* snopa $\mathcal{E}$.

Trditev 2.39 ([24, trditev 6.7])**.** *Naj bo $\mathcal{L}$ sveženj končnega ranga. Za poljubna $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ imamo izomorfizem abelovih grup*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G})$$

in izomorfizem snopov

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{L}^\vee.$$

Definicija 2.40. *Kanonični sveženj* n-dimenzionalne raznoterosti X je $\omega_X = \wedge^n \mathcal{T}_X^\vee$, kjer $\mathcal{T}_X^\vee$ označuje kotangentni sveženj, to je dual tangentnega.

Trditev 2.41 ([24, primer II.8.20.3])**.** *Za $X = \mathbb{P}^n$ velja $\omega_X = \mathcal{O}_X(-n-1)$. Za hiperploskev $Y \subset \mathbb{P}^n$ stopnje d pa velja $\omega_Y = \mathcal{O}_Y(d-n-1)$.*

Trditev 2.42 ([24, trditev 7.6])**.** *Če je $\mathcal{F}$ koherentni snop na gladki n-dimenzionalni X, potem je $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F})$.*

Izrek 2.43 ([24], Serrova dualnost)**.** *Za vsak sveženj $\mathcal{F}$ na raznoterosti X obstaja izomorfizem*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X).$$

3 Teorija presekov

V tem poglavju spoznamo osnovne pojme analitične in algebraične geometrije kot so delitelji, Chernovi razredi in Picardova grupa. Grothendieck-Lefschetzev izrek zagotovi obstoj družine raznoterosti, ki imajo Picardovo grupo izomorfno $\mathbb{Z}$. V to družino spadajo tudi CICY3, kar je ključnega pomena za klasifikacijo svežnjev na CICY3. S pomočjo teorije presekov in Grothendieck-Riemann-Rochove formule izpeljemo povezavo med Euler-Poincarejevo karakteristiko in Chernovimi razredi na CICY3.

3.1 Delitelji

V tem razdelku predstavimo teorijo deliteljev in jo navežemo na svežnje premic. Dokaze najdemo v [24, poglavje II.6]. Naj bo X nerazcepna raznoterost s poljem racionalnih funkcij $\mathbb{C}(X)$. Podraznoterost $Y \subset X$ je *hiperploskev*, če ima vsaka nerazcepna komponenta Y kodimenzijo 1 v X.

Za nerazcepno hiperploskev Y na gladki raznoterosti X definirajmo:

$$\mathcal{O}_{X,Y} = \{f \in \mathbb{C}(X) \mid f \text{ je regularna na } Y\}.$$

Izrek 3.1. *$\mathcal{O}_{X,Y}$ je lokalni kolobar z maksimalnim idealom $\{f \in \mathcal{O}_{X,Y} \mid f|_Y = 0\}$. $\mathcal{O}_{X,Y}$ je tudi diskretni valuacijski kolobar.*

Pripadajočo valuacijo zapišemo kot

$$\mathrm{ord}_Y : \mathbb{C}(X)^* \to \mathbb{Z},$$

kjer $\mathbb{C}(X)^*$ označuje neničelne racionalne funkcije.

Naj bo $f \in \mathbb{C}(X)^*$. Potem ima f *ničlo reda m* na Y, če velja $m = \mathrm{ord}_Y(f) > 0$ in *pol reda m* na Y, če velja $m = -\mathrm{ord}_Y(f) > 0$.

Weilov delitelj na raznoterosti X je končna formalna vsota

$$D = \sum_{i=1}^{s} a_i D_i,$$

kjer so D_i nerazcepne hiperploskve na X in $a_i \in \mathbb{Z}$. Množica Weilovih deliteljev ima strukturo aditivne grupe, ki jo označimo z WDiv(X).

Weilov delitelj $D = \sum_{i=1}^{s} a_i D_i$ je *učinkovit*, če so vsi $a_i \geq 0$. Vsak Weilov delitelj lahko zapišemo kot razliko dveh učinkovitih Weilovih deliteljev.

Izrek 3.2. *Naj bo $f \in \mathbb{C}(X)$ neničelna. Obstaja le končno mnogo hiperploskev $Y \subset X$, za katere je $\mathrm{ord}_Y(f) \neq 0$.*

Racionalni funkciji f torej lahko priredimo Weilov delitelj:

$$(f) := \sum_{Y} \mathrm{ord}_Y(f)\, Y.$$

Weilova delitelja D_1 in D_2 sta *linearno ekvivalentna* (kar označimo $D_1 \sim D_2$), če obstaja $f \in \mathbb{C}(X)^*$, tako da je $(f) = D_1 - D_2$. Pravimo, da je $D \in \mathrm{WDiv}(\mathrm{X})$ *glavni delitelj*, če velja $D \sim 0$, z drugimi besedami $D = (f)$ za nek $f \in \mathbb{C}(X)$. Podgrupo glavnih deliteljev označimo z $\mathrm{Div}_0(X)$. Kvocientno grupo

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{Div}_0(X)$$

pa imenujemo *grupa razredov deliteljev* za X.

Naj bo $D = \sum_{i=1}^{s} a_i D_i$ Weilov delitelj na X. Če je $U \subset X$ neprazna odprta množica, potem je zožitev $D|_U$ Weilov delitelj na U:

$$D|_U = \sum_{U \cap D_i \neq \emptyset} a_i (U \cap D_i).$$

Definicija 3.3. Weilov delitelj D je *Cartierov*, če obstaja tako pokritje $(U_i)_{i \in I}$ za X, da je $D|_{U_i}$ glavni za vsak $i \in I$.

Po definiciji Cartierovega delitelja D lahko najdemo pokritje $(U_i)_{i \in I}$ in funkcije $f_i \in \mathbb{C}(X)^*$, tako da velja $D|_{U_i} = (f_i)$. Pravimo, da je D podan z naborom (U_i, f_i), $i \in I$. Lahko se prepričamo, da so f_i/f_j regularne na $U_i \cap U_j$. Povedano v jeziku snopov: $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ je neničelni prerez strukturnega snopa.

Če sta D in E Cartierova delitelja, potem sta to tudi $-D$ in $D + E$. Zato množica Cartierovih deliteljev tvori grupo, ki jo označimo z $\mathrm{Div}(X)$. Ker je vsak glavni delitelj tudi Cartierov, velja $\mathrm{Div}_0(X) \subset \mathrm{Div}(X)$. *Picardova grupa* za X je kvocient

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_0(X).$$

Izrek 3.4. *Na gladki raznoterosti X je vsak Weilov delitelj tudi Cartierov, torej je $\mathrm{Cl}\,(X) = \mathrm{Pic}\,(X)$.*

Na gladkih raznoterostih bomo zato na kratko pisali delitelj in opustili besedi Weilov ali Cartierov.

V nadaljevanju izračunajmo Picardovo grupo $X = \mathbb{P}^n$. Definirajmo

$$S := \mathbb{C}\left[x_0, ..., x_n\right].$$

Definicija 3.5. Za vsak delitelj $D = \sum_{i=1}^{r} n_i Y_i$ na X definiramo *stopnjo delitelja* z $\deg D = \sum_{i=1}^{r} n_i \deg Y_i$, kjer je $\deg Y_i$ stopnja hiperploskve Y_i.

Definicija 3.6. Homogen polinom $g \in S$ lahko razcepimo na nerazcepne faktorje $g = g_1^{n_1} \cdots g_r^{n_r}$. Vsak g_i definira hiperploskev Y_i stopnje $d_i = \deg(g_i)$. *Delitelj polinoma* je $(g) := \sum_{i=1}^{r} n_i Y_i$.

Trditev 3.7. *Vsak učinkovit delitelj D na $\mathbb{P}^n$ je oblike $D = (g)$ za nek homogen polinom g.*

Dokaz. Trditev sledi iz elementarnega dejstva v komutativni algebri: nerazcepna hiperploskev v $\mathbb{P}^n$ pripada homogenemu praidealu z višino 1 v S, ki pa je glavni ([31, izrek 5.13]). $\square$

Zgornja trditev učinkovitemu delitelju D priredi *pripadajočo hiperploskev* podano z ničlami homogenega polinoma g.

Trditev 3.8. *Naj bo H hiperravnina v $\mathbb{P}^n$. Potem velja:*

a) poljuben delitelj stopnje d je linearno ekvivalenten dH,

b) za vsak $f \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$ velja $\deg(f) = 0$,

c) preslikava $\deg : \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{Z}$ *je izomorfizem.*

Dokaz. Po definiciji 3.6 sta stopnji homogenega polinoma in pripadajočega ideala enaki. Točka *b*) nato sledi iz dejstva, da je $f = \frac{g}{h}$, kjer sta g in h homogena polinoma istih stopenj.

Brez škode za splošnost privzemimo, da je $H = \{x_0 = 0\}$. Če je D delitelj stopnje d, ga lahko zapišemo kot razliko dveh učinkovitih deliteljev $D_1 - D_2$ z lastnostjo $\deg D_1 - \deg D_2 = d$. Po trditvi 3.7 velja $D_1 = (g_1)$ in $D_2 = (g_2)$, kjer sta g_1 in g_2 homogena polinoma. Za racionalno funkcijo $f = g_1/x_0^d g_2$ velja tudi $D - dH = (f)$. S tem smo pokazali a). Trditev c) pa sledi iz a) in b), saj velja $\deg H = 1$. $\square$

Definicija 3.9. Naj bo s globalni prerez svežnja $\mathcal{F}$ na raznoterosti X. Množico $\{x \in X \mid s(x) = 0\}$ imenujemo *množica ničel* prereza s.

Trditev 3.10. *Naj bo $s \in \mathcal{F}(X)$ neničelni prerez svežnja premic $\mathcal{F}$ na projektivni raznoterosti X. Privzemimo, da je množica $\mathcal{F}_0$ ničel prereza s neprazna. Potem je $\mathcal{F}_0$ hiperploskev.*

Dokaz. Izberimo tako pokritje $(U_i)_{i\in I}$, ki trivializira sveženj $\mathcal{F}$; to pomeni $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$. Pokažimo, da je $\mathcal{F}_0$ učinkovit delitelj. Označimo $s_i = s|_{U_i}$. Ker velja $\frac{s_i}{s_j} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ vidimo, da nabor (U_i, s_i) določa Cartierov delitelj D, ki je očitno učinkovit (ker je $\mathcal{F}_0$ neprazna in $s \neq 0$). Po trditvi 3.7 tako obstaja homogen polinom g, da je $D = (g)$. Množica $\mathcal{F}_0 = \{g = 0\}$ je torej res hiperploskev. $\square$

Primer 3.11. Enakost

$$\frac{a_0x_0 + \cdots + a_nx_n}{x_i} = \frac{x_j}{x_i} \cdot \frac{a_0x_0 + \cdots + a_nx_n}{x_j}, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

nam zagotovi, da nabori $(U_i = \{x_i \neq 0\}, \frac{a_0x_0+\cdots a_nx_n}{x_i})$ definirajo globalne prereze svežnja $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ za $a_k \in \mathbb{C}$. Po Bottovi formuli velja $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) = n + 1$, zato so to vsi globalni prerezi. V posebnem za vsako hiperploskev H obstaja prerez, čigar množica ničel je ravno H.

Na projektivni raznoterosti Cartierov delitelj $D = (U_i, f_i)$ porodi sveženj $\mathcal{O}_X(D)$ definiran s kociklom $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$.

Primer 3.12. Učinkovitemu Weilovemu delitelju D na $\mathbb{P}^n$ podanem s homogenim polinomom g stopnje l pripada Cartierov delitelj podan z naborom $(U_i, \frac{g}{x_i^l})$. Torej vidimo, da velja $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X(l)$.

Na tem mestu definirajmo še *zasuk* snopa $\mathcal{F}$ za delitelj D:

$$\mathcal{F}(D) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(D).$$

V posebnem je $\mathcal{F}(l) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(l\,H)$ za hiperravnino H.

Naslednje trditve opisujejo povezavo med delitelji, svežnji premic ter snopi idealov pripadajočih hiperploskev.

Trditev 3.13 ([24, trditev II.6.13])**.** *Na gladki raznoterosti X za delitelja D in E velja*

$$\mathcal{O}_X(-D) \cong \mathcal{O}_X(D)^\vee.$$

$$\mathcal{O}_X(D+E) \cong \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(E),$$

Lema 3.14 ([24, trditev II.6.13])**.** *Delitelja D in E sta linearno ekvivalentna natanko takrat, ko sta pripadajoča svežnja $\mathcal{O}_X(D)$ in $\mathcal{O}_X(E)$ izomorfna.*

Izrek 3.15 ([24, trditev II.6.15])**.** *Vsak sveženj premic na gladki raznoterosti X je izomorfen $\mathcal{O}_X(D)$, za nek delitelj D.*

Posledica 3.16. *Vsak sveženj premic na $\mathbb{P}^n$ je izomorfen $\mathcal{O}(l)$ za nek l. Svežnja $\mathcal{O}(l)$ in $\mathcal{O}(m)$ sta izomorfna natanko tedaj, ko velja $m = l$.*

Izrek 3.17 ([24, trditev II.6.18])**.** *Naj bo D učinkovit Cartierov delitelj in naj bo Y pripadajoča hiperploskev. Potem velja $\mathcal{I}_Y = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-D)$.*

3.2 Grothendieck-Riemann-Rochov izrek

V tem poglavju bomo dokazali Grothendieck-Riemann-Rochovo formulo, ki povezuje Euler-Poincarejevo karakteristiko (definirano na strani 19) s Chernovimi razredi. Naj bo X gladka n-dimenzionalna nerazcepna raznoterost.

Definicija 3.18. *k-kocikel* na X je formalna vsota

$$\sum n_i V_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},$$

kjer so V_i nerazcepne podraznoterosti v X dimenzije $n-k$. Prosto abelovo grupo k-kociklov na X označimo z $Z^k(X)$. *k-cikel* je $n-k$-kocikel.

Za vsako $(n-k+1)$-dimenzionalno podraznoterost $W \subset X$ in vsak $r \in \mathbb{C}(W)^*$, definiramo k-kocikel (r) na X kot

$$(r) := \sum \mathrm{ord}_V(r) V,$$

kjer vsota teče po vseh podraznoterostih $V \subset W$ kodimenzije 1.

k-kocikel α je *racionalno ekvivalenten ničli*, če obstaja končno število $(n-k+1)$-dimenzionalnih podraznoterosti $W_i \subset X$ in $r_i \in \mathbb{C}(W_i)^*$, ki zadoščajo enakosti

$$\alpha = \sum_i (r_i).$$

Očitno velja $(r^{-1}) = -(r)$. Zato k-kocikli, ki so racionalno ekvivalentni ničli, tvorijo podgrupo $\mathrm{Rat}^k(X)$ v $Z^k(X)$. Definirajmo

$$A^k(X) = Z^k(X)/\mathrm{Rat}^k(X)$$

in

$$A(X) := \oplus_{i=0}^{\dim(X)} A^i(X).$$

V nadaljevanju želimo razviti teorijo presekov na X. V ta namen skonstruiramo bilinearno preslikavo $A^r(X) \times A^s(X) \to A^{r+s}(X)$, ki $A(X)$ opremi s strukturo kolobarja.

