UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Maša Jamnik

Variabilne anuitete: enoten pristop k vrednotenju

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Ljubljana, 2016

Kazalo

Variabilne anuitete: enoten pristop k vrednotenju

Povzetek

V delu diplomskega seminarja bomo opisali variabilne anuitete. Podrobneje se bomo posvetili t. i. GMxB produktom, ki postajajo vse bolj pomemben zavarovalniški produkt. Opisali bomo vrste teh produktov, kaj nam ponujajo in kako jih ovrednotimo. Na koncu dela so dodani grafični prikazi posameznih spremenljivk in tabele z rezultati simulacij.

Variable annuities: A unifying valuation approach

Abstract

In this thesis we describe variable annuities. The main focus is on the so called GMxB products which are very popular insurance products. We describe each product and propose a unifying framework for their valuation. At the end we have graphs of important variables and tables with computed fair fee rates and contract values.

Math. Subj. Class. (2010): 97M30

Ključne besede: variabilne anuitete, GMxB produkti, jamstvo minimalnega izplačila v primeru smrti, jamstvo minimalnega izplačila ob izteku akumulacijskega obdobja

Keywords: variable annnuities, GMxB products, guaranteed minimum death benefit, guaranteed minimum accumulation benefit

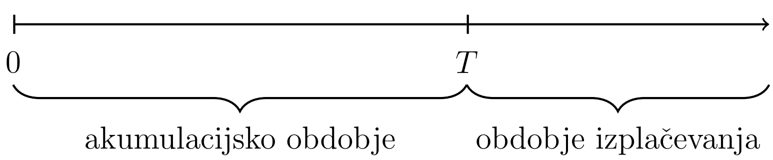
1. Uvod

V delu diplomskega seminarja bomo opisali vrednotenje variabilnih anuitet. Glavni vir za delo je [1]. Na začetku bomo predstavili variabilne anuitete, potem pa se bomo posvetili GMxB produktom, kakor imenujemo variabilne anuitete z določenimi jamstvi. Produkti te vrste so bili oblikovani na ameriškem trgu, kasneje pa so postali pomemben zavarovalniški produkt tudi v Evropi. Na začetku bomo opisali značilnosti posameznih GMxB produktov in vrednotenje jamstev, ki nam jih ponujajo. Za lažje razumevanje bomo dodali še grafe, katerih vir je [3]. Glede na obnašanje zavarovanca ločimo 3 različne pristope k vrednotenju variabilnih anuitet, ki jih bomo opisali v poglavju 5. V tem delu bomo podrobneje obravnavali le statični pristop k vrednotenju. Formule za izračun posameznih količin pri statičnem pristopu, ki so predstavljene v poglavju 6.3, so diskretne verzije formul iz [1]. V poglavju 7 so predstavljeni modeli, ki jih potrebujemo za simulacijo posameznih količin. Tudi ti modeli so diskretne verzije modelov iz [1]. Dodani so tudi grafi količin, predstavljenih v tem poglavju. Funkcije za izračun posameznih količin so spisane v programskem jeziku R, prav tako so tudi grafi teh količin izrisani s tem programskim jezikom. V poglavjih 7.1 in 7.2 so predstavljeni rezultati simulacij v primeru pogodbe GMAB in v primeru kombinacije pogodb GMAB in GMDB. Dodane so tudi funkcije, s katerimi smo prišli do dobljenih rezultatov. Predstavljene funkcije so le del kode, ki jo potrebujemo za simulacijo. Celotna koda je podana v prilogi. Na koncu, v poglavju 7.3, so za lažje razumevanje navedeni še rezultati simulacij iz [1].

2. Variabilne anuitete

Variabilna anuiteta je pogodba med zavarovancem in zavarovalnico, pri čemer se slednja zaveže, da bo zavarovancu ob določenem času T v prihodnosti začela periodično izplačevati zneske, katerih višina je odvisna od premije P, ki jo vplača zavarovanec in od obnašanja referenčnega sklada, v katerega je vložena vplačana premija. Variabilna anuiteta je dolgoročna naložba z davčnimi olajšavami, ki nam po upokojitvi zagotavlja reden prihodek.

Za variabilne anuitete sta značilni dve obdobji: akumulacijsko obdobje in obdobje izplačevanja. V akumulacijskem obdobju se sredstva zbirajo na osebnem računu zavarovanca, ki ga ob sklenitvi pogodbe odpre zavarovalnica. Sredstva so najpogosteje naložena tudi v različne portfelje. Tako se stanje na računu ustrezno viša ali niža, odvisno od obnašanja portfelja, v katerega so sredstva naložena. Začetek akumulacijskega obdobja bomo označevali z 0, konec akumulacijskega obdobja pa bomo označevali s T. V obdobju izplačevanja pa se zavarovancu izplačuje anuiteta. S terminom anuiteta opisujemo periodična izplačila sredstev.



3. GMxB produkti

Med najbolj znanimi oblikami variabilnih anuitet so GMxB produkti, ki jih imenujemo tudi variabilne anuitete z jamstvom. Vsa različna jamstva, ki nam jih zagotavljajo GMxB produkti, so tudi glavna značilnost, ki te produkte loči od ostalih tradicionalnih zavarovalniških produktov na trgu. Svoj razcvet so GMxB produkti že doživeli na ameriškem trgu, vse pomembnejši pa postajajo tudi na evropskem trgu. Kratica GMxB izhaja iz angleškega jezika (Guaranteed Minimum Benefit – jamstvo minimalnega izplačila), kjer 'x' ustrezno nadomestimo z D (death), L (living), A (accumulation), I (income) ali z W (withdrawal), glede na vrsto jamstva, ki nam ga produkt zagotavlja. GMxB produkte v grobem razdelimo na dva glavna razreda:

- GMDB - jamstvo minimalnega izplačila v primeru smrti (Guaranteed minimum death benefit);
- GMLB - jamstvo minimalnih izplačil v primeru doživetja (Guaranteed minimum living benefits).

