UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Smer študija: Matematika – 2. stopnja

Leon Lampret

Končno-dimenzionalna realna Morsova teorija

Magistrsko delo

Mentor: izred. prof. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2012

Podpisani Leon Lampret izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom *Končno-dimenzionalna realna Morsova teorija* izdelal samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Saša Strleta in

- da Fakulteti za matematiko in Fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 10. september 2012 Podpis: . . . .

Sašo Strle,
Metka Lampret,
Vasja Susič,
hvala za vse.

Kazalo

Program magistrskega dela

Magistrsko delo naj predstavi osnove Morsove teorije gladkih mnogoterosti: obnašanje gladke funkcije okoli neizrojene kritične točke, obstoj Morsovih funkcij na poljubni mnogoterosti, dodajanje ročajev na mnogoterost z robom, omejitev Bettijevih števil s številom kritičnih točk. Splošne definicije in izreke predstavite s primeri, ki ste jih spoznali na dodiplomskem študiju matematike.

Literatura:

1. J. Milnor, *Morse Theory*,
   Annals of Mathematics Studies 51,
   Princeton University Press, 1963,

2. J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*,
   Princeton University Press, 1965,

3. Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*,
   Translations of Mathematical Monographs 208,
   American Mathematical Society, 2002.

Ljubljana, 10. september 2012 — izred. prof. dr. Sašo Strle

Povzetek

V pričujočem magistrskem delu se poglobimo v študij gladkih mnogoterosti: opazujemo kako gladka funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ odraža topološko strukturo prostora X. V prvem poglavju pokažemo, da se v okolici vsake svoje neizrojene kritične točke p funkcija f izrača kot kvadratni polinom $-\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$, kjer k imenujemo *indeks* funkcije f v p. Nato na poljubni mnogoterosti pokažemo obstoj Morsovih funkcij (to so take gladke funkcije, ki imajo vse kritične točke neizrojene, tj. tam je drugi odvod $D^2(f)$ obrnljiva matrika). V drugem poglavju definiramo dodajanje ročajev na mnogoterost z robom, ter pokažemo, da vsaka dekompozicija na ročaje inducira homotopsko ekvivalenco s končnim CW-kompleksom. V tretjem poglavju pokažemo, da iz vsake Morsove funkcije f na sklenjeni mnogoterosti dobimo dekompozicijo na ročaje, in zato homotopsko ekvivalenco med X in nekim CW-kompleksom, ki ima toliko k-celic kot ima f kritičnih točk indeksa k. V četrtem poglavju pokažemo, da je k-to Betti-jevo število mnogoterosti manjše od števila kritičnih točk indeksa k, ter da je Eulerjeva karakteristika enaka alternirajoči vsoti števil kritičnih točk indeksa k.

Math. Subj. Class. (MSC 2010): 57R19, 57R65, 57R70

Ključne besede: *gladka mnogoterost, Morsova funkcija, Morsova lema, indeks kritične točke, sedlo, dodajanje ročaja, CW-dekompozicija, homologija, Bettijeva števila, Morsove neenakosti*

Abstract

In the following work, we study smooth manifolds, by observing how a smooth function $f : X \to \mathbb{R}$ reflects the structure of the space X. In the first chapter, we show that in a suitable neighbourhood of its critical point p, the function f has the form of a quadratic polynomial $-\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$, and we call the integer k the *index* of f at the critical point. Then, we prove that on each smooth manifold, there exist Morse functions (which are smooth functions, whose critical points are all non-degenerate, i.e. the second derivative $D^2(f)$ is an invertible matrix). In the second chapter, we define handle attachment on a manifold with boundary, and prove that every handle decomposition induces a homotopy equivalence between X and a finite CW-complex. In the third chapter, we prove that from each Morse function f on a closed manifold, we obtain a handle decomposition, hence a homotopy equivalence between X and a CW-complex, with as many k-cells as f has critical points of index k. In the fourth chapter, we show that the k-th Betti number is at most the number of critical points of f of index k, and furthermore, that the Euler characteristic equals the alternating sum of the numbers of critical points of index k.

Math. Subj. Class. (MSC 2010): 57R19, 57R65, 57R70

Keywords: *smooth manifold, Morse function, Morse lemma, index of a critical point, saddle point, handle attachment, CW-decomposition, homology, Betti numbers, Morse inequalities*

Oznake

$\llparenthesis a,b \rrparenthesis$	...	odprt interval v $\mathbb{R}$
$\llbracket a,b \rrbracket$	...	zaprt interval v $\mathbb{R}$
$\mathbb{I}$	...	$\llbracket 0,1 \rrbracket \subseteq \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n_+$	...	$\mathbb{R}^{n-1} \times \llbracket 0,\infty \rrparenthesis$
$\mathbb{R}^n_-$	...	$\mathbb{R}^{n-1} \times \llparenthesis -\infty,0 \rrbracket$
$\mathbb{B}^n_r$	...	$\{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2\}$
$\mathring{\mathbb{B}}^n_r$	...	$\{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^n x_i^2 < r^2\}$
$\mathbb{S}^n_r$	...	$\{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\}$
$\mathbb{B}^n$	...	$\mathbb{B}^n_1$
$\mathring{\mathbb{B}}^n$	...	$\mathring{\mathbb{B}}^n_1$
$\mathbb{S}^n$	...	$\mathbb{S}^n_1$
$U \overset{\circ}{\subseteq} X$	...	U je odprta podmnožica topološkega prostora X
$Z \overset{\bullet}{\subseteq} X$	...	Z je zaprta podmnožica topološkega prostora X
A^t	...	transponiranje matrike A, tj. $[a_{ij}]^t_{i,j} = [a_{ji}]_{i,j}$
$F^{n\times n}$	...	množica vseh $n \times n$ matrik s koeficienti v obsegu F
$\cong$	...	izomorfno
$\approx$	...	homeomorfno
$\approxeq$	...	difeomorfno
$\overline{U}$	...	zaprtje podmnožice topološkega prostora
$f\vert_U$	...	zožitev preslikave na U
id_X	...	identitetna funkcija $X \to X,\ x \mapsto x$
$\mathrm{supp} f$	...	$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}$, torej zaprtje množice $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$
$\mathrm{ind}_f(p)$	...	Morsov indeks funkcije f v točki p
Cr_f	...	množica kritičnih točk funkcije f
Cr^k_f	...	množica kritičnih točk funkcije f, ki imajo indeks k

Če sta A in B podmnožici v $\mathbb{R}$ ter $x, y \in \mathbb{R}$, potem $A \leq B$ pomeni $\forall a \in A\ \forall b \in B:\ a \leq b$. Podobno so definirane oznake $A < B$, $x \leq B$, $A \leq y$, $x < B$, $A < y$, itd. Po dogovoru je $\mathbb{B}^0 = \{0\}$ prostor z eno samo točko, in $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ prazna množica.

Omenimo, da bosta v tem tekstu besedi *funkcija* in *preslikava* pomenila isto stvar.

Uvod

Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ torus (ploskev) v pokončni legi, in na njem opazujmo višinsko funkcijo

$$f\colon X \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \to z.$$

Kritične točke te funkcije so tiste točke $p \in X$, kjer je tangentna ravnina na X vzporedna z xy-ravnino, torej kjer ima T_pX normalo enako $(0,0,1) = D(f)_p$. V našem primeru so to naslednje točke torusa: najnižja točka p_1 (tam se pri gibanju v vsaki izmed obeh koordinatnih smeri ploskve višina povečuje), obe sedelni točki p_2 in p_3 (tam se pri gibanju v eni smeri višina povečuje, v drugi pa zmanjšuje), ter najvišja točka p_4 (tam se pri gibanju v vsaki izmed obeh smeri višina zmanjšuje). *Kritična vrednost* je slika (s preslikavo f) kritične točke. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. *Podnivojna množica* $f^{-1}(\llparenthesis -\infty, a \rrbracket) =: X_a$ sestoji iz tistih točk na X, ki imajo tretjo koordinato manjšo od a, torej X_a je del torusa pod ravnino $\{z = a\}$. Ko je $a < f(p_1)$, je X_a prazna množica. Ko je $a = f(p_1)$ množica $X_a = \{p_1\}$ ni ploskev. Za poljuben a med $f(p_1)$ in $f(p_2)$ je množica X_a homeomorfna disku $\mathbb{B}^2$. Pri $a = f(p_2)$ zopet nimamo ploskve, saj točka $p_2 \in X_a$ nima Evklidske okolice. Za poljuben a med $f(p_2)$ in $f(p_3)$ je X_a homeomorfna disku $\mathbb{B}^2$, ki ima na svoj rob $\mathbb{S}^1$ prilepljen kvadrat $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1$ vzdolž leve in desne stranice $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^1$. Pri $a = f(p_3)$ ponovno nimamo ploskve. Za poljuben a med $f(p_3)$ in $f(p_4)$ je X_a homeomorfen torusu z izrezanim diskom $\mathring{\mathbb{B}}^2$, oz. drugače povedano, X_a je disk $\mathbb{B}^2$, na katerega je najprej nalepljen en kvadrat $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1$, vzdolž $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^1 \subseteq \mathbb{S}^1$, ter nato še drug kvadrat $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1$, vzdolž $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^1 \subseteq \mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^1$. Za $a \geq f(p_4)$ pa je $X_a = X$, torej kar cel torus.

Ko smo povečevali parameter a, je množica X_a rasla. Videli smo, da ko se je a gibal v območju brez kritičnih vrednosti, se topologija ploskve X_a ni spremenila. Vsakič ko smo prečkali kritično vrednost *indeksa* k (torej k je število koordinatnih smeri, v katerih se višina f zmanjšuje), pa smo nalepili prostor $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{2-k}$ vzdolž $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{2-k} \subseteq \partial X_a$. Ta princip odkrivanja topologije ploskve s pomočjo gladke funkcije na njej ima daljnosežne posplošitve na gladke mnogoterosti vseh dimenzij. Kritične točke gladke funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ na n-mnogoterosti imajo možne indekse med 0 in n. Tiste z indeksom 0 so lokalni minimumi, tiste z indeksom n lokalni maksimumi, ostalim, tj. z indeksom $0 < k < n$, pa rečemo *sedelne točke*. Fundamentalni izrek pravi, da ko z a prečkamo kritično vrednost, ki je slika le ene kritične točke (indeksa k), smo s tem na X_a nalepili k-ročaj $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ vzdolž $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k} \subseteq \partial X_a$.

Pri tem študiju se je potrebno omejiti na dovolj lepe funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$ (npr. konstantne že niso v redu). Izkaže se, da je večina funkcij dobrih za tovrstno analizo mnogoterosti. Tako lahko vsako kompaktno gladko n-mnogoterost X s pomočjo gladke funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ zapišemo kot naraščajoče zaporedje podprostorov $X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_m = X$, kjer je $X_0 = \mathbb{B}^n$, vsak naslednji X_{i+1} pa je dobljen iz X_i z dodajanjem ročaja. Z drugimi besedami, X ima *dekompozicijo na ročaje*. Vsaka dekompozicija na ročaje inducira CW dekompozicijo prostora X, ki ima toliko k-celic kot ima X kritičnih točk indeksa k. Od tod pridejo omejitve na homologijo prostora: k-to bettijevo število je manjše od števila kritičnih točk indeksa k funkcije f. Vidimo, da ena sama gladka funkcija na mnogoterosti pove zelo veliko o njeni strukturi.

Poglavje 0

Ponovitev

V uvodnem poglavju na hitro in brez dokazov ponovimo nekaj definicij in osnovnih lastnosti objektov iz *linearne algebre* (diagonalizabilnost matrik), *analize v* $\mathbb{R}^n$ (lastnosti odvedljivih funkcij $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$), *diferencialne topologije* (gladke mnogoterosti, gladke preslikave, tangentni prostor), *abstraktne algebre* (kolobarji, moduli, homologija verižnega kompleksa), in *algebraične topologije* (CW-kompleksi, homotopija, singularna in celularna homologija), ki jih bomo potrebovali v kasnejših poglavjih. Splošne topologije ne ponavljamo.

Linearna algebra: Zanimale nas bodo le matrike z realnimi vrednostmi. Matrika $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je: *normalna*, ko je $AA^t=A^tA$; *simetrična*, ko velja $A^t=A$; *ortogonalna*, ko velja $A^t=A^{-1}$.

Za poljubno matriko $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ definirajmo števila $n_+(A)$:= št. pozitivnih lastnih vrednosti A, $n_-(A)$:= št. negativnih lastnih vrednosti A, in $n_0(A)$:= št. ničelnih lastnih vrednosti A.

Simetrična matrika $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je *pozitivno definitna / pozitivno semidefinitna / negativno definitna / negativno semidefinitna*, ko za vsak $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ velja $\langle Ax,x\rangle>0$ / $\langle Ax,x\rangle\geq 0$ / $\langle Ax,x\rangle<0$ / $\langle Ax,x\rangle\leq 0$, kjer $\langle \_,\_\rangle$ označuje standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}^n$, in A je *nedefinitna*, ko ni niti pozitivno niti negativno semidefinitna. *Spekter* matrike A, $\sigma(A)$, je multimnožica vseh lastnih vrednosti, skupaj z njihovimi algebraičnimi kratnostmi.

Izrek 1: [21, 10.19, 11.25, 11.26], [18, 8.3,8.4].
a) *Matrika $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je normalna natanko tedaj, ko obstaja neka ortogonalna matrika $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, tako da je $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\left[\begin{smallmatrix}a_1&-b_1\\b_1&a_1\end{smallmatrix}\right],\ldots,\left[\begin{smallmatrix}a_l&-b_l\\b_l&a_l\end{smallmatrix}\right])$ za neke $\lambda_i,a_j,b_j\in\mathbb{R}$.*
b) *Matrika $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je simetrična natanko tedaj, ko obstaja ortogonalna matrika $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, tako da je $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ za neke $\lambda_i\in\mathbb{R}$.*
c) *Matrika $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonalna natanko tedaj, ko obstaja ortogonalna matrika $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, tako da je $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\left[\begin{smallmatrix}\sin\vartheta_1&-\cos\vartheta_1\\\cos\vartheta_1&\sin\vartheta_1\end{smallmatrix}\right],\ldots,\left[\begin{smallmatrix}\sin\vartheta_l&-\cos\vartheta_l\\\cos\vartheta_l&\sin\vartheta_l\end{smallmatrix}\right])$ za neke $\lambda_i,\vartheta_j\in\mathbb{R}$.*
d) *(Sylvester - 'zakon vztrajnosti' - 1852) Naj bosta $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ simetrični matriki in $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Če je $B=P^tAP$, potem velja $n_+(A)=n_+(B)$, $n_-(A)=n_-(B)$, $n_0(A)=n_0(B)$.*
e) *(Sylvester - definitnost matrik) Simetrična matrika $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivno definitna / pozitivno semidefinitna / negativno definitna / negativno semidefinitna natanko tedaj, ko je $\sigma(A)>0$ / $\sigma(A)\geq 0$ / $\sigma(A)<0$ / $\sigma(A)\leq 0$, in A je nedefinitna, ko ima kako strogo pozitivno in kako strogo negativno lastno vrednost. Poleg tega velja kriterij vodilnih minorjev: $A=[a_{i,j}]_{i,j=1}^n\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivno definitna oz. negativno definitna natanko tedaj, ko je zaporedje*

$$\operatorname{sgn}|a_{i,j}|_{i,j=1}^1,\ \operatorname{sgn}|a_{i,j}|_{i,j=1}^2,\ \operatorname{sgn}|a_{i,j}|_{i,j=1}^3,\ \ldots,\ \operatorname{sgn}|a_{i,j}|_{i,j=1}^n$$

enako zaporedju $1,1,1,\ldots,1$ oz. $-1,1,-1,\ldots,(-1)^n$, kjer je $|a_{i,j}|_{i,j=1}^k$ determinanta matrike $[a_{i,j}]_{i,j=1}^k$, oznaka sgn pa pomeni predznak števila, tj. za $x\in\mathbb{R}$ je $\operatorname{sgn} x=\left\{\begin{smallmatrix}x/|x|;\ x\neq 0\\ 0\ ;\ x=0\end{smallmatrix}\right.\in\{-1,0,1\}$.

Analiza v $\mathbb{R}^n$: Preslikava $f=(f_1,\dots,f_n)\colon U \Subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^r$*-gladka*, za $r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$, ko za vsak $i=1,\dots,n$ v vsaki točki $a\in U$ obstajajo vsi parcialni odvodi $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_m^{i_m}}(a)=D_{i_1,\dots,i_m}(f_i)_a$ reda $k=i_1+\dots+i_m\leq r$, in so zvezni kot funkcije $U\to\mathbb{R}$, $a\mapsto D_{i_1,\dots,i_m}(f_i)_a$. Vsaka $\mathcal{C}^r$-gladka preslikava ($r\geq 1$) je tudi $\mathcal{C}^{r-1}$-gladka in zvezna (tj. $\mathcal{C}^0$-gladka). *Jacobijeva matrika* $\mathcal{C}^1$-gladke preslikave $f=(f_1,\dots,f_n)\colon U\Subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ v točki $a\in U$ je $D(f)_a=\big[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\big]_{i,j=1}^{n,m}$. *Hessejeva matrika* $\mathcal{C}^2$-gladke funkcije $f\colon U\Subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ v točki $a\in U$ je $D^2(f)_a=\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\big]_{i,j=1}^{m}$.

Preslikava $f\colon U\Subset\mathbb{R}^m\to V\Subset\mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^r$*-difeomorfizem*, ko je bijektivna in sta f, f^{-1} $\mathcal{C}^r$-gladki. To je možno samo, ko je $m=n$. Res, če sta f in f^{-1} $\mathcal{C}^r$-gladki, potem po 2.a) spodaj velja, da je matrika $D(f)_a$ kar izomorfizem vektorskih prostorov $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$, torej sledi $m=n$. Za dokaz v primeru $\mathcal{C}^0$-gladkosti (tj. ko je f le homeomorfizem) so potrebne močnejše metode, npr. singularna homologija 5 spodaj. Za poljubno podmnožico $A\subseteq\mathbb{R}^m$ in $a_0\in A$ je preslikava $f\colon A\to\mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^r$*-gladka v* a_0, ko obstaja okolica $a_0\in U\Subset\mathbb{R}^m$ in $\mathcal{C}^r$-gladka preslikava $\overline{f}\colon U\to\mathbb{R}^n$, tako da je $\overline{f}|_{A\cap U}=f|_{A\cap U}$; preslikava f je $\mathcal{C}^r$*-gladka*, ko je gladka v vsaki točki $a\in A$.

Naj bo dana funkcija $f\colon X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ na neki podmnožici v $\mathbb{R}^n$. Za točko $p\in X$ pravimo da je: *lokalni maksimum*, ko obstaja okolica $p\in U\Subset X$, tako da je $f(p)\geq f(U)$; *strogi lokalni maksimum*, ko obstaja okolica $p\in U\Subset X$, tako da je $f(p)>f(U\setminus\{p\})$; *lokalni minimum*, ko obstaja okolica $p\in U\Subset X$, tako da je $f(p)\leq f(U)$; *strogi lokalni minimum*, ko obstaja okolica $p\in U\Subset X$, tako da je $f(p)<f(U\setminus\{p\})$; *lokalni ekstrem*, ko je lokalni maksimum ali lokalni minimum; *strogi lokalni ekstrem*, ko je strogi lokalni maksimum ali strogi lokalni minimum. Vsak strogi lokalni maksimum/minimum/ekstrem je lokalni maksimum/minimum/ekstrem.

Izrek 2: [23, 8.3.2, 8.4.4, 8.4.5, 8.5.4, 8.6.1], [24, 11.4.1], [19, 2.9.7, 3.2.4, 3.2.9, 3.5.1], [20, 6.12.7], [14, 1.3.4, 1.4.3, 1.4.4]. *Naj bo* $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

a) *Če sta* $f\colon U\Subset\mathbb{R}^m\to V\Subset\mathbb{R}^n$ *in* $g\colon V\Subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^o$ $\mathcal{C}^1$*-gladki funkciji ter* $p\in U$*, potem velja*

$$D(g\circ f)_p=D(g)_{f(p)}\cdot D(f)_p.$$

b) *Če sta* $f\colon U\Subset\mathbb{R}^n\to V\Subset\mathbb{R}^n$ *in* $g\colon V\Subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$*-gladki funkciji ter* $p\in U$*, potem velja*

$$D^2(g\circ f)_p=D(f)_p^t\cdot D^2(g)_{f(p)}\cdot D(f)_p+D(g)_{f(p)}\cdot D^2(f)_p.$$

c) *(Taylorjev razvoj) Naj bo* $U\Subset\mathbb{R}^n$ *konveksna podmnožica,* $f\colon U\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^r$*-gladka funkcija, in* $p\in U$*. Potem obstaja funkcija* $O\colon U\to\mathbb{R}$*, tako da za vsak* $x\in\mathbb{R}^n$ *z lastnostjo* $x+p\in U$ *velja*

$$f(x+p)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}\sum_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n}D_{i_1,\dots,i_k}(f)_p\cdot x_{i_1}\cdots x_{i_k}+O(x)\qquad \text{in}\qquad \tfrac{O(x)}{\|x\|^{r-1}}\xrightarrow{x\to 0}0.$$

d) *('inverzna funkcija') Naj bo* $f\colon U\Subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^r$*-gladka funkcija in* $p\in U$*. Če je* $D(f)_p$ *obrnljiva, potem obstajajo* $U',V'\Subset\mathbb{R}^n$*,* $p\in U'\subseteq U$*,* $f(p)\in V'$*, in* $\mathcal{C}^r$*-gladka funkcija* $f'\colon V'\to U'$*, tako da je*

$$f'\circ f|_{U'}=id_{U'}\quad \text{in}\quad f|_{U'}\circ f'=id_{V'}\quad \text{in}\quad D(f')_{f(p)}=D(f)_p^{-1}.$$

Torej: gladka funkcija $U\Subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$*, ki ima v točki* p *obrnljiv odvod, je v* p *lokalni difeomorfizem.*

e) *('implicitna funkcija') Naj bo* $f\colon U\times V\Subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^r$*-gladka funkcija,* $(a,b)\in U\times V$*,* $f(a,b)=0$*,* $D_x(f):=[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]_{i,j=1}^{n,m}$*,* $D_y(f):=[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}]_{i,j=1}^{n}$*. Če je matrika* $D_y(f)_{(a,b)}$ *obrnljiva, potem obstajajo* $U'\Subset U$*,* $V'\Subset V$*,* $(a,b)\in U'\times V'$*, in enolična* $\mathcal{C}^r$*-gladka funkcija* $g\colon U'\to V'$*, tako da je*

$$\big\{(x,y)\in U'\times V';\ f(x,y)=0\big\}=\big\{(x,g(x));\ x\in U'\big\}\quad \text{in}\quad D(g)_x=-D_y(f)_{(x,g(x))}^{-1}\cdot D_x(f)_{(x,g(x))}$$

za vsak $x\in U'$*. Torej: če ima gladek sistem enačb* $f(x,y)=0$ *točko* (a,b) *za rešitev, in če je odvod* f *po* y *v tej točki obrnljiv, potem je ta sistem rešljiv na* y *povsod v dovolj majhni okolici* (a,b)*.*

f) *('implicitna funkcija, surjektivna oblika') Naj bo $f: U \Subset \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^r$-gladka funkcija, $a \in U$, $f(a)=0$, in $D(f)_a$ surjektivna (matrika s polnim rangom). Potem obstaja okolica $0 \in V$ in $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem $\varphi\colon V \Subset \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow U \Subset \mathbb{R}^{m+n}$, $\varphi(0)=a$, tako da na V velja*

$$f \circ \varphi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Torej: gladka funkcija $U \Subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$, ki ima v točki a surjektiven odvod, je lokalno, po komponiranju z difeomorfizmom ('zamenjavi koordinat'), koordinatna projekcija.

g) *('implicitna funkcija, injektivna oblika') Naj bo $f\colon U \Subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ $\mathcal{C}^r$-gladka funkcija, $0 \in U$, $f(0)=0$, in $D(f)_0$ injektivna (matrika s trivialnim jedrom). Potem obstaja okolica $0 \in V \Subset f(U)$ in $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem $\varphi\colon V \Subset \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \varphi(V) \Subset \mathbb{R}^{m+n}$, $\varphi(0)=0$, tako da na V velja*

$$\varphi \circ f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Torej: gladka funkcija $U \Subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$, ki ima v točki a surjektiven odvod, je lokalno, po komponiranju z difeomorfizmom ('zamenjavi koordinat'), koordinatna vložitev.

h) *('lokalni ekstremi') Naj bo $f: U \Subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$-gladka funkcija in $p \in U$. Tedaj velja naslednje. (i) Če je p lokalni ekstrem funkcije f, potem je $D(f)_p = 0$. (ii) Naj bo $D(f)_p = 0$. Če je $D^2(f)_p$ pozitivno / negativno definitna, tedaj je p strogi lokalni maksimum / strogi lokalni minimum funkcije f. Če je $D^2(f)_p$ nedefinitna, potem p ni lokalni ekstrem, in mu rečemo* sedlo. *Če je $D^2(f)_p$ le semidefinitna, pa ne moremo sklepati o tem, ali je p lokalni ekstrem.*

i) *(Fubini) Naj bosta $A \subseteq \mathbb{R}^m$ in $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kvadra ter $f\colon A \times B \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem je $\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \big(\int_B f(x,y)dy\big)dx = \int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_B \big(\int_A f(x,y)dx\big)dy$.*

Komentar k točki h): Npr. za funkciji $f_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pm x^4$ velja $D(f_\pm)_0 = 0$ in $D^2(f_\pm)_0 = 0$, toda ena ima v 0 maksimum, druga pa minimum. Za funkcijo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 - y^4$ je $D(f)_0 = 0$ in $D^2(f)_0 = 0$, a v 0 nima niti lokalnega maksimuma niti lokalnega minimuma.