Najprej posplošimo pojem presečne večkratnosti ravninskih krivulj.

Definicija 3.19. Podraznoterosti $Y, Z \subset X$ se sekata *pravilno*, če ima vsaka nerazcepna komponenta $Y \cap Z$ kodimenzijo enako $\mathrm{codim}(Z) + \mathrm{codim}(Y)$.

Naj $[Y] \in A^k(X)$ označuje kocikel, ki pripada nerazcepni podraznoterosti Y kodimenzije k v X.

Definicija 3.20. Raznoterosti V, $W \subset X$, ki se sekata pravilno, se sekata *transverzalno*, če za vsak $x \in V \cap W$ velja:

- V in W sta gladki v x in
- velja $T_xV + T_xW = T_xX$, kjer T_x označuje tangentno ravnino v točki x.

Lema 3.21 ([22, razdelek 11.4], Chowova lema o premikanju)**.** *Naj bosta $\alpha = \sum_i a_i V_i$ in $\beta = \sum_j b_j W_j$ cikla na X. Velja:*

- *Obstaja cikel $\alpha' = \sum_k a'_k Z_k$, ki je racionalno ekvivalenten α ter se α' in β sekata transverzalno (to pomeni, da vsak Z_k seka vsak W_j transverzalno).*
- *Naj bosta V in V' racionalno ekvivalentni nerazcepni podraznoterosti v X, ki sekata nerazcepno podraznoterost W transverzalno. Potem sta cikla $[V \cap W]$ in $[V' \cap W]$ racionalno ekvivalentna.*

Sedaj lahko definiramo bilinearno preslikavo $f : A^i(X) \times A^j(X) \to A^{i+j}(X)$. Dovolj je podati predpis na paru $([Y], [Z])$, saj potem preslikavo bilinearno razširimo. Po Chowovi lemi o premikanju lahko izberemo i-kocikel $Z' = \sum_i c_i Z_i \in A^i(X)$, ki je racionalno ekvivalenten Z in se Z' in $[Y]$ sekata transverzalno. Definirajmo

$$f([Y], [Z]) = \left[\sum_i c_i (Y \cap Z_i) \right].$$

Po Chowovi lemi o premikanju je zgornje dobro definirano.

Tako smo $A(X)$ opremili s strukturo kolobarja, ki ga imenujemo *Chowov kolobar*. Od sedaj naprej bomo namesto $f(Y, Z)$ pisali $Y.Z$.

Omenimo še dve lastnosti kolobarja $A(X)$, ki nam bosta koristili v nadaljevanju (glej [24, str.426-429]):

- Kocikli iz $A^1(X)$ so Weilovi delitelji. Racionalna ekvivalenca teh kociklov je enaka linearni ekvivalenci deliteljev, tako da velja $A^1(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$.
- Naj bo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ *projektivizacija* svežnja $\mathcal{E}$ ter $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ pripadajoča projekcija ([24, poglavje II.7]). Označimo z $\chi \in A^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ ekvivalenčni razred deliteljev, ki pripada $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Potem je $\pi^* A(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ prost $A(X)-$modul generiran z $1, \chi, \chi^2, ..., \chi^{r-1}$, kjer je r rang $\mathcal{E}$.

Definicija 3.22. Naj bo $\mathcal{E}$ sveženj ranga r na X. Za vsak $i = 0, 1, ..., r$, definiramo i-ti *Chernov razred* $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$ z rekurzivno formulo: $c_0(\mathcal{E}) = 1$,

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \pi^* c_i(\mathcal{E}).\chi^{r-i} = 0$$

v $A^r(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$. Po zgornjem je Chernov razred $c_i(\mathcal{E})$ dobro definiran.

Definirajmo *Chernov polinom* kot

$$c_t(\mathcal{E}) = c_o(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E})t + \cdots c_r(\mathcal{E})t^r.$$

Pri računanju Chernovih razredov si pomagamo s Chernovim polinomom in sedmimi standardnimi lastnostmi naštetimi v [24, str. 430-431]. V naših dokazih bomo rabili naslednje izmed njih:

- C1: Naj bo $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}(D)$ za nek delitelj D. Potem velja $c_t(\mathcal{E}) = 1 + Dt$.
- C3: Za eksaktno zaporedje svežnjev $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ na X velja

$$c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}') \cdot c_t(\mathcal{E}'').$$

- C5: Naj bo $\mathcal{E}$ vektorski sveženj ranga r in $\mathcal{L}$ sveženj premic na X. Potem veljajo:
  - ◇ $c_k(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{r-i}{k-i} c_i(\mathcal{E}).c_1(\mathcal{L})^{k-i}$,
  - ◇ $c_t(\mathcal{E}) = c_{-t}(\mathcal{E})$,
  - ◇ $c_1(\wedge^r \mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E})$.
- C6: Če je množica ničel prereza $s \in \mathcal{E}(X)$ raznoterost V kodimenzije r, je $[V] = c_r(\mathcal{E}) \in A^r(X)$.

Trditev 3.23 ([24, str. 127])**.** *Naj bo $\mathcal{F}$ sveženj ranga r. Potem je $\wedge^k(\mathcal{F})$ sveženj ranga $\binom{r}{k}$ in velja $\wedge^k(\mathcal{F}) \cong (\wedge^{r-k}\mathcal{F})^\vee \otimes \wedge^r\mathcal{F}$. V posebnem za sveženj $\mathcal{F}$ ranga 2 dobimo $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^\vee \otimes \wedge^2\mathcal{F}$.*

Trditev 3.24. *Naj bo $\mathcal{F}$ sveženj ranga 2 na gladki raznoterosti X. Potem velja $\mathcal{F}^\vee \cong \mathcal{F}(-c_1(\mathcal{F}))$.*

Dokaz. Po prejšnji trditvi je $\wedge^2(\mathcal{F})$ sveženj premic in velja $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^\vee \otimes \wedge^2\mathcal{F}$. Po izreku 3.15 je $\wedge^2\mathcal{F} \cong \mathcal{O}(D)$, za nek delitelj D. Iz lastnosti C1 sledi $c_1(\wedge^2\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{O}_X(D)) = D$. Po C5 pa velja $c_1(\mathcal{E}) = c_1(\wedge^2\mathcal{E})$, torej dobimo

$$\mathcal{F}^\vee \cong \mathcal{F} \otimes (\wedge^2\mathcal{F})^\vee \cong \mathcal{F}(-c_1(\mathcal{F})).$$

□

Preden podamo Grothendieck-Riemann-Rochov izrek, definirajmo še dva elementa v $A(X) \otimes \mathbb{Q}$. Naj bo $\mathcal{E}$ sveženj ranga r na gladki raznoterosti X dimenzije n. Označimo $c_i = c_i(\mathcal{E})$.

Chernov karakter $\mathrm{ch}(\mathcal{E})$ je

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \cdots .$$

Toddov razred svežnja $\mathcal{E}$ je

$$\mathrm{td}(\mathcal{E}) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \cdots .$$

V obeh vrstah $\cdots$ označujejo vsoto elementov iz $A^i(X)$ za $i \geq 4$ ([24, priloga A]).

Izrek 3.25 ([24], Grothendieck-Riemann-Rochov izrek)**.** *Velja*

$$\chi(\mathcal{E}) = \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{E}).\mathrm{td}(\mathcal{T}_X))_n,$$

kjer v vsoti $\mathrm{ch}(\mathcal{E}).\mathrm{td}(\mathcal{T}_X)$ *vzamemo le elemente iz* $A^n(X)$; $\deg$ *pa označuje naravni homomorfizem* $A^n(X) \to \mathbb{Z}$, *podan z* $\deg(\sum n_iP_i) = \sum n_i$, *kjer so* P_i *točke.*

Definicija 3.26. Raznoterost $V \subset \mathbb{P}^n$ dimenzije d je *popolni presek*, če lahko ideal I_V generiramo z $n-d$ generatorji. Če pa jo lahko zapišemo kot presek $n-d$ hiperploskev, je V *popolni presek kot množica.*

Direktno iz definicij sledi:

$$V \text{ popolni presek } \Rightarrow V \text{ popolni presek kot množica.}$$

Naj bo R komutativni kolobar z enoto in naj bo M R-modul.

Definicija 3.27. Zaporedje $y = y_1, ..., y_r$ elementov v R je *M-regularno* zaporedje, če so izpolnjeni naslednji pogoji:

- y_i ni delitelj niča v $M/(y_1, ..., y_{i-1})M$, za $i = 1, ..., r$.
- $M/(y_1, ..., y_r)M \neq 0$.

R-regularnemu zaporedju v kolobarju R pravimo *regularno zaporedje*.

Primer 3.28. Spremenljivke v kolobarju polinomov so regularno zaporedje.

Definicija 3.29. Lokalni kolobar R je *popolni presek*, če ga lahko zapišemo kot K/I, kjer je K regularen lokalni kolobar (definicijo najdemo v [31, str.182]), I pa je ideal generiran z regularnim zaporedjem. Raznoterost X je *lokalni popolni presek*, če je lokalni kolobar $\mathcal{O}_{X,x}$ popolni presek za vsak $x \in X$.

Trditev 3.30 ([24, poglavje II.8])**.** *Vsaka gladka raznoterost je lokalni popolni presek.*

Definicija 3.31. Raznoterost $X \subset \mathbb{P}^n$ je *nedegenerirana*, če ni vsebovana v hiperravnini v $\mathbb{P}^n$.

Izrek 3.32 ([22], Adjunkcijska formula)**.** *Naj bo $X \subset \mathbb{P}^m$ nedegenerirana hiperploskev, ki je popolni presek d hiperploskev stopenj n_i. Velja*

$$c_t(\mathcal{T}_X) = 1 + (1 + h\,t)^{n+1} - \prod_{i=1}^{d}(1 + n_i h\,t),$$

kjer je $h = [H \cap X] \in A^1(X)$, za hiperravnino H v $\mathbb{P}^n$.

Definicija 3.33. Projektivna raznoterost X se imenuje *Calabi-Yau*, če ima trivialen kanonični sveženj. Gladko tridimenzionalno Calabi-Yau raznoterost, ki je hrati popolni presek, označimo z CICY3.

Naj bo Y raznoterost dimenzije n, za katero velja $\mathrm{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$. Iz trditve 3.23 vidimo, da je kanonični sveženj Y ranga 1. Zaradi $\mathrm{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$, je kanonični sveženj ω_Y trivialen natanko tedaj, ko je $c_1(\omega_Y) = 0$. Velja

$$c_1(\omega_Y) \overset{(1)}{=} c_1(\wedge^n \mathcal{T}_Y) \overset{(2)}{=} c_1(\mathcal{T}_Y),$$

kjer pri (1) upoštevamo definicijo kanoničnega svežnja, pri (2) pa upoštevamo lastnost C5.

Naj X označuje CICY3 raznoterost. Oglejmo si CICY3 raznoterosti v $\mathbb{P}^4$: iz adjunkcijske formule sledi

$$c_t(\mathcal{T}_X) = 1 + (5 - n_1)h\,t + \cdots,$$

torej vidimo, da je edina CICY3 raznoterost v $\mathbb{P}^4$ hiperploskev stopnje 5. V $\mathbb{P}^5$ je Chernov polinom za X enak

$$c_t(\mathcal{T}_X) = 1 + (6 - n_1 - n_2)h\,t + \cdots,$$

iz česar sledi, da sta edina nedegenerirana CICY3 v $\mathbb{P}^5$ popolna preseka tipa (2,4) in (3,3); popolni presek tipa (1,5) je hiperploskev stopnje 5 v $\mathbb{P}^4$, ki pa ni nedegenerirana v $\mathbb{P}^5$. Z nadaljevanjem zgornjega postopka dobimo, da so edini primeri CICY3 naslednje raznoterosti:

- hiperploskev stopnje 5 (kvintika) X_5 v $\mathbb{P}^4$,
- popolni presek X_8 tipa (2,4) v $\mathbb{P}^5$,
- popolni presek X_9 tipa (3,3) v $\mathbb{P}^5$,
- popolni presek X_{12} tipa (2,2,3) v $\mathbb{P}^6$ in
- popolni presek X_{16} tipa (2,2,2,2) v $\mathbb{P}^7$.

Za CICY3 raznoterost X po [35] velja $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ (generirana je z 1-kociklom $[H \cap X]$, kjer je H hiperravnina) in $A^2(X) \cong \mathbb{Z}$ (generirana je s ciklom, ki pripada premici l). Torej lahko Chernova razreda $c_1(\mathcal{E})$ in $c_2(\mathcal{E})$ identificiramo s celimi števili. Velja še $[H \cap X] \,.\, [H \cap X] = r \cdot [l] \in A^2(X)$, kjer je r stopnja X.

Kot smo omenili že v uvodu, bomo CICY3 raznoterosti označevali z X_r, kjer je r stopnja te raznoterosti.

Za vektorski sveženj $\mathcal{E}$ ranga 2 na X_r, iz lastnosti C5 vidimo, da velja

$$c_1(\mathcal{E}(n)) = c_1(\mathcal{E}) + 2n, \tag{2}$$

$$c_2(\mathcal{E}(n)) = c_2(\mathcal{E}) + rnc_1(\mathcal{E}) + rn^2. \tag{3}$$

Lema 3.34. *Grothendieck-Riemann-Rochova formula (GRR) za vektorski sveženj $\mathcal{E}$ ranga 2 na gladki CICY3 raznoterosti X_r je*

$$\chi(\mathcal{E}) = \frac{r}{6}c_1^3 - \frac{c_1 c_2}{2} + \frac{c_1}{12}(12(k+4) - 2r), \text{kjer} \quad k = \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor. \tag{4}$$

Dokaz. Naj h označuje generator Picardove grupe in $l \in A^2(X)$ razred premice. Iz izreka 3.25 dobimo

$$\deg(\mathrm{ch}(\mathcal{E})\mathrm{td}(\mathcal{T}_X))_3 = \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2) + \frac{1}{4}d_1(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{12}(d_1^2 + d_2)c_1 + \frac{1}{12}d_1d_2,$$

kjer $c_i = c_i(\mathcal{E})$, $d_i = c_i(\mathcal{T}_X)$ in $\mathcal{T}_X$ označuje tangentni sveženj na X. Po adjunkcijski formuli velja $d_1 = 0$. V primeru $r = 5$ dobimo $d_2 = 10h.h$, enako za $r = 8, 9, 12$ in 16 zaporedoma dobimo $d_2 = 7h.h$, $6h.h$, $5h.h$ in $4h.h$. Upoštevamo $h.h = r \cdot l$ in ko identificiramo Chernove razrede s celimi števili dobimo (4). □

Omenimo še izrek, iz katerega tudi sledi $\mathrm{Pic}X = \mathbb{Z}$, za CICY3 raznoterost X:

Izrek 3.35 ([3], Grothendieck-Leftshetzov izrek)**.** *Gladka raznoterost dimenzije večje kot 3, ki je popolni presek ima Picardovo grupo izomorfno $\mathbb{Z}$.*

4 Serrova korespondenca

Serrova korespondenca poveže obstoj svežnjev ranga 2 z obstojem določenih raznoterostmi kodimenzije 2. V posebnem dobimo bijekcijo med subkanoničnimi krivuljami, ki so lokalni popolni presek in svežnji ranga 2 na CICY3.