Slednjega (GMLB) delimo še v tri podrazrede:

- GMAB - jamstvo minimalnega izplačila ob izteku akumulacijskega obdobja (Guaranteed minimum accumulation benefit);
- GMIB - jamstvo minimalne anuitete (Guaranteed minimum income benefit);
- GMWB - jamstvo minimalnega dviga z računa zbranih sredstev (Guaranteed minimum withdrawal benefit).

GMxB produkti so z vidika zavarovanca zanimivi, ker je življenjska doba vedno daljša, pokojnine pa so vedno nižje. Atraktivni so tudi zato, ker zavarovancu omogočajo možnost udeležbe na kapitalskem trgu in vključujejo garancije minimalne vrednosti premoženja tudi v primeru negativnega gibanja kapitalskega trga.

4. Značilnosti posameznih GMxB produktov

Pri vseh pogodbah bomo predpostavili, da je pogodba sklenjena ob času 0 in da je ob tem času vplačana tudi celotna premija, ki jo bomo označevali s P. S $T \geq 0$ bomo označevali konec akumulacijskega obdobja. Če je $T = 0$, je pogodba brez pomena. Z A_t bomo označevali vrednost računa zavarovanca ob času t, ki je očitno odvisna od obnašanja referenčnega portfelja, v katerem so naložena zavarovančeva sredstva. Predpostavljamo tudi, da so vsa jamstva izbrana ob času $t = 0$ in se ne spreminjajo do poteka pogodbe.

4.1. **GMDB – jamstvo minimalnega izplačila v primeru smrti.** Pogodba GMDB nam jamči izplačilo v primeru zgodnje smrti v akumulacijskem obdobju ali v nekaj letih po upokojitvi. Najbolj pogosto se pogodba GMDB sklene pred upokojitvijo. V redkih primerih je možno pogodbo te vrste skleniti v času po upokojitvi (če je možno, potem je navadno starostno omejeno, npr. 75 let). Če zavarovanec umre ob času t, pri čemer je $t < T$, je do izplačila upravičena pooblaščena oseba. Višina izplačila b_t^D je določena kot maksimum med trenutnim stanjem na računu in neko vnaprej določeno vsoto, ki jo imenujemo zagotovljeno izplačilo in ga ozačujemo z G_t^D.

$$b_t^D = \max\{A_t, G_t^D\}, t \leq T \tag{1}$$

Zagotovljeno izplačilo G_t^D je lahko fiksno ali pa odvisno od trenutnega stanja na računu.

Primera za fiksen G_t^D.

– Zagotovljeno izplačilo je enako začetni vplačani premiji:

$$G_t^D = P. \tag{2}$$

– Zagotovljeno izplačilo je enako obrestovani začetni vplačani premiji:

$$G_t^D = Pe^{\delta t}, \quad \delta > 0, \tag{3}$$

pri čemer je δ zagotovljena obrestna mera (določena ob sklenitvi pogodbe).

Primera za G_t^D odvisen od trenutnega stanja na računu.

– Zagotovljeno izplačilo je enako najvišjemu stanju na računu ob določenem času pred smrtjo zavarovanca:

$$G_t^D = \max_{t_i < t} A_{t_i}; \tag{4}$$

zavarovancu se ob vnaprej določenih časih $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < T$, $i = 0,1,\ldots,n$, zaklene vrednost A_t.

– Zagotovljeno izplačilo je enako stanju na računu ob določenem času pred smrtjo zavarovanca:

$$G_t^D = A_{\max\{t_i : t_i < t\}}, \tag{5}$$

pri čemer je t_i, $i = 1,2,\ldots,n$, čas, pri katerem se zaklene stanje na računu.

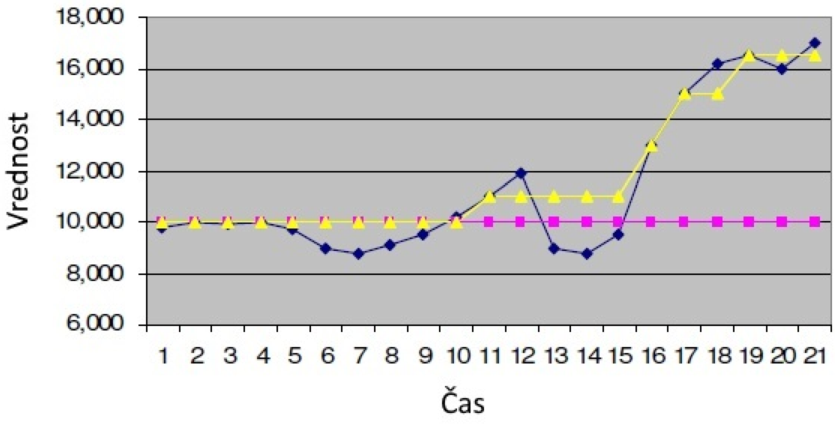
Razlika med zgornjima dvema je ta, da pri prvi možnosti vrednost G_t^D nikoli ne pade, medtem ko je v drugem primeru to mogoče, saj je lahko stanje na računu ob času t_{i-1} višje od stanja na računu ob času t_i.

V primeru, da pogodba ne vsebuje GMDB, je zagotovljeno izplačilo enostavno podano kot:

$$G^D = 0. \tag{6}$$

Možne pa so tudi kombinacije zagotovljenega izplačila in izplačila, odvisnega od stanja na računu, npr.:

$$G_t^D = \max\left\{Pe^{\delta t}, \max_{t_i < t} A_{t_i}\right\}. \tag{7}$$



SLIKA 1. Gibanje vrednosti sredstev za GMDB [3].