Diferencialna topologija: Naj bo X topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, in I poljubna indeksna množica. Množica $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i);\ i \in I\}$ je *$\mathcal{C}^r$-∂-n-atlas na X*, ko velja naslednje:

(i) $\{U_i;\ i \in I\}$ je odprto pokritje za X;

(ii) φ_i je homeomorfizem iz U_i na neko odprto množico v $\mathbb{R}^n_+$;

(iii) za vsaki U_i, U_j z nepraznim presekom je $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \Subset \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \Subset \mathbb{R}^n_+$ $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem v običajnem smislu iz analize (za to funkcijo obstaja razširitev na odprto okolico v $\mathbb{R}^n$, ki ima vse parcialne odvode do reda r in so zvezni).

Paru (U_i, φ_i) iz atlasa na X pravimo *karta na X*. Če vsaka izmed kart slika v $\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ (oz. ekvivalentno, v $\mathbb{R}^n \approxeq \mathbb{R}^{n-1} \times (\!|0, \infty|\!)$), potem je $\mathcal{U}$ *$\mathcal{C}^r$-n-atlas na X*. Dva $\mathcal{C}^r$-∂-n-atlasa $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ na X sta *$\mathcal{C}^r$-ekvivalentna*, ko je njuna unija zopet $\mathcal{C}^r$-atlas, tj. ko je $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{U}\ \forall (U', \varphi') \in \mathcal{U}'$ bodisi $U \cap U' = \emptyset$ bodisi pa je $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$ $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem. To je ekvivalenčna relacija na množici vseh $\mathcal{C}^r$-atlasov na X. *$\mathcal{C}^r$-∂-n-mnogoterost* je urejen par $(X, [\mathcal{U}])$, kjer je X Hausdorffov 2-števen topološki prostor, $[\mathcal{U}]$ pa je neki ekvivalenčni razred $\mathcal{C}^r$-∂-n-atlasov na X. Alternativno, $\mathcal{C}^r$-∂-n-mnogoterost je par $(X, \mathcal{U})$, kjer je X Hausdorffov 2-števen topološki prostor, $\mathcal{U}$ pa je neki maksimalen (glede na $\subseteq$) $\mathcal{C}^r$-∂-n-atlas na X (definicija je smiselna, ker je unija ekvivalentnih $\mathcal{C}^r$-atlasov zopet $\mathcal{C}^r$-atlas). Ko je $\mathcal{U}$ kar $\mathcal{C}^r$-n-atlas, imamo *$\mathcal{C}^r$-n-mnogoterost*. $\mathcal{C}^\infty$-mnogoterostim pravimo *gladke mnogoterosti*, $\mathcal{C}^0$-mnogoterostim pa *topološke mnogoterosti* (za njih je pogoj (iii) v definiciji avtomatsko izpolnjen).

Če je Y $\mathcal{C}^r$-N-mnogoterost, potem je $X \subseteq Y$ $\mathcal{C}^r$-*n-podmnogoterost*, ko za vsak $x \in X$ obstaja karta (U, φ) na Y okoli x, tako da je $\varphi(U) = \mathbb{R}^N$ in $\varphi(U \cap X) = \mathbb{R}^n \times 0^{N-n}$. Tedaj je množica $\{(U \cap X, \varphi|_{U \cap X})\}$ vseh takih parov $\mathcal{C}^r$-n-atlas na X, ki mu pravimo *inducirani atlas* na X. V posebnem, za $\mathcal{C}^r$-n-podmnogoterost $X \subseteq \mathbb{R}^N$ pravimo, da je X *vložena* $\mathcal{C}^r$-n-mnogoterost. Takrat je vsaka preslikava $\alpha := (\varphi|_{U \cap X})^{-1} : \varphi(U \cap X) = \mathbb{R}^n \to X \subseteq \mathbb{R}^N$, ki ji rečemo *lokalna parametrizacija*, $\mathcal{C}^r$-gladka v običajnem smislu iz analize, in matrika $D(\alpha)_{\varphi(p)}$ ima poln rang. Za vloženo n-mnogoterost $X \subseteq \mathbb{R}^N$ in $p \in X$ je *tangentni prostor X v p*, T_pX, enak zalogi vrednosti linearne preslikave $D(\alpha)_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, kjer je $\alpha : \mathbb{R}^n \to X$ lokalna parametrizacija z lastnostjo $\alpha(0) = p$. Definicija je neodvisna od izbire α: za vsako drugo lokalno parametrizacijo $\alpha' : \mathbb{R}^n \to X$, $0 \mapsto p$ je prehodna preslikava $\alpha^{-1} \circ \alpha'$ difeomorfizem, je $D(\alpha^{-1} \circ \alpha')$ izomorfizem, in od tod $D(\alpha')_0(\mathbb{R}^n) = D(\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha')_0(\mathbb{R}^n) = D(\alpha)_0 \circ D(\alpha^{-1} \circ \alpha')_0(\mathbb{R}^n) = D(\alpha)_0(\mathbb{R}^n)$. Množica T_pX je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^N$ z bazo $D(\alpha)_0 e_1, \ldots, D(\alpha)_0 e_n$. Za vloženo n-mnogoterost $X \subseteq \mathbb{R}^N$ je *tangentni sveženj na X* prostor $TX := \{(p, v); p \in X, v \in T_pX\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ z inducirano topologijo, skupaj s projekcijo $\pi : TX \to X$, $(p, v) \mapsto p$, za katero je $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_pX$. Prostor TX opremimo z atlasom $\{(TU, T\varphi); (U, \varphi)$ je karta za $X\}$, kjer je $TU = \{(p, v) \in TX; p \in U\}$ $= \pi^{-1}(U)$ in $T\varphi : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ preslikava, ki pošlje $(p, D(\alpha)_0 v) \mapsto (\varphi(p), D(\varphi \circ \alpha)_0 v)$. S tem TX postane $\mathcal{C}^{r-1}$-$2n$-mnogoterost. Mnogoterost je *sklenjena*, ko je kompaktna in brez robu.

Preslikava $f : X \to Y$ med $\mathcal{C}^r$-m- in $\mathcal{C}^r$-n-mnogoterostjo je $\mathcal{C}^r$*-gladka*, ko za vsako točko $p \in X$ obstaja karti (U, φ) na X okoli p in (V, ψ) na Y okoli $f(p)$, tako da je $f(U) \subseteq V$ in je preslikava $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \Subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \Subset \mathbb{R}^n$ gladka v običajnem smislu iz analize. Vsaka $\mathcal{C}^r$-gladka preslikava ($r \geq 1$) med mnogoterostmi je tudi $\mathcal{C}^{r-1}$-gladka in zato zvezna. Če je $f : X \subseteq \mathbb{R}^M \to Y \subseteq \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^r$-gladka preslikava med $\mathcal{C}^r$-m- in $\mathcal{C}^r$-n-mnogoterostjo, potem za vsako točko $p \in X$ preslikava f inducira linearno preslikavo $D(f)_p : T_pX \to T_{f(p)}Y$: če sta $\alpha : U \Subset \mathbb{R}^m \to \widetilde{U} \Subset X$, $\alpha(0) = p$ in $\beta : V \Subset \mathbb{R}^n \to \widetilde{V} \Subset Y$, $\beta(0) = f(p)$, lokalni parametrizaciji, potem definiramo $D(f)_p : D(\alpha)_0 v \longmapsto D(\beta)_0 D(\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)_0 v$, kjer je $v \in \mathbb{R}^m$. To inducira preslikavo $D(f) : TX \to TY$ med tangentnimi svežnji. *Vektorsko polje na X* je gladka preslikava $v : X \to TX$, za katero velja $\forall p \in X : v(p) \in T_pX$.

Preslikava $f : X \to Y$ med $\mathcal{C}^r$-mnogoterostmi je: $\mathcal{C}^r$*-difeomorfizem*, ko je bijektivna in sta f, f^{-1} $\mathcal{C}^r$-gladki; $\mathcal{C}^r$*-vložitev*, ko je $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem na svojo sliko; $\mathcal{C}^r$*-imerzija*, ko je $D(f)_x$ injektivna za vsak $x \in X$; $\mathcal{C}^r$*-submerzija*, ko je $D(f)_x$ surjektivna za vsak $x \in X$.

Kartezičnemu produktu intervalov $B = \prod_{i=1}^N [\![a_i, b_i]\!] \subseteq \mathbb{R}^N$ pravimo *kvader*, z *volumnom* $\mu(B) := \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$. Množica $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ima *mero 0*, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja števno mnogo kvadrov $\{B_i;\ i \in \mathbb{N}\}$, tako da je $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ in $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \varepsilon$. Vidimo: števna unija množic z mero 0 je zopet množica z mero 0. Če je X (2-števna) n-mnogoterost in A njena podmnožica, potem ima A *mero* 0, ko za vsako karto (U, φ) na X velja, da ima $\varphi(U \cap A)$ mero 0 v $\mathbb{R}^N$.

Če je $f : X \to Y$ gladka preslikava med gladkima mnogoterostma in $x \in X$, potem je x *kritična točka* za f, ko $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ ni surjektivna, za neki karti φ na X in ψ na Y (tedaj po 2.a) to velja za vsaki karti). V nasprotnem je to *regularna točka*. In $y \in Y$ je *kritična vrednost* za f, ko je $y = f(x)$ za neko kritično točko x od f. Točka $y \in Y$ je *regularna*, ko so vse točke iz $f^{-1}(y)$ regularne (če je $y \in Y \setminus f(X)$, se to šteje za regularno vrednost). Torej, za $m < n$ in preslikavo $f : X \to Y$ med m- in n-mnogoterostjo, je vsaka točka $p \in X$ kritična, saj linearna preslikava iz manj v več dimenzionalen prostor ni nikoli surjektivna. Za $m = n$ pa je točka $p \in X$ nekritična natanko tedaj, ko je $D(\psi \circ f \circ \varphi)_{\varphi(x)}$ obrnljiva, torej ko je preslikava $\psi \circ f \circ \varphi$ (in zato f) okoli te točke lokalni difeomorfizem (po 2.d)). Množico kritičnih točk f označimo s $\mathrm{Cr} = \mathrm{Cr}_f$; tedaj je množica kritičnih vrednosti funkcije f enaka $f(\mathrm{Cr})$.

Zaradi 3.b) spodaj bomo v tem delu obravnavali le $\mathcal{C}^\infty$-mnogoterosti, ki jim rečemo *gladke mnogoterosti*. Podobno bo 'difeomorfizem' pomenilo $\mathcal{C}^\infty$-difeomorfizem, in 'gladek atlas' pomenilo $\mathcal{C}^\infty$-atlas. Zaradi 3.c) se bomo v tem delu osredotočili na vložene mnogoterosti.

Izrek 3: [4, 2.3.4, str.27, 3.1.3], [14, 5.3.1, 5.7.4, 6.3.2], [6, 2.26, 17.8].

a) *Če sta X in Y topološki mnogoterosti z robom, potem je $\partial(X\times Y)=(\partial X\times Y)\cup(X\times\partial Y)$.*

b) *(Whitney - 1936)* Naj bo X $\mathcal{C}^1$-∂-mnogoterost. Tedaj obstaja $\mathcal{C}^1$-ekvivalenten $\mathcal{C}^\infty$-atlas na X, ki je do $\mathcal{C}^\infty$-difeomorfizma enoličen.*

c) *(Whitney - 1944)* Naj bo X $\mathcal{C}^\infty$-∂-n-mnogoterost. Če je $n\geq 1$, potem obstaja $\mathcal{C}^\infty$-vložitev $X\hookrightarrow\mathbb{R}^{2n}$. Če je $n>1$, potem obstaja $\mathcal{C}^\infty$-imerzija $X\hookrightarrow\mathbb{R}^{2n-1}$.*

d) *(A.P.Morse, Sard - 1942) Če je $f\colon X\to Y$ gladka preslikava med $\mathcal{C}^\infty$-∂-mnogoterostmi, potem ima množica kritičnih vrednosti $f(\mathrm{Cr})$ mero nič v Y.*

e) *('lepljenje vzdolž odprtih podmnožic') Naj bo X gladka ∂-n-mnogoterost, $U,V\overset{\circ}{\subseteq}X$, $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$, $\phi\colon U\to V$ difeomorfizem, in $q\colon X\longrightarrow\frac{X}{x\sim\phi(x);\,x\in U}=:X_\phi$ kvocientna projekcija. Potem velja:*

- *(i) Na X_ϕ obstaja $\mathcal{C}^\infty$-atlas, tako da je q lokalni difeomorfizem. V posebnem, preslikava $f\colon X_\phi\to Y$ je gladka natanko tedaj, ko je $f\circ q\colon X\to Y$ gladka.*
- *(ii) X_ϕ je Hausdorffov natanko tedaj, ko ne obstaja konvergentno zaporedje $U\ni u_n\xrightarrow{n\to\infty}u\in\overline{U}\setminus U$ z lastnostjo $V\ni\phi(u_n)\xrightarrow{n\to\infty}v\in\overline{V}\setminus V$ za neki v.*
- *(iii) Naj bo X' tudi gladka n-mnogoterost, $U',V'\overset{\circ}{\subseteq}X'$, $\overline{U'}\cap\overline{V'}=\emptyset$, in $\phi'\colon U'\to V'$ difeomorfizem. Potem sta X_ϕ in $X'_{\phi'}$ difeomorfna natanko tedaj, ko obstaja difeomorfizem $f:X\to X'$, tako da je $f\circ\phi=\phi'\circ f$ na U.*

f) *('izboklinaste funkcije') Naj bo X gladka mnogoterost. Za vsako podmnožico $A\overset{\bullet}{\subseteq}X$ in vsako okolico $A\subseteq U\overset{\circ}{\subseteq}X$ obstaja gladka funkcija $f\colon X\to[\![0,1]\!]$, tako da je $f|_A=1$ in $\mathrm{supp} f\subseteq U$.*

g) *('enoparametrična grupa difeomorfizmov') Naj bo X gladka mnogoterost, K kompaktna podmnožica v X, in $v:X\to TX$ gladko vektorsko polje z nosilcem v K. Tedaj obstaja gladka preslikava $\phi:X\times\mathbb{R}\longrightarrow X$, kjer označujemo $\phi(x,t)=\phi_t(x)$, tako da je vsak $\phi_t:X\to X$ difeomorfizem in velja:*

- *(i) $\frac{d\phi_t(x)}{dt}=v(\phi_t(x))$ za vse $(x,t)\in X\times\mathbb{R}$;*
- *(ii) $\phi_0(x)=x$ za vse $x\in X$;*
- *(iii) $\phi_s\circ\phi_t=\phi_{s+t}$ za vse $s,t\in\mathbb{R}$;*
- *(iv) $\phi_t(x)=x$ za vse $(x,t)\in(X\setminus K)\times\mathbb{R}$.*

Pri pogojih (i) in (ii) je družina difeomorfizmov ϕ_t enolična.

Komentar k točki e): Npr. če zlepimo dve kopiji realne osi vzdolž $\phi=\mathrm{id}:U=(\!|-\infty,0|\!)\to V=(\!|-\infty,0|\!)$, dobimo 2-števen prostor z gladkim atlasom, ki pa ni Hausdorffov. Podobno, če zlepimo dve kopiji $\mathbb{R}^2$ vzdolž $\mathrm{id}:\mathring{\mathbb{B}}^2\to\mathring{\mathbb{B}}^2$, dobimo 2-števen prostor z gladkim atlasom, ki ni Hausdorffov. Po drugi strani, če zlepimo $\mathbb{S}^1\times(\!|-\infty,\varepsilon|\!)$ in $\mathbb{S}^1\times(\!|-\varepsilon,\infty|\!)$ vzdolž $\mathrm{id}\colon\mathbb{S}^1\times(\!|-\varepsilon,\varepsilon|\!)\to(\!|-\varepsilon,\varepsilon|\!)$, pa dobimo gladko mnogoterost $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$.

Abstraktna algebra: Naj bo R poljuben kolobar (po dogovoru imajo vsi kolobarji enico, tj. enoto za množenje). Levi R-modul je posplošitev vektorskega prostora nad obsegom D: definicija je enaka, le da ne zahtevamo, da skalarji tvorijo obseg temveč le kolobar R, tj. skalarji niso nujno obrnljivi. Pomemben poseben primer je $R=\mathbb{Z}$, saj '$\mathbb{Z}$-modul' pomeni natanko 'abelova grupa', in pa $R=D$ (obseg), saj 'levi D-modul' pomeni natanko 'vektorski prostor nad D'. Če so M_i $(i\in I)$ levi R-moduli, je njihov *direktni produkt* $\prod_{i\in I}M_i$ enak kartezičnemu produktu množic M_i z operacijama po komponentah, njihova *(zunanja) direktna vsota* $\bigoplus_{i\in I}M_i$ pa je $\{(m_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}M_i;$ le končno mnogo m_i je neničelnih$\}$. Če so

M_i $(i \in I)$ podmoduli levega R-modula M, pravimo da je M *(notranja) direktna vsota* podmodulov M_i, ko se podmoduli M_i paroma sekajo v trivialnem podmodulu $\{0\}$ in generirajo M, tj. $\forall i,j \in I: M_i \cap M_j = \{0\}$ in vsak $m \in M$ je končna R-linearna kombinacija nekih elementov $m_i \in M_i$. V tem primeru je notranja direktna vsota izomorfna zunanji direktni vsoti, in zato pogosto ne omenjamo o kakšni direktni vsoti govorimo (običajno se to razbere iz konteksta). Direktni produkt in direktna vsota I-mnogo kopij modula M sta označeni z $M^{|I|}$ in $M^{(I)}$. Če je indeksna množica končna, potem direktni produkt in direktna vsota sovpadata. Za levi R-modul M pravimo, da je *prost na množici* I, ko je $M \cong \bigoplus_{i\in I} {}_R R = R^{(I)}$, kjer ${}_R R$ označuje R kot levi R-modul. Kardinalnosti $|I|$ pravimo *rang* prostega modula. Ko ima I le končno elementov, $|I| = n$, potem namesto $R^{(I)} = R^{|I|}$ pišemo kar R^n. Velja: če sta množici I in J ekvipolentni, tj. $|I| = |J|$, potem sta modula $R^{(I)}$ in $R^{(J)}$ izomorfna. Obrat, tj. $R^{(I)} \cong R^{(J)} \Rightarrow |I| = |J|$, velja v splošnem le za nekatere vrste kolobarjev, kot npr. glavne kolobarje, ki so opisani spodaj. Npr. kolobar $R = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ ni glaven, in zanj velja $R \cong R^2$. Velja: M je prost natanko tedaj, ko ima bazo, tj. ko obstaja podmnožica, ki generira M in je R-linearno neodvisna. Vsak R-modul je kvocient nekega prostega modula (mimogrede: vsaka grupa je izomorfna kvocientu proste grupe $\langle I|\emptyset\rangle$; vsak kolobar je izomorfen kvocientu prostega kolobarja, tj. kolobarja nekomutativnih polinomov $\mathbb{Z}\langle I\rangle$; vsak komutativen kolobar je izomorfen kvocientu prostega komutativnega kolobarja, tj. kolobarja polinomov $\mathbb{Z}[I]$; vsaka R-algebra je izomorfna kvocientu proste R-algebre $R\langle I\rangle$; vsaka komutativna R-algebra je izomorfna kvocientu proste komutativne R-algebre $R[I]$; itd.; vsaka univerzalna Ω-algebra je izomorfna kvocientu proste univerzalne Ω-algebre). V tem smislu so prosti moduli natanko tisti "brez relacij". Npr. vektorski prostori nad obsegom D so, ob privzetku Zornove leme oz. aksioma izbire, vsi prosti (kot D-moduli), končne abelove grupe pa nikoli niso proste (kot $\mathbb{Z}$-moduli), saj ima $\mathbb{Z}$ neskončno elementov. *Ideal* kolobarja R je podmodul v ${}_R R$. V komutativnem kolobarju R je ideal, generiran z enim elementom $a \in R$, enak $Ra = \{ra; r \in R\}$.

Glavni kolobar je komutativen kolobar R, ki nima deliteljev niča, in v katerem je vsak ideal generiral z le enim elementom. Najbolj pogosti primeri glavnih kolobarjev so obsegi K, cela števila $\mathbb{Z}$, in polinomi $K[x]$ v eni spremenljivki. *Praelement* v glavnem kolobarju R je element $p \in R \setminus (\{\text{obrnljivi elementi v } R\} \cup \{0\})$, tako da velja $\forall a,b \in R: p|ab \Rightarrow (p|a \text{ ali } p|b)$, kjer $p|a$ pomeni $\exists r \in R: rp = a$. Elementa $a,b \in R$ sta *asociirana* v R, ko obstaja obrnljiv element $u \in R$, tako da je $ua = b$. Vidimo, da dva asociirana elementa generirata isti ideal. Npr. v $\mathbb{Z}$ sta obrnljiva elementa le ± 1, in 'asociiranost' pomeni 'biti enak do predznaka'.

Verižni kompleks, označeno z $(M_*, d_*) = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, je družina levih R-modulov M_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ in homomorfizmov $d_n: M_n \to M_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, ki jim rečemo *robni homomorfizmi* oz. *robni operatorji*, tako da velja $d_{n-1} \circ d_n = 0$. Verižne komplekse pogosto zapišemo kot zaporedja

$$\ldots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{d_1} M_0.$$

Pogoj $d_n \circ d_{n+1} = 0$ je ekvivalenten pogoju $\operatorname{Im} d_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} d_n$. *Homologija* verižnega kompleksa (M_*, d_*) je družina levih R-modulov $H_*(M_*, d_*) = (H_n(M_*, d_*))_{n\in\mathbb{N}_0}$, kjer je

$$H_n(M_*, d_*) := \frac{\operatorname{Ker} d_n}{\operatorname{Im} d_{n+1}} \leq \frac{M_n}{\operatorname{Im} d_{n+1}}.$$

Za verižna kompleksa (M_*, d_*^M) in (N_*, d_*^N) je *verižna transformacija* $f_*: (M_*, d_*^M) \longrightarrow (N_*, d_*^N)$ družina modulskih homomorfizmov $f_n: M_n \longrightarrow N_n$, tako da velja $d_n^N \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, tj. dobimo komutativen diagram (komutativno 'lestev')

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^M} & M^n & \xrightarrow{d_n^M} & M_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{d_1^M} & M_0 \\
& \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \\
\cdots \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow[d_{n+1}^N]{} & N_n & \xrightarrow[d_n^N]{} & N_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow[d_1^M]{} & M_0.
\end{array}$$

Če je f_* verižna transformacija, potem vsak f_n slika $\operatorname{Im} d^M_{n+1}$ v $\operatorname{Im} d^N_{n+1}$ ter $\operatorname{Ker} d^M_n$ v $\operatorname{Ker} d^N_n$. Torej verižne transformacije inducirajo homomorfizme na homologiji.