Definicija 4.1. *Razširitev* snopa $\mathcal{G}$ s snopom $\mathcal{E}$ je kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0. \tag{5}$$

Razširitvi

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G} \to 0$$

sta *izomorfni*, če obstaja komutativen diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Po lemi o petih je f izomorfizem.

Lema 4.2. *Za dana snopa $\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}$ obstaja bijektivna korespondenca med ekvivalenčnimi razredi razširitev $\mathcal{G}$ z $\mathcal{E}$ ter grupo* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$.

Dokaz. Delujmo na kratko eksaktno zaporedje (5) s funktorjem $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \cdot)$. Dobimo

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E}).$$

Naj bo $\xi = \delta(\mathrm{id})$. Tako smo razširitvi (5) priredili element $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$. Dokaz bijektivnosti si lahko ogledamo v [23, str. 722-723]. $\square$

Posledica 4.3. *Če velja* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}, \mathcal{F}) = 0$, *potem je eksaktno zaporedje*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

razcepno, kar pomeni, da je $\mathcal{G} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$.

Opomba 4.4. Spomnimo se primera 3.11: za vsako hiperploskev D na $\mathbb{P}^n$ lahko najdemo svežen premic na $\mathbb{P}^n$, tako da ima nek njegov globalni prerez množico ničel enako D. V nadaljevanju bomo predstavili naslednjo posplošitev: na vsaki tridimenzionalni projektivni raznoterosti obstaja razred krivulj, tako da vsaki krivulji C iz tega razreda lahko priredimo sveženj ranga 2 z globalnim prerezom, čigar množica ničel je ravno krivulja C.

Označimo z $\mathcal{O}_{X,x}$ lokalni kolobar točke $x \in V$, kjer je V kodimenzije 2. Maksimalni ideal od $\mathcal{O}_{X,x}$ je generiran z dvema regularnima funkcijama f in g. Potem dobimo eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{O}_{X,x} \overset{\binom{-g}{f}}{\to} \mathcal{O}^2_{X,x} \overset{(f,g)}{\to} \mathcal{I}_{V,x} \to 0,$$

ki opisuje lokalno situacijo v točkah $x \in V$. Vprašajmo se, ali obstaja globalno zaporedje na celem X

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_V \to 0,$$

kjer je $\mathcal{L}$ svežen premic in $\mathcal{E}$ svežen ranga 2.

Naj bo $\mathcal{E}$ svežen ranga 2 na X. Po [25, opomba 1.0.1] obstaja prerez $s \in \mathcal{E}(X)$ z lastnostjo, da je njegova množica ničel raznoterost V kodimenzije 2. Po trditvi 2.17 prerez s določa homomorfizem $\mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$. Dualna preslikava je $s^\vee : \mathcal{E}^\vee \to \mathcal{O}_X$, katere slika je ravno $\mathcal{I}_V$.

Izrek 4.5. *Zgornja izbira prereza $s \in \mathcal{E}(X)$ porodi*

$$0 \to \wedge^2(\mathcal{E}^\vee) \to \mathcal{E}^\vee \overset{s^\vee}{\to} \mathcal{I}_V \to 0.$$

Dokaz. Zgornje eksaktno zaporedje skonstruiramo s pomočjo Koszulovega kompleksa [25, str.232]. □

Definicija 4.6. Projektivna raznoterost $V \subset \mathbb{P}^n$ je *subkanonična*, če je kanonični snop ω_V izomorfen $\mathcal{O}_V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ za nek celoštevilski k.

Izrek 4.7 ([25], Serrova korespondenca)**.** *Naj bo $\mathcal{E}$ svežen ranga 2 in $\mathcal{L}$ svežen premic na gladki raznoterosti X z $h^1(\mathcal{L}^\vee) = h^2(\mathcal{L}^\vee) = 0$. Potem obstaja bijekcija med:*

1. *Ekvivalenčnimi razredi trojk $(\mathcal{E}, s, \phi)/\sim$, kjer je $s \in H^0(X, \mathcal{E})$ prerez, čigar množica ničel je raznoterost kodimenzije 2 in je $\phi : \wedge^2\mathcal{E} \to \mathcal{L}$ izomorfizem. Ekvivalenčna relacija pa je podana z $(\mathcal{E}, s, \varphi) \sim (\mathcal{E}', s', \varphi')$, če obstaja izomorfizem $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ in $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, tako da $s' = \lambda\psi(s)$.*

2. *Množico parov (V, ξ), kjer V označuje raznoterost, ki je subkanonična in je lokalni popolni presek v X ter ξ označuje izomorfizem $\mathcal{L} \otimes \omega_X \otimes \mathcal{O}_V \to \omega_V$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da trojka $(\mathcal{E}, s, \phi)$ porodi par (V, ξ).

Dokazali bomo, da je $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}\otimes\omega_X\otimes\mathcal{O}_V, \omega_V) = \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{I}_V, \mathcal{L}^\vee)$, kjer je V definirana s prerezom s kot zgoraj. Najprej opazimo:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes \omega_X \otimes \mathcal{O}_V, \omega_V) = \mathcal{L}^\vee \otimes \omega_X^\vee \otimes \mathcal{O}_V \otimes \omega_V = \mathrm{Hom}(\omega_X, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_V \otimes \omega_V).$$

Iz trditve 2.17 sledi

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes \omega_X \otimes \mathcal{O}_V, \omega_V) = H^0(V, \omega_V \otimes \omega_X^\vee \otimes \mathcal{L}^\vee).$$

Sedaj pa upoštevamo enakost $\omega_V = \mathcal{E}xt^2_X(\mathcal{O}_V, \omega_X)$ ([25, opomba 1.1.1]. Po trditvi 2.39 tako dobimo $H^0(V, \omega_V \otimes \omega_X^\vee \otimes \mathcal{L}^\vee) = H^0(X, \mathcal{E}xt^2_X(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee))$. Velja tudi $H^0(X, \mathcal{E}xt^2_X(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee)) = \mathrm{Ext}^2_X(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee)$ ([23, str. 706]).

Delujmo s funktorjem $\mathrm{Ext}(\cdot, \mathcal{L}^\vee)$ na kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{I}_V \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_V \to 0.$$

Po trditvi 2.37 velja $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}^\vee) = H^i(X, \mathcal{L}^\vee)$, kar pa je 0 za $i = 1, 2$ po naši predpostavki. Iz dolgega eksaktnega zaporedja $\mathrm{Ext}^i(\cdot, \mathcal{L}^\vee)$ torej razberemo

$$\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{I}_V, \mathcal{L}^\vee) \cong \mathrm{Ext}^2_X(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}^\vee).$$

Pokazali smo, da velja $\mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes \omega_X \otimes \mathcal{O}_V, \omega_V) \cong \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{I}_V, \mathcal{L}^\vee)$. Torej vsak homomorfizem $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes \omega_X \otimes \mathcal{O}_V, \omega_V)$ porodi eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_V \to 0$$

in obratno.

Iz izreka 4.5 in izomorfizma $\phi : \wedge^2 \mathcal{E} \to \mathcal{L}$ sledi obstoj zaporedja

$$0 \to \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{I}_V \to 0. \tag{6}$$

Nadaljevanje dokaza najdemo v [25] ali [50]: ker je $\mathcal{E}$ sveženj lahko pokažemo, da je V lokalno popolni presek. Zaporedje (6) porodi element $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes \omega_X \otimes \mathcal{O}_V, \omega_V)$, ki je izomorfizem, zato je V subkanonična. Podobno dokažemo tudi drugo smer. □

V primeru tridimenzionalne raznoterosti X je C krivulja, ki jo imenujemo *pripadajoča krivulja* svežnja $\mathcal{E}$.

Trditev 4.8 ([25, posledica 1.2]). *Snop $\mathcal{E}$ ranga 2 na CICY3 raznoterosti X je razcepen natanko tedaj, ko je pripadajoča krivulja C popolni presek v X.*

Opomba 4.9. Obstoj subkanonične krivulje C, ki je lokalni popolni presek, ni pa popolni presek na X, nam zagotovi obstoj nerazcepnega svežnja $\mathcal{E}$ ranga 2 na X. Obratno je C množica ničel nekega prereza svežnja $\mathcal{E}$.

5 Cohen-Macaulayjeva lastnost

V tem poglavju geometrijo snopov povežemo z algebro: vsakemu snopu lahko priredimo stopničast modul in obratno. Definiramo aritmetično Cohen-Macaulayjeve (ACM) snope in pokažemo, da na gladki raznoterosti koheretni ACM snopi sovpadajo z vektorskimi svežnji.

5.1 Stopničasti moduli in snopi

Za neprazno podmnožico U v $\mathbb{P}^n$ definiramo množico

$$S(U) := \{Q \in S = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n] \mid Q \text{ homogen, } Q(x) \neq 0 \text{ za vse } x \in U\}.$$

Množica $S(U)$ je zaprta za množenje in ne vsebuje 0. Naj bo M stopničast S-modul. Označimo z M_U množico ulomkov m/Q, kjer sta $m \in M$, $Q \in S(U)$ homogena iste stopnje. Na M_U vpeljimo ekvivalenčno relacijo $m/Q \sim m'/Q'$ natanko tedaj, ko je $Q'm = Qm'$. Za $U = \{x\}$ pišemo M_x namesto $M_{\{x\}}$.

Če je $U \subset V$, velja $S(V) \subset S(U)$ kar porodi kanonični homomorfizem

$$\phi_U^V : M_V \to M_U.$$

Definirajmo snop $\mathcal{A}(M)$ podan na odprtih množicah U z $\mathcal{A}(M)(U) = M_U$. Zožitev za $U \subset V$ pa je ϕ_U^V. Lahko preverimo, da velja

$$\varinjlim_{x \in U} M_U = M_x,$$

torej $\mathcal{A}(M)_x = M_x$. Velja tudi $\mathcal{A}(S) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$. Ker je M_U S_U-modul vidimo, da je $\mathcal{A}(M)$ snop $\mathcal{A}(S)$-modulov. Vsak homomorfizem $\phi : M \to M'$ inducira S_U-linearni homomorfizem $\phi_U : M_U \to M'_U$. Tako dobimo homomorfizem snopov $\mathcal{A}(\phi) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M')$, z lastnostmi

$$\mathcal{A}(\phi + \psi) = \mathcal{A}(\phi) + \mathcal{A}(\psi), \quad \mathcal{A}(1) = 1, \quad \mathcal{A}(\psi \circ \psi) = \mathcal{A}(\psi) \circ \mathcal{A}(\phi).$$

Operacija $\mathcal{A}$ je torej kovariantni aditivni funktor, ki slika iz kategorije stopničastih S-modulov $\mathfrak{Mod}(S)$ v kategorijo snopov $\mathfrak{Mod}(X)$ na X.

Trditev 5.1 ([49, trditev 3]). *Funktor $\mathcal{A}$ je eksaktni funktor.*

Trditev 5.2 ([49, posledica 58]). *Snop $\mathcal{A}(S(m))$ je izomorfen $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$.*

Posledica 5.3. *Za vsako eksaktno zaporedje $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to 0$ imamo eksaktno zaporedje $0 \to \mathcal{F}(m) \to \mathcal{F}'(m) \to \mathcal{F}''(m) \to 0$.*

Velja celo bolj splošen izrek:

Izrek 5.4 ([24, trditev III.9.2 e]). *Naj bo $\mathcal{F}$ vektorski sveženj. Za dano eksaktno zaporedje snopov*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0,$$

je eksaktno tudi zaporedje

$$0 \to \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F}_3 \otimes \mathcal{F} \to 0.$$

V obratni smeri bomo snopu priredili stopničast modul. Za snop $\mathcal{F}$ na $\mathbb{P}^n$ definirajmo

$$\Gamma(\mathcal{F}) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)).$$

Grupa $\Gamma(\mathcal{F})$ je stopničasta. Opremili jo bomo s strukturo S-modula. Izberimo $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(q))$ in $P \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(p))$. Torej je $P \otimes s$ prerez za $\mathcal{O}(p) \otimes \mathcal{F}(q) = \mathcal{F}(p+q)$. Ker velja $S = \oplus_{p\in\mathbb{Z}}\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(p))$, preslikava $(P, s) \mapsto P \cdot s$ opremi $\Gamma(\mathcal{F})$ s strukturo S-modula, ki je usklajena s stopničenjem ([49, poglavje 54]).

Funktor Γ slika iz kategorije snopov $\mathfrak{Mod}(X)$ v kategorijo stopničastih modulov $\mathfrak{Mod}(S)$.

Trditev 5.5 ([49, posledica 45.2])**.** *Funktor Γ je eksakten.*

Trditev 5.6 ([49, trditev 59.8])**.** *Če je $\mathcal{F}$ koherenten, velja $\mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{F})) \cong \mathcal{F}$.*

5.2 Koherentni ACM snopi

Vsi izreki tega razdelka so skupaj z dokazi navedeni v Eisenbudovih učbenikih [18, poglavja 18,19,20] in [19, prilogi A, B]. Razvili bomo pomembne lastnosti stopničastih modulov; pri dokazovanju teh je ključna lema Nakayama, ki pa ne velja za splošne module. Dokažemo, da je vsak koherenten ACM snop na gladki raznoterosti vektorski sveženj.

Naj bo R komutativen kolobar z 1. Z $\dim R$ označimo *dimenzijo kolobarja* R, ki je supremum dolžin verig praidealov v R.

Dimenzijo R-modula M definiramo kot dimenzijo kolobarja $R/\operatorname{ann} M$, kjer je $\operatorname{ann} M = \{x \in R \mid x \cdot m = 0,\ \text{za vsak } m \in M\}$.

Definicija 5.7. Naj bo I ideal kolobarja R in M končno generiran R-modul, tako da velja $IM \neq M$. *Globina* $\operatorname{depth}(I, M)$ ideala I v M je maksimalna dolžina M-zaporedja v I. V primeru $IM = M$ definiramo $\operatorname{depth}(I, M) = \infty$.