Graf na sliki 1 prikazuje možno gibanje zagotovljenega izplačila G_t^D v primerjavi z gibanjem referenčnega portfelja, v katerem so naložena zavarovančeva sredstva. Z roza barvo je predstavljen primer za fiksno zagotovljeno izplačilo G_t^D, pri čemer se v primeru smrti zavarovanca ob času t pooblaščencu izplača začetna vplačana premija, ki je v tem primeru enaka 10000 enot. Rumena barva pa predstavlja primer za zagotovljeno izplačilo G_t^D odvisno od stanja na računu v vnaprej določenih časih. Na sliki je prikazan primer, ko se stanje zaklene po 10 letih, 15 letih, 17 letih in 19 letih. Modra barva pa predstavlja gibanje referenčnega portfelja.

4.2. **GMAB – jamstvo minimalnega izplačila ob izteku akumulacijskega obdobja.** Ravno tako kot GMDB se tudi pogodbo GMAB najpogosteje sklene pred upokojitvijo. Pogodba GMAB jamči izplačilo ob izteku akumulacijskega obdobja. To pomeni, da ob koncu akumulacijskega obdobja (ob času T) zavarovanec, če je živ, prejme vsoto denarja b_T^A, ki je določena kot maksimum stanja na računu ob času T in vnaprej določenega zagotovljenega izplačila G_T^A:

$$b_T^A = \max\{A_T, G_T^A\}. \tag{8}$$

Pri GMAB imamo tudi možnost podaljšanja pogodbe (če zavarovanec živi do časa T, lahko pogodbo podaljša). Zagotovljeno izplačilo G_T^A je prav tako kot pri podgodbi GMDB lahko fiksno ali pa odvisno od trenutnega stanja na računu.

Primera za fiksen G_T^A.

- Zagotovljeno izplačilo je enako začetni vplačani premiji:

$$G_T^A = P. \tag{9}$$

- Zagotovljeno izplačilo je enako obrestovani začetni vplačani premiji:

$$G_T^A = Pe^{\delta T}, \quad \delta > 0, \tag{10}$$

  pri čemer je δ zagotovljena obrestna mera (določena ob sklenitvi pogodbe).

Primera za G_T^A odvisen od trenutnega stanja na računu.

- Zagotovljeno izplačilo je enako najvišjemu stanju na računu ob določenem času pred smrtjo zavarovanca:

$$G_T^A = \max_{t_i < T} A_{t_i}; \tag{11}$$

  zavarovancu se ob vnaprej določenih časih $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < T$, $i = 0,1,\ldots,n$, zaklene vrednost A_t.
- Zagotovljeno izplačilo je enako stanju na računu ob določenem času pred smrtjo zavarovanca:

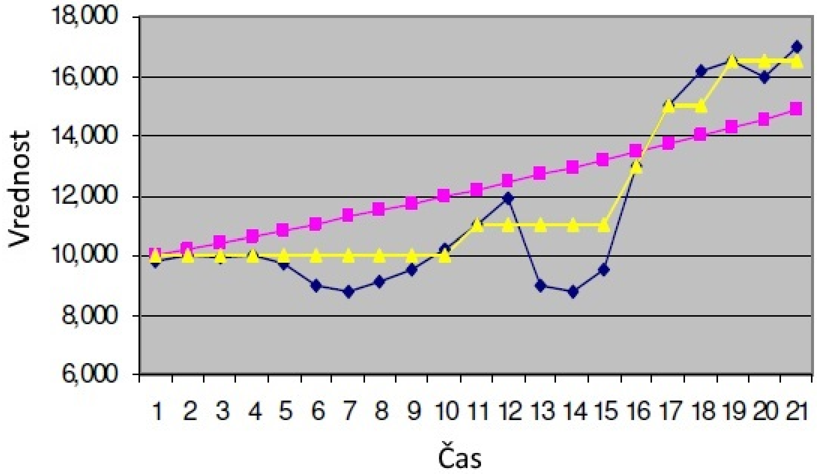
$$G_T^A = A_{\max\{t_i : t_i < T\}}, \tag{12}$$

  pri čemer je t_i, $i = 1,2,\ldots,n$, čas, pri katerem se zaklene stanje na računu.

Prav tako kot pri pogodbi GMDB so tudi pri pogodbi GMAB možne kombinacije zagotovljenega izplačila in izplačila, odvisnega od stanja na računu, npr.:

$$G_T^A = \max\left\{Pe^{\delta T}, \max_{t_i < T} A_{t_i}\right\}. \tag{13}$$

Graf na sliki 2 prikazuje možno gibanje zagotovljenega izplačila G_T^A v primerjavi z gibanjem referenčnega portfelja. Z roza barvo je predstavljen primer za fiksno zagotovljeno izplačilo G_T^A, pri čemer smo deležni zagotovljene 2-odstotne letne donosnosti. Rumena barva pa predstavlja primer za zagotovljeno izplačilo G_T^A odvisno od stanja na računu v vnaprej določenih časih akumulacijskega obdobja. Na sliki je



SLIKA 2. Gibanje vrednosti sredstev za GMAB [3].

prikazan primer, ko se stanje zaklene po 10 letih, 15 letih, 17 letih in 19 letih trajanja akumulacijskega obdobja. Z modro barvo pa je predstavljeno gibanje referenčnega portfelja.