Izrek 4: [16, 8.6.1, 8.6.2, 8.6.3].

a) *Naj bo R glavni kolobar. Rang $|I|$ prostega modula $R^{(I)}$ je enolično določen. Vsak podmodul M prostega modula $R^{(I)}$ je prost, in njegov rang $|J|$ je kvečjemu manjši od $|I|$. Če je $|I|=n\in\mathbb{N}$ in $|J|=k\leq n$, potem obstaja baza $b_1,\ldots,b_n$ za R^n in skalarji $r_1,\ldots r_k\in R$, tako da je $r_1b_1,\ldots,r_kb_k$ baza za M in velja $r_{i+1}\in Rr_i$ za $i<k$.*

b) *Za vsak končno generiran modul M nad glavnim kolobarjem R obstajajo $n\in\mathbb{N}_0,\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{N}$ in praelementi $p_1,\ldots,p_m\in R$ (ne nujno različni), tako da velja*

$$M\ \cong\ R^n\,\oplus\,R/Rp_1^{k_1}\,\oplus\,\ldots\,\oplus\,R/Rp_m^{k_m},$$

Ta dekompozicija je, do vrstnega reda sumandov $R/Rp_i^{k_i}$ in asociiranosti elementov $p_1,\ldots,p_m$ natančno, enolična. Število n imenujemo Bettijevo število *modula M.*

Algebraična topologija: Naj bosta X in Y topološka prostora ter $A\subseteq X$. *Retrakcija X na A* je zvezna preslikava $r:X\to A$, tako da je $r|_A=\mathrm{id}_A$. Za zvezni preslikavi $f,g:X\to Y$ je *homotopija med f in g* zvezna preslikava $h:X\times\mathbb{I}\to Y$, tako da velja $h_0=f$ in $h_1=g$, kjer za $t\in I$ označujemo $h_t:=h(\_,t):X\to Y$. Če je h homotopija med preslikavama f in g, potem to označimo s $h:f\simeq g$, ko pa med f in g obstaja neka (nespecificirana) homotopija, pa označimo zgolj $f\simeq g$. Če je $A\subseteq X$ podprostor in za homotopijo $h:X\times\mathbb{I}\to Y$ med preslikavama f in g velja $\forall t\in\mathbb{I}:\ h_t|_A=\mathrm{id}_A$, potem je to homotopija *relativno glede na A*, oz. z oznakami, $h:f\simeq g\,(\mathrm{rel}\,A)$; ko ne specificiramo konkretne homotopije h označimo le $f\simeq g\,(\mathrm{rel}\,A)$. *Deformacijska retrakcija iz X na A* je zvezna preslikava $h:X\times\mathbb{I}\to X$, tako da je h_1 retrakcija X na A in $h_0=\mathrm{id}_X$; če velja še pogoj $\forall t\in\mathbb{I}:\ h_t|_A=\mathrm{id}_A$, je to *krepka deformacijska retrakcija iz X na A*. Zvezna preslikava $f:X\to Y$ je *homotopska ekvivalenca*, ko obstaja zvezna preslikava $g:Y\to X$, tako da je $g\circ f\simeq\mathrm{id}_X$ in $f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y$; tedaj je g *homotopski inverz* preslikave f. V takem primeru označimo $f:X\simeq Y$; ko pa obstaja neka (nespecificirana) homotopska ekvivalenca med X in Y, pa označimo zgolj $X\simeq Y$. Če je h deformacijska retrakcija iz X na A, potem je inkluzija $A\hookrightarrow X$ homotopska ekvivalenca, s homotopskim inverzom h_1.

Standardni n-simplex v $\mathbb{R}^{n+1}$ je prostor

$$\Delta^n:=\mathrm{conv}(e_0,\ldots,e_n)=\{(t_0,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1};\ t_i\in\mathbb{I},\textstyle\sum_{i=0}^n t_i=1\}.$$

Singularni n-simpleks v X je zvezna preslikava $\sigma:\Delta^n\to X$. Množico vseh singularnih n-simpleksov v X označimo s $\mathcal{C}(\Delta^n,X)$. Naj bo $S_n(X):=\mathbb{Z}^{(\mathcal{C}(\Delta^n,X))}$ prosta abelova grupa na vseh singularnih n-simpleksih v X. Homomorfizem $d_n:S_n(X)\to S_{n-1}(X)$ definiramo na bazi $\mathcal{C}(\Delta^n,X)$ grupe $S_n(X)$ s predpisom

$$d_n(\sigma):=\sum_{i=0}^n(-1)^i\sigma\circ(\ldots,\widehat{a_i},\ldots),$$

kjer $(\ldots,\widehat{a_i},\ldots)$ označuje preslikavo, ki Δ^{n-1} afino preslika na $\mathrm{conv}(\{e_0,\ldots,e_n\}\backslash\{e_i\})\approx\Delta^{n-1}$, in nato d_n razširimo $\mathbb{Z}$-linearno na celoten $S_n(X)$. Velja $d_{n-1}\circ d_n=0$; zato dobimo *singularni verižni kompleks* $(S_*(X),d_*)$, oz.

$$\ldots\longrightarrow S_{n+1}(X)\xrightarrow{d_{n+1}}S_n(X)\xrightarrow{d_n}S_{n-1}(X)\longrightarrow\ldots\longrightarrow S_1(X)\xrightarrow{d_1}S_0(X),$$

in njegovo homologijo imenujemo *singularna homologija prostora* X, označeno $H_*(X)$. Vsaka zvezna preslikava $f\colon X\to Y$ inducira verižno transformacijo $f_*: S_*(X)\to S_*(Y)$, kjer je vsak f_n na bazi definiran kot $(\sigma\colon \Delta^n\to X)\overset{f_n}{\longmapsto}(f_n(\sigma):=f\circ\sigma\colon \Delta^n\to Y)$. Zato vsaka zvezna preslikava $f: X\to Y$ inducira homomorfizme $f_*: H_*(X)\to H_*(Y)$. Po 5.b) je $H_n(\mathbb{S}^n)\cong\mathbb{Z}$. Zato vsaka zvezna preslikava $f\colon \mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ inducira homomorfizem $f_*\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, ki mora biti oblike $x\mapsto kx$. Tedaj številu k rečemo *stopnja preslikave* f, označeno $\deg(f)$. Tu je potrebno omeniti, da med $H_n(\mathbb{S}^n)$ in $\mathbb{Z}$ obstajata natanko dva izomorfizma, saj je $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})|=|\{x\mapsto x, x\mapsto -x\}|=2$. Zato obstajata natanko dve inducirani preslikavi $f_*: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, katerih stopnja se razlikuje za predznak. Torej če želimo, da je stopnja dobro definirana, moramo najprej izbrati fiksni izomorfizem $H_n(\mathbb{S}^n)\to\mathbb{Z}$, tj. celico $\mathbb{S}^n$ moramo prvo *orientirati*.

Topološki prostor X je *CW-kompleks* oz. *celični kompleks*, ko velja naslednje:

(i) X lahko zapišemo kot naraščajočo unijo podprostorov $X^{(0)}\subseteq X^{(1)}\subseteq\ldots\subseteq X^{(n)}\subseteq\ldots\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}X^{(n)}=X$, kjer $X^{(n)}$ imenujemo n*-skelet* od X;

(ii) $X^{(0)}$ je diskreten prostor, vsak drug $X^{(n)}$ pa je dobljen iz $X^{(n-1)}$ z *lepljenjem* n*-celic*, tj. obstajajo zvezne preslikave $\varphi_{n,i}: \mathbb{S}_i^{n-1}:=\mathbb{S}^{n-1}\longrightarrow X^{(n-1)}$ $(i\in I_n)$, ki jim rečemo *lepilne preslikave*, tako da je $X^{(n)}=X^{(n-1)}\cup_{\varphi_{i,n}}\coprod_{i\in I_n}\mathbb{B}^n=\frac{X^{(n-1)}\,\amalg\,\coprod_{i\in I_n}\mathbb{B}^n}{x\sim\varphi_{n,i}(x);\, n\in\mathbb{N}_0, i\in I_n, x\in\mathbb{B}^n}$;

(iii) X ima *šibko topologijo* oz. *topologijo unije*, tj. $Z\,\underline{\subset}\!\!\!\bullet\,X \;:\Leftrightarrow\; \forall n\in\mathbb{N}: Z\cap X^{(n)}\,\underline{\subset}\!\!\!\bullet\,X^{(n)}$, kjer ima $X^{(n)}$ topologijo dobljeno iz celic in lepilnih preslikav, tj. topologija zaprte krogle, disjunktne unije, in kvocienta.

Taki naraščajoči uniji podprostorov rečemo *CW-dekompozicija* prostora X. Vsak (nediskreten) prostor, ki dopušča CW-dekompozijico, dopušča mnogo CW-dekompozicij (npr. $\mathbb{S}^n$ lahko konstruiramo z eno nič celico, na katero nalepimo $\mathbb{B}^n$, ali pa induktivno, da na $\mathbb{S}^{n-1}$ nalepimo dve kopiji $\mathbb{B}^n$ vzdolž $\partial\mathbb{B}^n=\mathbb{S}^{n-1}$). Običajno si želimo najti tako s čim manj celicami. CW-kompleks je *končno dimenzionalen*, ko je $X=X^{(n)}$ za neki $n\in\mathbb{N}_0$, in *končen*, ko ima končno celic, tj. ko je končnodimenzionalen in je vsak $X^{(n)}$ dobljen z lepljenjem končno mnogo celic ter je $X^{(0)}$ končen. Vidimo, da je pogoj (iii) v zgornji definiciji za končno dimenzionalne CW-komplekse avtomatsko izpolnjen, saj je $X^{(i)}\,\underline{\subset}\!\!\!\bullet\,X^{(i+1)}$. Podmnožica A v CW-kompleksu X je *podkompleks* v X, ko obstajata neki CW-dekompoziciji $A^{(*)}\subseteq X^{(*)}$.

Zvezna preslikava $f: X\to Y$ med CW-kompleksi je *celularna*, ko celicam 'ne dviguje dimenzije', tj. ko velja $\forall n\in\mathbb{N}_0\colon f(X^{(n)})\subseteq Y^{(n)}$. Če je A podkompleks v X, potem je preslikava f *celularna na* A, ko je $f|_A\colon A\to Y$ celularna preslikava.

Izrek 5: [15, 8.5.4, 12.1.5, 12.2.1], [17, 2.14, 2.34, 2.35, 4.8].

a) *(celularna aproksimacija) Če sta X in Y CW-kompleksa ter $f\colon X\to Y$ zvezna preslikava, ki je celularna na podkompleksu $A\leq X$ (npr. $A=\emptyset$), potem obstaja zvezna preslikava $g\colon X\to Y$, tako da je $f\simeq g\,(\mathrm{rel}\,A)$ in $\forall n\in\mathbb{N}_0\colon g(X^{(n)})\subseteq Y(n)$. Torej: vsako zvezno preslikavo med celičnimi kompleksi lahko s homotopijo spremenimo celularne.*

b) *Za poljubne prostore X_i $(i\in I)$ in $k\in\mathbb{N}_0$ velja $H_k(\coprod_{i\in I}X_i)\cong\bigoplus_{i\in I}H_k(X_i)$. Če je S množica povezanih komponent prostora X, potem velja $H_0(X)\cong\mathbb{Z}^{(S)}$.*

c) *Za vsak $k\in\mathbb{N}$ je homologija n-sfere enaka $H_k(\mathbb{S}^n)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}; & k=n\\ 0; & k\neq n\end{cases}$. Homologija točke je $H_k(\mathbb{B}^0)\cong 0$.*

d) *Če sta $f,g\colon X\to Y$ homotopni preslikavi, potem sta $f_*,g_*\colon H_*X\to H_*Y$ enaki preslikavi. V posebnem, če je $f\colon X\to Y$ homotopska ekvivalenca, potem je $f_*\colon H_*X\to H_*Y$ izomorfizem. Za vsaki zvezni preslikavi $f\colon X\to Y$ in $g\colon Y\to Z$ velja $(\mathrm{id}_X)_*=\mathrm{id}_{H_*X}$ in $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$.*

e) *(celularna homologija) Če je X CW-kompleks, z lepilnimi preslikavami $\varphi_{n,i} : \mathbb{B}^n \to X^{(n-1)}$, potem je singularna homologija $H_*(X)$ izomorfna homologiji* celularnega verižnega kompleksa

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}^{(X^{(n+1)})} \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z}^{(X^{(n)})} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}^{(X^{(n-1)})} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Z}^{(X^{(1)})} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^{(X^{(0)})},$$

kjer je $\mathbb{Z}^{(X^{(n)})} = \bigoplus_{e \in X^{(n)}} \mathbb{Z}$ prosta abelova grupa na orientiranih n-celicah, robni operator d_n pa je dan z $|X^{(n-1)}| \times |X^{(n)}|$-matriko, katere (i,j)-ti člen je stopnja preslikave

$$\mathbb{S}_j^{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n,j}} X^{(n-1)} \xrightarrow{\text{quot.}} X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \simeq \bigvee_{k \in I_{n-1}} \mathbb{S}_k^{n-1} \xrightarrow{\text{quot.}} \mathbb{S}_i^{n-1}.$$

Zato je celularna homologija neodvisna od CW-dekompozicije prostora.

Komentar k točki e): Naj bo X končen CW-kompleks. Potem je po 4.a) v celularnem verižnem kompleksu grupa $\operatorname{Ker} d_n$ končno generirana. Zato je tudi $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} = H_n X$ končno generirana abelova grupa. Po klasifikaciji le teh je

$$H_n X \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}}$$

za neka praštevila $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$ (ne nujno različna) in $k_1, \ldots, k_m, k, m \in \mathbb{N}_0$. Ta dekompozicija je, do vrstnega reda sumandov natančno, enolična. Številu k, tj. Bettijevemu številu modula $H_n X$, pravimo *n-to Bettijevo število prostora X*, označeno z $\beta_n(X)$.

Vsakemu končnemu CW-kompleksu X lahko priredimo njegovo *Eulerjevo karakteristiko*, ki je alternirajoča vsota števil i-celic, tj.

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i |X^{(i)}|.$$

Znano je, da četudi se i-to Bettijevo število in število i-celic končnega CW-kompleksa razlikujeta, je njuna alternirajoča vsota enaka:

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \beta_i(X).$$

Poglavje 1

Morsove funkcije

Videli bomo, da ima vsaka gladka funkcija na n-mnogoterosti v okolici vsake svoje neizrojene kritične točke zelo posebno obliko: tam se izraža kot kvadratni polinom $-\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$. Število minusov v tej izražavi, tj. k, bo pomembno v kasnejših poglavjih.

Neizrojene kritične točke: Naj bo X gladka n-mnogoterost in $f : X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija.

Točka $p \in X$ je *kritična točka* oz. *stacionarna točka* funkcije f, ko je $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = 0$ za neko karto (U, φ) okoli p, tj. ko ima $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \Subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\varphi(p)$ vse parcialne odvode enake 0. Ta pojem se ujema s splošnejšim pojmom kritične točke iz strani 18. Definicija je neodvisna od izbire (U, φ): za vsako karto (V, ψ) okoli p je $D(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} = 0$ natanko tedaj ko $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = 0$, saj je $D(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} = D(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} \overset{2.a)}{=} D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$, in ker je $\varphi \circ \psi^{-1}$ difeomorfizem, je matrika $D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$ obrnljiva. Točka, ki ni kritična, je *regularna*. Npr., po 2.h) je vsak lokalni ekstrem funkcije f kritična točka.

Če je $p \in X$ kritična točka funkcije f, potem pravimo, da je p *neizrojena*, ko je za neko karto (U, φ) okoli p Hessejeva matrika drugih odvodov $D^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = \big[\frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p))\big]_{i,j=1}^{n}$ neizrojena, tj. obrnljiva, oz. ko so vse lastne vrednosti te matrike neničelne (ker je $D^2(\ldots)_p$ simetrična, je po 1.b) realno diagonalizabilna). Definicija je neodvisna od izbire (U, φ): za vsako karto (V, ψ) okoli p je $D^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$ obrnljiva natanko tedaj ko je $D^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ obrnljiva, saj je $D^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} = D^2(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} \overset{2.b)}{=}$

$$D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}^{t} \cdot D^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} + \cancel{D(f \circ \varphi^{-1})}_{\varphi(p)} \cdot D^2(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}, \tag{1}$$

kjer sta matriki $D(\varphi \circ \psi^{-1})^t$ in $D(\varphi \circ \psi^{-1})$ izomorfizma ter $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = 0$. Gladki funkciji na mnogoterosti pravimo *Morsova funkcija*, ko so vse njene kritične točke neizrojene.

Zgled 6: Naj bo $f : X \Subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Graf funkcije f je ploskev v $\mathbb{R}^3$. Točka $(x_0, y_0) \in X$ je kritična točka funkcije f natanko tedaj, ko je $D(f)_{(x_0, y_0)} = (D_x f, D_y f)_{(x_0, y_0)} = 0$, kjer D_x označuje parcialni odvod, in tedaj je (x_0, y_0) neizrojena, ko je matrika $\left[\begin{smallmatrix} D_{xx} f & D_{xy} f \\ D_{yx} f & D_{yy} f \end{smallmatrix}\right]_{(x_0, y_0)}$ obrnljiva. Npr. funkcija $f := x^2 + y^2$ ima neizrojeno kritično točko v svojem minimumu $(0, 0)$, funkcija $f := -x^2 - y^2$ ima neizrojeno kritično točko v svojem maksimumu $(0, 0)$, funkcija $f := -x^2 + y^2$ pa ima neizrojeno kritično točko v svojem sedlu $(0, 0)$. Obstajajo tudi izrojene kritične točke. Za funkcijo $f := x^2$ so vse točke na grebenu $\{0\} \times \mathbb{R}$ kritične, torej je $(0, 0)$ neizolirana izrojena kritična točka. Za funkcijo $f := x^2 + y^4$ pa je $(0, 0)$ izrojena kritična točka, ki je izolirana. Enake trditve veljajo za funkcije $f : X \Subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le da imamo tam $n-2$ možnih 'sedelnih točk'. Natančnejšo formulacijo bo dal izrek 9 spodaj. ⧫

Naj bo $a \in \mathbb{R}^N$ vnaprej izbran vektor. Funkciji $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, ki slika $x \mapsto \langle x, a\rangle$, pravimo *višinska funkcija v smeri* a, kjer $\langle\_,\_\rangle$ označuje standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}^N$. Če ima a dolžino 1, lahko $\{a\} =: \{a_1\}$ dopolnimo do ortonormirane baze $\{a_1, \ldots, a_n\}$ prostora $\mathbb{R}^N$, in zato za poljuben element $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i a_i \in \mathbb{R}^N$ velja $\langle x, a\rangle = \alpha_1$, kar pomeni, da je $\langle x, a\rangle$ ravno dolžina projekcije vektorja x na premico skozi a. Opazimo, da je višinska funkcija v smeri $e_N = (0, \ldots, 0, 1)$ ravno običajna višinska funkcija, tj. projekcija na zadnjo koordinato.

Višinske funkcije se morda zdijo zelo poseben primer gladkih funkcij na mnogoterosti, toda v resnici vsaka gladka funkcija "je višinska funkcija" v naslednjem smislu. Če je X gladka mnogoterost, $f: X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija, in $e: X \to \mathbb{R}^N$ gladka vložitev, potem definiramo novo vložitev $\widetilde{e}: X \to \mathbb{R}^{N+1}$, ki pošlje $x \mapsto (e(x), f(x))$. Opazimo, da je $f = h_{\mathbf{e}_{N+1}} \circ \widetilde{e}$, kjer je $\mathbf{e}_{N+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ standardni bazni vektor v $\mathbb{R}^{N+1}$, in $h_{\mathbf{e}_{N+1}}$ višinska funkcija. To pomeni, da je f višinska funkcija na difeomorfni kopiji X, namreč na $\widetilde{e}(X)$.

Zgled 7: Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^3$ gladka ploskev, $a \in \mathbb{R}^3$, in $f: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, a\rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ gladka funkcija. Katere točke $p \in X$ so kritične? Ker je f zožitev funkcije $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, a\rangle$, ki je linearna, je $D(f)_p = f = [a_1, a_2, a_3] : T_pX \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Ta funkcija je ničelna natanko tedaj, ko so vsi vektorji $v \in T_pX$ pravokotni na a. Ugotovili smo, da so kritične točke funkcije f natanko tisti $p \in X$, kjer je $a \in (T_pX)^\perp$, tj. kjer je normala na T_pX vzporedna z a.

Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^N$ gladka n-podmnogoterost, $a \in \mathbb{R}^N$, in $f: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, a\rangle = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Katere točke $p \in X$ so kritične? Naj bo $u \in \mathbb{R}^n \mapsto x(u) \in X \subseteq \mathbb{R}^N$ lokalna parametrizacija in $x(0) = p$. Tedaj je odvod enak $D(f(x(u)))_0 = D(\sum_i a_i x_i(u)))_0 = \sum_i a_i D(x_i(u)))_0 = [a_1, \ldots, a_n] \cdot [D(x_1(u))_0, \ldots, D(x_1(u))_0]^t = [a_1, \ldots, a_n][\frac{x_i}{u_j}(0)]_{i,j=1}^{N,n}$. Torej je $D(f(x(u)))_0 = 0$ natanko tedaj, ko je a pravokoten na vsak stolpec matrike $[\frac{x_i}{u_j}(0)]$, ti pa napenjajo T_pX. Ugotovili smo, da so kritične točke funkcije f natanko tisti $p \in X$, za katere je $a \in (T_pX)^\perp$. ♦

Trditev 8: *Naj bo X gladka n-mnogoterost in $f: X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Neizrojene kritične točke od f so izolirane. Če je X kompaktna, ima f le končno neizrojenih kritičnih točk.*

Dokaz: **a)** Naj bo (U, φ) karta okoli kritične točke $p \in X$ in označimo $\widetilde{U} := \varphi(U) \Subset \mathbb{R}^n$. Kritične točke funkcije $f \circ \varphi^{-1}: \widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so natanko ničle funkcije

$$D(f \circ \varphi^{-1})_\_ : \widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ p \mapsto \left(\tfrac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_1}(p), \ldots, \tfrac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n}(p)\right).$$

Po predpostavki je p neizrojena kritična točka, kar pomeni da je odvod preslikave $D(f \circ \varphi^{-1})_\_$ v točki $\varphi(p)$ obrnljiv. Po izreku o inverzni funkciji 2.d) je $D(f \circ \varphi^{-1})_\_$ injektivna, ko jo zožimo na neko odprto podmnožico $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{U}$. Na tej okolici torej preslikava $D(f \circ \varphi^{-1})_\_$ nima drugih ničel, tj. f na $\varphi^{-1}(\widetilde{V})$ nima drugih kritičnih točk kot p., in zato je p izolirana kritična točka.

Naj bo X kompaktna. Če je množica neizrojenih kritičnih točk za f neskončna, potem po kompaktnosti v tej množici obstaja stekališče. Po prvem odstavku je to protislovje. ■

Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Po izreku 2.c) ima f Taylorjev razvoj

$$f(x+p) = f(p) + \tfrac{1}{1!}\big(\textstyle\sum_i D_i(f)_p x_i\big) + \tfrac{1}{2!}\big(\textstyle\sum_{i,j} D_{ij}(f)_p x_i x_j\big) + \tfrac{1}{3!}\big(\textstyle\sum_{i,j,k} D_{ijk}(f)_p x_i x_j x_k\big) + \ldots .$$

Vidimo, da je p kritična točka funkcije f natanko tedaj, ko v tem razvoju ni linearnih členov. Privzemimo, da to velja. Koeficienti pri členih druge stopnje sestavljajo Hessejevo matriko; ta je obrnljiva natanko tedaj, ko je p neizrojena. Privzemimo, da to velja. Polinom $\sum D_{ij}(f)_p x_i x_j$ lahko zapišemo kot $x^t K x$, za matriko z diagonalo $K_{ii} = D_{ii}(f)_p$ ter $K_{ij} = K_{ji} = D_{ij}(f)_p$. Ker je K konstantna realna simetrična matrika, jo po 1.b) lahko ortogonalno diagonaliziramo: $K = P^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P$. Tedaj je $x^t K x = (Px)^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) Px$. Če f komponiramo z linearnim difeomorfizmom $x \mapsto Px =: y$, dobimo $f(y) = f(p) + \sum_i \lambda_i y_i^2 +$ (členi višjega reda). Če nadalje f komponiramo z difeomorfizmom $y \mapsto (\frac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{y_n}{\sqrt{\lambda_n}}) =: z$, dobimo funkcijo $f(z) = f(p) + \sum_i \epsilon_i z_i^2 +$ (členi višjega reda) za $\epsilon_i \in \{1, -1\}$. Na tak način se ne bomo mogli znebiti višjih členov v razvoju, kot tudi ostanka $O(x)$ iz Taylorjevega izreka (obstajajo $\mathcal{C}^\infty$-gladke funkcije, ki niso analitične, kar pomeni da ostanek ne more izginiti).