Ko je R homogena algebra in I maksimalni homogen ideal, potem na kratko pišemo $\operatorname{depth}(M)$ namesto $\operatorname{depth}(I, M)$.

Definicija 5.8. *Projektivna dimenzija* M je minimalna dolžina projektivne resolucije od M, definirane na strani 17. Označimo jo s $\operatorname{pd}(M)$.

Če je $\operatorname{pd}(M) = d$, potem obstaja najkrajša možna resolucija

$$F_d \to F_{d-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0.$$

Izrek 5.9 (Hilbertov izrek o vezeh)**.** *Vsak končno generiran stopničast S- modul M ima končno stopničasto prosto resolucijo*

$$0 \to F_m \to F_{m+1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M.$$

Definicija 5.10. Kompleks stopničastih S-modulov

$$\cdots \to F_i \xrightarrow{\delta_i} F_{i-1} \to \cdots \tag{7}$$

je *minimalen*, če za vsak i velja $\mathrm{im}(\delta_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$, kjer je $\mathfrak{m}$ standardna oznaka za ideal $(x_0, ..., x_r) \subset S$.

Lema 5.11 (Nakayama)**.** *Naj bo M končno generiran stopničast S- modul in naj $m_1, ..., m_r \in M$ generirajo $M/\mathfrak{m}M$. Potem $m_1, ..., m_r$ generirajo M.*

Posledica 5.12. *Kompleks* (7) *je minimalni natanko takrat, ko za vsak i preslikava δ_i slika bazo F_i v minimalne generatorje* $\mathrm{im}(\delta_i)$*.*

Dokaz. Kompleks (7) je minimalen natanko tedaj, ko je porojena preslikava δ_{i+1} : $F_{i+1}/\mathfrak{m}F_{i+1} \to F_i/\mathfrak{m}F_i$ enaka 0. Iz zaporedja

$$F_{i+1} \to F_i \to \mathrm{im}(\delta_i) \to 0,$$

vidimo, da to velja natanko takrat, ko je $F_i/\mathfrak{m}F_i \to \mathrm{im}(\delta_i)/(\mathfrak{m} \cdot \mathrm{im}(\delta_i))$ izomorfizem. Po lemi Nakayama se to zgodi natanko takrat, ko se baza F_i preslika v minimalne generatorje $\mathrm{im}(\delta_i)$. □

S pomočjo leme Nakayama se pokaže tudi naslednji presenetljiv izrek, ki pa ne velja za poljubne module.

Izrek 5.13 (Enoličnost minimalnih resolucij stopničastih modulov)**.** *Naj bo M končno generiran prost S-modul. Če sta $A_\bullet$ in $B_\bullet$ minimalni prosti resoluciji za M, potem obstaja stopničast izomorfizem kompleksov $A_\bullet \to B_\bullet$, ki porodi identično preslikavo na M. Število minimalnih generatorjev je enolično določeno. Vsaka resolucija vsebuje minimalno resolucijo kot direktni sumand.*

Izrek 5.14 (Auslander-Buchsbaum formula)**.** *Naj bo M končno generiran R-modul, ki ima končno projektivno dimenzijo* $\mathrm{pd}M$*. Potem je* $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R - \operatorname{pd} M$*.*

Lokalni kolobar R je *Cohen-Macaulayjev*, če velja $\operatorname{depth} R = \dim R$. Podobno je R-modul M *Cohen-Macaulayjev*, če $\operatorname{depth} M = \dim M$. Če R ni lokalni kolobar, potem pravimo, da je Cohen-Macaulayjev, če so za vsak maksimalen ideal $\mathfrak{m}$ lokalizacije $R_\mathfrak{m}$ Cohen-Macaulayjevi kolobarji.

Izrek 5.15 (Auslander-Buchsbaum-Serrov izrek)**.** *Lokalni kolobar R je regularen natanko takrat, ko ima vsak R-modul končno projektivno resolucijo.*

Naj bo $M = \oplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ končno generiran stopničast S-modul. Ker je M končno generiran, je vsak M_d končno razsežni vektorski prostor. Z $M(a)$ označimo *zasuk* modula M za a:

$$M(a)_d := M_{a+d}.$$

Primer 5.16. Prost S-modul ranga 1 generiran z elementom stopnje a je $S(-a)$.

Naj bodo $m_i \in M$ homogeni elementi stopnje a_i, ki generirajo M kot S-modul. Potem lahko definiramo preslikavo iz stopničastega prostega modula $F_0 := \oplus_i S(-a_i)$ v M, ki pošlje $i-$ti generator v m_i. Označimo z M_1 jedro preslikave $F_0 \to M$. Po Hilbertovem izreku o bazi je M_1 tudi končno generiran. Elementom M_1 pravimo *vezi* za M. V naslednjem koraku izberimo končno mnogo vezi, ki generirajo M_1. Potem lahko definiramo preslikavo iz F_1 v F_0, ki ima za sliko M_1. Če s tem postopkom nadaljujemo, dobimo *stopničasto prosto resolucijo* od M:

$$\cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0.$$

Definicija 5.17. Raznoterost $V \subset \mathbb{P}^n$ je *aritmetično Cohen-Macaulayjeva* (ACM), če je njen koordinatni kolobar $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]/I_V$ Cohen-Macaulayjev kolobar.

Trditev 5.18 ([39, lema 1.2.3])**.** *Raznoterost V dimenzije $r \geq 1$ je ACM natanko tedaj, ko velja $(M^i)(V) = 0$, za $1 \leq i \leq r$, kjer $(M^i)(V)$ definiramo kot*

$$(M^i)(V) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V(k)).$$

Snop $\mathcal{E}$ na k-dimenzionalni projektivni raznoterosti X je *aritmetično Cohen-Macaulayjev*, če je lokalno Cohen-Macaulayjev (to pomeni $\operatorname{depth} \mathcal{E}_x = \dim \mathcal{E}_x$ za vsak $x \in X$) in velja

$$H^i(X, \mathcal{E}(n)) = 0 \text{ za } i = 1, ..., k-1 \text{ in vsak } n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Trditev 5.19 ([1, lema 3.2])**.** *Snop $\mathcal{E}$ na gladki raznoterosti X je ACM natanko takrat, ko zadošča* (8)*.*

Trditev 5.20. *Koherentni snop $\mathcal{F}$ na raznoterosti X je vektorski sveženj natanko takrat, ko je vsako njegovo vlakno $\mathcal{F}_x$ prost $\mathcal{O}_x$-modul.*

Dokaz. Desna implikacija je očitna. V levo smer pa opazimo naslednje: če v neki točki $x \in X$ velja $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_x^p$, potem obstaja okolica $x \in U$, da je $\mathcal{F}_y \cong \mathcal{O}_y^p$ za vsak $y \in U$. Slednje velja, saj ima v točki x snop relacij ničelno vlakno. Po trditvi 2.9 pa je nosilec zaprta množica, iz česar sledi rezultat. □

Definicija 5.21. Snop $\mathcal{F}$ na X je *reduciran*, če je $\mathcal{O}_x$-modul $\mathcal{F}_x$ brez deliteljev niča za vsak $x \in X$.

Od sedaj naprej so vsi koherentni snopi tudi reducirani.

Trditev 5.22. *Koherentni ACM snop $\mathcal{F}$ na gladki raznoterosti X, za katerega velja* $\dim \operatorname{Supp} \mathcal{F} = \dim X$, *je vektorski sveženj.*

V literaturi nismo našli dokaza, da je pri zgornjih predpostavkah vsak ACM snop tudi sveženj. To dejstvo se pojavlja v pomembnih člankih ([11], [8], [41]), zato ga dokažimo.

Dokaz trdtve 5.22. Po trditvi 5.20 je dovolj pokazati, da je vsako vlakno $\mathcal{F}_x$ prost $\mathcal{O}_x$-modul. Ker je $\mathcal{O}_x$ regularen kolobar za vsak $x \in X$, ima po Auslander-Buchsbaum-Serrovem izreku 5.15 $\mathcal{O}_x$-modul $\mathcal{F}_x$ končno projektivno dimenzijo. Po Auslander-Buchsbaumovi formuli 5.14 nato velja

$$\operatorname{depth} \mathcal{F}_x = \operatorname{depth} \mathcal{O}_x - \operatorname{pd} \mathcal{F}_x.$$

Ker je $\mathcal{F}$ ACM, je $\operatorname{depth} \mathcal{F}_x = \dim \mathcal{F}_x$, kar pa je po definiciji enako $\dim \mathcal{O}_x / \operatorname{Ann} \mathcal{F}_x$. Po naših predpostavkah je $\mathcal{F}$ reduciran in velja $\operatorname{Supp} \mathcal{F} = \dim X$, zato je $\operatorname{Ann} \mathcal{F}_x = 0$ za vsak $x \in X$. Torej dobimo

$$\dim \mathcal{O}_x = \operatorname{depth} \mathcal{O}_x - \operatorname{pd} \mathcal{F}_x.$$

Ker je $\mathcal{O}_x$ Cohen-Macaulayjev kolobar, velja $\dim \mathcal{O}_x = \operatorname{depth} \mathcal{O}_x$. Torej je $\operatorname{pd} \mathcal{F}_x = 0$, kar pomeni, da je $\mathcal{F}_x$ projektiven $\mathcal{O}_x$-modul. Ker pa je po [30] vsak projektiven modul nad lokalnim kolobarjem prost modul, je $\mathcal{F}_x$ prost $\mathcal{O}_x$-modul. □

6 Minimalne resolucije ACM svežnjev

Pokazali bomo, da za vsak ACM snop $\mathcal{E}$ na hiperploskvi v $\mathbb{P}^n$ obstaja kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to 0, \tag{9}$$

kjer sta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ direktni vsoti svežnjev premic. Zgornje bomo utemeljili s pomočjo Horrocksovega kriterija.

Definicija 6.1. Pravimo, da je koherentni snop $\mathcal{E}$ na raznoterosti X *normaliziran*, če je število

$$b(\mathcal{E}) := \max\{n \mid h^0(X, \mathcal{E}(-n)) \neq 0\}$$

enako 0. *Normalizacija* snopa $\mathcal{E}$ je snop $\mathcal{E}(-b(\mathcal{E}))$.

Opomba 6.2. Število $b(\mathcal{E})$ je dobro definirano, saj po [45, str. 10] za vsak koherentni snop $\mathcal{E}$ obstaja enolično določeno število $k_0 \in \mathbb{Z}$, tako da velja

$$h^0(X, \mathcal{E}(k_0)) \neq 0 \text{ in } h^0(X, \mathcal{E}(k)) = 0, \text{ za } k < k_0.$$

Izrek 6.3 ([45], Horrocksov kriterij)**.** *Vsak vektorski sveženj na $\mathbb{P}^n$ je direktna vsota svežnjev premic.*

Dokaz. Dokaz poteka z indukcijo na n. Dokažimo najprej bazo indukcije $n = 1$ z indukcijo na rang svežnja r. Za $r = 1$ je kriterij trivialen. Naj sedaj izrek velja za vse svežnje ranga r. Za sveženj $\mathcal{E}$ ranga $r + 1$, po opombi 6.2 obstaja enolično določeno število $k_0 \in \mathbb{Z}$, da je

$$h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(k_0)) \neq 0 \text{ in } h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(k)) = 0, \text{ za } k < k_0.$$

Izberimo neničelni prerez $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(k_0))$. Trdimo, da s nima ničel. Res, če bi obstajal $x \in \mathbb{P}^1$, za katerega je $s(x) = 0$, potem bi bil s tudi prerez svežnja $\mathcal{E}(k_0) \otimes \mathcal{I}_x$, kjer je $\mathcal{I}_x$ snop idealov točke x. Točka x je učinkovit delitelj na $\mathbb{P}^1$, zato po izreku 3.17 in primeru 3.12 velja $\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-x) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Torej je s prerez svežnja $\mathcal{E}(k_0 - 1) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, kar pa je protislovje z izbiro k_0.

Ker s nima ničel, je slika porojene preslikave $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{s} \mathcal{E}(k_0)$ po trditvi 2.17 trivialen podsveženj. Tako dobimo

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{s} \mathcal{E}(k_0) \to \mathcal{F} \to 0, \tag{10}$$

kjer je kojedro s sveženj $\mathcal{F}$ ranga r. Po indukcijski predpostavki je $\mathcal{F}$ razcepen, torej

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_r), \ \ b_i \in \mathbb{Z}.$$

Sedaj pa pokažimo, da je zaporedje (10) razcepno, s čimer zaključimo dokaz. Oglejmo si

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) & \overset{(1)}{=} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(-2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) & \overset{(2)}{=} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(-2), \omega_{\mathbb{P}^n}) \\ & \overset{(3)}{=} & H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}(-2)) & \overset{(4)}{=} & H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}^\vee(2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \\ & \overset{(5)}{=} & H^1(X, \mathcal{F}^\vee) & \overset{(6)}{=} & \oplus_{i=1}^r H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b_i)), \end{array}$$

kjer (1) sledi iz trditve 2.39, pri (2) upoštevamo trditev 2.41: $\omega_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, pri (3) uporabimo trditev 2.42, pri (4) in (5) uporabimo Serrovo dualnost in trditev 3.13: $(\mathcal{F}(-n-1))^\vee = \mathcal{F}^\vee(n+1)$ in $\mathcal{F}^\vee(n+1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n-1) = \mathcal{F}^\vee$, (6) pa sledi iz leme 2.31 za $\mathcal{F}^\vee = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b_i)$.

Če torej pokažemo da velja $b_i < 2$, iz Bottove formule sledi $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$. Po posledici 4.3 je zaporedje (10) razcepno.

Tenzorirajmo zaporedje (10) z $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, kar porodi dolgo eksaktno zaporedje:

$$\begin{gathered} 0 = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(k_0 - 1)) \to \\ \to \oplus_{i=1}^r H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i - 1)) \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0. \end{gathered}$$

Po definiciji k_0 torej velja

$$0 = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(k_0 - 1)) = \sum_{i=1}^r h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i - 1)).$$

Iz Bottove formule sledi $b_i \leq 0$ za $i = 1, ..., r$. Zato je zaporedje (10) razcepno in po tenzoriranju z $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k_0)$ dobimo

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k_0) \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i - k_0),$$

kar dokaže Horrocksov kriterij za $n = 1$.