4.3. **GMIB – jamstvo minimalne anuitete.** Pogodba GMIB nam jamči minimalno višino anuitete po končanem akumulacijskem obdobju. Višina anuitete (mesečne, letne, ...) je lahko dana kot

$$b^I = \eta \ \max\{A_T, G_T^I\}, \tag{14}$$

kjer je stopnja anuitete (izplačila) η odvisna od stanja trga ob času izplačila anuitete, G_T^I pa je podan z (2)–(13). Drugi možen način za izračun višine izplačila je

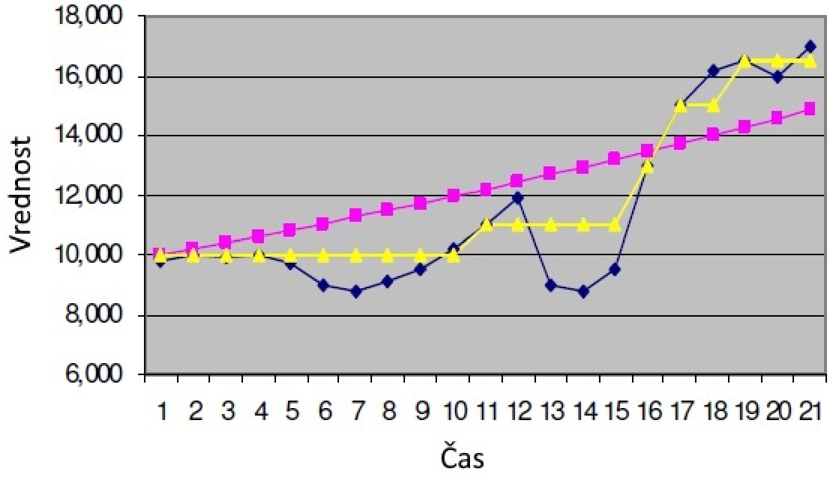
$$b^I = A_T \ \max\{\eta, g\}, \tag{15}$$

kjer je η prav tako stopnja anuitete, g pa je fiksen vnaprej določen delež. Izplačila anuitet najpogosteje trajajo:

(Ia) celo življenje zavarovanca;
(Ib) do časa $T' > T$, neodvisno od nepredvidljivih življenjskih dogodkov;
(Ic) do časa $T' > T$, po času T' pa v primeru doživetja zavarovanca sledi odložena vseživljenjska anuiteta.

Graf na sliki 3 prikazuje možno gibanje zagotovljenega izplačila G_T^I v primerjavi z gibanjem referenčnega portfelja. Z roza barvo je predstavljen primer za fiksno zagotovljeno izplačilo G_T^I, pri čemer smo deležni zagotovljene 2-odstotne letne donosnosti. Rumena barva pa, ravno tako kot v primeru pogodbe GMAB, predstavlja primer za zagotovljeno izplačilo G_T^I odvisno od stanja na računu v vnaprej določenih časih akumulacijskega obdobja. Modra barva predstavlja gibanje referenčnega portfelja.

4.4. **GMWB – jamstvo minimalnega dviga z računa zbranih sredstev.** Pogodba GMWB zavarovancu jamči periodične dvige denarja z računa ob koncu akumulacijskega obdobja. Obdobje, v katerem je zavarovanec upravičen do dvigov denarja, je vnaprej določeno. Pogodba GMWB zagotavlja dvige denarja v celotnem obdobju, tudi v primeru, ko na računu ni več sredstev, kar je lahko posledica



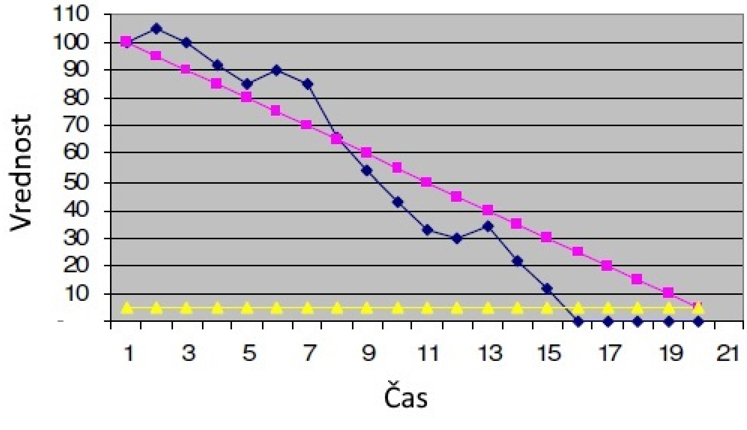
SLIKA 3. Gibanje vrednosti sredstev za GMIB [3].

negativnega gibanja referenčnega sklada ali pa dolge življenjske dobe zavarovanca. Višina zneska, ki jo zavarovanec lahko ob vnaprej določenih časovnih obdobjih (letno, mesečno, ...) dvigne s svojega računa, je podana kot

$$\beta_t^W = \beta_t W_t,$$

kjer je W_t osnova, ki je določena ob sklenitvi pogodbe, β_t pa je zagotovljen delež. Osnova W_t je najpogosteje enaka začetni vplačani premiji. Pogodba lahko zagotavlja dvige denarja za določeno časovno obdobje (npr. 20 let) ali pa doživljenjske dvige denarja. Če je v prvem primeru ob koncu pogodbe na računu še kaj denarja, se ta ali izplača zavarovancu ali pa se pogodba podaljša. Dvigi denarja so torej mogoči

(Wa) do časa $T' > T$, neodvisno od doživetja;
(Wb) do časa $T' > T$, v primeru, da je zavarovanec živ, sicer dvigi denarja niso možni;
(Wc) celotno življenje zavarovanca (od sklenitve pogodbe).



SLIKA 4. Gibanje vrednosti sredstev za GMWB [3].