Za poljubni difeomorfizem $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ po (1) velja $D^2(f \circ \phi)_{\phi^{-1}(p)} = D(\phi)_p^t \cdot D^2(f)_{\phi(p)} \cdot D(\phi)_p^t$, kar namiguje na 'parametrizirano diagonalizacijo' matrike $D^2(f)_{\phi(p)}$. Želeli bi torej najti neki primeren difeomorfizem ϕ, pri katerem je $D^2(f \circ \phi)_{\phi(p)}$ diagonalna matrika. Naslednji izrek, najpogosteje poimenovan 'Morsova lema', je zgodovinsko pomemben korak pri študiju strukture gladkih mnogoterosti. Pove nam, da pogoj neizrojenosti točke p zagotavlja, da za neki difeomorfizem ϕ v razvoju funkcije $f \circ \phi$ izginejo vsi členi stopnje več od 2.

Izrek 9 (M.Morse - 1925): *Naj bo X gladka n-mnogoterost, $f : X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija, in $p \in X$ neizrojena kritična točka od f. Tedaj obstaja karta (U, φ) od X okoli p, tako da velja $\varphi(p) = 0$ in je $f \circ \varphi^{-1}$ polinom druge stopnje brez linearnih in mešanih členov:*

$$\forall x \in \varphi(U):\quad f \circ \varphi^{-1}(x) \;=\; f(p) \;-\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \;+\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2, \tag{2}$$

kjer je število $k =: \mathrm{ind}_f(p) \in \{0, \ldots, n\}$ neodvisno od izbire karte (U, φ), in mu rečemo (Morsov) indeks *funkcije f v točki p. Če je $k = 0$, je p lokalni minimum f; če je $k = n$, je p lokalni maksimum f; če je $0 < k < n$, pa je p* sedlo *glede na f. Za poljubno karto (V, ψ) okoli p je število negativnih lastnih vrednosti matrike $D^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$ enako $\mathrm{ind}_f(p)$.*

Intuicija: $\mathrm{ind}_f(p)$ je število lokalnih koordinatnih smeri, v katerih vrednosti f padajo.

<u>*Dokaz*</u>: Obstaja taka karta (U, φ) na X okoli točke p, da je množica $\widetilde{U} := \varphi(U) \Subset \mathbb{R}^n$ konveksna (npr. $\widetilde{U} = \mathbb{R}^n$) in velja $\varphi(p) = 0$. Za funkcijo $g := f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ je torej $D(g)_0 = 0$ in $g(0) = f(p)$.

Lema 1 (Hadamard): *Če je $\widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^n$ zvezdasta podmnožica s središčem v točki $a \in \widetilde{U}$ in če je $g : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ gladka funkcija, potem obstajajo gladke funkcije $g_i : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ ($1 \le i \le n$), tako da na $\widetilde{U}$ velja $g(x) = g(a) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - a_i)$ in $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = g_i(a)$.*

Dokaz: Po osnovnem izreku integralnega računa ene spremenljivke je

$$g(x) - g(a) = \int_0^1 \frac{d\,g(a + t(x-a))}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(a + t(x-a)) \cdot (x_i - a_i) dt,$$

in zato funkcije $g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(a + t(x-a)) dt$ zadoščajo vsem lastnostim iz leme. ✓

Lema 2 (Hadamard): *Če je $\widetilde{U} \subseteqq \mathbb{R}^n$ konveksna podmnožica, $g : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ gladka funkcija, $0 \in \widetilde{U}$, in $D(g)_0 = 0$, potem obstajajo gladke funkcije $g_{ij} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$), tako da na $\widetilde{U}$ velja $g(x) = g(0) + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) x_i x_j$ in $g_{ij} = g_{ji}$.*

Dokaz: Ker je $\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = 0$, lahko uporabimo lemo 1 za $a = 0$ na g in na vseh $\frac{\partial g}{\partial x_i}$:

$$g(x) - g(0) = \sum_{i=1}^n \Big(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx) dt \Big) x_i = \sum_{i,j=1}^n \Big(\int_0^1 \cancel{\frac{\partial g}{\partial x_i}(0)} dt + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(stx) \Big) x_i x_j ds dt,$$

zato funkcije $g_{ij}(x) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(stx) ds dt$ zadoščajo vsem lastnostim iz leme. ✓

Nadaljujemo z dokazom izreka. Ugotovili smo, da velja $g(x) = f(p) + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) x_i x_j$ in $g_{ij} = g_{ji}$. Naj $G(x)$ označuje simetrično matriko $[g_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$. Opazimo, da je Hessejeva matrika v 0 enaka $D^2(g)_0 = [\sum_{i,j} \frac{\partial^2 (g_{ij} x_i x_j)}{\partial x_k \partial x_l}(0)]_{k,l} = [\frac{\partial^2 (g_{kl} x_k x_l + g_{lk} x_l x_k)}{\partial x_k \partial x_l}(0)]_{k,l} = [2 g_{kl}(0)]_{k,l} = 2G(0)$. Po predpostavki je zato $G(0)$ obrnljiva, torej je $g_{nr}(0) \neq 0$ za neki r. Sedaj uvedemo linearno zamenjavo koordinat (tj. φ komponiramo z difeomorfizmom, ki slika $0 \mapsto 0$):

$$x(y) = (y_1, \ldots, y_{r-1}, y_r + t y_n, y_{r+1}, \ldots, y_n) \quad \text{za neki } t \in \mathbb{R}.$$

Če zapišemo funkcijo $g(x(y))$ v obliki $f(p) + \sum_{i,j=1}^n g'_{ij}(y) y_i y_j$, potem koeficienti pri funkcijah $g_{nn} x_n^2$, $g_{rn} x_r x_n$, $g_{nr} x_n x_r$, $g_{rr} x_r^2$ skupaj dajo $g'_{nn}(y) = g_{nn}(y) + 2 g_{rn}(y) t + g_{rr}(y) t^2$. Izberemo lahko torej tak $t \in \mathbb{R}$, da bo $g'_{nn}(0) \neq 0$. Zato na dovolj majhni okolici od 0 velja

$$\begin{aligned} g(y) = f(p) + \textstyle\sum_{i,j=1}^n g'_{ij}(y) y_i y_j &= f(p) + \textstyle\sum_{i,j<n} g'_{ij}(y) y_i y_j + g'_{nn}\big(y_n^2 + 2 \sum_{i<n} \frac{g'_{in}}{g'_{nn}} y_i y_n\big) \\ &= f(p) + \textstyle\sum_{i,j<n} \widetilde{g}'_{ij}(y) y_i y_j + g'_{nn}\big(y_n + \sum_{i<n} \frac{g'_{in}}{g'_{nn}} y_i\big)^2. \end{aligned}$$

Sedaj uvedemo zamenjavo koordinat (tj. φ komponiramo z difeomorfizmom, ki slika $0 \mapsto 0$):

$$z(y) = \Big(y_1, \ldots, y_{n-1}, \sqrt{|g'_{nn}(y)|}\big(y_n + \textstyle\sum_{i<n} \frac{g'_{in}(y)}{g'_{nn}(y)} y_i\big)\Big).$$

Ker je $g'_{nn}(0) \neq 0$, je g'_{nn} pozitivna oz. negativna povsod na neki okolici od 0. Na tej okolici je torej $\sqrt{|g'_{nn}|} = \sqrt{\pm g'_{nn}}$ gladka preslikava. Odvod od $y \mapsto z(y)$ je spodnje trikotna matrika z diagonalo $\big(1, \ldots, 1, \frac{\partial |g'_{nn}| / \partial y_n}{2\sqrt{|g'_{nn}|}}\big(y_n + \sum_{i<n} \frac{g'_{in}}{g'_{nn}} y_i\big) + \sqrt{|g'_{nn}|}\big(1 + \sum_{i<n} \frac{\partial g'_{in}/\partial y_n \cdot g'_{nn} - g'_{in} \cdot \partial g'_{nn}/\partial y_n}{g'^2_{nn}} y_i\big)\big)$. Determinanta v $y = 0$ je enaka $\det D(z)_0 = \sqrt{|g'_{nn}(0)|} \neq 0$, kar po izreku o inverzni funkciji 2.d) pomeni, da je $z(y)$ res lokalni difeomorfizem v 0. V novih koordinatah se naša funkcija izraža kot $g(z) = f(p) + \sum_{i,j<n} g''_{ij}(z) z_i z_j \pm z_n^2$. Sedaj ta cel postopek (dvakratno zamenjavo koordinat) ponovimo še $(n-1)$-krat in pri tem φ vsakič komponiramo z difeomorfizmoma. Na koncu dobimo $g(z) = f(p) \pm z_1^2 \pm \ldots \pm z_n^2$. Nato uvedemo le še ustrezno permutacijo koordinat, da dobimo željeni izraz iz izreka. S tem je obstoj karte φ z lastnostjo (2) dokazan.

Dokažimo še zadnje tri vrstice izreka. Trditev o lokalnem minimumu oz. maksimumu je jasna iz samega predpisa za $f \circ \varphi^{-1}$: za primer $k = 0$ je $f(p)$ minimum funkcije $f|_U$, saj če bi obstajal kak $q \in U$ z $f(q) > f(p)$, bi imeli $g(\varphi(q)) > g(0)$, kar je v nasprotju z (2). Analogen sklep velja za primer $k = n$. Po (2) lahko za vsak $x \in \varphi(U)$ izračunamo Hessejevo matriko: $D^2(f \circ \varphi^{-1})_x = \operatorname{diag}(-2, \ldots, -2, 2, \ldots, 2)$, kjer je število minus dvojk (= št. negativnih lastnih vrednosti) enako k. Naj bo (V, ψ) poljubna karta okoli p. Ker je p kritična točka f, po (1) velja $D^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)} = D(\varphi \circ \psi^{-1})^t_{\psi(p)} \cdot D^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot D(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$. Po Sylvestrovem zakonu vztrajnosti 1.d) ima $D^2(f \circ \psi^{-1})_{\psi(p)}$ toliko negativnih lastnih vrednosti kot jih ima $D^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$, kar dokazuje neodvisnost Morsovega indeksa od izbire karte. ■

Generičnost: Ali Morsove funkcije na dani gladki mnogoterosti X sploh obstajajo? Še več, pomembna lastnost gladkih funkcij je, da je skoraj vsaka izmed njih Morsova. Dokaz tega dejstva bo temeljil na uporabi Morse-Sardovega izreka za primer $X \subseteq \mathbb{R}^N$, trika, da prevedemo funkcijo f_a, odvisno od parametra $a \in \mathbb{R}^N$, na funkcijo $h_{b,c}$, odvisno od parametrov $b \in \mathbb{R}^{N-n}$ in $c \in \mathbb{R}^n$, za katero bo veljalo, da je Morsova za skoraj vsak c, ter nato uporabi Fubinijevega izreka za splošni primer.

Izrek 10: *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^N$ vložena gladka n-mnogoterost in $f : X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija.*

a) *Za skoraj vsak $a \in \mathbb{R}^N$ je $f_a : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + \langle x, a\rangle$ Morsova funkcija na X.*

b) *Za vsako sklenjeno mnogoterost X je množica Morsovih funkcij na X gosta v $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$.*

Če za f izberemo ničelno funkcijo na X, potem točka a) v posebnem pove, da je skoraj vsaka višinska funkcija (torej linearna preslikava) Morsova funkcija na X.

<u>*Dokaz*</u>: **a)** Pokazati moramo, da ima množica nezaželjenih smernih vektorjev, tj.

$$\big\{a \in \mathbb{R}^N;\ f_a \text{ ni Morsova funcija}\big\} =$$
$$\big\{a \in \mathbb{R}^N;\ \exists p \in X\ \exists \text{ karta } (U, \varphi) \colon D(f \circ \varphi^{-1})_0 = 0 = \det D^2(f \circ \varphi^{-1})_0\big\},$$

mero 0 v $\mathbb{R}^N$. Po definiciji mnogoterosti ima X števen atlas. Če nam uspe dokazati trditev za vsako karto U, tj. $f_a|_U$ je Morsova funkcija za skoraj vsak a, potem sledi, da je f_a Morsova funkcija na celem X za skoraj vsak a, saj ima števna unija množic z mero nič zopet mero nič. Zato lahko odslej predpostavljamo, da je $X = U \subseteq \mathbb{R}^N$ le ena karta. Potrebovali bomo dve lemi. Obravnavajmo najprej primer, ko je $n = N$ in je X odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$.

Lema 1: *Za skoraj vsak $a \in \mathbb{R}^n$ je $f_a : X \Subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + \langle x, a\rangle$ Morsova funkcija na X.*

Dokaz: Definirajmo funkcijo g na X, kot odvod od f (torej neodvisna od parametra a), tj.

$$g := D(f)_\_ \colon\ X \Subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \longmapsto \big(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\big)(x).$$

Ker je $\langle \_, a\rangle$ linearna funkcija, je njen odvod kar a (gledan kot matrika). Zato je

$$D(f_a)_x = D(f)_x + a = g(x) + a \qquad \text{in} \qquad D^2(f_a)_x = D^2(f)_x = D(g)_x.$$

Kritične točke za f_a so torej tisti $x \in X$, za katere velja $g(x) = -a$. Te točke so neizrojene natanko takrat, ko je $D(g)_x$ obrnljiva. Ker imata domena in kodomena g enako dimenzijo, je kvadratna matrika $D(g)_x$ obrnljiva natanko tedaj, ko je surjektivna (tj. ko je x regularna točka za g). Torej, f_a ima izrojeno kritično točko natanko tedaj, ko je $-a$ kritična vrednost funkcije g. Po Morse-Sardovem izreku 3.d) ima množica takih a-jev mero 0. ✓

Lema 2: *Za vsako gladko n-podmnogoterost $X \subseteq \mathbb{R}^N$ in $x \in X$ obstaja koordinatna projekcija $\pi_{i_1,\ldots,i_n}$, tako da za dovolj majhno okolico $x \in U \Subset X$ postane $(U, \pi_{i_1,\ldots,i_n}|_U)$ karta na X.*

Dokaz: Prvo pokažimo linearno verzijo leme: za vsak n-dimenzionalen vektorski podprostor L v $\mathbb{R}^N$ obstaja projekcija $\pi_{i_1,\ldots,i_n} = \pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, tako da je $\pi(L) = \mathbb{R}^n$ (tu je $\mathbb{R}^n$ podprostor v $\mathbb{R}^N$, generiran s standardnimi baznimi vektorji $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$). Naj bo $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za L (1) in $b_j = \sum_{i=1}^N \beta_{i,j} e_i$ razvoj po bazi za $\mathbb{R}^N$. Po (1) ima $N \times n$ matrika $[\beta_{i,j}]_{1 \le i \le N}^{1 \le j \le n}$ rang n, in zato obstajajo indeksi $\{i_1, \ldots, i_n\} =: I$ tako da je $[\beta_{i,j}]_{i \in I}^{1 \le j \le n}$ obrnljiva. Sedaj π definiramo preko teh $i_1,\ldots,i_n$. Dokažimo, da so vektorji $\pi(b_1),\ldots,\pi(b_n)$ linearno neodvisni. Denimo, da je $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi(b_j)=0$. Tedaj velja $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\alpha_j\beta_{i,j}\pi(e_i)=0$ (2), kjer je $\pi(e_i)=e_i$ za $i\in I$ in $\pi(e_i)=0$ za $i\in\{1,\ldots,N\}\setminus I$. Tedaj (2) implicira $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_{i,j}=0$ za $i\in I$, tj. $[\beta_{i,j}]_{i\in I}^{1\leq j\leq n}\cdot[\alpha_j]_{1\leq j\leq n}=0$, in zato $[\alpha_j]_{1\leq j\leq n}=0$. Torej vektorji $\pi(b_1),\ldots,\pi(b_n)$ tvorijo bazo za $\pi(L)$.

Sedaj sledi topološka plat problema. Če je $\varphi: U \Subset\mathbb{R}^n\to X\subseteq\mathbb{R}^N$ lokalna parametrizacija pri x, potem postavimo $L:=T_xX=D(\varphi)_0(\mathbb{R}^n)$, tj. tangentni prostor na X pri x, in po prvem odstavku obstaja projekcija π, ki slika T_xX na $\mathbb{R}^n$. Oglejmo si preslikavo $\pi\circ\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$: njen odvod je $D(\pi\circ\varphi)_0 = D(\pi)_x\circ D(\varphi)_0 = \pi\circ D(\varphi)_0$. Velja $\pi\circ D(\varphi)_0(\mathbb{R}^n)=\pi(T_xX)=\mathbb{R}^n$, torej je $D(\pi\circ\varphi)_0$ surjektivna, in zato izomorfizem. Po izreku o inverzni funkciji 2.d) obstajajo $V'\Subset\mathbb{R}^n$, $U'\Subset U\Subset\mathbb{R}^n$, in difeomorfizem $f: V'\to U'$, ki je inverz od $(\pi\circ\varphi)|_{U'}$. Zato je $\pi|_{\varphi\circ f(V')}$ difeomorfizem, ki skupaj s $\pi(\varphi\circ f(V'))=V'$ da lokalno parametrizacijo za X pri x. ✓

Nadaljujemo z dokazom trditve a). Po lemi 2 imamo karto (U,π) na X okoli x, kjer je π koordinatna projekcija. Brez škode za splošnost π slika na prvih n koordinat, tj. $\pi=\pi_{1,\ldots,n}$. Označimo $V:=\pi(U)$, in naj bo $\alpha: V\Subset\mathbb{R}^n\longrightarrow U\subseteq\mathbb{R}^N$ parametrizacija, ki je inverz od π. Zato je $\alpha(y)=(y,\beta(y))$ povsod na V, za neko gladko preslikavo $\beta: V\Subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{N-n}$. Za fiksna $b\in\mathbb{R}^n$ in $c\in\mathbb{R}^{N-n}$ definirajmo preslikave

$$
\begin{aligned}
&g_c\colon\ U\longrightarrow\mathbb{R},\ \ x\longmapsto f(x)+\langle x,(0,c)\rangle,\\
&h_c:=g_c\circ\alpha\colon\ V\longrightarrow\mathbb{R},\\
&h_{b,c}\colon\ V\longrightarrow\mathbb{R},\ \ y\longmapsto h_c(y)+\langle y,b\rangle.
\end{aligned}
$$

Po lemi 1 je pri fiksnem c funkcija $h_{b,c}$ za skoraj vsak b Morsova. Izračunajmo predpis za f_a v odvisnosti od teh novih funkcij. Za $a=(b,c)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$ in $x=\alpha(y)=(y,\beta(y))$ in $y\in V$ je

$$
\begin{aligned}
f_a(\alpha(y)) &= f(\alpha(y))+\langle\alpha(y),a\rangle = f(\alpha(y))+\langle(y,\beta(y)),(b,c)\rangle\\
&= f(\alpha(y))+\langle y,b\rangle+\langle\beta(y),c\rangle = f(\alpha(y))+\langle y,b\rangle+\langle\alpha(y),(0,c)\rangle\\
&= h_c(y)+\langle y,b\rangle = h_{b,c}(y).
\end{aligned}
$$

Za množico S vseh tistih a, za katere funkcija f_a ni Morsova, torej velja, da ima $S\cap\{b\}\times\mathbb{R}^{N-n}$ mero nič za skoraj vsak b. Sedaj uporabimo Fubinijev izrek 2.i) (na vsakih dveh kvadrih v $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{N-n}$ posebej) na karakteristični funkciji $\chi_S(x,y)$ od S, in dobimo $\int\chi_S(x,y)dxdy = \int\big(\int\chi_S(x,y)dx\big)dy=\int\big(\int\chi_{S\cap\{y\}\times\mathbb{R}^{N-n}}(x,y)dx\big)dy=\int 0dy=0$, tj. S ima mero 0 v $\mathbb{R}^N$.

b) Ker je X kompakten in $\mathbb{R}$ metrizabilen prostor, je kompaktno-odprta topologija na $\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ inducirana s supremum metriko $\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$. Po izreku 3.c) X dopušča vložitev v neki $\mathbb{R}^N$. Naj bo $\varepsilon>0$ poljuben, in dokažimo, da za vsako funkcijo $f\in\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ obstaja Morsova funkcija na X, ki je ε-blizu f. Ker je X kompaktna, funkcija $\|x\|$ doseže največjo vrednost. Po točki a) obstaja

$$a\in\mathbb{B}^N\big(0,\tfrac{\varepsilon}{\max_{x\in X}\|x\|}\big),$$

tako da je f_a Morsova funkcija na X, saj N-krogla nima mere 0 v $\mathbb{R}^N$. Tedaj po neenakosti Cauchy-Schwartz-Bunyakowsky velja

$$\sup_{x\in X}|f-f_a| = \sup_{x\in X}|\langle x,a\rangle| \leq \sup_{x\in X}\|x\|\|a\| \leq \frac{\sup_{x\in X}\|x\|}{\max_{x\in X}\|x\|}\varepsilon=\varepsilon.$$

Torej res obstaja Morsova funkcija f_a, ki ε-aproksimira dano gladko funkcijo f. ■

Z uporabo izboklinastih funkcij lahko dano Morsovo funkcijo spremenimo, tako da zopet dobimo Morsovo funkcijo, ki pa je injektivna na svojih kritičnih točkah:

Trditev 11: *Za vsako sklenjeno gladko mnogoterost obstaja Morsova funkcija, ki slika kritične točke v paroma različne kritične vrednosti.*

<u>*Dokaz*</u>: Po izreku 10 na gladki n-mnogoterosti X obstaja Morsova funkcija f. Po trditvi 8 ima f le končno (neizrojenih) kritičnih točk, $p_1, \ldots, p_m$, ki jih uredimo tako, da pripadajoče kritične vrednosti nastopajo nepadajoče: $c_1 \leq \ldots \leq c_m$. Radi bi dobili striktne neenakosti $c_1 < \ldots < c_m$. Naj bodo $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_m, \varphi_m)$ paroma disjunktne karte okoli teh točk, torej $\varphi_i^{-1} \colon \mathbb{R}^n \to U_i$. Po izreku 3.f) za vsako izmed teh kart obstaja izboklinasta funkcija $\alpha_i \colon X \to \mathbb{I}$, ki je konstantno 1 na $\varphi_i^{-1}(\mathbb{B}^n)$ in konstantno 0 na $X \setminus \varphi_i^{-1}(2\mathring{\mathbb{B}}^n)$. Norma odvoda vsake izboklinaste funkcije, tj. $\|D(\alpha_i \circ \varphi_i^{-1})\|$, doseže na kompaktni množici kjer je nekonstantna, tj. na $2\mathbb{B}^n \setminus \mathring{\mathbb{B}}^n$, svoj maksimum, ki ga označimo z δ_i. Prav tako $\|D(f \circ \varphi_i^{-1})\|$ doseže na $2\mathbb{B}^n \setminus \mathring{\mathbb{B}}^n$ svoj minimum, ki ga označimo z $\epsilon_i > 0$. Sedaj funkcijo f pomnožimo z dovolj veliko pozitivno konstanto (to ne spreminja kritičnih točk in njihove neizrojenosti, saj odvoda D in D^2 le pomnoži s konstanto), da velja $m\delta_i < \varepsilon_i$ za vse i, in so nove kritične vrednosti c_i oddaljene med seboj za vsaj m (razen tiste c_i, ki so med seboj enake). Tedaj ima funkcija $g := f + \sum_{i=1}^{m} i\alpha_i$ kritične točke $p_1, \ldots, p_n$ (ki so vse neizrojene) in kritične vrednosti $c_1{+}1 < c_2{+}2 < c_3{+}3 < \ldots < c_m{+}m$. Zato je g iskana Morsova funkcija na X, ki je injektivna na Cr_g. ■

Zgled 12: Če sta $f \colon X \to \mathbb{R}$ in $g \colon Y \to \mathbb{R}$ Morsovi funkciji, potem je tudi

$$X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x) + g(y)$$

Morsova funkcija. Res, odvod te funkcije v točki $(p, q) \in X \times Y$ je vektor $\left[\begin{smallmatrix} D(f\circ\varphi)_p \\ D(g\circ\psi)_q \end{smallmatrix}\right]$, in zato so kritične točke ravno $\{(p, q) \in X \times Y; p \in \mathrm{Cr}_f, q \in \mathrm{Cr}_g\}$. Drugi odvod v (p, q) je bločna matrika $\left[\begin{smallmatrix} D^2(f\circ\varphi)_p & 0 \\ 0 & D^2(g\circ\psi)_q \end{smallmatrix}\right]$, in ker sta v vseh kritičnih točkah matriki $D^2(f \circ \varphi)_p$ in $D^2(g \circ \psi)_q$ obrnljivi, je tak tudi drugi odvod naše funkcije: $\left[\begin{smallmatrix} D^2(f\circ\varphi)_p & 0 \\ 0 & D^2(g\circ\varphi)_q \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} D^2(f\circ\varphi)_p^{-1} & 0 \\ 0 & D^2(g\circ\varphi)_q^{-1} \end{smallmatrix}\right]$. ♦

Poglavje 2

Operacije na mnogoterostih

Dekompozicija mnogoterosti na ročaje je analog konstrukcije CW-kompleksov, a prirejen za študij gladkih mnogoterosti. Videli bomo, da iz vsake dekompozicije na ročaje lahko dobimo homotopsko ekvivalentno CW-dekompozicijo.