Sedaj privzemimo, da kriterij velja za vse $m < n$. Tenzorirajmo eksaktno zaporedje snopov

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0$$

z vektorskim svežnjem $\mathcal{E}(k)$. Po izreku 5.4 dobimo eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{E}(k-1) \to \mathcal{E}(k) \to \mathcal{E}(k)|_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0.$$

Iz dolgega eksaktnega zaporedja kohomoloških grup in po indukcijski predpostavki sledi, da je $\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^{n-1}}$ razcepen. Torej,

$$\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^{n-1}} \cong \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(a_i).$$

V [28, str.40] je dokazano, da sta svežnja $\oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$ in $\mathcal{E}$ izomorfna tudi na $\mathbb{P}^n$. $\square$

Trditev 6.4 ([49])**.** *Za vsak koherenten snop $\mathcal{E}$ na $\mathbb{P}^n$ obstaja direktna vsota svežnjev premic $\mathcal{G}$, da velja*

$$\mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0.$$

Izrek 6.5. *Naj bo $\mathcal{E}$ ACM snop na $\mathbb{P}^n$ z nosilcem dimenzije $n-1$. Potem obstaja eksaktno zaporedje*

$$0 \to \oplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_i) \to \oplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \to \mathcal{E} \to 0. \tag{11}$$

Dokaz. Po trditvi 6.4 velja

$$\mathcal{G} \xrightarrow{f} \mathcal{E} \to 0, \tag{12}$$

kjer je $\mathcal{G}$ sveženj premic. Naredimo prehod na module, kar je isto kot delovanje eksaktnega funktorja Γ na (12):

$$\oplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}(k)) \to \oplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) \to 0. \tag{13}$$

Označimo z $\mathcal{F}$ jedro preslikave f in opazujmo dolgo eksaktno zaporedje kohomoloških grup prirejeno zaporedju $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0$. Iz (13) sledi $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(k)) = 0$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Iz $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) = 0$ (ker je $\mathcal{E}$ ACM snop) in $H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}(k)) = 0$ (ker je $\mathcal{G}$ razcepen) vidimo, da $H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Snop $\mathcal{F}$ je koherenten in po trditvi 5.19 je ACM. Vidimo tudi, da $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ vsebuje vse točke, ki niso v nosilcu $\mathcal{E}$. Ker je $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ zaprta množica, je $\operatorname{Supp} \mathcal{F} = \mathbb{P}^n$. Po trditvi 5.22 je $\mathcal{F}$ vektorski sveženj in po Horrocksovem kriteriju je direktna vsota svežnjev premic. $\square$

Oglejmo si nekoliko podrobneje

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{M} \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0,$$

kjer sta $\mathcal{F} = \oplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_i)$ in $\mathcal{G} = \oplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$ ter je $\mathcal{E}$ sveženj ranga 2 na hiperploskvi X stopnje d v $\mathbb{P}^n$. Preslikavo M lahko identificiramo z matriko, ki ima na (i,j)-tem mestu homogen polinom stopnje $d_i - e_j$: elemente $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}(l)$ lahko identificiramo z racionalnimi funkcijami $\frac{P}{Q}$, kjer sta P, Q homogena polinoma z razliko stopenj l in je $Q(x) \neq 0$ ([49, str. 66]). Vidimo tudi, da $\operatorname{Supp} \mathcal{E}$ sestavljajo tiste točke $x \in \mathbb{P}^n$, za katere je $\det M(x) = 0$. Torej velja $X = \{\det M = 0\}$.

Ko dualiziramo eksaktno zaporedje (11), dobimo

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow 0. \tag{14}$$

Res, ker je $\operatorname{Supp}\mathcal{E} = X$ zaprta v $\mathbb{P}^n$, velja $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$. Iz razcepnosti $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ pa po trditvi 2.37 sledi $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$, za $i > 0$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da velja $\mathcal{E}xt^1_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{E}, \mathbb{P}^n) \cong \mathcal{E}^\vee(d)$. Delujmo s funktorjem $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \cdot)$ na eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \to \mathcal{O}_X(d) \to 0.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X(d)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{f} \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X(d)) \longrightarrow \cdots, \end{aligned}$$

kjer je f polinom, ki definira X. Enako kot zgoraj vidimo, da je $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$.

V naslednjem koraku pokažimo, da imata $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ in $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ nosilca na X. Preslikava

$$\mathcal{G}^\vee \xrightarrow{M^T} \mathcal{F}^\vee$$

je dual preslikave

$$\mathcal{F} \xrightarrow{M} \mathcal{G},$$

kar sledi iz elementarnega dejstva linearne algebre. Torej je ničelna množica determinante M^T enaka X. Enako kot v dokazu izreka 6.5 pokažemo, da imata $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ in $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ nosilca na X. Ker je $f|_X = 0$, se zgornje dolgo eksaktno zaporedje zreducira na izomorfizem

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathcal{E}^\vee(d) \cong \mathcal{E}(d - c_1),$$

kjer je $c_1 = c_1(\mathcal{E})$.

Izrek 6.6. *Minimalna resolucija za sveženj $\mathcal{E}$ ranga 2 na hiperploskvi X stopnje d je oblike*

$$0 \to \mathcal{G}^\vee(c_1 - d) \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0,$$

kjer je $\mathcal{G}$ direktna vsota svežnjev premic na $\mathbb{P}^n$.

Dokaz. Po izreku 6.5 je minimalna resolucija za $\mathcal{E}$ oblike

$$0 \to \oplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_i) \to \oplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \to \mathcal{E} \to 0. \tag{15}$$

Če v eksaktnem zaporedju (14) upoštevamo $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathcal{E}(d - c_1)$ in ga tenzoriramo z $\mathcal{O}(d - c_1)$ dobimo še eno minimlano resolucijo za $\mathcal{E}$:

$$0 \to \mathcal{G}^\vee(d - c_1) \to \mathcal{F}^\vee(d - c_1) \to \mathcal{E} \to 0. \tag{16}$$

Delovanje z eksaktnim funktorjem Γ na (15) in (16) nam da dve minimalni resoluciji za stopničast modul $\Gamma(\mathcal{E})$. Izrek 5.13 o enoličnosti minimalnih resolucij implicira $\Gamma(\mathcal{F}) \cong \Gamma(\mathcal{G}^\vee(d - c_1))$, torej dobimo

$$0 \to \Gamma(\mathcal{G}^\vee(d - c_1)) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to \Gamma(\mathcal{E}) \to 0. \tag{17}$$

Ker so vsi snopi v zgornjem eksaktnem zaporedju koherentni, lahko uporabimo izrek 5.6: delovanje na zaporedje (17) z eksaktnim funktorjem $\mathcal{A}$ porodi željeno minimalno eksaktno zaporedje za snop $\mathcal{E}$. □

Zgornje rezultate želimo posplošiti na svežnje z nosilci na CICY3 (z izjemo kvintike CICY3 namreč niso hiperploskve).

Naj bo $\mathcal{E}$ vektorski sveženj ranga 2 na tridimenzionalnem popolnem preseku $X \subset \mathbb{P}^{3+k}$ tipa $(d_1, ..., d_k)$. Označimo z Y_i štiridimenzionalni popolni presek tipa $(d_1, .., \hat{d}_i, ..., d_k)$, ki vsebuje X in naj bodo a_j stopnje minimalnih generatorjev $\mathcal{E}$ v Y_i (po trditvi 6.4 je končno generiran). Brez nevarnosti zamenjave bomo pisali $\mathcal{E}$ tudi za snop $i_*\mathcal{E}$, kjer je $i : X \hookrightarrow Y_i$ inkluzija. Opomnimo, da pri $k = 1$ dobimo $Y_1 = \mathbb{P}^4$. Imamo torej eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0, \tag{18}$$

kjer je $\mathcal{G} = \bigoplus_{j=1}^k \mathcal{O}_{Y_i}(-a_j)$ in je $\mathcal{F}$ koherenten po trditvi 2.21 ter ACM po trditvi 5.19 . Ker je Y_i gladka in $\dim(\operatorname{Supp} \mathcal{F}) = \dim(Y_i)$, trditev 5.22 zagotovi, da je $\mathcal{F}$ vektorski sveženj.

Primer 6.7. Privzamemo, da je $\mathcal{F}$ razcepen, kar pomeni, da je direktna vsota svežnjev premic. V primeru, ko je $Y_i = \mathbb{P}^4$ kot pri kvintiki, je $\mathcal{F}$ vedno razcepen po Horrocksovem kriteriju. Podobno kot v primeru kvintike tudi pri razcepnem $\mathcal{F}$ dobimo minimalno resolucijo oblike

$$0 \to \mathcal{G}^\vee(c_1 - d_i) \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0, \tag{19}$$

kjer ima $\mathcal{G}$ nosilec na Y_i. Dokaz poteka analogno kot pri kvintiki. Uporabiti moramo dejstvo, da sta Picardovi grupi X in Y_i izomorfni $\mathbb{Z}$ po Grothendieck-Lefschetz izreku. To nam omogoči, da Chernove razrede lahko identificiramo s celimi števili.

V nadaljevanju bomo dokazali pomemben izrek 6.13, ki nam bo pomagal klasificirati svežnje na CICY3. Minimalne resolucije svežnjev na CICY3 z določenim lastnostmi bomo eksplicitno povezali z minimalnimi resolucijami pripadajočih krivulj. Skonstruirali bomo resolucijo tipa (19). Pri tem bomo potrebovali izrek 6.13, ki sta ga dokazala Buchsbaum in Eisenbud.

Definicija 6.8. Naj bo $V \subset \mathbb{P}^n$ ACM raznoterost in naj ima $\mathcal{I}_V$ minimalno prosto resolucijo oblike

$$0 \to \mathcal{F}_n \to \cdots \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{I}_V \to 0.$$

Če je $\mathcal{F}_n$ sveženj premic, potem je V *aritmetično Gorensteinova* (AG). Analogno, za raznoterost $X \supseteq V$ pravimo, da je V *AG v* X, če je zadnji sveženj v minimalni prosti resoluciji $\mathcal{I}_V$ na X sveženj premic.

Definicija 6.9. *Pfaffova determinanta* $\mathrm{pf}(M)$ poševno simetrične matrike M zadošča enakosti $\mathrm{pf}(M)^2 = \det(M)$.

Izrek 6.10 ([10])**.** *Naj bo $X \subset Y$ aritmetično Gorensteinova raznoterost v Y kodimenzije 3. Minimalni generatorji za pripadajoči ideal $I(X)$ v Y so Pfaffove poddeterminante reda $2b$ poševno simetrične $(2b+1) \times (2b+1)$ matrike, ki ima za elemente homogene polinome g_{ij}. Naj bodo $r_1 \leq \cdots \leq r_{2b+1}$ stopnje generatorjev $I(X)$. Potem ima $I(X)$ minimalno resolucijo oblike*

$$0 \to S/I(Y)(-c) \to \bigoplus_{i=1}^{2b+1} S/I(Y)(-b_i) \overset{(u_{ij})}{\to} \bigoplus_{i=1}^{2b+1} S/I(Y)(-r_j) \to I(X) \to 0,$$

kjer je $c = \frac{1}{r}(r_1 + \cdots + r_{2r+1})$, $b_i = c - r_i$.

Če označimo $u_{ij} = c - r_i - r_j$, dobimo $\deg g_{ij} = u_{ij}$ v primeru $u_{ij} > 0$ in $g_{ij} = 0$ v primeru $u_{ij} \leq 0$. Matriki (u_{ij}) pravimo *matrika stopenj* od X.

Opomba 6.11 ([10])**.** Popolni presek $X \subset Y$ je AG v Y.

Trditev 6.12 ([39, str. 4-5])**.** *Naj bo*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

kratko eksaktno zaporedje končno generiranih stopničastih R-modulov, kjer je R stopničast kolobar. Naj bosta

$$0 \to F_{m+1} \to \cdots \to F_0 \to M_1 \to 0$$

in

$$0 \to G_{m+1} \to \cdots \to G_0 \to M_2 \to 0$$

prosti resoluciji za M_1 in M_2. Potem je prosta resolucija za M_3 podana z

$$0 \to F_{m+1} \to F_m \oplus G_{m+1} \to \cdots \to F_0 \oplus G_1 \to G_0 \to M_3 \to 0.$$

Naj bosta $X \subset Y$ raznoterosti. Z $\mathcal{I}_{X,Y}$ označimo snop idealov raznoterosti X v Y.

Izrek 6.13. *Predpostavimo, da gladek tridimenzionalni popolni presek X vsebuje subkanonično krivuljo C, ki je lokalno popolni presek in je AG v vsaj enem izmed Y_i. Potem ima snop idealov $\mathcal{I}_{C,Y_i}$ minimalno resolucijo oblike*

$$0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathcal{I}_{C,Y_i} \longrightarrow 0, \tag{20}$$

kjer so

$$P_0 = \bigoplus_{j=1}^{2b+1} \mathcal{O}_{Y_i}(-r_j), \quad P_1 = \bigoplus_{j=1}^{2b+1} \mathcal{O}_{Y_i}(r_j - c), \quad P_2 = \mathcal{O}_{Y_i}(-c).$$

Števila r_j, $j = 1, ..., 2b+1$ so stopnje minimalnih generatorjev za $\mathcal{I}_{C,Y_i}$. Dodatno predpostavimo, da velja tudi $c - d_i = c_1(\mathcal{E})$, kjer je $\mathcal{E}$ normaliziran ACM sveženj ranga 2 na X, ki pripada krivulji C. Potem ima $\mathcal{E}$ minimalno resolucijo

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0, \tag{21}$$

kjer so

$$L_1 = \mathcal{O}_{Y_i}(c - 2d_i) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{2b+1} \mathcal{O}_{Y_i}(r_j - d_i) \right),$$

$$L_0 = \mathcal{O}_{Y_i} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{2b+1} \mathcal{O}_{Y_i}(-r_j + c - d_i) \right).$$

Od sedaj naprej fiksirajmo Y_i, ki zadošča predpostavkam izreka 6.13 in ga označimo z Y. Tudi stopnjo polinoma, ki določa X v Y označimo z d namesto d_i. Opazimo, da je resolucija (21) oblike (19).