Graf na sliki 4 prikazuje možno gibanje sredstev v obdobju izplačevanja, v primeru GMWB. Rumena barva predstavlja letne dvige denarja v višini 5% začetne vplačane premije, to pomeni, da je v tem primeru β_t enak 5%, W_t pa je enak začetni vplačani premiji. Z roza barvo je predstavljena razlika med začetno vplačano premijo in vsoto vseh do tedaj dvignjenih zneskov, modra barva pa predstavlja gibanje referenčnega portfelja. Z grafa je razvidno, da nam pogodba GMWB zagotavlja dvig denarja, tudi če na računu nimamo več denarja. Vidimo, da je stanje referenčnega portfelja po 15 letih in pol enaka enaka 0, vendar lahko vseeno še 5-krat dvignemo znesek v višini 5 enot.

5. Pristopi k vrednotenju

Glede na obnašanje zavarovanca ločimo tri pristope k vrednotenju variabilne anuitete, to so statični, dinamični in mešani pristop. Posamezni pristopi se med seboj ločijo glede na različne predpostavke:

(1) Statični pristop:
   - zavarovanec s svojega računa nikoli ne dvigne denarja;
   - v primeru, da pogodba dovoljuje dvig denarja, je višina zneskov, ki jih zavarovanec lahko dvigne, v pogodbi točno določena;
   - pogodba ni nikoli prekinjena.

   V tem primeru rečemo, da je zavarovanec pasiven.

(2) Dinamični pristop:
   - zavarovanec s svojega računa lahko dviga denar;
   - pogodba je lahko prekinjena.

   V tem primeru rečemo, da je zavarovanec aktiven.

(3) Mešani pristop:
   - zavarovanec lahko s svojega računa dvigne samo vnaprej določeno količino denarja;
   - pogodba je lahko prekinjena.

Pogodba se vrednoti po ekvivalenčnem principu. To pomeni, da so premija, ki jo zavarovanec vplača zavarovalnici, in garancije, ki jih zavarovancu jamči zavarovalnica, neposredno povezane. V primeru GMxB produktov to pomeni, da mora biti pričakovana vsota vseh izplačil zavarovancu, diskontiranih s tržno obrestno mero, enaka vplačani premiji P.

6. Statični pristop

V delu diplomskega seminarja se bomo osredotočili na statični pristop.

6.1. **Izplačila v primeru doživetja.** Predpostavimo, da nam pogodba zagotavlja samo eno izmed naslednjih doživetvenih izplačil: (i) izplačilo ob izteku akumulacijskega obdobja ob času T (GMAB); (ii) anuiteta z odloženim začetkom izplačevanja od časa T naprej (GMIB); (iii) jamstvo minimalnega dviga z računa zbranih sredstev od časa T naprej (GMWB).

(i) GMAB: Izplačilo ob času T je izračunano po (8), tako je skupno izplačilo ob času t v primeru doživetja podano kot

$$\begin{aligned} B_t^L &= \begin{cases} 0; & t < T \\ b_T^A; & t \geq T \end{cases} \\ &= b_T^A 1_{\{t \geq T\}}, \end{aligned}$$

kjer je 1_E indikator množice E.

(ii) GMIB

(Ia) Vseživljenjska anuiteta:

$$B_t^L = b^I \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{t \geq T_i\}},$$

z izplačili ob časih $(T \leq)\ T_1 < T_2 < \cdots$.

(Ib) Časovno omejena anuiteta:

$$B_t^L = b^I \sum_{i=1}^{m} 1_{\{t \geq T_i\}},$$

z izplačili ob časih $(T \leq) T_1 < T_2 < \cdots < T_m (\leq T')$.

(Ic) Časovno omejena anuiteta, kateri sledi vseživljenjska anuiteta: B_t^L izračunamo kot v primeru (Ia).

(iii) GMWB

(Wa) Dvigi denarja neodvisni od preživetja:

$$B_t^L = \sum_{i=1}^{m} b_{T_i}^W 1_{\{t \geq T_i\}} + \max\{A_{T'}, 0\}\, 1_{\{t \geq T'\}}, \tag{16}$$

pri čemer so $(T \leq) T_1 < T_2 < \cdots < T_m (\leq T')$ časi dvigov denarja. Drugi del formule (16), tj. $\max\{A_{T'}, 0\}\, 1_{\{t \geq T'\}}$, predstavlja izplačilo ob času T', če je zavarovanec ob tem času živ. To izplačilo je enako preostanku denarja na zavarovančevem računu.

(Wb) Dvigi denarja v primeru doživetja: B_t^L izračunamo kot v primeru (Wa). Če zavarovanec ne doživi časa t, dvigi denarja, po času smrti, niso mogoči.

(Wc) Vseživljenjski dvigi denarja:

$$B_t^L = \sum_{i=1}^{\infty} b_{T_i}^W 1_{\{t \geq T_i\}}$$

kjer so $(T \leq) T_1 < T_2 < \cdots$ časi dviga denarja.

6.2. **Izplačilo v primeru smrti.** Označimo z b_t^D izplačilo v primeru smrti ob času t. Če je $t \leq T$, je b_t^D podano z (1). Če je hkrati s pogodbo GMDB sklenjena tudi pogodba GMWB, se b_t^D izračuna kot

$$b_t^D = \begin{cases} \max\{A_t, R_t\}; & T < t \leq T' \text{ v primeru (Wa)} \\ \max\{A_t, 0\}; & T < t \leq T' \text{ v primeru (Wb)} \\ \max\{A_t, 0\}; & T < t \text{ v primeru (Wc)} \end{cases}$$

R_t označuje vrednost preostale zagotovljene vsote denarja, ki jo zavarovanec še lahko dvigne z računa med časoma t in T'. V primeru, da zavarovanec sklene hkrati s pogodbo GMDB tudi pogodbo GMAB ali pogodbo GMIB (Ia) in je $t > T$, je $b_t^D = 0$. Prav tako je $b_t^D = 0$ v primeru, ko je hkrati s pogodbo GMDB sklenjena pogodba GMIB (Ib, Ic) ali GMWB (Wa, Wb) in je $t > T'$.