Dodajanje ročajev: Naj bo X gladka ∂-n-mnogoterost in $0 \leq k \leq n$ (npr. $k := \mathrm{ind}_f(p)$).

Za dano topološko vložitev $\iota\colon \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k} \longrightarrow \partial X$ je prostor X *z dodanim k-ročajem* enak kvocientu topološke vsote od X in $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$, ko točke identificiramo preko ι, tj.

$$X \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k} := \frac{X \coprod \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}}{x \sim \iota(x);\ x \in \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k}}.$$

Če je q kvocientna projekcija za zgornji prostor, potem podprostoru $q(\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k})$ rečemo *k-ročaj*, in vidimo, da je homeomorfen $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$. Tu sta privzeti definiciji $\mathbb{B}^0 = \{0\}$ in $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ (tedaj vložitve ι sploh ni, in zato tudi identifikacij ne, torej $X \cup_\iota \mathbb{B}^0 \times \mathbb{B}^n = X \coprod \mathbb{B}^n$).

Dobljeni prostor je topološka ∂-mnogoterost: topološka vsota ∂-n-mnogoterosti ohranja lokalno evklidskost, ko pa določene točke na robu identificiramo z drugimi robnimi točkami preko homeomorfizma, pa vsaka taka robna točka dobi odprto okolico, ki sestoji bodisi iz polprostorov $\mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_- = \mathbb{R}^n$ bodisi pa iz pol in četrtprostora $\mathbb{R}^n_+ \cup (\!|-\infty, 0]\!]^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \approx \mathbb{R}^n_+$.

Velja $\partial(\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}) \overset{3.a)}{=} \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k} \cup \mathbb{B}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$. Zato je

$$\begin{aligned}\partial(X \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}) &= \big((\partial X) \setminus \iota(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k})\big) \cup \mathbb{B}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1} \\ &= \big((\partial X) \setminus \iota(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathring{\mathbb{B}}^{n-k})\big) \cup_{\iota|_{\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}}} \mathbb{B}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}.\end{aligned} \tag{3}$$

Pomanjkljivost konstrukcije dodajanja ročajev je, da dobljene mnogoterosti $X \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ ne opremimo z gladko strukturo: ker imata $\mathbb{B}^k$ in $\mathbb{B}^{n-k}$ oba neprazen rob, vsebuje $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ točke, ki imajo okolico homeomorfno $\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{n-k}_+$, tj. ročaj ima 'vogale'. Mnogoterosti običajno lepimo vzdolž odprtih podmnožic, saj nam izrek 3.e) zagotovi obstoj gladkega atlasa na dobljenem zlepku. V našem primeru bi radi, da dobljena mnogototerost po prilepljenem ročaju ostane kompaktna. Da se pokazati, da za vsaki gladki ∂-mnogoterosti X in Y obstaja maksimalen gladek atlas na $X \times Y$, enoličen med vsemi maksimalnimi gladkimi atlasi na $X \times Y$, ki na $(\mathrm{int}\, X) \times (\mathrm{int}\, Y)$ inducirajo običajen produktni atlas, tj. presek vsake karte v tem maksimalnem atlasu z $(\mathrm{int}\, X) \times (\mathrm{int}\, Y)$ je karta v $(\mathrm{int}\, X) \times (\mathrm{int}\, Y)$. Temu se reče 'zgladenje vogalov' v produktu. Toda s tem še ne da dobimo gladke strukture na $X \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$, saj ob lepljenju lahko nastanejo novi vogali (npr. ko na $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus (\!|0, 1|\!))$ $\subseteq \mathbb{R}^2$ nalepimo $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$), lahko pa pride tudi do 'zlomljenih območij' (npr. ko na $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathring{\mathbb{B}}^2) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ nalepimo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}^3$). Ker v tem delu nikjer ne bomo potrebovali gladke strukture pri dodajanju ročajem, se bomo vsem težavam ignorantno izognili, in omenimo le, da gladek atlas na mnogoterosti z dodanim ročajem vedno obstaja.

Dodajanje ročaja je odvisno od same vložitve ι. Tega ne bomo obravnavali, toda da se dokazati, da če sta $\iota, \iota' : \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k} \longrightarrow \partial X$ gladki vložitvi, med katerima obstaja gladka izotopija (tj. gladka preslikava $h_t = h(\_, t) \colon \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{I} \to X$, tako da je $h_0 = \iota$ in $h_1 = \iota'$, ter je h_t vložitev za vsak t), potem sta mnogoterosti $X \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ in $X \cup_{\iota'} \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ difeomorfni.

Gladka ∂-n-mnogoterost X dopušča *dekompozicijo na ročaje,* ko obstajajo podmnogoterosti

$$\mathbb{B}^n \approxeq X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_m = X,$$

tako da je X_i difeomorfna mnogoterosti X_{i-1} z dodanim k_i-ročajem, za $1 \leq i \leq m$ in $0 \leq k_i \leq n$. Če za vsak $i \leq j$ velja $k_i \leq k_j$, potem pravimo, da je ta dekompozicija *naraščajoča*.

Zgled 13: Poglejmo kakšno je dodajanje ročajev na nizkodimenzionalnih mnogoterostih. Vemo, da je rob kompaktne ∂-n-mnogoterosti sklenjena $(n-1)$-mnogoterost.

V splošnem je dodajanje 0-ročaja n-mnogoterosti X enako disjunktni uniji X in $\mathbb{B}^n$. Dodajanje n-ročaja pa je lepljenje $\mathbb{B}^n$ na X vzdolž $\mathbb{S}^{n-1}$: takrat ∂X vsebuje povezano komponento $\mathbb{S}^{n-1}$ (saj je ι difeomorfizem na svojo sliko in je $\mathbb{S}^{n-1}$ sklenjena), ki po dodanem ročaju izgine. Torej n-ročaj pomeni, da 'zapolnimo luknjo' v n-mnogoterosti.

Rob kompaktne ∂-1-mnogoterosti je disjunktna unija kopij $\mathbb{S}^0$. Imamo dva možna ročaja: 0-ročaj (disjunktna unija z daljico $\mathbb{B}^1$) in 1-ročaj (prilepimo daljico $\mathbb{B}^1$ vzdolž dveh točk $\mathbb{S}^0$).

Rob kompaktne ∂-2-mnogoterosti je disjunktna unija kopij $\mathbb{S}^1$. Imamo tri možne ročaje: 0-ročaj (disjunktna unija z diskom $\mathbb{B}^2$), 1-ročaj (prilepimo kvadrat $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^1$ vzdolž leve in desne stranice $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^1$, ki se vložita v krožnice $\mathbb{S}^1$), in 2-ročaj (prilepimo disk $\mathbb{B}^2$ vzdolž krožnice $\mathbb{S}^1$).

Rob kompaktne ∂-3-mnogoterosti je sklenjena ploskev, tj. disjunktna unija kopij povezanih vsot torusov ali projektivnih ravnin. Imamo štiri možne ročaje: 0-ročaj (disjunktna unija s kroglo $\mathbb{B}^3$), 1-ročaj (prilepimo valj $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^2$ vzdolž levega in desnega diska $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^2$, ki se vložita v sklenjeno ploskev), 2-ročaj (prilepimo valj $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^1$ vzdolž plašča valja $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^1$, ki se vloži v sklenjeno ploskev), in 3-ročaj (prilepimo kroglo $\mathbb{B}^3$ vzdolž sfere $\mathbb{S}^2$).

Rob kompaktne ∂-4-mnogoterosti je sklenjena 3-mnogoterost (znano je, da je teh zelo veliko, in trenutno še precej manjka do njihove klasifikacije, če je ta sploh možna). Imamo pet možnih ročajev: 0-ročaj (disjunktna unija s kroglo $\mathbb{B}^4$), 1-ročaj (prilepimo odebeljeno kroglo $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^3$ vzdolž leve in desne krogle $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B}^3$, ki se vložita v sklenjeno 3-mnogoterost), 2-ročaj (prilepimo $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$ vzdolž polnega torusa $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, ki se vloži v sklenjeno 3-mnogoterost), 3-ročaj (prilepimo odebeljeno kroglo $\mathbb{B}^3 \times \mathbb{B}^1$ vzdolž odebeljene sfere $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{B}^1$, ki se vloži v sklenjeno 3-mnogoterost), in 4-ročaj (prilepimo kroglo $\mathbb{B}^4$ vzdolž sfere $\mathbb{S}^3$). ♦

Izrek 14: *Naraščajoča dekompozicija na ročaje kompaktne $\mathcal{C}^\infty$-∂-n-mnogoterosti X inducira homotopsko ekvivalenco s končnim CW-kompleksom, ki ima toliko k-celic kot ima X k-ročajev.*

<u>Dokaz</u>: Vsak element iz $\mathbb{B}^k$ lahko izrazimo v polarnih koordinatah kot $(\theta, r) \in \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{I}$, saj je $\frac{\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{I}}{\mathbb{S}^{k-1} \times \{0\}} \approx \mathbb{B}^k$. Naj bo $\mathbb{B}^n \approxeq X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_m = X$ naraščajoča dekompozicija na ročaje.

Lema 1: $\mathbb{B}^l \times \mathbb{I}$ *se krepko deformacijsko retraktira na* $\mathbb{B}^l \times \{1\} \cup \{0\} \times \mathbb{I}$, *kjer* $\mathbb{B}^l \times \{0\}$ *gre v* $(0,0)$.

Dokaz: Najlažje si je predstavljati primer $l = 2$: tedaj imamo pokončen poln valj. Željeno krepko deformacijsko retrakcijo h dobimo tako, da θ ne spreminjamo (tj. na posameznih rezinah $\{(\theta, r, s) \in \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I};\, \theta = \text{konst.}\} \approx \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ definiramo isto homotopijo), na spodnji polovici valja, $\mathbb{B}^l \times [\![0, \frac{1}{2}]\!]$, zunanjo daljico $\{(\theta_0, 1)\} \times [\![0, \frac{1}{2}]\!]$ vzporedno potisnemo do srednje daljice $\{(\theta_0,0)\}\times[\![0,1]\!]$, na zgornji polovici valja, $\mathbb{B}^l\times[\![\frac{1}{2},1]\!]$, pa zunanjo daljico $\{(\theta_0,1)\}\times[\![\frac{1}{2},1]\!]$ potisnemo do zgornje radialne daljice $\{\theta_0\}\times\mathbb{I}\times\{1\}$, pri čemer točka $(\theta_0,1,1)$ ves čas miruje. Namesto (θ_0,r,s) pišimo (r,s). Za $0\leq s\leq\frac{1}{2}$ točka $(1,s)$ torej potuje do $(0,2s)$, tj. imamo pot $t\mapsto(1,s)+t\big((0,2s)-(1,s)\big)=\big(1-t,s(1+t)\big)$. Za $\frac{1}{2}\leq s\leq 1$ pa točka $(1,s)$ potuje do $(2(s-\frac{1}{2}),1)$, tj. imamo pot $t\mapsto(1,s)+t\big((2s-1,1)-(1,s)\big)=\big(1+2t(s-1),s+t(1-s)\big)$. Premislimo še, kako se slikajo preostale točke (iz celotnega kvadrata $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$). Interval $0\leq s\leq\frac{1}{2}+\frac{1-r}{2}=\frac{2-r}{2}$ bo ob koncu homotopije enak $0\leq s\leq 1$, torej vsaka točka (r,s) potuje do $(0,\frac{2}{2-r}s)$, tj. imamo pot $t\mapsto(r,s)+t\big((0,\frac{2}{2-r}s)-(r,s)\big)=\big(r-rt,s+t(\frac{2}{2-r}s-s)\big)=\big(r(1-t),s+st\frac{r}{2-r}\big)$. Preostanejo nam še točke (r,s) iz trikotnika $\frac{2-r}{2}\leq s\leq 1$. Premica skozi $(0,1)$ in $(1,\frac{1}{2})$ je $y-1=\frac{1/2-1}{1-0}(x-0)$, tj. $y=-\frac{1}{2}x+1$. Premica skozi $(1,1)$ in (r,s) je $y-1=\frac{s-1}{r-1}(x-1)$. Ti premici se sekata v $(\frac{2s-2}{r+2s-3},\frac{r+s-2}{r+2s-3})$. Kvocient razdalj je $\|-(1,1)+(r,s)\|\,/\,\|-(1,1)+(\frac{2s-2}{r+2s-3},\frac{r+s-2}{r+2s-3})\|=\ldots=|r+2s-3|=3-r-2s\in[\![0,1]\!]$. Točko (r,s) zato slikamo v $\big(1-(3-r-2s),1\big)=(r+2s-2,1)$, tj. imamo pot $t\mapsto(r,s)+t\big((r+2s-2,1)-(r,s)\big)$ $=\big(r+2t(s-1),s+t(1-s)\big)$. Iskana krepka deformacijska retrakcija je torej

$$h\colon\ \mathbb{B}^l\times\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{B}^l\times\mathbb{I},\quad(\theta,r,s,t)\mapsto\begin{cases}\big(\theta,r(1-t),s+st\frac{r}{2-r})\big) & ;\ r+2s\leq 2\\ \big(\theta,r+2t(s-1),s+t(1-s)\big) & ;\ r+2s\geq 2\end{cases}.$$

Vidimo, da se predpisa pri $r+2s=2$ ujemata, da je h zvezna, in da velja $\operatorname{Im}h=\mathbb{B}^l\times\mathbb{I}$, $h_0=\mathrm{id}_{\mathbb{B}^l\times\mathbb{I}}$, $\operatorname{Im}h_1=\mathbb{B}^l\times\{1\}\cup\{0\}\times\mathbb{I}$, $h_1|_{\mathbb{B}^l\times\{1\}\cup\{0\}\times\mathbb{I}}=\mathrm{id}_{\mathbb{B}^l\times\{1\}\cup\{0\}\times\mathbb{I}}$, $\forall t\colon h_t|_{\mathbb{B}^l\times\{1\}\cup\{0\}\times\mathbb{I}}=\mathrm{id}_{\mathbb{B}^l\times\{1\}\cup\{0\}\times\mathbb{I}}$. ✓

Lema 2: $\mathbb{B}^k\times\mathbb{B}^l$ *se krepko deformacijsko retraktira na* $\mathbb{S}^{k-1}\times\mathbb{B}^l\cup\mathbb{B}^k\times\{0\}$.

Dokaz: Identificirajmo $\mathbb{B}^k\times\mathbb{B}^l\equiv\mathbb{S}^{k-1}\times\mathbb{I}\times\mathbb{S}^{l-1}\times\mathbb{I}$ in nato za h iz leme 1 definiramo funkcijo $h'(\theta,r,\theta',r',t):=(\theta,\nu\circ h(\theta',r',r,t))$, kjer je $\nu(\theta',r',r):=(r,\theta',r')$. Ta h' prvo sfero $\mathbb{S}^{k-1}$ pusti pri miru, preostanek $\mathbb{I}\times\mathbb{S}^{l-1}\times\mathbb{I}$ pa krepko deformacijsko retraktira na $\{1\}\times\mathbb{B}^l\cup\mathbb{I}\times\{0\}$. Torej h' krepko deformacijsko retraktira $\mathbb{B}^k\times\mathbb{B}^l$ na $\mathbb{S}^{k-1}\times\big(\{1\}\times\mathbb{B}^l\cup\mathbb{I}\times\{0\}\big)\equiv\mathbb{S}^{k-1}\times\mathbb{B}^l\cup\mathbb{B}^k\times\{0\}$. ✓

Lema 3: $X\cup_\iota\mathbb{B}^k\times\mathbb{B}^{n-k}$ *se krepko deformacijsko retraktira na* $X\cup_\iota\mathbb{B}^k\times\{0\}\approx X\cup_\iota\mathbb{B}^k$.

Dokaz: $X\cup_\iota\mathbb{B}^k\times\mathbb{B}^{n-k}=\frac{X\coprod\mathbb{B}^k\times\mathbb{B}^{n-k}}{x\sim\iota(x);\,x\in\mathbb{S}^{k-1}\times\mathbb{B}^{n-k}}$ se po lemi 2 krepko deformacijsko retraktira na $\frac{X\coprod\mathbb{S}^{k-1}\times\mathbb{B}^{n-k}\cup\mathbb{B}^k\times\{0\}}{x\sim\iota(x);\,x\in\mathbb{S}^{k-1}\times\mathbb{B}^{n-k}}=\frac{X\coprod\mathbb{B}^k\times\{0\}}{x\sim\iota(x);\,x\in\mathbb{S}^{k-1}\times\{0\}}=X\cup_\iota\mathbb{B}^k\times\{0\}$, saj h' miruje na identifikacijah. ✓

Lema 4 (Whitehead): *Za vsak topološki prostor X in poljubni homotopni zvezni preslikavi $\varphi_0\simeq\varphi_1\colon\mathbb{S}^k\to X$ obstaja homotopska ekvivalenca $\alpha\colon X\cup_{\varphi_0}\mathbb{B}^k\simeq X\cup_{\varphi_1}\mathbb{B}^k$, tako da je $\alpha|_X=\mathrm{id}_X$.*

Dokaz: Naj bo $\varphi_t:\mathbb{S}^k\to X$ homotopija med lepilnima preslikavama φ_0 in φ_1. Homotopsko ekvivalenco α in njen homotopski inverz β definiramo s predpisoma

$$\alpha:=\begin{cases}x\mapsto x & ;\ x\in X\\ ru\mapsto 2ru & ;\ r\in[\![0,\tfrac{1}{2}]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\\ ru\mapsto\varphi_{2-2r}(u); & r\in[\![\tfrac{1}{2},1]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\end{cases}\quad\text{in}\quad\beta:=\begin{cases}x\mapsto x & ;\ x\in X\\ ru\mapsto 2ru & ;\ r\in[\![0,\tfrac{1}{2}]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\\ ru\mapsto\varphi_{2r-1}(u); & r\in[\![\tfrac{1}{2},1]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\end{cases}.$$

Pri $r=\frac{1}{2}$ velja $\alpha\colon 2ru=u=\varphi_1(u)=\varphi_{2-2r}(u)$ in $\beta\colon 2ru=u=\varphi_0(u)=\varphi_{2r-1}(u)$, ter pri $r=1$ velja $\alpha\colon\varphi_{2-2r}(u)=\varphi_0(u)$ in $\beta\colon\varphi_{2r-1}(u)=\varphi_1(u)$, torej sta oba predpisa dobro definirana in zvezna.

$$\alpha\circ\beta=\begin{cases}x\mapsto x & ;\ x\in X\\ ru\mapsto 4ru & ;\ r\in[\![0,\tfrac{1}{4}]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\\ ru\mapsto\varphi_{2-4r}(u); & r\in[\![\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\\ ru\mapsto\varphi_{2r-1}(u); & r\in[\![\tfrac{1}{2},1]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\end{cases}\quad\text{in}\quad\beta\circ\alpha=\begin{cases}x\mapsto x & ;\ x\in X\\ ru\mapsto 4ru & ;\ r\in[\![0,\tfrac{1}{4}]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\\ ru\mapsto\varphi_{4r-1}(u); & r\in[\![\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\\ ru\mapsto\varphi_{2-2r}(u); & r\in[\![\tfrac{1}{2},1]\!],u\in\mathbb{S}^{k-1}\end{cases}.$$

Iskani homotopiji sta tedaj

$$
\begin{array}{ll}
\alpha\circ\beta \simeq \mathrm{id}_{X\cup_{\varphi_1}\mathbb{B}^k} & u\in\mathbb{S}^{k-1} \\
x & ;\ x\in X \\
(4-3t)ru & ;\ r\in\llbracket 0,\tfrac{1}{4}\rrbracket \\
\varphi_{4r(t-1)+2-t}\big((1+t(r-1))u\big) & ;\ r\in\llbracket \tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\rrbracket \\
\varphi_{2r(1-t)+2t-1}\big((1+t(r-1))u\big) & ;\ r\in\llbracket \tfrac{1}{2},1\rrbracket
\end{array}
\quad \text{in} \quad
\begin{array}{ll}
\beta\circ\alpha \simeq \mathrm{id}_{X\cup_{\varphi_0}\mathbb{B}^k} & u\in\mathbb{S}^{k-1} \\
x & ;\ x\in X \\
(4-3t)ru & ;\ r\in\llbracket 0,\tfrac{1}{4}\rrbracket \\
\varphi_{(4r-1)(1-t)}\big((1+t(r-1))u\big) & ;\ r\in\llbracket \tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\rrbracket \\
\varphi_{2(1-r)(1-t)}\big((1+t(r-1))u\big) & ;\ r\in\llbracket \tfrac{1}{2},1\rrbracket
\end{array}.
$$

Predpisi pri $\alpha\circ\beta$ so dobljeni kot poti med parametrom in 1: $4r(t-1)+2-t=2-4r+t(1-(2-4r))$, $2r(1-t)+2t-1=2r-1+t(1-(2r-1))$. Predpisi pri $\beta\circ\alpha$ so dobljeni kot poti med parametrom in 0: $(4r-1)(1-t)=4r-1+t(0-(4r-1))$, $2(1-r)(1-t)=2-2r+t(0-(2-2r))$. Predpisi za $\alpha\circ\beta$ se ujemajo: pri $r=\frac{1}{4}$ imamo $(4-3t)ru=\frac{4-3t}{4}u=(1+t(r-1))\varphi_{4r(1-t)+2t-1}(u)$; pri $r=\frac{1}{2}$ imamo $\varphi_{4r(t-1)+2-t}(u)=\varphi_t(u)=\varphi_{2r(1-t)+2t-1}(u)$; pri $r=1$ imamo $(1+t(r-1))\varphi_{2r(1-t)+2t-1}(u)=\varphi_1(u)=u$. Predpisi za $\beta\circ\alpha$ se ujemajo: pri $r=\frac{1}{4}$ je $(4-3t)ru=\frac{4-3t}{4}u=(1+t(r-1))\varphi_{(4r-1)(1-t)}(u)$; pri $r=\frac{1}{2}$ je $\varphi_{(4r-1)(1-t)}(u)=\varphi_t(u)=\varphi_{2(1-r)(1-t)}(u)$; pri $r=1$ je $(1+t(r-1))\varphi_{2(1-r)(1-t)}(u)=\varphi_0(u)=u$. Poleg tega pri $t=0$ res dobimo $\alpha\circ\beta$ oz. $\beta\circ\alpha$, ter pri $t=0$ dobimo id. ✓

Lema 5 (Hilton): *Če je $f: X\to Y$ homotopska ekvivalenca in $\varphi: \mathbb{S}^{k-1}\to X$ zvezna preslikava, potem je $\overline{f}: X\cup_\varphi\mathbb{B}^k \longrightarrow Y\cup_{f\circ\varphi}\mathbb{B}^k$, $\overline{f}|_X=f$, $\overline{f}|_{\mathbb{B}^k}=\mathrm{id}_{\mathbb{B}^k}$, homotopska ekvivalenca.*

Dokaz: Pišimo namesto $f\circ\varphi$ kar $f\varphi$. Preslikava $\overline{f}$ je dobro definirana: če je $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ in $\varphi(u)=x$, potem velja $\overline{f}(u)=u=f\varphi(u)=f(x)=\overline{f}(x)$. Naj bo g homotopski inverz od f. Sedaj ne moremo definirati $\overline{g}: Y\cup_{f\varphi}\mathbb{B}^k \longrightarrow X\cup_\varphi\mathbb{B}^k$, $\overline{g}|_Y=g$, $\overline{g}|_{\mathbb{B}^k}=\mathrm{id}_{\mathbb{B}^k}$, saj to ne spuštuje identifikacij: za $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ in $f\varphi(u)=y$ imamo $\overline{g}(u)=u\overset{?}{=}gf\varphi(u)=g(y)=\overline{g}(y)$. Trik je, da g razširimo do preslikave $\overline{g}: Y\cup_{f\varphi}\mathbb{B}^k \longrightarrow X\cup_{gf\varphi}\mathbb{B}^k$ z identiteto na $\mathbb{B}^k$, saj je to dobro definirano. Naj bo h homotopija med gf in id_X, ter k homotopija med fg in id_Y. Ker med preslikavama $gf\varphi,\ \varphi: \mathbb{S}^{k-1}\to X$ obstaja homotopija $h_t\varphi$, in med preslikavama $fgf\varphi,\ f\varphi: \mathbb{S}^{k-1}\to Y$ obstaja homotopija $k_tf\varphi$, sledi po lemi 4, da obstajata homotopski ekvivalenci

$$\alpha: X\cup_{gf\varphi}\mathbb{B}^k \longrightarrow X\cup_\varphi\mathbb{B}^k \qquad \text{in} \qquad \beta: Y\cup_{fgf\varphi}\mathbb{B}^k \longrightarrow Y\cup_{f\varphi}\mathbb{B}^k.$$