Dokaz izreka 6.13. Po trditvi 6.10 ima vsak snop idealov AG krivulje na Y resolucijo tipa (19). Razcepimo (20) v dve kratki eksaktni zaporedji:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-c) \longrightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0, \tag{22}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_{C,Y} \longrightarrow 0. \tag{23}$$

Imamo tudi naslednja eksaktna zaporedja:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0, \tag{24}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \longrightarrow \mathcal{I}_{C,Y} \longrightarrow \mathcal{I}_{C,X} \longrightarrow 0, \tag{25}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(d-c) \longrightarrow \mathcal{E}(d-c) \longrightarrow \mathcal{I}_{C,X} \longrightarrow 0. \tag{26}$$

Naj $\mathcal{Q}$ označuje jedro surjektivne preslikave $\mathcal{P}_0 \to \mathcal{I}_{C,X}$. Tako dobimo

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_{C,X} \longrightarrow 0. \tag{27}$$

Opazujmo diagram 1. Obstoj preslikave f sledi iz leme 2.25, injektivnost f pa po lemi o petih. S pomočjo leme o kači vidimo, da je $\mathrm{Coker} f = \mathcal{O}_Y(-d)$. Tako dobimo

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \longrightarrow 0. \tag{28}$$

Sedaj delujmo s funktorjem $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}_0, \cdot)$ na (26). Ker je $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}_0, \mathcal{O}_X(d-c)) = 0$, se preslikava $\mathcal{P}_0 \to \mathcal{I}_{C,X}$ dvigne v preslikavo $\mathcal{P}_0 \to \mathcal{E}(d-c)$. Tako lahko povežemo (26) in (27). Iz trditve 6.12 dobimo surjektivnost preslikave $\mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{O}_X(d-c) \to \mathcal{E}(d-c)$. Zato je $\mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{O}_Y(d-c) \to \mathcal{E}(d-c)$ tudi surjektivna in porodi eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{O}_Y(d-c) \to \mathcal{E}(d-c) \to 0, \tag{29}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & \mathcal{O}_Y(-d) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"'] & \mathcal{P}_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{I}_{C,Y} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Q} \arrow[r] & \mathcal{P}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_{C,X} \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Diagram 1

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Y(-c) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"'] & \mathcal{O}_Y(d-c) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(d-c) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{R} \arrow[r] & \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{O}_Y(d-c) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}(d-c) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathcal{P}_0 \arrow[d] & \mathcal{I}_{C,X} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Diagram 2

kjer $\mathcal{R}$ označuje jedro. Sedaj si oglejmo diagram 2.

Obstoj preslikave f sledi iz leme 2.25. Z uporabo leme o kači dokažemo, da $\mathrm{Coker}(f) = \mathcal{Q}$, kjer je $\mathcal{Q}$ jedro preslikave $\mathcal{P}_0 \to \mathcal{I}_{C,X}$. Torej dobimo

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-c) \to \mathcal{R} \to \mathcal{Q} \to 0. \tag{30}$$

Analizirajmo še diagram 3. Iz leme o kači na zgornjem diagramu, dobimo

$$0 \to \mathcal{P}_1 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}_Y(-d) \to 0,$$

ki pa je po posledici 4.3 razcepno, saj velja $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_Y(-d), \mathcal{P}_1) = 0$.

Torej smo dokazali, da je (29) enako

$$0 \to \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{O}_Y(-d) \to \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{O}_Y(d-c) \to \mathcal{E}(d-c) \to 0. \tag{31}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Y(-c) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{P}_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Y(-c) \arrow[r] & \mathcal{R} \arrow[r] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & \mathcal{O}_Y(-d) \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Diagram 3

Če tenzoriramo (31) z $\mathcal{O}_Y(c-d)$, dobimo (21). Minimalnost resolucije (21) dokažemo s konstrukcijo podobnih diagramov, kot sta jih za eno dimenzijo nižje uporabila Chiantini in Faenzi [13]. □

Definicija 6.14. Naj bo

$$\cdots \to \oplus_j \mathcal{O}(-a_{i,j}) \to \cdots \to \oplus_j \mathcal{O}(-a_{0,j}) \to M \to 0$$

minimalna prosta resolucija. Regularnost snopa $\mathcal{F}$ je definirana kot

$$\operatorname{reg}(\mathcal{F}) := \max_{i,j}\{a_{i,j} - i\}.$$

Opomba 6.15. Izkaže se, da je zgornja definicija ekvivalentna regularnosti, ki sta jo v [42] vpeljala Mumford in Castelnuovo ([39, str.8]). Če je regularnost snopa $\mathcal{F}$ enaka m, potem pravimo, da je $\mathcal{F}$ m-regularen.

Opomba 6.16. V [6, lema 2, lema 5, trditev 2] so podane minimalne resolucije ACM svežnjev ranga 2 na kubičnih in kvartičnih hiperploskvah v $\mathbb{P}^4$. Naš izrek 6.13 uporabljen na teh primerih nam da iste resolucije razen v primeru [6, lema 5], kjer je X kvartika in C krivulja tipa (2,2,2), ki pripada snopu $\mathcal{E}$ s $c_1 = 2$, $c_2 = 8$. Imamo minimalno resolucijo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-6) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$

in po izreku 6.13 ($c = 6$, $d_i = 4$, $c_1 = c - d_i$, $r_j = 2$, za $j = 1, ..., 3$) dobimo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2)^4 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^4 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

V [6] pa so dobili

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2)^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)^k \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)^k \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

za nek $k \in \{0, 2, 4\}$. Od tod so sklepali, da iz $k = 0$ sledi 0-regularnost $\mathcal{E}$, torej mora biti $k \neq 0$. To pa je napačno, saj je $\mathcal{E}$ 1-regularen tudi pri $k = 0$. Iz našega izreka 6.13 je očitno, da je $k = 0$ pravilna izbira.

7 Klasifikacija in obstoj ACM svežnjev

V tem poglavju klasificiramo ACM svežnje in tako dokažemo obstoj nekaterih izmed njih. Za slednje bomo potrebovali gladke krivulje vsebovane v CICY3. Obstoj teh pa je zagotovljen le na generičnih popolnih presekih, kar je definirano v [33].

Trditev 7.1. *Naj bo $\mathcal{E}$ nerazcepen ACM svežen ranga 2 na CICY3 raznoterosti X. Potem na X obstaja ACM krivulja stopnje $c_2(\mathcal{E})$, ki je raznoterost ničel nekega prereza $\mathcal{E}$. Če je pripadajoča krivulja gladka, je roda $c_1(\mathcal{E})c_2(\mathcal{E})/2+1$.*

Dokaz. Naj bo $l \in A_2(X)$ ekvivalenčni razred premice in $H \in A^1(X)$ ekvivalenčni razred hiperravnine. Enako kot pri dokazu GRR formule identificiramo Chernova razreda $c_1(\mathcal{E})$ in $c_2(\mathcal{E})$ s celima številoma c_1 in c_2. Velja $c_2(\mathcal{E}) = c_2 \cdot l$ in $l.H = 1$, zato je $c_2(\mathcal{E}).H = c_2$. Po [25, opomba 1.0.1] obstaja prerez snopa $\mathcal{E}$, ki ima za množico ničel krivuljo, ki jo označimo s C. Po lastnosti C6 velja $c_2(\mathcal{E}) = [C]$.

Vemo že, da velja $\wedge^2(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_X(c_1)$ po C5. Velja tudi $\omega_X = \mathcal{O}_X$, ker je X Calabi-Yau. Po Serrovi korespondenci je C subkanonična, zato $\mathcal{O}_C(c_1) \cong \omega_C$. Svežnjema premic $\mathcal{O}_C(c_1)$ in ω_C priredimo delitelja $D_{\mathcal{O}_C(c_1)}$ in D_{ω_C}. Ker je C gladka, je stopnja kanoničnega delitelja D_{ω_C} krivulje C enaka $2g-2$ ([24, primer IV.1.3.3]). Stopnja $D_{\mathcal{O}_C(c_1)}$ pa je enaka $d \cdot c_1$, kjer je $d = c_2$ stopnja krivulje. Od tod dobimo $2g-2 = c_1 \cdot c_2$. □

S pomočjo zgornjega in Serrove korespondence dokažemo:

Posledica 7.2. *Za vsak nerazcepen svežen $\mathcal{F}$ ranga 2 na CICY3 raznoterosti X obstaja eksaktno zaporedje*

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C(c_1(\mathcal{E})),$$

kjer je C nerazcepna krivulja, dobljena kot množica ničel nekega globalnega prereza $\mathcal{F}$.

Dokaz. Po prejšnji trditvi vemo, da obstaja prerez, čigar množica ničel je krivulja C. Po trditvi 4.8 je C nerazcepna. Po izreku 4.5 in Serrovi korespondenci za poljuben svežen premic $\mathcal{L}$ obstaja eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{E}^\vee \to \mathcal{I}_C \to 0. \tag{32}$$

Izberimo $\mathcal{L} = \mathcal{O}(c_1(\mathcal{E}))$. Tenzorirajmo (32) z $\mathcal{O}(c_1(\mathcal{E}))$ in dobimo iskano eksaktno zaporedje $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C(c_1(\mathcal{E}))$. □

Izrek 7.3 ([38, izrek 3.9])**.** *Normaliziran ACM svežen ranga 2 na gladki CICY3 je razcepen, razen v primeru $-5 < -c_1(\mathcal{E}) < 3$.*

7.1 Kvintika

V tem razdelku bomo pisali $\mathcal{O}$ namesto $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}$. Za kvintiko X na $\mathbb{P}^4$ lahko minimalno resolucijo krivulje dobimo iz minimalne resolucije pripadajočih svežnjev:

Izrek 7.4. *Naj bo $\mathcal{E}$ normaliziran ACM sveženj ranga 2 na X z minimalno resolucijo*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(c_1(\mathcal{E})-5) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{2b+1} \mathcal{O}(r_i + c_1(\mathcal{E}) - 5) \right) \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{2b+1} \mathcal{O}(-r_i) \right) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0. \tag{33}$$

Potem ima pripadajoča krivulja minimalno resolucijo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_1(\mathcal{E}) + 5) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{2b+1} \mathcal{O}(r_i - 5) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{2b+1} \mathcal{O}(-r_i - c_1(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

Dokaz. Dokažemo podobno kot izrek [13, izrek 2.1], zato dokaz izpustimo. □

Opomba 7.5. Vsak normaliziran sveženj $\mathcal{E}$ ranga 2 na kvintiki X ima resolucijo tipa (33). Res, v prejšnjem poglavju smo skonstruirali resolucijo tipa

$$0 \to \mathcal{F}^\vee(c_1 - d) \xrightarrow{M} \mathcal{F} \to \mathcal{E},$$

kjer je $\mathcal{F}$ direktna vsota svežnjev premic. Po [5] lahko za M izberemo poševno-simetrično matriko s sodim rangom, tako da velja $\mathrm{pf}(M) = X$. Torej je $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=0}^{2r} \mathcal{O}(-a_i)$, kjer so $a_i \geq 0$. Normaliziranost svežnja implicira $a_i = 0$ za nek i, kar pa zagotovi obliko resolucije (33).

Definicija 7.6. Krivulja z rodom 1 je *eliptična*, nedegenerirana krivulja z rodom $n+1$ in stopnjo $2n$ pa je *kanonična*.

Klasifikacijo nerazcepnih ACM svežnjev ranga 2 na kvintiki najdemo v [14]:

$c_1(\mathcal{E})$	$c_2(\mathcal{E})$	pripadajoča krivulja
-2	1	premica
-1	2	stožnica
0	3	ravninska kubika
0	4	prostorska krivulja tipa $(2,2)$
0	5	eliptična, nedegenerirana
1	4	ravninska kvartika
1	6	prostorska krivulja tipa $(2,3)$
1	8	nedegenerirana tipa $(2,2,2)$
2	≤ 14	nedegenerirana
3	20	ni vsebovana v nobeni kvadriki
4	30	gladka nerazcepna, generirana s kvartikami.

Veliko lastnosti pripadajočih krivulj je raziskanih v [14] in [40]. V tem razdelku bomo omenili le tiste, ki jih pridobimo na novo.

Naj bo $\mathcal{E}$ normaliziran sveženj s $c_1 = 2$ in $c_2 = 11$. Iz GRR dobimo $h^0(\mathcal{E}) = 4$, $h^0(\mathcal{E}(1)) = 18$, $h^0(\mathcal{E}(2)) = 52$. Ker je minimalna resolucija $\mathcal{E}$ tipa (33) mora biti enaka

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}(-3)^4 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}^4 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Po izreku 7.4 je minimalna resolucija pripadajoče krivulje C enaka

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7) \longrightarrow \mathcal{O}(-5)^3 \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \to \mathcal{O}(-2)^3 \oplus \mathcal{O}(-4)^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

Izrek 7.7 ([27, izrek 1.2])**.** *Celoštevilska matrika (u_{ij}) je matrika stopenj gladke AG krivulje v $\mathbb{P}^4$ natanko tedaj, ko velja $u_{ij} > 0$ za vse i, j z lastnostjo $i + j = 2b + 4$.*

Matrika stopenj C je enaka

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po izreku 7.7 je C singularna.

V primeru, ko je c_1 sod, lahko minimalno resolucijo za $\mathcal{E}$ enolično določimo enako kot zgoraj. Ko pa je c_1 lih pa naletimo na problem, ki smo ga analizirali v opombi 6.16.

Vzemimo za primer sveženj s $c_1 = -1$, $c_2 = 2$: brez upoštevanja geometrijskih lastnosti pripadajoče krivulje, lahko o minimalni resoluciji normaliziranega ACM svežnja $\mathcal{E}$ s $c_1 = -1$ in $c_2 = 2$ povemo le, da je oblike

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-6) \oplus \mathcal{O}^2(-4) \oplus \mathcal{O}(-3)^j \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}(-3)^j \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Če pa upoštevamo, da je pripadajoča krivulja stožnica, po izreku 6.13 sledi $j = 1$.

V nadaljevanju bomo napisali minimalne resolucije vseh možnih nerazcepnih normaliziranih ACM svežnjev $\mathcal{E}$ ranga 2. Z zgornjimi metodami lahko enolično določimo vse resolucije, razen v primeru $c_1 = 3$. Imamo:

- $c_1 = -2$, $c_2 = 1$

  Pripadajoča krivulja je premica, zato imamo

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  nato pa iz izreka 6.13 sledi

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7) \oplus \mathcal{O}(-4)^3 \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-3)^3 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = -1$, $c_2 = 2$

  Pripadajoča krivulja je stožnica, torej imamo resoluciji

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1)^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  ki po izreku 6.13 porodi

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-6) \oplus \mathcal{O}(-4)^2 \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 0$, $c_2 = 3$

  Pripadajoča krivulja je ravninska kubika, zato

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-5) \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^2 \oplus \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$

  porodi

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-5) \oplus \mathcal{O}(-4)^2 \oplus \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 0$, $c_2 = 4$

  Pripadajoča krivulja je prostorska krivulja tipa (2,2), torej

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-5) \longrightarrow \mathcal{O}(-4) \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  ponovno porodi

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^2 \oplus \mathcal{O}(-5) \oplus \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)^2 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 0$, $c_2 = 5$

  V tem primeru ni možno direktno določiti resolucije krivulje. Ker pa je c_1 sod, lahko določimo resolucijo svežnja

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-5) \oplus \mathcal{O}(-3)^5 \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)^5 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

  in nato iz izreka 6.13 sledi

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-5) \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^5 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^5 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 1$, $c_2 = 4$

  Pripadajoča krivulja je ravninska kvartika, torej imamo resolucijo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-6) \longrightarrow \mathcal{O}(-5)^2 \oplus \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  ki po izreku 6.13 ponovno porodi

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^3 \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}^3 \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 1,\ c_2 = 6$

  Pripadajoča krivulja je prostorska krivulja tipa (2,3), zato imamo

  $$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-6) \longrightarrow \mathcal{O}(-5) \oplus \mathcal{O}(-4) \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0, \end{gathered}$$

  kar nam da

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^2 \oplus \mathcal{O}(-3) \oplus \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 1,\ c_2 = 8$

  Pripadajoča krivulja je tipa (2,2,2), torej iz

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-6) \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^3 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  dobimo

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^3 \oplus \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 2,\ c_2 = 11$

  Tudi v tem primeru ni možno direktno določiti resolucije krivulje, vendar iz sodosti c_1 sledi resolucija svežnja

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^2 \oplus \mathcal{O}(-3)^4 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}^4 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

  Nato iz izreka 7.4 dobimo resolucijo krivulje

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7) \longrightarrow \mathcal{O}(-5)^3 \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^3 \oplus \mathcal{O}(-4)^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

  Podobno postopamo še v ostalih treh primerih s $c_1 = 2$.