6.3. **Vrednotenje.** Naj bo φ delež, s katerim si zavarovalnica zagotovi premoženje za financiranje vseh garancij, ki so navedene v pogodbi in jih je ob poteku pogodbe dolžna izplačati zavarovancu. Označimo z A_t stanje na računu ob času t, s S_t gibanje vrednosti referenčnega portfelja ob času t, s τ čas smrti zavarovanca, z b_τ^D vsoto izplačanega denarja v primeru smrti ob času τ in z B_t^L kumulativno vsoto izplačanega denarja v primeru doživetja. Pri statičnem pristopu se vrednost računa ob času t izraža kot:

$$\Delta A_t = A_{t+1} - A_t = A_t \frac{\Delta S_t}{S_t} - \varphi A_t \Delta t - \Delta B_t^L \tag{17}$$

in $A_0 = P$. Enačba (17) nam pove, da je stanje na računu ob času $t+1$ enako stanju na računu ob času t, kateremu prištejemo delež, ki se je med časoma t in $t+1$ nabral v referenčnem portfelju, odštejemo pa toliko, kolikor nam zaračuna zavarovalnica za upravljanje našega računa in izplačila, ki so nam bila do časa $t+1$ že izplačana. Z B_t označimo vsoto vseh zneskov izplačanih do časa t:

$$B_t = \left(B_{\tau^-}^L + b_\tau^D\right) 1_{\{\tau \leq t\}} + B_t^L \, 1_{\{\tau > t\}}, \quad t \geq 0. \tag{18}$$

B_t predstavlja vsoto vseh izplačil do časa t, ki je sestavljena iz vsote izplačil $B_{\tau^-}^L$ in b_τ^D v primeru, ko je čas τ smrti zavarovanca pred časom t ali enak času t, ter vsote vseh izplačil B_t^L do časa t. Količini $B_{\tau^-}^L$ in B_t^L izračunamo po formulah predstavljenih v poglavju 6.1, količino b_τ^D pa izračunamo po (1).

Vrednost variabilne anuitete ob času t je

$$V_t = E_t \left[\int_t^\infty \frac{M_t}{M_u} dB_u \right], \quad t \geq 0, \tag{19}$$

pri čemer je

$$M_t = e^{\int_0^t r_u du}, \quad t \geq 0. \tag{20}$$

r_u je obrestna mera ob času u. Enačba (20) opisuje obrestovanje med časom 0 in časom t. Pove nam, koliko denarja bi imeli ob času t, če ob začetnem času 0 vložimo 1 enoto. Pogodba je pravično ovrednotena natanko tedaj, ko velja

$$V_0 \equiv V_0(\varphi) = P. \tag{21}$$

Lahko se zgodi tudi, da tak φ ne obstaja. Primer, ko ne obstaja ustrezen φ, je predstavljen v poglavju 7.1. Zavarovalnica si s tem, ko zavarovancu zaračuna ustrezen delež φ zavarovančevega premoženja, zagotovi ustrezno višino sredstev, ki jih bo v prihodnosti dolžna izplačati zavarovancu. Zato je seveda delež φ ustrezno višji glede na višino in količino jamstev.

Zgornje enačbe so eksplicitno rešljive le v zelo redkih primerih, zato bomo v tem delu naredili zgolj simulacije za nekatere primere.

7. Modeli in simulacije

Vse predstavljene količine so modelirane stohastično. Uporabljene so diskretne verzije modelov iz [1]. Zvezne verzije modelov, ki so predstavljene v [1], so analitično zelo težko rešljive.

(1) Najprej modeliramo gibanje obrestne mere r_t, pri čemer uporabimo diskretno verzijo standardnega Vasičkovega modela[1].

$$r_{t+1} = r_t + \xi_r(\zeta_r - r_t)\Delta t + \sigma_r \sqrt{r_t} \Delta Z_t^r$$

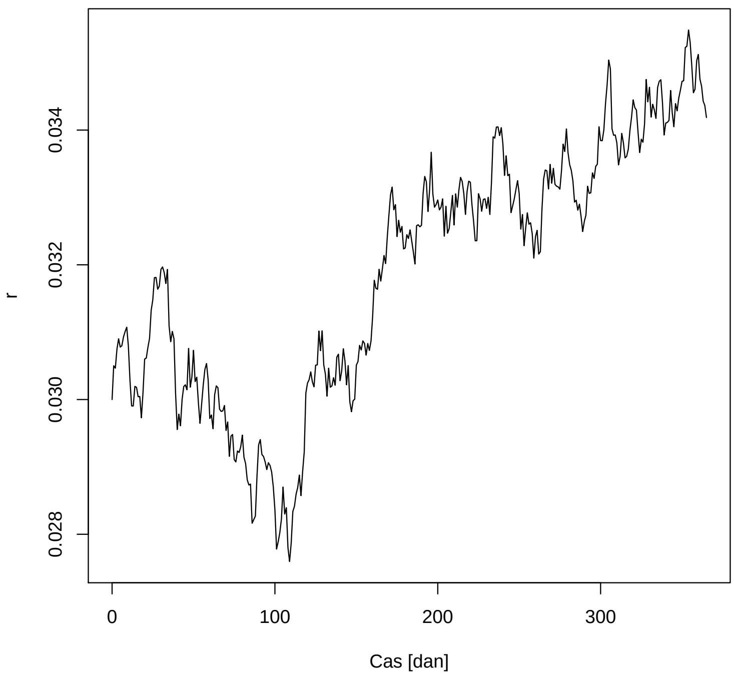
V tem modelu posamezne spremenljivke predstavljajo:

– ζ_r je dolgoročno povprečje obrestnih mer;
– ξ_r je hitrost vrnitve k ravnovesnemu stanju;
– σ_r je trenutna volatilnost[2];
– $\Delta Z_t^r \sim N(0{,}\Delta t)$.