Dokažimo, da imata $\overline{f}$ in $\overline{g}$ levi homotopski inverz, tako da pokažemo, da sta para

$$\alpha\overline{g}\overline{f},\ \mathrm{id}\colon\ X\cup_\varphi\mathbb{B}^k\to X\cup_\varphi\mathbb{B}^k \qquad \text{in} \qquad \beta\widetilde{f}\overline{g},\ \mathrm{id}\colon\ Y\cup_{f\varphi}\mathbb{B}^k\to Y\cup_{f\varphi}\mathbb{B}^k$$

homotopna. Tu je $\widetilde{f}: X\cup_{gf\varphi}\mathbb{B}^k \longrightarrow Y\cup_{fgf\varphi}\mathbb{B}^k$, $\widetilde{f}|_X=f$, $\widetilde{f}|_{\mathbb{B}^k}=\mathrm{id}_{\mathbb{B}^k}$. Iz dokaza leme 3 vemo, kakšen predpis imata α in β (za α je $\varphi_0=gf\varphi$ in $\varphi_1=\varphi$ in $\varphi_t=h_t\varphi$; za β je $\varphi_0=fgf\varphi$ in $\varphi_1=f\varphi$ in $\varphi_t=k_tf\varphi$). Zato imata $\alpha\overline{g}\overline{f}$ in $\beta\widetilde{f}\overline{g}$ predpis

$$
\begin{array}{ll}
\alpha\overline{g}\overline{f}(x)=gf(x) & ;\ x\in X, \\
\alpha\overline{g}\overline{f}(ru)=2ru & ;\ r\in\llbracket 0,\tfrac{1}{2}\rrbracket, u\in\mathbb{S}^{k-1}, \\
\alpha\overline{g}\overline{f}(ru)=h_{2-2r}\varphi(u) & ;\ r\in\llbracket \tfrac{1}{2},1\rrbracket, u\in\mathbb{S}^{k-1},
\end{array}
\quad \text{in} \quad
\begin{array}{ll}
\beta\widetilde{f}\overline{g}(y)=fg(y) & ;\ y\in Y, \\
\beta\widetilde{f}\overline{g}(ru)=2ru & ;\ r\in\llbracket 0,\tfrac{1}{2}\rrbracket, u\in\mathbb{S}^{k-1}, \\
\beta\widetilde{f}\overline{g}(ru)=k_{2-2r}f\varphi(u) & ;\ r\in\llbracket \tfrac{1}{2},1\rrbracket, u\in\mathbb{S}^{k-1}.
\end{array}
$$

Željeni homotopiji sta zato

$$
\begin{array}{ll}
\alpha\overline{g}\overline{f}\simeq\mathrm{id} & u\in\mathbb{S}^{k-1}, r,t\in\mathbb{I} \\
(x,t)\mapsto h_t(x) & ;\ x\in X, \\
(ru,t)\mapsto \frac{2}{1+t}ru & ;\ 2r\leq t+1, \\
(ru,t)\mapsto h_{2-2r+t}\varphi(u) & ;\ 2r\geq t+1,
\end{array}
\quad \text{in} \quad
\begin{array}{ll}
\beta\widetilde{f}\overline{g}\simeq\mathrm{id} & u\in\mathbb{S}^{k-1}, r,t\in\mathbb{I} \\
(y,t)\mapsto k_t(y) & ;\ x\in X, \\
(ru,t)\mapsto \frac{2}{1+t}ru & ;\ 2r\leq t+1, \\
(ru,t)\mapsto k_{2-2r+t}f\varphi(u) & ;\ 2r\geq t+1.
\end{array}
$$

Levi predpis je dobro definiran: pri $2r=t+1$ je $\frac{2}{1+t}ru=u\equiv h_1\varphi(u)=h_{2-2r+t}\varphi(u)$; pri $r=1$ in $2r\leq t+1$ je $t=1$, in tedaj $\frac{2}{1+t}ru=u\equiv h_1\varphi(u)=h_{2-2r+t}\varphi(u)$ (torej drugi predpis enako slika kot prvi na preseku $\mathbb{S}^{k-1} \equiv \varphi(\mathbb{S}^{k-1})$); pri $r=1$ in $2r \geq t+1$ je $h_{2-2r+t}\varphi(u) = h_t\varphi(u) \equiv h_t(u)$ (torej tretji predpis enako slika kot prvi). Pri $t=0$ imamo $h_0(x) = gf(x)$ in $\frac{2}{1+t}ru = 2ru$ in $h_{2-2r+t}\varphi(u) = h_{2-2r}\varphi(u)$, torej res dobimo $\alpha\widetilde{g}\overline{f}$. Pri $t=1$ imamo $h_t(x) = x$ in $\frac{2}{1+t}ru = ru$ in $h_{2-2r+t}\varphi(u) = h_1\varphi(u) = \varphi(u) \equiv u$, saj $t=1$ in $2r \geq t+1$ dasta $r=1$, torej res dobimo id. Desni predpis je dobro definiran: pri $2r = t+1$ je $\frac{2}{1+t}ru = u \equiv k_1 f\varphi(u) = k_{2-2r+t}\varphi(u)$; pri $r=1$ in $2r \leq t+1$ je $t=1$, in tedaj $\frac{2}{1+t}ru = u \equiv k_1 f\varphi(u) = k_{2-2r+t} f\varphi(u)$ (torej drugi predpis enako slika kot prvi na preseku $\mathbb{S}^{k-1} \equiv f\varphi(\mathbb{S}^{k-1})$); pri $r=1$ in $2r \geq t+1$ je $k_{2-2r+t} f\varphi(u) = k_t f\varphi(u) \equiv k_t(u)$ (torej tretji predpis enako slika kot prvi). Pri $t=0$ imamo $k_0(y) = fg(y)$ in $\frac{2}{1+t}ru = 2ru$ in $k_{2-2r+t} f\varphi(u) = k_{2-2r} f\varphi(u)$, torej res dobimo $\beta\widetilde{f}\overline{g}$. Pri $t=1$ imamo $k_1(y) = y$ in $\frac{2}{1+t}ru = ru$ in $k_{2-2r+t} f\varphi(u) = k_1 f\varphi(u) = f\varphi(u) \equiv u$, saj $t=1$ in $2r \geq t+1$ dasta $r=1$, torej res dobimo id.

Sedaj dokažimo splošno dejstvo: če ima zvezna preslikava $\overline{f} : A \to B$ med topološkimi prostori levi in desni homotopski inverz, l in d, potem je $l \simeq d$ obojestranski homotopski inverz od $\overline{f}$. Res, $l \circ \overline{f} \simeq \mathrm{id}$ in $\overline{f} \circ d \simeq \mathrm{id}$ dasta $l \simeq l \circ (\overline{f} \circ d) = (l \circ \overline{f}) \circ d \simeq d$, torej $\overline{f} \circ l \simeq \overline{f} \circ d \simeq \mathrm{id}$.

Zgoraj smo ugotovili, da imata $\overline{f}$ in $\overline{g}$ levi inverz, ter α obojestranski inverz. Od tod sklepamo: $\alpha \circ \overline{g} \circ \overline{f} \simeq \mathrm{id} \Rightarrow \overline{g} \circ \overline{f} \circ \alpha \simeq \mathrm{id} \Rightarrow \overline{f} \circ \alpha \circ \overline{g} \simeq \mathrm{id}$. Pri prvi $\simeq$ smo komponirali z leve s homotopskim inverzom od α, z desne pa z α. Druga $\simeq$ pravi, da ima $\overline{g}$ tudi desni inverz, torej je $\overline{f} \circ \alpha$ inverz. Tretja $\simeq$ pa pove, da ima $\overline{f}$ tudi desni inverz, torej obojestranski inverz. ✓

Nadaljujemo z dokazom trditve. S ponavljajočo uporabo leme 3 in 5 dobimo naslednje krepke deformacijske retrakcije f_i in homotopske ekvivalence f_i^j:

$$
\begin{array}{rl}
f_m\colon & X = X_m \simeq X_{m-1} \cup_{\varphi_{m-1}} \mathbb{B}^{k_{m-1}}; \\
f_{m-1}\colon & X_{m-1} \simeq X_{m-2} \cup_{\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}}, \\
f_{m-1}^1\colon & X \simeq X_{m-2} \cup_{\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}} \cup_{f_{m-1}\circ\varphi_{m-1}} \mathbb{B}^{k_{m-1}}; \\
f_{m-2}\colon & X_{m-2} \simeq X_{m-3} \cup_{\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}}, \\
f_{m-2}^1\colon & X_{m-2} \cup_{\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}} \simeq X_{m-3} \cup_{\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}} \cup_{f_{m-2}\circ\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}}, \\
f_{m-2}^2\colon & X \simeq X_{m-3} \cup_{\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}} \cup_{f_{m-2}\circ\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}} \cup_{f_{m-2}^1\circ\varphi_{m-1}} \mathbb{B}^{k_{m-1}}; \\
f_{m-3}\colon & X_{m-3} \simeq X_{m-4} \cup_{\varphi_{m-4}} \mathbb{B}^{k_{m-4}}, \\
f_{m-3}^1\colon & X_{m-3} \cup_{\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}} \simeq X_{m-4} \cup_{\varphi_{m-4}} \mathbb{B}^{k_{m-4}} \cup_{f_{m-3}\circ\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}}, \\
f_{m-3}^2\colon & X_{m-3} \cup_{\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}} \cup_{\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}} \simeq X_{m-4} \cup_{\varphi_{m-4}} \mathbb{B}^{k_{m-4}} \cup_{f_{m-3}\circ\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}} \cup_{f_{m-3}^1\circ\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}}, \\
f_{m-3}^3\colon & X \simeq X_{m-4} \cup_{\varphi_{m-4}} \mathbb{B}^{k_{m-4}} \cup_{f_{m-3}\circ\varphi_{m-3}} \mathbb{B}^{k_{m-3}} \cup_{f_{m-3}^1\circ\varphi_{m-2}} \mathbb{B}^{k_{m-2}} \cup_{f_{m-3}^2\circ\varphi_{m-1}} \mathbb{B}^{k_{m-1}}; \\
\vdots & \\
 & X \simeq \big(\coprod_{i=1}^N \mathbb{B}^n\big) \cup_{\varphi_1} \mathbb{B}^{k_1} \cup_{f_1^{m-3}\circ\varphi_2} \mathbb{B}^{k_2} \cup_{f_1^{m-4}\circ\varphi_3} \mathbb{B}^{k_3} \cup \cdots \cup_{f_1^{m-2}\circ\varphi_{m-1}} \mathbb{B}^{k_{m-1}}.
\end{array}
$$

Ker je bila dekompozicija na ročaje naraščajoča, velja $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \ldots \leq k_{m-1}$. Krogle so kontraktibilne, tj. obstaja krepka deformacijska retrakcija $f_0 : \coprod_{i=1}^N \mathbb{B}^n \longrightarrow \coprod_{i=1}^N \mathbb{B}^0$, in zopet lahko uporabimo lemo 5: dobimo

$$X \simeq \big(\coprod_{i=1}^N \mathbb{B}^0\big) \cup_{\varphi_1'} \mathbb{B}^{k_1} \cup_{\varphi_2'} \mathbb{B}^{k_2} \cup_{\varphi_3'} \mathbb{B}^{k_3} \cup \cdots \cup_{\varphi_{m-1}'} \mathbb{B}^{k_{m-1}}.$$

Če je $k_i = k_{i+1} = \ldots = k_j$, potem φ_{i+1}' slika iz (k_i-1)-sfere v $\ldots \cup_{\varphi_i'} \mathbb{B}^{k_i}$, in zato lahko po celularni aproksimaciji 5.a) preslikavo φ_{i+1}' s homotopijo spremenimo do take, katere slika ne seka $\mathring{\mathbb{B}}^{k_i}$. Po lemi 3 ta proces ohranja homotopski tip. S tem smo dobili CW-dekompozicijo. ■

Opomba: Pokažimo, da v zgornjem izreku predpostavka o naraščajočosti ni potrebna. Naj bo $\mathbb{B}^n \approx X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_m \subseteq X$ ne nujno naraščajoča dekompozicija na ročaje. Homotopsko ekvivalentnost s CW-kompleksom dokazujemo preko indukcije na m. Naj bo $X = X_m \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$. Po lemi 3 iz zgornjega izreka se $X_m \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ krepko deformacijsko retraktira na $X_m \cup_\iota \mathbb{B}^k$, in ι je sedaj definirana na $\mathbb{S}^{k-1}$. Po indukcijski predpostavki že obstaja homotopska ekvivalenca $\alpha : X_m \to \widetilde{X}_m$, kjer je $\widetilde{X}_m$ neki CW-kompleks, in po lemi 5 iz zgornjega izreka je $\overline{\alpha}\colon X_m \cup_\iota \mathbb{B}^k \to \widetilde{X}_m \cup_{\alpha\iota} \mathbb{B}^k$ homotopska ekvivalenca. Po izreku o celularni aproksimaciji 5.e), je preslikava $\alpha\iota$ homotopna neki preslikavi $\beta\colon \mathbb{S}^{k-1} \to \widetilde{X}^{(k-1)}$, kjer $\widetilde{X}^{(k-1)}$ označuje $k-1$-skelet. Lema 4 nam nato zagotovi obstoj homotopske ekvivalence $\widetilde{X}_m \cup_{\alpha\iota} \mathbb{B}^k \to \widetilde{X}_m \cup_\beta \mathbb{B}^k$. Dobili smo torej homotopsko ekvivalenco med $X = X_m \cup_\iota \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ in CW-kompleksom $\widetilde{X}_m \cup_\beta \mathbb{B}^k$. ■

Poglavje 3

Fundamentalni izrek

Videli bomo, da vsaka Morsova funkcija popolnoma opredeli topologijo mnogoterosti, iz katere slika. Dokazali bomo, da vsaka sklenjena gladka mnogoterost dopušča dekompozicijo na ročaje, ki je odvisna od izbire Morsove funkcije. Zato imajo vse sklenjene gladke mnogoterosti homotopski tip CW-kompleksov.

Podnivojne množice: Naj bo X gladka n-mnogoterost, $f : X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija, in $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definirajmo množice

$$\begin{aligned} X_{\{a\}} &:= \{x \in X;\ f(x) = a\} \ = \ f^{-1}(a), \\ X_a &:= \{x \in X;\ f(x) \leq a\} \ = \ f^{-1}((\!(-\infty, a]\!]), \\ X_{a,b} &:= \{x \in X;\ a \leq f(x) \leq b\} \ = \ f^{-1}((\!(a, b]\!]). \end{aligned}$$

Ker velja $(\!(-\infty, a)\!) \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}$ in $(\!(a, b)\!) \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}$, sta množici $f^{-1}((\!(-\infty, a)\!)) \overset{\circ}{\subseteq} X$ in $f^{-1}((\!(a, b)\!)) \overset{\circ}{\subseteq} X$ gladki n-podmnogoterosti v X. Pokažimo, da podobno velja za X_a, $X_{\{a\}}$, $X_{a,b}$.

Trditev 15: **a)** *Naj bo $f : X \to Y$ gladka preslikava med m- in n-mnogoterostjo. Če je $y \in f(X)$ regularna vrednost preslikave f, potem je $f^{-1}(y)$ gladka $(m-n)$-podmnogoterost v X.*

b) *Naj bo X sklenjena gladka n-mnogoterost in $f : X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Če sta $a, b \in f(X)$, $a < b$ regularni vrednosti, potem je $X_{\{a\}}$ sklenjena gladka $(n-1)$-mnogoterost, X_a je gladka ∂-n-podmnogoterost z robom $X_{\{a\}}$, in $X_{a,b}$ je gladka ∂-n-podmnogoterost z robom $X_{\{a\}} \cup X_{\{b\}}$.*

<u>*Dokaz*</u>: **a)** Za poljuben $x \in f^{-1}(y)$ moramo poiskati karto v X, katere presek z $f^{-1}(y)$ se bo slikal v $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$. Naj bo $\varphi : U \overset{\circ}{\subseteq} X \to \mathbb{R}^m$ karta na X ter $\psi : V \overset{\circ}{\subseteq} Y \to \mathbb{R}^n$ karta na Y, tako da je $\psi(y) = 0$. Ker je y regularna vrednost za f, je $\psi(y) = 0$ regularna vrednost za preslikavo $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Po definiciji je torej matrika $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ surjektivna. Zato po surjektivni obliki izreka o implicitni funkciji 2.f) velja, da ima po ponovni kompoziciji z lokalnim difeomorfizmom preslikava $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ obliko koordinatne projekcije $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$. Ker je $\varphi(U \cap f^{-1}(y))$ natanko množica vseh točk v $\mathbb{R}^m$, ki se s preslikavo $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ slika v 0, to pomeni, da je $\varphi(U \cap f^{-1}(y)) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$.
b) Točka a je zaprt podprostor v $\mathbb{R}$, in po zveznosti f je $X_{\{a\}}$ zaprta v X. Po a) je $X_{\{a\}}$ gladka $(n-1)$-podmnogoterost brez roba. Ker je $X_{\{a\}}$ zaprta podmnožica v kompaktnem prostoru X, je zato $X_{\{a\}}$ kompaktna, torej sklenjena $(n-1)$-podmnogoterost. Zaradi odprtosti intervala $(\!(-\infty, a)\!)$ v $\mathbb{R}$, je X_a odprta podmnožica v X, torej n-podmnogoterost. Po a) za vsak $x \in X_{\{a\}}$ obstaja karta $\varphi : U \overset{\circ}{\subseteq} X \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = 0$, tako da je $\varphi(X_{\{a\}}) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Zato je $\varphi(X_a) = \mathbb{R}^n_+$, kar podaja gladek ∂-n-atlas na X_a. Enaka ugotovitev velja tudi za množico $X_{a,b}$. ■

Prečkanje kritične vrednosti: Za dano Morsovo funkcijo $f: X \to \mathbb{R}$ opazujemo množico X_a. Ob povečevanju parametra a množica X_a raste. Na začetku (za dovolj majhen a) je X_a prazna. Ko je a regularna vrednost, je X_a mnogoterost, in videli bomo, da če na $[\![a,b]\!]$ ni kritičnih vrednosti, imata X_a in X_b enak difeomorfnostni tip. Ko je a kritična vrednost, pa X_a ni mnogoterost. Vprašanje je, kakšna je tedaj povezava med $X_{a-\varepsilon}$ in $X_{a+\varepsilon}$.

Če je $a \in f(X)$ in imajo vse kritične točke $p \in f^{-1}(a)$ indeks 0, potem je po Morsovi lemi 9 vsak $p \in X_{\{a\}} \cap \mathrm{Cr}_f$ lokalni minimum funkcije f: obstaja karta $\varphi: U \Subset X \to V \Subset \mathbb{R}^n$, $\varphi(p)=0$, tako da ima $f \circ \varphi^{-1}$ na V obliko polinoma $a+x_1^2+\ldots+x_n^2$. Zato na tej okolici velja

$$X_{a-\varepsilon,a+\varepsilon} \cap U \;\approx\; \{x \in V;\, a-\varepsilon \leq f\circ\varphi^{-1}(x) \leq a+\varepsilon\} = \{x \in V; x_1^2+\ldots+x_n^2 \leq \varepsilon\}.$$

Zato je $X_{a-\varepsilon,a+\varepsilon} \cap U$ difeomorfen $\mathbb{B}^n$, za dovolj majhen ε. Torej je $X_{a+\varepsilon} = X_{a-\varepsilon} \cup X_{a-\varepsilon,a+\varepsilon}$ enaka mnogoterosti $X_{a-\varepsilon}$, na katero smo okoli vsake kritične točke $p \in X_{\{a\}}$ dodali n-kroglo. Pri tem je presek dodane krogle s spodnjo množico $X_{a-\varepsilon}$ enak $\{x \in V;\, a-\varepsilon = f\circ\varphi^{-1}(x)\} = \{x \in V;\, -\varepsilon = x_1^2+\ldots+x_n^2\} = \emptyset$, torej smo $\mathbb{B}^n$ dodajali z operacijo disjunktne unije.

Če je $a \in f(X)$ in imajo vse kritične točke $p \in f^{-1}(a)$ indeks n, potem je po Morsovi lemi 9 vsak $p \in X_{\{a\}} \cap \mathrm{Cr}_f$ lokalni maksimum funkcije f: lokalno je $f\circ\varphi^{-1} = a-x_1^2-\ldots-x_n^2$, in zato

$$X_{a-\varepsilon,a+\varepsilon} \cap U \;\approx\; \{x \in V;\, a-\varepsilon \leq f\circ\varphi^{-1}(x) \leq a+\varepsilon\} = \{x \in V; x_1^2+\ldots+x_n^2 \leq \varepsilon\},$$

torej zopet $\mathbb{B}^n$, in $X_{a+\varepsilon}$ je $X_{a-\varepsilon}$ z dodanimi n-kroglami, eno za vsako kritično točko $p \in X_{\{a\}}$. Pri tem je presek dodane krogle s spodnjo množico $X_{a-\varepsilon}$ enak $\{x \in V;\, a-\varepsilon = f\circ\varphi^{-1}(x)\} = \{x \in V;\, x_1^2+\ldots+x_n^2 = \varepsilon\} = \mathbb{S}^n_\varepsilon$, torej smo $\mathbb{B}^n$ dodajali z operacijo lepljenja vzdolž robu $\mathbb{S}^{n-1}$.

Kako pa je s kritičnimi točkami vmesnega indeksa $0<k<n$, tj. kako dobimo $X_{a+\varepsilon}$ iz $X_{a-\varepsilon}$, ko je a kritična vrednost in v $X_{\{a\}}$ obstajajo sedelne točke? Okoli vsake kritične točke $p \in X_{\{a\}}$ indeksa k obstaja karta $\varphi: U \Subset X \to \mathring{\mathbb{B}}(0,2r) =: V \Subset \mathbb{R}^n$, $\varphi(p)=0$, tako da ima $f\circ\varphi^{-1}$ na V obliko polinoma $a - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2$. Zato na tej okolici velja

$$\begin{aligned} X_{a-\varepsilon,a+\varepsilon} \cap \varphi^{-1}(\mathbb{B}(0,r)) \;&\approx\; \big\{x \in \mathbb{B}(0,r);\, a-\varepsilon \leq f\circ\varphi^{-1}(x) \leq a+\varepsilon\big\} = \\ &= \big\{x \in \mathbb{B}(0,r); -\varepsilon \leq -\textstyle\sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2 \leq \varepsilon\big\} =: H. \end{aligned}$$

Težje je najti homeomorfizem $H \longrightarrow \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$, ki preslika

$$X_{a-\varepsilon} \cap \varphi^{-1}(\mathbb{B}(0,r)) \approx \big\{x \in \mathbb{B}(0,r); -\varepsilon = -\textstyle\sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2\big\} \longrightarrow \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k}.$$

Naslednja koda za program MATHEMATICA 7 namiguje, da tak homeomorfizem res obstaja, naš glavni izrek spodaj pa to potrdi (ne najde pa eksplicitne izražave tega homeomorfizma).

```
TableForm@{
{RegionPlot[-0.5<-x^2+y^2<0.5 && x^2+y^2<1, {x,-1,1},{y,-1,1},
 PlotPoints-> 20, Axes->False, Frame->False, PlotRangePadding->None],
 RegionPlot[-0.5<-x^2+y^2<-0.45 && x^2+y^2<1, {x,-1,1},{y,-1,1},
 PlotPoints-> 50, Axes->False, Frame->False, PlotRangePadding->None]},
{RegionPlot3D[-0.5<-x^2+y^2+z^2<0.5 && x^2+y^2+z^2<1, {x,-1,1},{y,-1,1},{z,-1,1},
 PlotPoints-> 20, Axes->False, Boxed->False, PlotRangePadding->None],
 RegionPlot3D[-0.5<-x^2+y^2+z^2<-0.45 && x^2+y^2+z^2<1, {x,-1,1},{y,-1,1},{z,-1,1},
 PlotPoints->100, Axes->False, Boxed->False, PlotRangePadding->None]},
{RegionPlot3D[-0.5<-x^2-y^2+z^2<0.5 && x^2+y^2+z^2<1, {x,-1,1},{y,-1,1},{z,-1,1},
 PlotPoints-> 20, Axes->False, Boxed->False, PlotRangePadding->None],
 RegionPlot3D[-0.5<-x^2-y^2+z^2<-0.45 && x^2+y^2+z^2<1, {x,-1,1},{y,-1,1},{z,-1,1},
 PlotPoints->100, Axes->False, Boxed->False, PlotRangePadding->None]}}
```

Iz slik opazimo, da ima množica H ‘ostre vogale’, in to več kot jih ima $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$.