- $c_1 = 2,\ c_2 = 12$

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7) \longrightarrow \mathcal{O}(-5)^2 \oplus \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^2 \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^3 \oplus \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}^3 \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

- $c_1 = 2,\ c_2 = 13$

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7) \longrightarrow \mathcal{O}(-5) \oplus \mathcal{O}(-4)^4 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^2 \oplus \mathcal{O}(-2)^4 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(-1)^4 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

- $c_1 = 2,\ c_2 = 14$

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7) \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^7 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^7 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \oplus \mathcal{O}(-2)^7 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(-1)^7 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 3$, $c_2 = 20$

  V tem primeru je c_1 lih in imamo premalo informacij o krivulji, da bi lahko določili resolucijo krivulje. O resolucijah lahko povemo le, da sta oblike

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-8) \longrightarrow \mathcal{O}(-5)^4 \oplus \mathcal{O}(-4)^k \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^4 \oplus \mathcal{O}(-4)^k \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^5 \oplus \mathcal{O}(-1)^k \longrightarrow \mathcal{O}^5 \oplus \mathcal{O}(-1)^k \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

  za nek lih k.

- $c_1 = 4$, $c_2 = 30$

  Ker je c_1 sod dobimo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-9) \longrightarrow \mathcal{O}(-5)^9 \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^9 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{10} \longrightarrow \mathcal{O}^{10} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

V naslednjih razdelkih bomo dokazali naš glavni izrek 1.1.

7.2 CICY3 tipa (2,4)

Naj bo X_8 generični CICY3 tipa (2,4) in Y hiperploskev stopnje 2 v $\mathbb{P}^5$, ki vsebuje X_8.

Klasifikacijo krivulj v $\mathbb{P}^3$ najdemo v Hartshornu [24, str. 353]. Predstavimo klasifikacijo gladkih krivulj do stopnje 6:

- $d = 1$

  Edina krivulja je premica.

- $d = 2$

  Edina krivulja je stožnica v $\mathbb{P}^2$.

- $d = 3$

  Edini krivulji sta ravninska kubika roda 1 in nedegenerirana krivulja roda 0.

- $d = 4$

  Imamo tri razrede krivulj: prve so ravninske kvartike roda 2, druge so popolni preseki tipa (2,2) roda 1 in tretje so nedegenerirane roda 0.

- $d = 5$

  Imamo štiri razrede krivulj: ravninska kvintika ima rod 6, poleg te obstajajo tudi krivulje z rodom $0, 1, 2$.

- $d = 6$

  Imamo pet razredov krivulj: ravninska krivulja stopnje 6 ima rod 10, obstajajo še krivulje z rodi $0, 1, 2, 3$ in 4. Slednja je kanonična, podana kot popolni presek kvadratne in kubične ploskve v $\mathbb{P}^3$.

Naštejmo minimalne resolucije nerazcepnih ACM svežnjev. Spomnimo se izreka 7.3, ki zagotovi $-2 \leq c_1 \leq 4$.

- $c_1 = -2$

  Po trditvi 7.2 obstaja eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_C(-2) \longrightarrow 0,$$

  iz katerega izračunamo $h^3(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}(2)) = 20$ in zato $\chi(\mathcal{E}) = -19$. Iz GRR dobimo $\chi(\mathcal{E}) = -20 + c_2$, torej $c_2 = 1$ in pripadajoča krivulja je premica.

  Ker X_8 vsebuje premico (dokaz najdemo v [33]), po Serrovi korespondenci obstaja sveženj s $c_1 = -2$ in $c_2 = 1$ na X_8.

- $c_1 = -1$

  Kot zgoraj imamo eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_C(-1) \longrightarrow 0$$

  in tako $h^3(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}(1)) = 6$. Po GRR velja $-5 = \chi(\mathcal{E}) = -6 + \frac{c_2}{2}$, torej je $c_2 = 2$. Iz klasifikacije krivulj razberemo, da je pripadajoča krivulja stožnica.

  Krivulja C je na Y generirana s tremi hiperravninami, saj je Y stopnje 2. Po izreku 6.10 zato velja

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$

  in izrek 6.13 nam da

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-5) \oplus \mathcal{O}_Y(-3)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0. \qquad (34)$$

- $c_1 = 0$

  Začnimo z eksaktnim zaporedjem

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

  Iz GRR dobimo $h^0(\mathcal{E}(1)) = 12 - c_2$, torej $c_2 = 6 - h^0(\mathcal{I}_C(1))$. Dobimo štiri možnosti za c_2: 3, 4, 5, 6. Pri $c_2 = 4$ je C eliptična krivulja stopnje 4. Iz klasifikacije krivulj vidimo, da je C popolni presek tipa (2,2) v $\mathbb{P}^3$. Podobno kot zgoraj utemeljimo minimalni resoluciji

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-4) \oplus \mathcal{O}_Y(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 1$

  Imamo
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_C(1) \longrightarrow 0.$$
  Ker je $h^3(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}(-1)) = 0$, velja $1 + h^0(\mathcal{I}_C(1)) = h^0(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E})$. Iz GRR dobimo $c_2 = 10 - 2h^0(\mathcal{I}_C(1))$. Torej imamo štiri možnosti za c_2, ki so 4,6,8,10.

  Pri $c_2 = 4$, je pripadajoča krivulja ravninska kvartika z resolucijo
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$
  in po izreku 6.13 je
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^4 \longrightarrow \mathcal{O}_Y^4 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

  Pri $c_2 = 6$ je pripadajoča krivulja popolni presek tipa (2,3). Dobimo
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-5) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-4)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3)^3 \oplus \mathcal{O}_Y(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_Y^3 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

  Pri $c_2 = 8$, je pripadajoča krivulja C kanonična krivulja s stopnjo 8 in rodom 5. Po [2, str.118] je C popolni presek tipa (2,2,2) z resolucijo
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-5) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-4) \oplus \mathcal{O}_Y(-3)^2 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-2)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-1) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$
  in kot zgoraj porodi
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2)^2 \longrightarrow \mathcal{O}_Y^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-1)^2 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

  Pri $c_2 = 10$, je pripadajoča krivulja kanonična roda 6. V naslednjem razdelku bomo pokazali obstoj tega svežnja. To pa nam bo služilo za konstrukcijo nerazcepnega svežnja višjega ranga.

- $c_1 = 2$

  Kot zgoraj imamo
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_C(2) \longrightarrow 0.$$
  Ker je $h^3(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}(-2)) = 0$, potem je $1 + h^0(\mathcal{I}_C(2)) = h^0(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E})$. Iz GRR vidimo $c_2 = 19 - h^0(\mathcal{I}_C(2))$, kar pomeni $c_2 \leq 19$.

- $c_1 = 3$

  V tem primeru imamo
  $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_C(3) \longrightarrow 0$$
  in tako $h^3(\mathcal{E}(-1)) = h^0(\mathcal{E}(-2)) = 0$. Iz GRR izračunamo $c_2 = 28$.

- $c_1 = 4$ Kot v prejšnjih primerih velja $h^3(\mathcal{E}(-1)) = 0$ in od tod $c_2 = 44$.

7.3 CICY3 tipa (3,3)

S podobnimi metodami kot pri CICY3 tipa (2,4), bomo klasificirali še preostale tipe (3,3), (2,2,3) in (2,2,2,2).

Naj bo X_9 generičen CICY3 tipa (3,3) in naj bo Y hiperploskev stopnje 3 v $\mathbb{P}^5$, ki vsebuje X_9.

- $c_1 = -2$

  Izračunamo $c_2 = 1$ in pripadajoča krivulja je premica. Obstoj premice na X_9 je dokazan v [33].

- $c_1 = -1$

  V tem primeru je $c_2 = 2$ in pripadajoča krivulja je stožnica. Obstoj stožnice na X_9 je tudi dokazan v [33].

- $c_1 = 0$

  Velja zveza $6 + h^0(\mathcal{I}_C(1)) = 12 - c_2$. To nam da štiri možnosti za c_2, ki so 3,4,5,6. V primeru $c_2 = 3$, je krivulja C ravninska kubika in dobimo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \oplus \mathcal{O}_Y(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0. \qquad (35)$$

- $c_1 = 1$

  Velja $6 - \frac{c_2}{2} = 1 + h^0(I_C(1))$, kar je $c_2 = 10 - 2h^0(I(1))$. Dobimo štiri možnosti za c_2: 4,6,8,10. Pri $c_2 = 6$ je krivulja C popolni presek tipa (2,3) in pripadajoči resoluciji sta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^2 \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-2)^3 \oplus \mathcal{O}_Y(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_Y^3 \oplus \mathcal{O}_Y(-1) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- $c_1 = 2$

  Ker je $h^3(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}(-2)) = 0$, velja $1 + h^0(\mathcal{I}_C(2)) = h^0(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E})$. Iz GRR dobimo $c_2 = 20 - h^0(\mathcal{I}_C(2))$ in zato $c_2 \leq 20$.

- $c_1 = 3$

  Imamo $h^3(\mathcal{E}(-1)) = h^0(\mathcal{E}(-2)) = 0$ in iz GRR izpeljemo $c_2 = 30$.

- $c_1 = 4$

  Velja $h^3(\mathcal{E}(-1)) = 0$ in po GRR dobimo $c_2 = 48$.

7.4 CICY3 tipa (2,2,3) in (2,2,2,2)

Naj bo X_{12} generični CICY3 tipa (2,2,3) in X_{16} generični CICY3 tipa (2,2,2,2). Za primera $c_1 = -2$ in $c_1 = -1$, je Knutsen [33] dokazal obstoj premice in stožnice na X_{12} in X_{16}.

V naslednjem razdelku bomo potrebovali tudi naslednji zanimiv zgled: naj bo X_{12} CICY3 tipa (2,2,3) in $\mathcal{E}$ sveženj s $c_1 = 0$ in $c_2 = 4$. V tem primeru velja

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \to \mathcal{O}_Y(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \oplus \mathcal{O}_Y(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0, \tag{36}$$

kjer je Y popolni presek tipa (2,2) na $\mathbb{P}^6$, ki vsebuje X_{12}.

7.5 Obstoj svežnjev

V tem razdelku zaključimo dokaz izreka 1.1. Potrebovali bomo naslednje izreke:

Izrek 7.8 ([19, poglavje 6D]). *Eliptične krivulje so ACM.*

Izrek 7.9 ([44], [2], Noether-Enriques-Petrijev izrek). *Kanonične krivulje so ACM.*

Izrek 7.10 ([14, razdelek 4] ali [10]). *Krivulja je AG natanko takrat, ko je ACM in subkanonična.*

Trditev 7.11 ([24, primer IV.1.3.6]). *Eliptične krivulje imajo trivialen kanonični sveženj.*

V prejšnjih razdelkih smo klasificirali svežnje in s tem dokazali prvi del izreka 1.1. Dokazali smo tudi obstoj svežnjev s $c_1 = -2$ in $c_1 = -1$. Svežnji s $c_1 = 0$ pa pripadajo eliptičnim krivuljam. Knutsen [33] je pokazal obstoj gladkih eliptičnih krivulj na vseh X_r stopnje $d \geq 3$, razen za $d = 3$ na X_{16}. Po izreku 7.8 so gladke eliptične krivulje ACM. Ker imajo po trditvi 7.11 trivialen kanoničen snop, so tudi subkanonične. Tako po Serrovi korespondenci (krivulje so po trditvi 3.30 tudi lokalni popolni presek, saj so gladke) te krivulje zagotovijo obstoj ACM svežnjev pri $c_1 = 0$ za vse c_2, ki so našteti v izreku 1.1.

Svežji s $c_1 = 1$ pripadajo kanoničnim krivuljam. Knutsen [33] je pokazal obstoj gladkih krivulj stopnje 10 in roda 6 na X_8 in X_9 ter gladkih krivulj stopnje 12 in roda 7 na X_{12}. Te krivulje so kanonične in tako po izreku 7.9 ACM. Še več, po idejah M.Noetherja [43], je Schreyer [48] določil minimalne proste resolucije teh krivulj na $\mathbb{P}^{g-1}$:

$$0 \to \mathcal{O}(-g-1) \to \mathcal{P}_{g-3} \cdots \to \mathcal{P}_1 \to \mathcal{I}_C \to 0,$$

kjer je g rod C in so $\mathcal{P}_i$ vektorski svežnji na $\mathbb{P}^n$. Spomnimo se, da so po Horrocksovem kriteriju $\mathcal{P}_i$ direktne vsote svežnjev premic. Iz zgornjega sledi, da so gladke kanonične krivulje AG in zato po izreku 7.10 tudi subkanonične. Serrova korespondenca zagotovi obstoj ACM svežnjev s $c_1 = 1$, $c_2 = 12$ na X_{12} in s $c_1 = 1$, $c_2 = 10$ na X_8 ter X_9.

V nadaljevanju bomo dokazali obstoj preostalih svežnjev iz izreka 1.1. Zožimo eksaktno zaporedje (19)

$$0 \to \mathcal{G}^\vee(c_1 - d) \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0$$

na X in dobimo

$$0 \to \mathcal{E}(-d) \to \mathcal{G}^\vee(c_1 - d) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to 0. \tag{37}$$

Res, delujmo s funktorjem $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$ na (19) in upoštevajmo $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{E}(-c_1)$:

$$0 \to \mathcal{E}(-c_1) \to \mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{A} \mathcal{G}(d - c_1)\mathcal{O}_X \to \cdots .$$

Sedaj tenzorirajmo eksaktno zaporedje (19) z $\mathcal{O}_X(d - c_1)$. Tenzoriranje je desno eksaktno, torej dobimo

$$\cdots \to \mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{A} \mathcal{G}(d - c_1) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}(d - c_1) \to 0.$$

Iz zaporedij razberemo $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{E}(-c_1)$ in $\mathrm{Coker}(A) = \mathcal{E}(d - c_1)$, kar nam zagotovi obstoj eksaktnega zaporedja

$$0 \to \mathcal{E}(-c_1) \to \mathcal{G}_0^\vee \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{A} \mathcal{G}_0(d - c_1)\mathcal{O}_X \to \mathcal{E}(d - c_1) \to 0.$$

Ko ga tenzoriramo z $\mathcal{O}_X(c_1 - d)$ dobimo iskano eksaktno zaporedje (37).