Ker je ΔZ_t^r slučajna spremenljivka, dobimo vsakič, ko zaženemo program, drugačne vrednosti, kar je razvidno iz spodnjih slik. Za izračun gibanja obrestne mere v enem letu, ki je prikazan na slikah 5 in 6, smo uporabili parametre v tabeli 1.

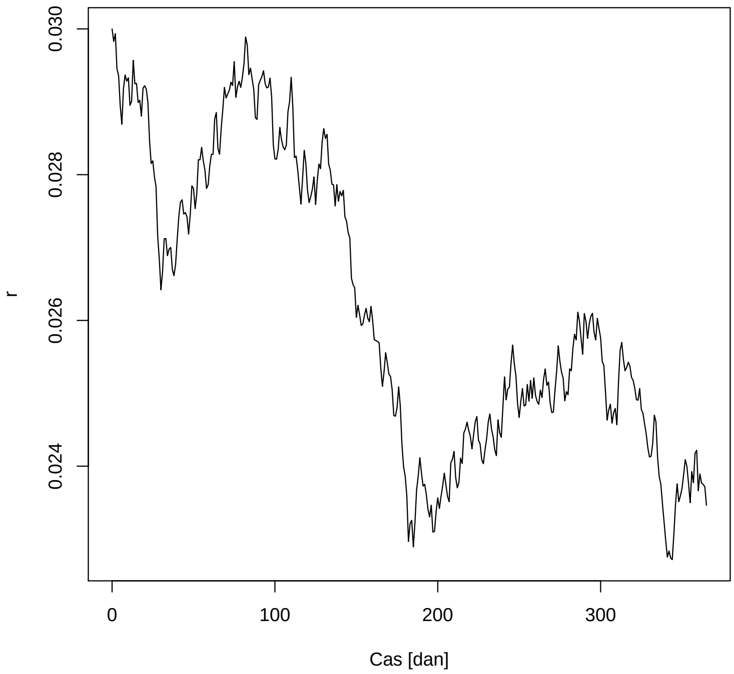
r
$r_0 = 0{,}03$
$\xi_r = 0{,}60$
$\zeta_r = 0{,}03$
$\sigma_r = 0{,}03$
$\Delta t = \frac{1}{365}$

Tabela 1. Parametri, uporabljeni v simulaciji gibanja obrestne mere.



Slika 5. Graf r_t.

[1]Vasičkov model [4] je matematični model, ki opisuje gibanje obrestnih mer.
[2]Volatilnost je mera nestanovitnosti cen, glej [2]



SLIKA 6. Prikaz vpliva slučajne spremenljive ΔZ_t^r v modelu gibanja obrestne mere.

(2) K_t je pomožni proces, ki je potreben, da spnemo vse količine v celoten model. Predstavlja varianco referenčnega sklada in nastopa samo v modelu gibanja vrednosti referenčnega portfelja S_t.

$$K_{t+1} = K_t + \xi_K(\zeta_K - K_t)\Delta t + \sigma_K \sqrt{K_t} \Delta Z_t^K$$

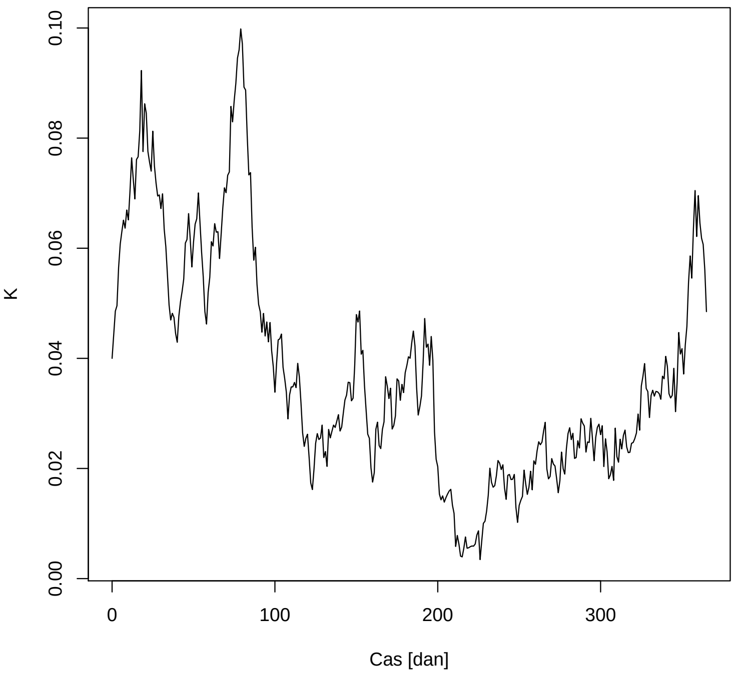
Model variance referenčnega sklada je podoben modelu gibanja obrestne mere, tako je vloga konstant ξ_K, ζ_K in σ_K enaka vlogi konstant ζ_r, ξ_r in σ_r.

– $\Delta Z_t^K \sim N(0,\Delta t)$

Tudi v tem primeru je ΔZ_t^K normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, zato dobimo vsakič, ko zaženemo program, različne vrednosti. Za izračun gibanja pomožnega procesa K_t v enem letu, ki je prikazan na sliki 7, smo uporabili parametre v tabeli 2.