Izrek 16 (M.Morse - 1934): *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^N$ dana gladka n-podmnogoterost in $f: X \to \mathbb{R}$ neka Morsova funkcija. Naj bosta $a, b \in f(X) \subseteq \mathbb{R}$ in $a < b$.*

a) *Če je mnogoterost $X_{a,b}$ kompaktna in ne vsebuje kritičnih točk funkcije f, potem obstajata difeomorfizma $X_{a,b} \longrightarrow X_{\{a\}} \times [\![a, b]\!]$ in $X_b \longrightarrow X_a$, ter krepka deformacijska retrakcija $X_b \longrightarrow X_a$.*

b) *Če je mnogoterost X kompaktna, p_0 kritična točka, $f(p_0) = c$, in $f^{-1}(c) \cap \mathrm{Cr}_f = \{p_0\}$, potem je $X_{c+\varepsilon}$ difeomorfna mnogoterosti $X_{c-\varepsilon}$ z enim dodanim k-ročajem, za neki $\varepsilon > 0$ in $k = \mathrm{ind}_f(p_0)$.*

Izrek torej pove, da če imamo sklenjeno mnogoterost X in neko Morsovo funkcijo, ki slika kritične točke v različne kritične vrednosti, potem ko a povečujemo na intervalu brez kritičnih točk, se difeomorfnostni tip od X_a ne spremeni, ko pa z a prečkamo kritično vrednost, tj. sliko kritične točke indeksa k, potem pa smo s povečevanjem a na mnogoterost X_a dodali k-ročaj.

<u>*Dokaz*</u>: **a)** Na $X_{a,b}$ definirajmo gladko vektorsko polje, in sicer gradientno polje funkcije f,

$$v := \mathrm{grad} f / \|\mathrm{grad} f\|^2.$$

V lokalni parametrizaciji $(\widetilde{U}, \alpha)$ se $\mathrm{grad} f$ izraža v točki $a \in \widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^n$ kot $\left(\frac{\partial f \circ \alpha}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f \circ \alpha}{\partial x_n}(a)\right) = D(f \circ \alpha)_a$, kar je razvoj po bazi $D(\alpha)_a e_1, \ldots, D(\alpha)_a e_n$ tangentnega prostora $T_{\alpha(a)} X$. Če izberemo neko drugo lokalno parametrizacijo β, se bo v novi bazi gradientno vektorsko polje izražalo kot $\left(\frac{\partial f \circ \beta}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f \circ \beta}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial f \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \beta}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \beta}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial f \circ \alpha}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f \circ \alpha}{\partial x_n}\right) D(\alpha^{-1} \circ \beta)$, in ker je matrika $D(\alpha^{-1} \circ \beta)$ ravno zamenjava baz za $T_p X$ glede na α in β, sledi, da je $\mathrm{grad} f$ dobro definirano globalno vektorsko polje na X. Ker je po predpostavki $\mathrm{grad} f \neq 0$ na $X_{a,b}$, je tudi $\frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|^2}$ dobro definirano. Tu je norma $\| \ldots \|$ definirana preko skalarnega produkta na $T_p X$, ta pa je podedovan iz skalarnega produkta na ambientnem prostoru $\mathbb{R}^N$.

Po izreku 3.f) obstaja izboklinasta funkcija $c: X \to \mathbb{R}$, tako da velja $c = 1$ na $X_{a,b}$ in $c = 0$ na komplementu neke kompaktne okolice od $X_{a,b}$ (za vsako kompaktno podmnožico K v mnogoterosti obstaja kompaktna okolica v X, saj K lahko pokrijemo z zaprtimi kroglami v X, tako da notranjosti krogel tvorijo odprto pokritje K, iz katerega lahko izberemo končno podpokritje, unija te končne družine zaprtih krogel pa je kompaktna). Oglejmo si vektorsko polje $\overline{v} := cv$. Ker je neničelno le na neki kompaktni podmnožici v X, obstaja po izreku 3.g) globalna enoparametrična družina difeomorfizmov ϕ vektorskega polja $\overline{v}$, tj. gladka funkcija $\phi: X \times \mathbb{R} \to X$, tako da velja $\frac{d\phi_t(x)}{dt} = \overline{v}(\phi_t(x))$, $\phi_0(x) = x$, $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$, $\phi_t|_{X \setminus X_{a,b}} = \mathrm{id}$. Za dani $x \in X$ definirajmo preslikavo

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto f(\phi(x, t)).$$

Po pravilu o odvodu kompozituma velja

$$\frac{dh}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(f \circ \alpha)}{dx_i}(\alpha^{-1} \circ \phi(x,t)) \cdot \frac{d(\alpha^{-1} \circ \phi)_i}{dt}(x,t) = \big\langle \mathrm{grad} f(\phi(x,t)), \overline{v}(\phi(x,t)) \big\rangle.$$

Za tiste t, kjer je $\phi(x,t) \in X_{a,b}$, velja $\overline{v} = v = \mathrm{grad} f / \|\mathrm{grad} f\|^2$, in zato je tam

$$\frac{dh}{dt}(t) = \big\langle \mathrm{grad} f(\phi(x,t)), \mathrm{grad} f(\phi(x,t)) \big\rangle \frac{1}{\|\mathrm{grad} f(\phi(x,t))\|^2} = 1.$$

Torej ima h na $X_{a,b}$ odvod konstantno enak 1, in zato je $h(s+t) = h(s) + t$, oz. eksplicitneje, $f(\phi(x, s+t)) = f(\phi(x, s)) + t$. Za difeomorfizem ϕ_t, kjer je $0 \leq t \leq b - a$, torej velja

$$\begin{aligned}
\phi_t(X_a) &= \phi_t(\{x\in X;\ f(x)\leq a\}) = \big\{\phi_t(x)\in X;\ f(x)\leq a\big\}\\
&= \big\{\phi_t(x)\in X;\ f(\phi_t(x)) = f(\phi(x,0+t)) = f(\phi_0(x))+t = f(x)+t\leq a+t\big\}\\
&= \big\{x\in X;\ f(x)\leq a+t\big\} = X_{a+t}, \text{ in analogno tudi}\\
\phi_t(X_{\{a\}}) &= X_{\{a+t\}}.
\end{aligned}$$

Zato je ϕ_{b-a} iskani difeomorfizem med X_a in X_b. Podobno dobimo difeomorfizem

$$X_{\{a\}}\times\llbracket a,b\rrbracket \longrightarrow X_{a,b},\quad (x,t)\longmapsto \phi(x,t-a).$$

Dobra definiranost: za $(x,t)\in X_{\{a\}}\times\llbracket a,b\rrbracket$ je $f(\phi(x,t-a)) = f(\phi(x,0))+t-a = \cancel{a}+t-\cancel{a}\in\llbracket a,b\rrbracket$, in zato $\phi(x,t-a)\in X_{a,b}$. Inverz je $x\mapsto(\phi(x,a-f(x)),f(x))$. Dobra definiranost: $f(\phi(x,a-f(x))) = \phi(x,0)+a-f(x) = f(x)+a-f(x) = a$ in $f(x)\in\llbracket a,b\rrbracket$. Kompozitum slika $x\mapsto(\phi(x,a-f(x)),f(x)) \mapsto \phi(\phi(x,a-f(x)),f(x)-a) = \phi(x,a-f(x)+f(x)-a) = \phi(x,0) = x$ in $(x,t)\mapsto\phi(x,t-a)\mapsto(\phi(\phi(x,t-a),a-t),t) = (\phi(x,t-a+a-t),t) = (x,t)$. Gladkost sledi iz gladkosti ϕ.

S tem dobimo tudi krepko deformacijsko retrakcijo X_b na X_a, namreč

$$X_b\times\mathbb{I}\longrightarrow X_b,\qquad (x,t)\longmapsto\phi\big(x,\min\{0,t(a-f(x))\}\big).$$

Zveznost je jasna. Pri $t=0$ imamo $\phi(x,0)=x$, torej je preslikava identiteta. Pri $t=1$ imamo $\phi(x,\min\{0,a-f(x)\}) =: (*)$; za $x\in X_a$ je $a-f(x)\geq 0$ in zato $(*)=\phi(x,0)=x$; za $x\in X_b\setminus X_a$ je $a-f(x)\leq 0$, in zato $f((*)) = f(\phi(x,a-f(x)\}) = \cancel{f(x)}+a-\cancel{f(x)}$, tj. $(*)\in X_a$. Pri $t=1$ imamo torej retrakcijo na X_a. Pri poljubnem t in $x\in X_a$ je $f(x)\leq a$, torej $t(a-f(x))\geq 0$, in zato $\phi(x,\min(0,t(a-f(x)))) = \phi(x,0) = x$, torej homotopija ves čas miruje na X_a.

b) Označujmo $f^{-1}\llparenthesis-\infty,a\rrparenthesis$ namesto $f^{-1}(\llparenthesis-\infty,a\rrparenthesis)$. Denimo, da smo točko b) že dokazali za primer $c=0$, in jo dokažimo za poljuben c. Res, tedaj ima funkcija $f-c$ na X iste kritične točke kot f, saj pri odvajanju konstanta izgine, in indeksi so enaki, tj. $\forall p\in\mathrm{Cr}_f\colon\ \mathrm{ind}_{f-c}(p) = \mathrm{ind}_f(p)$, kritične vrednosti pa so zamaknjene za $-c$. Po predpostavki obstaja $\varepsilon>0$, tako da je $(f-c)^{-1}\llparenthesis-\infty,+\varepsilon\rrparenthesis = (f-c)^{-1}\llparenthesis-\infty,-\varepsilon\rrparenthesis\cup_\iota H^k$. Zato je $f^{-1}\llparenthesis-\infty,c+\varepsilon\rrparenthesis = f^{-1}\llparenthesis-\infty,c-\varepsilon\rrparenthesis\cup_\iota H^k$, kot smo želeli. V nadaljevanju torej brez škode za splošnost predpostavimo, da je $c=0$.

Ideja dokaza: Oznake $X_a, X_{\{a\}}, X_{a,b}$ se nanašajo na podnivojne množice glede na f. Našli bomo novo Morsovo funkcijo $g\colon X\to\mathbb{R}$, tako da bo za neki okolici $p_0\in V\subseteq U\subseteq X$ veljalo $g|_{X\setminus U} = f|_{X\setminus U}$ in $g|_V < f|_V$ in $f-\mathrm{const.}\leq g\leq f$. Tedaj bo za neko malo območje $H\subseteq V$ veljalo $g^{-1}\llparenthesis-\infty,-\varepsilon\rrbracket = X_{-\varepsilon}\cup H$ in $g^{-1}\llparenthesis-\infty,\varepsilon\rrbracket = X_\varepsilon$. Nato bomo dokazali, da g nima kritičnih vrednosti znotraj $\llbracket-\varepsilon,\varepsilon\rrbracket$, kar bo po a) pomenilo, da sta $g^{-1}\llparenthesis-\infty,-\varepsilon\rrbracket$ in $g^{-1}\llparenthesis-\infty,\varepsilon\rrbracket$ difeomorfni, in zato $X_\varepsilon\approxeq X_{-\varepsilon}\cup H$. V preostanku izpeljave bomo dokazali, da je H homeomorfen k-ročaju, in skušali opisati kako je prilepljen na $X_{-\varepsilon}$.

Po trditvi 8 ima f končno kritičnih točk. Po Morsovi lemi 9 obstaja lokalna parametrizacija $\alpha\colon\ \mathring{\mathbb{B}}^n_{2r}\overset{\circ}{\subseteq}\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}\longrightarrow X$, $\alpha(\mathring{\mathbb{B}}^n_r) =: U\overset{\circ}{\subseteq}X$, tako da je $\alpha(0,0)=p_0$ in na celotni krogli $\mathring{\mathbb{B}}^n_{2r}$ velja

$$f\circ\alpha(x,y) = -\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\sum_{i=k+1}^{n}y_i^2 = -\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Izberimo dovolj majhen $0<\varepsilon<\frac{r^2}{3}$, tako da ima f na intervalu $\llbracket-\varepsilon,\varepsilon\rrbracket$ le kritično vrednost 0.

Lema: *Obstaja gladka funkcija* $\mu\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *z lastnostmi*

(i) $\mu(0)>\varepsilon$, (ii) $\mu|_{\llbracket 2\varepsilon,\infty\rrparenthesis}=0$, (iii) $-1<\mu'|_{\mathbb{R}}\leq 0$.

Dokaz: Za vsak $u>0$ ima funkcija $e^{-\frac{1}{x^u}}$ vse odvode oblike $e^{-\frac{1}{x^u}}\cdot$(polinom v x^{-u} in x^{-1}). Ker pri $x\downarrow 0$ gre $e^{-\frac{1}{x^u}}$ hitreje proti 0 kot gre x^{-u} proti ∞, velja $\lim_{x\downarrow 0}\big(e^{-\frac{1}{x^u}}\big)^{(r)}=0$ za vsak $r\in\mathbb{N}_0$. Zato je $x\mapsto\left\{\begin{smallmatrix}\exp(-1/x^u);\, x\geq 0\\ 0\quad ;\, x\leq 0\end{smallmatrix}\right.$ gladka funkcija. V posebnem je $\mu_0:=\left\{\begin{smallmatrix}\exp(-1/\sqrt{x});\, x\geq 0\\ 0\quad ;\, x\leq 0\end{smallmatrix}\right.$ gladka funkcija. Na $(\!|0,\infty|\!)$ velja $\mu_0'(x)=\frac{1}{2x^{3/2}}e^{-1/\sqrt{x}}$ in $\mu_0''(x)=\frac{1}{4x^3}(1-3\sqrt{x})e^{-1/\sqrt{x}}$. Zato je $0<\mu_0'(x)<\mu_0'(\frac{1}{9})=\frac{27}{2e^3}$. Sedaj definiramo $\mu(x):=a\mu_0(b(2\varepsilon-x))$, kjer je $a:=\frac{7}{6}e^3\varepsilon>0$ in $b:=\frac{1}{18\varepsilon}>0$. S tem dobimo $\mu(x)=0$ za $x>2\varepsilon$, odvod $\mu'(x)=-ab\mu_0'(b(2\varepsilon-x))$ je <0 in $>-ab\frac{27}{2e^3}=-\frac{7}{8}>-1$, vrednost $\mu(0)$ pa je enaka $a\mu_0(2b\varepsilon)=\frac{7}{6}e^3\varepsilon\mu_0(\frac{1}{9})=\frac{7}{6}\varepsilon>\varepsilon$, kot smo želeli. ✓

Definirajmo sedaj željeno funkcijo g s predpisom

$$g\colon\ X\to\mathbb{R},\quad p\longmapsto\begin{cases}f(p) & ;\quad p\in X\setminus U,\\ f(p)-\mu(\|x\|^2+2\|y\|^2); & p=\alpha(x,y)\in\alpha(\mathring{\mathbb{B}}^n_r)=U.\end{cases}$$

Vidimo, da ima tako definirana funkcija g res lastnosti ki smo jih omenjali v ideji dokaza, tj. $g|_{X\setminus U}=f|_{X\setminus U},\ g|_V<f|_V,\ f-\mu(0)\leq g\leq f$, za $V=\alpha(\mathring{\mathbb{B}}^n_\delta)$ in dovolj majhen $\delta>0$.

Utemeljimo, da je g gladka preslikava. Če je $(x,y)\in\mathbb{B}^n_r\setminus\mathring{\mathbb{B}}^n_{\sqrt{2\varepsilon}}$, tj. $2\varepsilon\leq\|x\|^2+\|y\|^2$, potem je $2\varepsilon\leq\|x\|^2+2\|y\|^2$, in zato po (ii) velja $\mu(\|x\|^2+2\|y\|^2)=0$. Torej na $X\setminus\alpha(\mathring{\mathbb{B}}^n_{\sqrt{2\varepsilon}})$ velja $g=f$, in zato je g gladka na celem X. To vse ima smisel, ker je $\sqrt{2\varepsilon}<\sqrt{2r^2/3}=\sqrt{2/3}\,r<r$.

Pokažimo, da je g Morsova funkcija na X, z istimi kritičnimi točkami kot f, ki imajo iste indekse. Na $X\setminus U$ se g in f ujemata, torej trditev drži. Na U pa lahko obe funkciji komponiramo z difeomorfizmom α, in zato primerjamo funkciji

$$f\circ\alpha(x,y)=-\|x\|^2+\|y\|^2\qquad\text{in}\qquad g\circ\alpha(x,y)=-\|x\|^2+\|y\|^2-\mu(\|x\|^2+2\|y\|^2).$$

Njuni odvodi se v krajši pisavi glasijo

$$D(f\circ\alpha)_{(x,y)}=(-2x,2y)\qquad\text{in}\qquad D(g\circ\alpha)_{(x,y)}=\big(-2(1+\mu')x,\ 2(1-2\mu')y\big).$$

Ker je po (iii) $-1<\mu'\leq 0$, je desna funkcija v točki (x,y) enaka nič natanko tedaj, ko je $(x,y)=0$, tj. natanko tedaj ko je leva funkcija v (x,y) enaka 0. Torej imata f in g iste kritične točke: na U samo 0. Obravnavajmo še izrojenost. Matrika $D^2(f\circ\alpha)=\mathrm{diag}(-2,\ldots,-2,2,\ldots,2)$ je povsod obrnljiva. Izračunajmo še $D^2(f\circ\alpha)_{(0,0)}$ (naj $\delta_{i,j}$ označuje Kroneckerjev delta):

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^2(-\|x\|^2+\|y\|^2-\mu(\|x\|^2+2\|y\|^2))}{\partial x_i\partial x_j}(0{,}0)&=\tfrac{\partial(-2x_i-\mu'\cdot 2x_i)}{\partial x_j}(0{,}0)&&=-2\delta_{i,j}(1+\mu'(0)),\\ \tfrac{\partial^2(-\|x\|^2+\|y\|^2-\mu(\|x\|^2+2\|y\|^2))}{\partial x_i\partial y_j}(0{,}0)&=\tfrac{\partial(-2x_i-\mu'\cdot 2x_i)}{\partial y_j}(0{,}0)&&=(-\mu''\cdot 2x_i4y_j)_{(0,0)}=0,\\ \tfrac{\partial^2(-\|x\|^2+\|y\|^2-\mu(\|x\|^2+2\|y\|^2))}{\partial y_i\partial y_j}(0{,}0)&=\tfrac{\partial(2y_i-\mu'\cdot 4y_i)}{\partial y_j}(0{,}0)&&=2\delta_{i,j}(1-2\mu'(0)).\end{aligned}$$

Ker je po (iii) $-1<\mu'\leq 0$, je $D^2(f\circ\alpha)_{(0,0)}$ neizrojena, in ima k negativnih lastnih vrednosti.

Dokažimo, da je $g^{-1}(\!|-\infty,\varepsilon]\!]=X_\varepsilon$. Ker je $g\leq f$, je $g^{-1}(\!|-\infty,\varepsilon]\!]\supseteq X_\varepsilon$. Naj bo $p\in X$ in $g(p)\leq\varepsilon$. Ker je $g|_{X\setminus U}=f|_{X\setminus U}$, lahko predpostavimo $p=\alpha(x,y)\in\alpha(\mathring{\mathbb{B}}^n_r)$. Če je $\|x\|^2+2\|y\|^2>2\varepsilon$, potem smo že prej videli, da je $g(p)=f(p)$. V nasprotnem primeru pa velja

$$f\circ\alpha(x,y)=-\|x\|^2+\|y\|^2\leq\frac{\|x\|^2+2\|y\|^2}{2}\leq\varepsilon.$$

Dokažimo, da g nima kritičnih vrednosti na intervalu $[\![-\varepsilon,\varepsilon]\!]$. Pokazali smo že, da imata g in f iste kritične točke. Poleg tega je p_0 edina kritična točka na $X_{-\varepsilon,\varepsilon}\supseteq g^{-1}[\![-\varepsilon,\varepsilon]\!]$ (tako smo definirali ε). Toda $g(p_0)=f(p_0)-\mu(0)=-\mu(0)<-\varepsilon$. Torej g res nima kritičnih vrednosti na $[\![-\varepsilon,\varepsilon]\!]$. Po točki a) zato obstaja difeomorfizem $g^{-1}(\!|-\infty,-\varepsilon]\!]\approx g^{-1}(\!|-\infty,\varepsilon]\!]=X_\varepsilon$.

Ugotovimo še glavno stvar: kako izgleda $g^{-1}(\!|-\infty,-\varepsilon]\!]$. Ker je $g\leq f$, je $X_{-\varepsilon}\subseteq g^{-1}(\!|-\infty,-\varepsilon]\!]$. Vidimo, da je množica $g^{-1}(\!|-\infty,-\varepsilon]\!]\setminus X_{-\varepsilon}$ vsebovana v $\alpha(\mathbb{B}^n_r)$. Res, če je $g(p)\leq-\varepsilon<f(p)$,

potem ne more biti $p \in X \setminus U$, saj je tam $g = f$. Zato lahko $H := g^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!] \setminus f^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon|\!)$ preko difeomorfizma α opazujemo znotraj $\mathbb{B}^n_r \subseteq \mathbb{R}^n$. Označimo torej $\widetilde{X}_{-\varepsilon} := \alpha^{-1}(X_{-\varepsilon} \cap \alpha(\mathbb{B}^n_r))$ $\subseteq \mathbb{B}^n_r$ in $\widetilde{g}^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!] := \alpha^{-1}(g^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!] \cap \alpha(\mathbb{B}^n_r)) \subseteq \mathbb{B}^n_r$. Vidimo, da je

$$\widetilde{X}_{-\varepsilon} = \big\{(x,y) \in \mathbb{B}^n_r;\ -\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq -\varepsilon\big\} \qquad \text{in}$$
$$\widetilde{g}^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!] = \big\{(x,y) \in \mathbb{B}^n_r;\ -\|x\|^2 + \|y\|^2 - \mu(\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \leq -\varepsilon\big\}.$$

Dokažimo, da za vsak $(x,y) \in \widetilde{g}^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!]$ velja

$$\widetilde{g}^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!] \cap \big(\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k}\big) = \{x\} \times \mathbb{B}^{n-k}_{s(x)},$$

kjer je radij krogel podan z neko gladko funkcijo $s\colon \mathbb{B}^k \to (\!|0, \infty|\!)$ z lastnostjo $\|x\|^2 > 2\varepsilon \Rightarrow s(x) = \sqrt{\|x\|^2 - 1}$. Pri fiksnem x množica $\widetilde{g}^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!] \cap \big(\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k}\big)$ sestoji iz vseh elementov $(x,y) \in \mathbb{B}^n_r$, za katere velja $-\|x\|^2 + \|y\|^2 - \mu(\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \leq -\varepsilon$. Če označimo $t := \|x\|^2 + 2\|y\|^2$, potem dobimo ekvivalenten pogoj

$$\mu(t) - \frac{t}{2} + \frac{3\|x\|^2}{2} \geq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Funkcija $t \mapsto \mu(t) - \frac{t}{2}$ je strogo padajoča, saj je μ padajoča ($\mu' \leq 0$). Zato obstaja enoličen t_0, pri katerem $(*)$ postane enakost, in neenakost $(*)$ je izpolnjena natanko za $t \leq t_0$, natanko tedaj ko $\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \leq t_0$, torej natanko tedaj ko je $\|y\|^2 \leq (t_0 - \|x\|^2)/2$. Definirajmo

$$s(x) := \sqrt{(t_0 - \|x\|^2)/2}.$$

Ker je $\mu|_{(\!|-\infty, 0]\!]} > \varepsilon$, iz enakosti $(*)$ sledi $t_0 > 0$. Poleg tega po (iii) velja $(\mu(t) + t)' = \mu'(t) + 1 > 0$. Na $[\![0, \infty|\!)$ torej velja $\mu(t) + t \geq \mu(0) > \varepsilon$. Zato je

$$\varepsilon = \mu(t_0) - \frac{t_0}{2} + \frac{3\|x\|^2}{2} = \mu(t_0) + t_0 - 3\frac{t_0 - \|x\|^2}{2} > \varepsilon - 3\frac{t_0 - \|x\|^2}{2},$$

kar potrjuje $(t_0 - \|x\|^2)/2 > 0$, tj. s je dobro definiran. Pokažimo še gladkost. Funkcija $(x,t) \mapsto \mu(t) - \frac{t}{2} + \frac{3\|x\|^2}{2} - \varepsilon$ je gladka, in odvod po t v t_0 je $\mu'(t_0) - \frac{1}{2} \neq 0$, kar po izreku o implicitni funkciji 2.e) pove, da je enolična izrazitev s kot funkcije t gladka.