Najprej pokažimo obstoj svežnja s $c_1 = 1$ in $c_2 = 6$ na X_8. Spomnimo se minimalne resolucije (34) svežnja s $c_1 = -1$ in $c_2 = 2$ na X_8. V tem primeru je zaporedje (37) enako

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8}(-5) \oplus \mathcal{O}_{X_8}(-3)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8} \oplus \mathcal{O}_{X_8}(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Iz tega izpeljemo eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8}(-5) \oplus \mathcal{O}_{X_8}(-3)^3 \longrightarrow \mathcal{F}(-3) \longrightarrow 0, \tag{38}$$

kjer je $\mathcal{F}$ koherenten snop na X_8 po trditvi 7.2. Iz eksaktnega zaporedja vidimo, da je $\mathcal{F}$ normaliziran. Ker je X_8 gladka, iz trditve 5.22 sledi, da je $\mathcal{F}$ sveženj. Iz eksaktnega zaporedja tudi razberemo, da je ranga 2. Sedaj bomo pokazali, da iz (38) sledi nerazcepnost $\mathcal{F}$ in da velja $c_1(\mathcal{F}) = 1$ in $c_2(\mathcal{F}) = 6$.

Vzemimo eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8}(-2) \oplus \mathcal{O}_{X_8}^3 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Po lastnosti C3 velja $c_t(\mathcal{O}_{X_8}(-2) \oplus \mathcal{O}_{X_8}^3) = c_t(\mathcal{E}(-1)).c_t(\mathcal{F})$. Identificirajmo Chernove razrede s celimi števili in odčitajmo koeficient pred t in t^2. Koeficienti pred t nam dajo enačbo

$$-2 = c_1(\mathcal{E}(-1)) + c_1(\mathcal{F}),$$

iz česar dobimo $c_1(\mathcal{F}) = 1$, saj po (2) velja $c_1(\mathcal{E}(-1)) = -3$. Koeficienti pred t^2 pa nam dajo enačbo

$$0 = c_2(\mathcal{E}(-1)) + c_2(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{E}(-1)).c_1(\mathcal{F}).$$

Ker je $\deg(X_8) = 8$ po identifikaciji Chernovih razredov s celimi števili dobimo $c_1(\mathcal{E}(-1)).c_1(\mathcal{F}) = 8 \cdot c_1(\mathcal{E}(-1)) \cdot c_1(\mathcal{F}) = -24$. Po (3) velja $c_2(\mathcal{E}(-1)) = 18$ iz česar sledi $c_2(\mathcal{F}) = 6$. Tako vidimo, da je $\mathcal{F}$ nerazcepen svež2enj s $c_1 = 1$ in $c_2 = 6$, očitno pa je tudi normaliziran. Obstoj svežnja $\mathcal{F}$ je zagotovljen z obstojem $\mathcal{E}$.

V naslednjem koraku dokažimo obstoj svežnja s $c_1 = 1$ in $c_2 = 6$ na X_9. Opazujmo minimalno resolucijo (35) svežnja s $c_1 = 0$ in $c_2 = 3$ na X_9. Podobno kot zgoraj dobimo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_9}(-3) \oplus \mathcal{O}_{X_9}(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{F}(-2) \longrightarrow 0,$$

kjer je $\mathcal{F}$ normaliziran nerazcepen sveženj ranga 2 s $c_1 = 1$ in $c_2 = 6$ na X_9.

Nazadnje pokažimo še obstoj svežnja s $c_1 = 1$ in $c_2 = 8$ na X_{12}. Dobimo ga iz minimalne resolucije (36) svežnja s $c_1 = 0$ in $c_2 = 4$ na X_{12}. Kot zgoraj skonstruiramo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{12}}(-3) \oplus \mathcal{O}_{X_{12}}(-2)^3 \longrightarrow \mathcal{F}(-2) \longrightarrow 0,$$

kjer je $\mathcal{F}$ normaliziran nerazcepen sveženj ranga 2 s $c_1 = 1$ in $c_2 = 8$ na X_{12}. To zaključuje dokaz izreka 1.1.

Za konec dokažimo še obstoj nerazcepnega svežnja višjega ranga. Kanonična krivulja, ki pripada svežnju s $c_1 = 1$, $c_2 = 10$ na X_8 je po [4] presek generične kvadrike in Del Pezzo ploskve S stopnje 5 v $\mathbb{P}^5$. Po [9, izrek 2.2] je S Pfaffova raznoterost, definirana s petimi 4×4 Pfaffovimi poddeterminantami od poševno simetrične 5×5 matrike z linearnimi elementi. Velja še, da je minimalna prosta resolucija pripadajoče ploskve S podana z Buchsbaum-Eisenbudovim kompleksom:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(-5) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)^5 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(-2)^5 \longrightarrow \mathcal{I}_S \longrightarrow 0.$$

Tako imamo

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-5) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3)^5 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-2)^5 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0,$$

kjer je Y hiperploskev stopnje 2 v $\mathbb{P}^5$, ki vsebuje X_8. Iz izreka 6.13 dobimo minimalno resolucijo svežnja $\mathcal{E}$ s $c_1 = 1$ in $c_2 = 10$.

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-3) \oplus \mathcal{O}_Y(-2)^5 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1)^5 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Kot v zgornjih primerih konstruirajmo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{E}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8}(-3) \oplus \mathcal{O}_{X_8}(-2)^5 \longrightarrow \mathcal{F}(-2) \longrightarrow 0.$$

Iz dolgega eksaktnega zaporedja kohomoloških grup vidimo, da velja $h^0(X_8, \mathcal{F}) = h^0(X_8, \mathcal{O}_{X_8}(-1) \oplus \mathcal{O}_{X_8}^5) = 5$. Po [49, trditev 78.5] velja $h^0(X_8(1)) = 6$, iz tega pa enostavno izpeljemo, da je $\mathcal{F}$ bodisi nerazcepen sveženj ranga 4 na X_8 ali pa je direktna vsota svežnja premic in nerazcepnega svežnja ranga 3.

Izračunajmo še Chernove razrede svežnja $\mathcal{F}$. Vzemimo

$$0 \to \mathcal{E}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_8}(-1) \oplus \mathcal{O}_{X_8}^5 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

in označimo $c_2 = c_2(\mathcal{F})$, $c_3 = c_3(\mathcal{F})$, $c_4 = c_4(\mathcal{F})$. Iz enačbe $c_t(\mathcal{O}_{X_8}(-1) \oplus \mathcal{O}_{X_8}^5) = c_t(\mathcal{E}(-2)).c_t(\mathcal{F})$ izpeljemo

$$1 - t = (1 - 3t + 26t^2).(1 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4),$$

kjer upoštevamo $c_1(\mathcal{E}(-2)) = -3$ in $c_2(\mathcal{E}(-2)) = 26$ po (2) in (3). Primerjava koeficientov nam da

$$-1 = -3 + c_1$$

$$0 = -6 \cdot 8 + 26 + c_2,$$

$$0 = -3c_2 + 2 \cdot 26 + c_3,$$

torej $c_1 = 2$, $c_2 = 22$ in $c_3 = 14$. Vemo tudi, da je $c_4(\mathcal{F}) = 0$, kajti $\dim X_8 = 3$.

Literatura

[1] T. Abe, M. Yoshinaga, *Splitting criterion for reflexive sheaves*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008) 1887–1891.

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences **267**, Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] L. Badescu, *A remark on the Grothendieck-Leftschetz theorem about the Picard group*, Nagoya Math. J. **71** (1978) 169–179.

[4] F. Bath, *On the quintic surface in space of five dimensions (Part II, Curves on the surface)*, Proc. Camb. Phil. Soc. **24** (1928) 191–209 .

[5] A. Beauville, *Determinantal hypersurfaces*, Michigan Math. J. **48** (2000) 39–64.

[6] I. Biswas, J. Biswas, G.V. Ravindra, *On some moduli spaces of stable vector bundles on cubic and quartic threefolds*, J. Pure Appl. Alg. **212** (2008) 2298–2306.

[7] J. Biswas, G. V. Ravindra, *Arithmetically cohen-macaulay bundles on complete intersection varieties of sufficiently high multidegree*, Math. Z. **265** (2010) 493–509.

[8] M.C. Brambilla, D. Faenzi, *Moduli spaces of rank 2 acm bundles on prime fano threefolds*, Michigan Math. J. **60** (2011) 113–148.

[9] M. Brodmann, P. Schenzel, *On varieties of almost minimal degree in small codimension*, J. Algebra **305** (2006) 789–801.

[10] D.A. Buchsbaum, D. Eisenbud, *Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. **99** (1977) 447–485.

[11] M. Casanellas, R. Hartshorne, *ACM bundles on cubic surfaces*, Eur. Math. Soc. **13** (2011) 709–731.

[12] C. Chevalley, *Intersection of algebraic and algebroid varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945) 1–85.

[13] L. Chiantini, D. Faenzi, *On general surfaces defined by an almost linear pfaffian*, Geom. Ded. **142** (2009) 91–107.

[14] L. Chiantini, C. Madonna, *ACM bundles on a general quintic threefold*, Le Matematiche **55** (2000) 239–258.

[15] H. Clemens, *Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated*, Publ. Math. IHES **58** (1983) 19–38.

[16] H. Clemens, H. P. Kley, *Counting curves that move with threefolds*, J. Algebraic Geom. **9**. (2000) 175–200.

[17] C.H. Dowker, *Lectures on sheaf theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[18] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, New York, 1995.

[19] D. Eisenbud, *The geometry of syzygies*, Graduate Texts in Mathematics **229**, Springer, New York, 2005.

[20] D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics **197**, Berlin, New York, Springer-Verlag, 2000.

[21] M. Filip, *Rank 2 ACM bundles on complete intersection Calabi-Yau threefolds*, verzija 4.3.2013, [ogled 26. 7. 2013], dostopno na `http://arxiv.org/abs/1303.0867`, sprejeto v objavo v Geometriae Dedicata.

[22] W. Fulton, *Intersection Theory*, Second edition, Springer, Berlin, 1998.

[23] P. Griffits, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience (John Wiley and Sons), New York, 1978.

[24] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, New York, 1977.

[25] R. Hartshorne, *Stable vector bundles of rank 2 on* $\mathbb{P}^3$, Math. Ann. **235** (1978) 229–280.

[26] J. Harris, *Algebraic Geometry*, a first Course, Graduate Texts in Mathematics, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1995.

[27] J. Herzog, N.V. Trung, G. Valla, *On hyperplane sections of reduced irreducible varieties of low codimension*, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994) 47–72.

[28] G. Horrocks, *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*, Proc. London Math. Soc. **14** (1964) 689–713.

[29] K. Hulek, *Elementary algebraic geometry*, American Mathematical Society, New York, 2003.

[30] I. Kaplansky, *Projective Modules*, The Annals of Mathematics **68** (1958) 372–377.

[31] G. Kemper, *A course in commutative algebra*, Graduate text in Mathematics **256**, Berlin, Springer-Verlag, 2011.

[32] H.P. Kley, *Rigid Curves in Complete Intersection Calabi-Yau Threefolds*, Compositio Math. **123** (2000) 185–208.

[33] A.L. Knutsen, *On isolated smooth curves of low genera in Calabi-Yau complete intersection threefolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012) 5243–5264.

[34] A.L. Knutsen, *Smooth curves on projective K3 surfaces*, Math. Scand. **90** (2002) 215–231.

[35] C. Madonna, *ACM vector bundles on prime Fano threefolds and complete intersection Calabi-Yau threefolds*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **47** (2002) 211–222.

[36] C. Madonna, *Rank 4 vector bundles on the quintic threefold*, Centr. Eur. J. Math. **3** (2005) 404–411.

[37] C. Madonna, *Rank-two vector bundles on general quartic hypersurfaces in P^4*, Rev. Mat. Complutense **13** (2000) 287—301.

[38] C. Madonna, *A splitting criterion for rank 2 vector bundles on hypersurfaces in $\mathbb{P}^4$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **56** (1998) 43–54.

[39] J.C. Migliore, *Introduction to liaison theory and deficiency modules*, Progress in Mathematics **165**, Birkhäuser, Boston, 1998.

[40] N. Mohan Kumar, A.P. Rao, *ACM bundles, quintic threefolds and counting problems*, Central European Journal of Mathematics **10** (2012) 1380–1392.

[41] N. Mohan Kumar, A.P. Rao, G.V.Ravindra, *Arithmetically Cohen-Macaulay bundles on hypersurfaces*, Comment. Math. Helv. **82** (2007) 829–843.

[42] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Math. Ann. **59**, Princeton University press, 1966.

[43] M. Noether, *Über die invariante Darstellung algebraischer Functionen*, Math. Ann. **17** (1880) 263–284.

[44] *Noether-Enriques theorem*, [ogled 26. 7. 2013], dostopno na `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Noether-Enriques_theorem`.

[45] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective space*, Prog. Math. **3**, Birkhäuser, Boston, 1980.

[46] J. Roberts, *Chow's moving lema*, Algebraic geometry, (ed. F. Oort), Oslo (1970), Wolters-Noordhoff, Groningen (1972) 89–96.

[47] J.J. Rotman, *Introduction to Homological Algebra*, Second edition, Academic Press, 2009.

[48] F.O. Schreyer, *A standard basis approach to syzygies of canonical curves*, J. Reine Angew. Math. **421** (1991) 83–124.

[49] J.P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. **61** (1955) 197–278.

[50] J.P. Serre, *Sur les modules projectifs*, Seminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres **14** (1960-1961) 1–16.

[51] F. Tanturri, *Pfaffian representations of cubic surfaces*, verzija 17.12.2012, [ogled 26. 7. 2013], dostopno na `http://arxiv.org/abs/1203.0999`, sprejeto v objavo v Geomtriae Dedicata.

[52] R. S. Ward, R. O'Neil Jr. Wells, *Twistor geometry and field theory*, Cambridge University Press, 1991.

[53] X. Yu, *On smooth and isolated curves in general complete intersection Calabi-Yau threefolds*, verzija 30.8.2012, [ogled 26. 7. 2013], dostopno na `http://arxiv.org/abs/1208.6282`.