Ugotovili smo torej, da je $\widetilde{g}^{-1}(\!|-\infty, -\varepsilon]\!] \cap \big(\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k}\big) = \{x\} \times \mathbb{B}^{n-k}_{s(x)}$. Od tod sledi, da je preslikava $H \longrightarrow \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$, ki pošlje $(x,y) \mapsto \big(x, \frac{y}{s(x)}\big)$, iskani homeomorfizem. ∎

Opomba: Velja splošnejša oblika izreka: *Če je $X \subseteq \mathbb{R}^N$ kompaktna gladka n-podmnogoterost, $f : X \to \mathbb{R}$ Morsova funkcija, $c \in \mathbb{R}$ kritična vrednost, $f^{-1}(c) \cap \mathrm{Cr}_f = \{p_0, \ldots, p_m\}$, $k_i = \mathrm{ind}_f(p_i)$, potem sta za neki $\varepsilon > 0$ mnogoterosti $X_{c+\varepsilon}$ in $X_{c-\varepsilon} \cup_{\iota_0} H^{k_0} \cup_{\iota_1} H^{k_1} \ldots \cup_{\iota_m} H^{k_m}$ difeomorfni, kjer je H^{k_i} k_i-ročaj in se slike vložitev $\iota_0 \ldots, \iota_m$ ne sekajo.* Dokaz je povsem analogen zgornjemu, le da enako konstrukcijo funkcije g naredimo na okolici vsake kritične točke p_i.

Izrek 17: *Vsaka sklenjena gladka mnogoterost dopušča monotono dekompozicijo na ročaje in je zato homotopsko ekvivalentna nekemu končnemu CW-kompleksu.*

Dokaz: Naj bo X dana sklenjena mnogoterost. Po Whitneyevemu izreku 3.c) lahko X vložimo v $\mathbb{R}^N$ za nek $N \in \mathbb{N}$. Po izreku 10 na X obstaja Morsova funkcija. Po izreku 8 je na X le končno kritičnih točk. Če uporabimo 16 in njegovo opombo, ima po indukciji mnogoterost X dekompozicijo na ročaje. Po izreku 14 in njegovi opombi je zato X homotopsko ekvivalentna končnemu CW-kompleksu, ki ima toliko k-celic kot ima f kritičnih točk na X indeksa k. ∎

Zgled 18 (Reeb): Če za sklenjeno gladko n-mnogoterost X obstaja Morsova funkcija f z le dvema kritičnima točkama, potem je X homeomorfna sferi $\mathbb{S}^n$. Res, ker je X kompaktna, je $f(X)$ končna unija zaprtih intervalov. Po 2.h) so lokalni ekstremi vedno kritične točke. Zato imamo le en interval $f(X) = [\![a, b]\!]$. Po Morsovi lemi 9 obstajata okolici obeh kritičnih točk, kjer se f izraža kot kvadraten polinom $\pm\|x\|^2$ in v kritični točki doseže svoj minimum/maksimum. Torej obstaja $\varepsilon > 0$, tako da sta $X_{a,a+\varepsilon}$ in $X_{b-\varepsilon,b}$ difeomorfna disku. Območje vmes, $X_{a+\varepsilon,b-\varepsilon}$, ne vsebuje kritičnih točk, in je zato po 16.a) difeomorfno $X_{\{a+\varepsilon\}} \times \mathbb{I} \approx \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I}$. Celoten prostor X je torej enak kvocientu od $\mathbb{B}^n \coprod (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I}) \coprod \mathbb{B}^n$, kjer identifikacije tečejo vzdolž $X_{\{a+\varepsilon\}} \approx \mathbb{S}^{n-1}$ in $X_{\{b-\varepsilon\}} \approx \mathbb{S}^{n-1}$, kar je homeomorfno sferi $\mathbb{S}^n$. ⧫

Poglavje 4

Homologija mnogoterosti

V tretjem poglavju smo videli, da Morsova funkcija popolnoma določi difeomorfnostni tip mnogoterosti (četudi je ta tip morda težko razbrati iz same funkcije). Sedaj pa bomo videli, da nam zgolj število kritičnih točk Morsove funkcije navzgor omeji Bettijeva števila mnogoterosti, ter natančno določi Eulerjevo karakteristiko.

Bettijeva števila: Homologijo končnega CW kompleksa lahko izračunamo po izreku 5.e). Denimo, da imamo dano sklenjeno gladko mnogoterost X ter Morsovo funkcijo $f : X \to \mathbb{R}$. Opomba pod dokazom fundamentalnega izreka 16 nam pove, da f določa dekompozicijo mnogoterosti X na ročaje. Izrek 14 in njegova opomba povesta, da ima X homotopski tip CW-kompleksa, ki ima toliko k-celic, kot je na X kritičnih točk indeksa k. Torej je $|\mathrm{Cr}_f^k|$ ravno rang proste abelove grupe, ki nastopa v celularnem verižnem kompleksu. Po definiciji celularne homologije je abelova grupa $H_k(X)$ enaka kvocientu neke podgrupe v $\mathbb{Z}^{|\mathrm{Cr}_f^k|}$. Operacija kvocienta kvečjemu zmanjšuje rang, medtem ko izrek 4.a) pove, da ima vsaka podgrupa manjši rang kot ambientna grupa. Od tod sklepamo, da je k-to bettijevo število kvečjemmu manjše od števila kritičnih točk Morsove funkcije na X. Poleg tega iz strani 23 vemo, da je Eulerjeva karakteristika CW-kompleksa enaka alternirajoči vsoti števil njegovih k-celic. To pomeni, da je Eulerjeva karakteristika mnogoterosti X enaka alternirajoči vsoti števil kritičnih točk na X indeksa k. S tem smo dokazali polovico naslednjega izreka:

Izrek 19: *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^N$ sklenjena gladka n-mnogoterost in $f : X \to \mathbb{R}$ Morsova funkcija. Potem za X glede na f veljajo* šibke Morsove neenakosti

$$\beta_k(X) \;\leq\; |\mathrm{Cr}_f^k|, \qquad \text{za } k=0,\dots,n,$$

ter krepke Morsove neenakosti

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\beta_i(X) \;\leq\; \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}|\mathrm{Cr}_f^i|, \qquad \text{za } k=0,\dots,n.$$

Pri $k=n$ pa velja enakost $\chi(X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\beta_i(X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}|\mathrm{Cr}_f^i|$.

Krepkih Morsovih enakosti ne bomo dokazali. Utemeljimo le terminologijo 'šibke' in 'krepke', tj. dokažimo da krepke neenakosti implicirajo šibke neenakosti:

$$\begin{aligned}\beta_k(X) - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\cancel{|\mathrm{Cr}_f^i|} \;&\leq\; \beta_k(X) - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\beta_i(X) \;=\; \textstyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\beta_i(X) \;\leq \\ &\leq\; \textstyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}|\mathrm{Cr}_f^i| \;=\; |\mathrm{Cr}_f^k| - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\cancel{|\mathrm{Cr}_f^i|}.\end{aligned}$$

Zgled 20: Za poljubne polinome $f_1,\dots,f_r \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ označimo množico njihovih ničel z $\mathcal{Z}(f_1,\dots,f_r) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$. Naj bo $T_n(x) := \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i}(x^2-1)^i x^{n-2i}$ n-ti polinom Chebysheva prve stopnje in $f := T_n(x)+T_n(y)+T_n(z) \in \mathbb{R}[x,y,z]$, za $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo n-to *Banchoff-Chmutovo ploskev* kot množico

$$Z_n := \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}\big(T_n(x)+T_n(y)+T_n(z)\big) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Spodnja koda za program MATHEMATICA 7 nam nariše prvih pet sodo oštevilčenih ploskev:

```
Z[n_] = ContourPlot3D[ChebyshevT[n,x]+ChebyshevT[n,y]+ChebyshevT[n,z],
{x,-2,2},{y,-2,2},{z,-2,2},Contours->0.02, Boxed->False, Axes->False,
PlotRange->All, PlotRangePadding->None, PlotPoints->70];//Quiet
{Z[2], Z[4], Z[6], Z[8], Z[10]}
```

Iz slik vidimo, da je ploskev $Z_{2(k+1)}$ ravno kocka (sfera), ki ima 'zvrtanih' k^2 lukenj v vsako izmed smeri x, y, z. Torej sumimo, da bo v splošnem ploskev $Z_{2(k+1)}$ imela rod

$$\underbrace{k^2}_{\text{smer } x} + \underbrace{k^2(k+1)}_{\text{smer } y} + \underbrace{k^2(k+1)}_{\text{smer } z} = k^2(2k+3).$$

Toda slike so varljive, in videli smo jih le prvih pet, poleg tega pa luknje blizu vogala kocke kot kaže postajajo vedno manjše (morda se bodo pri velikih n te luknje zlile). Radi bi pri poljubnem sodem n eksaktno ugotovili za katero ploskev gre. Če nam uspe pokazati, da je to povezana sklenjena ploskev, potem vemo, da mora biti homeomorfna povezani vsoti torusov (saj neorientabilne ploskve niso vložljive v $\mathbb{R}^3$). Take ploskve so klasificirane z njihovo Eulerjevo karakteristiko χ, ki je po zgornjem izreku 19 enaka $|\mathrm{Cr}_h^0| - |\mathrm{Cr}_h^1| + |\mathrm{Cr}_h^2|$, za vsako Morsovo funkcijo h na Z_n, in znano je tudi, da za rod g take ploskve velja $\chi = 2-2g$.

Naštejmo nekaj znanih lastnosti polinomov Chebysheva, ki jih bomo potrebovali v izračunu. Naj bo $U_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2i+1}(x^2-1)^i x^{n-2i}$ n-ti polinom Chebysheva druge stopnje. Opazimo, da je $\deg(T_n(x)) = n = \deg(U_n(x))$. Poleg tega velja:

(1) $D_x T_n(x) = nU_{n-1}(x)$,	(4) $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$,
(2) $D_x U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1} - xU_n}{x^2-1}$,	(5) $U_n(\cos(x)) = \sin((n+1)x)/\sin(x)$,
(3) $T_n(x)^2 - (x^2-1)U_{n-1}(x)^2 = 1$,	(6) T_n ima ničle $\cos\left(\frac{\pi(2i-1)}{2n}\right)$ za $i = 1,\dots,n$,
	(7) U_n ima ničle $\cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right)$ za $i = 1,\dots,n$.

Preverimo, da je Z_n res ploskev (brez robu). Po izreku o implicitni funkciji 2.e) zadošča pokazati, da v vseh točkah iz $Z_n = \{f = 0\}$ matrika $[D_x f, D_y f, D_z f]$ ni ničelna (kjer D_x označuje parcialni odvod), tj. da velja $\mathcal{Z}(f, D_x f, D_y f, D_z f) = \emptyset$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(f, D_x f, D_y f, D_z f) &= \mathcal{Z}\big(T_n(x)+T_n(y)+T_n(z), D_x T_n(x), D_y T_n(y), D_z T_n(z)\big) \\
&\overset{(1)}{=} \mathcal{Z}\big(T_n(x)+T_n(y)+T_n(z), U_{n-1}(x), U_{n-1}(y), U_{n-1}(z)\big) \\
&\overset{(3)}{=} \mathcal{Z}\big(1+1+1, U_{n-1}(x), U_{n-1}(y), U_{n-1}(z)\big) = \emptyset
\end{aligned}$$

Dokažimo, da je Z_n kompaktna za sode n. Ker je $Z_n = f^{-1}(0)$, tj. praslika z zvezno preslikavo zaprte podmnožice, je Z_n zaprta v $\mathbb{R}^3$. Zadošča torej dokazati, da je Z_n omejena. Ker je n sod, vidimo iz predpisa, da je T_n polinom sode stopnje, s pozitivnim vodilnim koeficientom, torej velja $T_n(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} \infty$. Denimo, da imamo neomejeno zaporedje (x_m, y_m, z_m) na Z_n. Tedaj tudi $0 = T_n(x_m)+T_n(y_m)+T_n(z_m)$ raste preko vseh meja, protislovje. Torej je Z_n sklenjena.

Definirajmo funkcijo $h\colon Z_n \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z$. Znano je, da ima implicitno podana ploskev $Z_n = \mathcal{Z}(f)$ normalo $[D_x f, D_y f, D_z f]$. Za $D(h)_p = h = [0,0,1] : T_p Z_n \to T_{h(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ torej velja, da je p kritična točka za h natanko tedaj, ko je $[D_x(f)_p, D_y(f)_p, D_z(f)_p] = \lambda h = [0,0,\lambda]$ za neki

$\lambda \in \mathbb{R}$. Torej je $p = (x, y, z) \in Z_n$ kritična točka funkcije h natanko tedaj, ko je $T_n'(x) = T_n'(y) = 0$. Zato so kritične točke funkcije h natanko

$$\mathrm{Cr}_h \;=\; \mathcal{Z}\big(T_n(x) + T_n(y) + T_n(z),\; T_n'(x),\; T_n'(y)\big).$$

Kritične točke funkcije $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so po (1) ravno ničle funkcije U_{n-1}, in po (7) so te natanko $x_i = \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right)$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Ker je $T_n(x_i) \overset{(4)}{=} \cos(\pi i) = (-1)^i$, velja

$$\mathrm{Cr}_h \;=\; \big\{(x_i, x_j, z_0);\;\; T_n(z_0) + (-1)^i + (-1)^j = 0,\;\; i, j = 1, \ldots, n-1\big\}.$$

Iščemo torej tiste $z_0 \in \mathbb{R}$, da velja $T_n(z_0) = 0, \pm 2$. Iz (4) vidimo, da na $[\![-1, 1]\!]$ velja $|T_n| \leq 1$. Za sod n je T_n soda funkcija, tj. $T_n(-x) = T_n(x)$. Poleg tega velja $T_n'|_{[\![1,\infty)\!)} = nU_{n-1}|_{[\![1,\infty)\!)} > 0$, saj ima U_n po (7) ničle le na $[\![-1, 1]\!]$, torej je T_n na $[\![1, \infty)\!)$ naraščajoč. To pomeni, da enačba $T_n(z) = -2$ nima rešitev, enačba $T_n(z) = 2$ pa ima natanko dve rešitvi. Dokažimo, da velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cr}_h^1 &= \big\{(x_i, x_j, z_0);\; i, j = 1, \ldots, n-1,\; i+j \in 2\mathbb{Z}+1,\; T_n(z_0) = 0\big\} =: C_1,\\
\mathrm{Cr}_h^2 &= \big\{(x_i, x_j, z_0);\; i, j = 1, \ldots, n-1,\; i, j \in 2\mathbb{Z}+1,\; T_n(z_0) = 2,\; z_0 > 1\big\} =: C_2,\\
\mathrm{Cr}_h^0 &= \big\{(x_i, x_j, z_0);\; i, j = 1, \ldots, n-1,\; i, j \in 2\mathbb{Z}+1,\; T_n(z_0) = 2,\; z_0 < -1\big\} =: C_0.
\end{aligned}$$

Zgoraj smo že razmislili, da te tri množice tvorijo particijo za Cr_h. Preostane nam dokazati, da so indeksi teh točk pravi. Prvo pokažimo, da je h sploh Morsova funkcija. Videli smo že, da rešitve enačbe $T_n(x) + T_n(y) + T_n(z) = 0$ $(*)$ tvorijo ploskev. Kritične točke funkcije h so tiste, kjer je tangentna ravnina vzporedna xy-ravnini. Tam lahko enačbo $(*)$ razrešimo na z, torej je $z(x, y)$ v okolici kritičnih točk ravno lokalna izražava funkcije h. Če $(*)$ odvajamo po x in po y, dobimo

$$T_n'(x) + T_n'(z) z_x = 0 \qquad \text{in} \qquad T_n'(y) + T_n'(z) z_y = 0.$$

Če odvajamo še drugič in vstavimo kritično točko $(x, y, z) = (x_i, x_j, z_0)$, dobimo

$$\begin{aligned}
T_n''(x_i) + T_n''(z_0)\cancel{z_x^2(x_i, x_j)} + T_n'(z_0) z_{xx}(x_i, x_j) &= 0,\\
T_n''(z_0)\cancel{z_x(x_i, x_j)}\cancel{z_y(x_i, x_j)} + T_n'(z_0) z_{xy}(x_i, x_j) &= 0,\\
T_n''(x_j) + T_n''(z_0)\cancel{z_y^2(x_i, x_j)} + T_n'(z_0) z_{yy}(x_i, x_j) &= 0.
\end{aligned}$$

Ker ima $T_n' = nU_{n-1}$ ničle le na $[\![-1, 1]\!]$, in ker ima T_n' le enostavne ničle (saj ima n različnih ničel), je $T_n'(z_0) \neq 0$. Tako je v točki $(x, y, z) = (x_i, x_j, z_0)$ Hessejeva matrika enaka

$$D^2(h) = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_n''(x_i)/T_n'(z_0) & 0 \\ 0 & -T_n''(x_j)/T_n'(z_0) \end{bmatrix}.$$

Po (1) in (2) je $-T_n''(x) = n\frac{nT_n - xU_{n-1}}{1-x^2}$. Obravnavajmo kritično točko $(x, y, z) = (x_i, x_j, z_0) \in \mathrm{Cr}_h$. Zanjo velja $-T_n''(x_i) = \frac{n^2}{1-x_i^2} T_n(x_i) = \frac{n^2}{1-x_i^2}(-1)^i \neq 0$ in $-T_n''(x_j) = \frac{n^2}{1-x_j^2} T_n(x_j) = \frac{n^2}{1-x_j^2}(-1)^j \neq 0$, torej je h res Morsova funkcija. Za $(x, y, z) \in C_1$ sta i, j različnega predznaka, torej $T_n(x_i) = -T_n(x_j)$, kar dokazuje $C_1 = \mathrm{Cr}_h^1$. Zgoraj smo ugotovili, da je $T_n'|_{[\![1,\infty)\!)} > 0$ in $T_n'|_{[\![-\infty,-1)\!)} < 0$. To pomeni, da za $(x_i, x_j, z_0) \in C_0$ velja $-T_n''(x_i)/T_n'(z_0), -T_n''(x_j)/T_n'(z_0) > 0$, za $(x_i, x_j, z_0) \in C_2$ pa $-T_n''(x_i)/T_n'(z_0), -T_n''(x_j)/T_n'(z_0) < 0$, kar dokazuje $C_0 = \mathrm{Cr}_h^0$ in $C_2 = \mathrm{Cr}_h^2$.

Upoštevajoč da je n sod, izračunajmo Eulerjevo karakteristiko:

$$\begin{aligned}
\chi(Z_n) &= |\mathrm{Cr}_h^0| + |\mathrm{Cr}_h^2| - |\mathrm{Cr}_h^1|\\
&= 2\big|[\![1, n-1]\!] \cap (2\mathbb{Z}+1)\big|^2 - \big(\tfrac{n}{2}\tfrac{n-2}{2} + \tfrac{n-2}{2}\tfrac{n}{2}\big)n = 2\tfrac{n^2}{4} - \tfrac{n^2(n-2)}{2} = \tfrac{n^2(3-n)}{2}.
\end{aligned}$$

Rod je zato $g = 1 - \frac{\chi}{2} = 1 - \frac{n^2(3-n)}{4}$, in če vstavimo $n = 2(k+1)$, dobimo kot smo prej napovedali:

$$1 - \tfrac{4(k+1)^2(1-2k)}{4} = 1 + (k^2 + 2k + 1)(2k - 1) = \cancel{1} + 2k^3 - k^2 + 4k^2 - \cancel{2k} + \cancel{2k} - \cancel{1} = k^2(2k+3). \qquad \blacklozenge$$

Zaključek

V tem delu smo obravnavali le klasično, gladko Morsovo teorijo: v središču pozornosti so bile gladke mnogoterosti in gladke funkcije na njih. Omenimo, da obstaja vrsto analognih teorij.

Picard–Lefschetzeva teorija obravnava kompleksne mnogoterosti in holomorfne funkcije $f\colon X \to \mathbb{C}$ ter njihove kritične točke. Ker $\mathbb{C}$ ni urejen obseg, ni direktnega analoga podnivojskih množic. Deligne in Katz sta to teorijo posplošila na raznoterosti nad splošnimi polji.

Floerova homologija je neskončnodimenzionalni analog Morsove teorije, ki obravnava neskončnorazsežne mnogoterosti in gladke funkcije na njih ter njihove kritične točke.

Morse-Bottova homologija namesto kritičnih točk obravnava kar kritične podmnogoterosti, torej take gladke podmnogoterosti v ambientni mnogoterosti na kateri je definirana funkcija f, da je njihov tangentni prostor v vsaki točki enak jedru Hessejeve matrike za f v tej točki.

Morsova teorija s krožnimi vrednostmi obravnava gladke mnogoterosti in gladke funkcije na njih, ki pa namesto v $\mathbb{R}$ slikajo v $\mathbb{S}^1$, in zopet so njihove kritične točke objekt zanimanja.

Oleinik-Petrovsky-Thom-Milnorjeva teorija, del realne algebraične geometrije, je analog Morsove teorije, ki obravnava semialgebraične množice in gladke funkcije na njih.

Diskretna Morsova teorija (Forman) obravnava simplicialne in CW-komplekse ter diskretne Morsove funkcije na njih. Za dani regularen CW-kompleks poišče nov CW-kompleks z istim homotopskim tipom, a manj celicami. Nedavno se je iz teh idej razvila še algebraična Morsova teorija (Welker, Jöllenbeck, Sköldberg), ki leži na presečišču algebraične topologije, komutativne algebre, ter kombinatorike.

Literatura

[1] Banyaga, Hurtubise: *Lectures on Morse Homology*, Springer Kluwer, KTMS 29, ©2004.

[2] Conlon: *Differentiable Manifolds*, Springer Birkhauser, MBC, ©2008.

[3] Guillemin, Pollack: *Differential Topology*, Pearson Education, Prentice Hall, ©1974.

[4] Hirsch: *Differential Topology*, Springer, GTM 33, ©1976.

[5] Kosinski: *Differential Manifolds*, Elsevier Academic Press, PAM 138, ©1993.

[6] Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, GTM 218, ©2003.

[7] Matsumoto: *An Introduction to Morse Theory*, AMS, TMM 208, ©2002.

[8] Milnor: *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton UP, MN, ©1965.

[9] Milnor: *Morse Theory*, Princeton UP, AMS 51, ©1963.

[10] Milnor: *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton UP, AMS 51, ©1965.

[11] Morse: *The Calculus of Variations in the Large*, AMS, CP 18, ©1934.

[12] Nicolaescu: *An Invitation to Morse Theory*, Springer, Universitext, ©2011.

[13] Schwarz: *Morse Homology*, Springer, Birkhäuser, PM 111, ©1993.

[14] Shastri: *Elements of Differential Topology*, Chapman & Hall CRC Press, ©2011.

Dodatna literatura

[15] Dieck: *Algebraic Topology*, EMS, TM 8, ©2008.

[16] Grillet: *Abstract Algebra*, Springer, GTM 242, ©2007.

[17] Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge UP, ©2002.

[18] Hogben: *Handbook of Linear Algebra*, Chapman & Hall CRC Press, DMA, ©2007.

[19] Kolk: *Multidimensional Real Analysis 1*, Cambridge UP, CSAM 86, ©2004.

[20] Kolk: *Multidimensional Real Analysis 2*, Cambridge UP, CSAM 87, ©2004.

[21] Roman: *Advanced Linear Algebra*, Springer, GTM 135, ©2008.

[22] Switzer: *Algebraic Topology*, Springer, CM, ©2002.

[23] Zorich: *Mathematical Analysis 1*, Springer, Universitext, ©2004.

[24] Zorich: *Mathematical Analysis 2*, Springer, Universitext, ©2004.