K
$K_0 = 0{,}04$
$\xi_K = 1{,}50$
$\zeta_K = 0{,}04$
$\sigma_K = 0{,}40$
$\Delta t = \frac{1}{365}$

TABELA 2. Parametri, uporabljeni v simulaciji gibanja pomožnega procesa K_t.



SLIKA 7. Graf K_t.

(3) Gibanje referenčnega portfelja S_t je definirano s pomočjo pomožnega procesa K_t in gibanja obrestne mere r_t.

$$\Delta \log(S_{t+\Delta t}) = \left(r_t - \frac{1}{2}K_t\right)\Delta t + \sqrt{K_t}\left(\rho_{SK}\Delta Z_t^K + \sqrt{1-\rho_{SK}^2}\Delta Z_t^S\right)$$

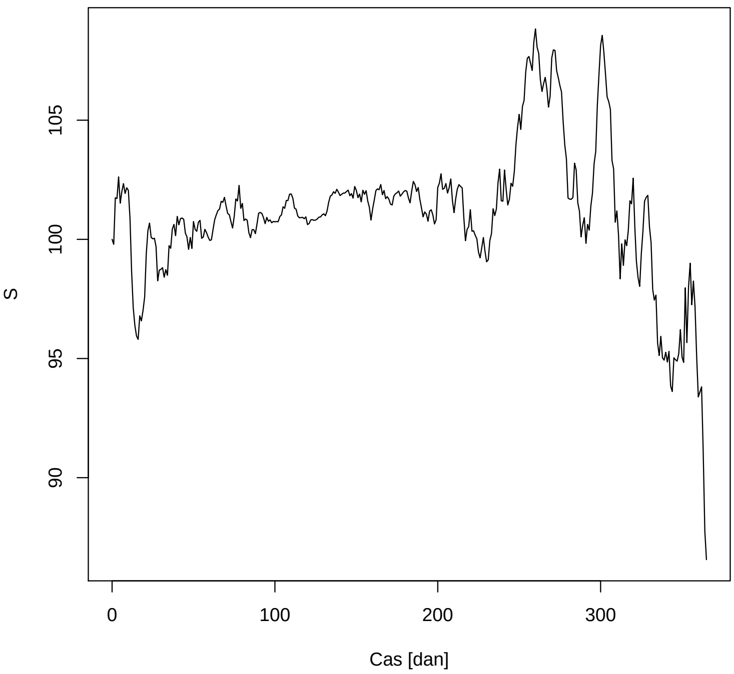
– $\Delta Z_t^S \sim N(0,\Delta t)$

Prav tako kot v primeru gibanja obrestne mere r_t in pomožnega procesa K_t, je tudi v tem primeru ΔZ_t^S normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, neodvisna od prav tako normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk ΔZ_t^K in ΔZ_t^r. Možno gibanje referenčnega portfelja S_t je predstavljeno na slikah 8 in 9. Tudi v tem primeru smo za lažjo predstavo o vplivu slučajnih spre-menljivk v modelu dodali dve sliki. Graf prikazuje, kako se bodo gibala naša sredstva, ki smo jih v portfelj vložili ob času 0. Za izračun gibanja S_t v enem letu smo uporabili parametre v tabeli 3.

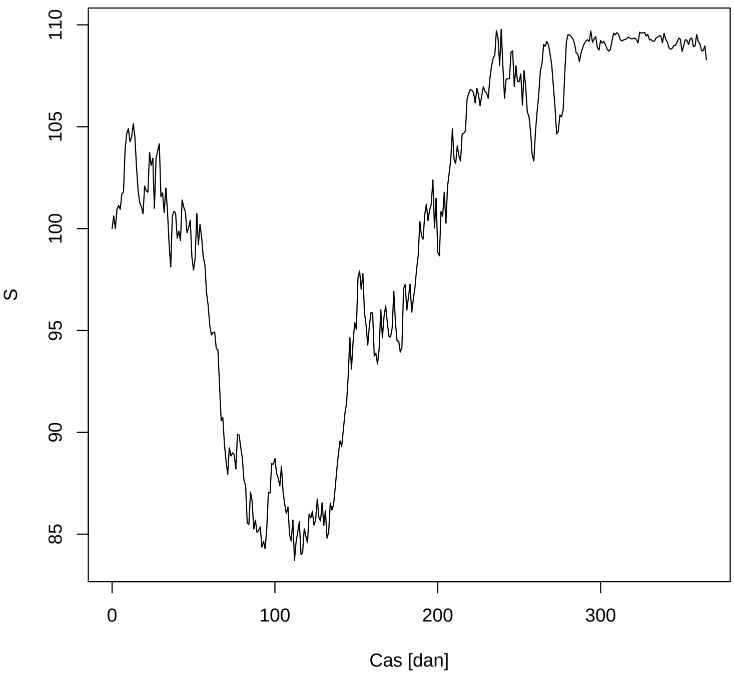
S
$S_0 = 100$
$\rho_{SK} = -0{,}70$
$\Delta t = \frac{1}{365}$

TABELA 3. Parametri, uporabljeni v simulaciji gibanja referenčnega portfelja S_t.

(4) μ_t je diskretna verzija Lee-Carterjevega modela. Lee-Carterjev model [5] je numerični algoritem, ki se uporablja pri napovedovanju jakosti smrtnosti in pričakovane



SLIKA 8. Graf S_t.



SLIKA 9. Prikaz vpliva slučajnih spremenljivk v modelu giabnja referenčnega portfelja S_t.

življenjske dobe.

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \xi_\mu(\hat{\mu}(t) - \mu_t)\Delta t + \sigma_\mu\sqrt{\mu_t}\Delta Z_t^\mu$$
$$\hat{\mu}(t) = c_1^{-c_2} c_2 (x+t)^{c_2-1}$$

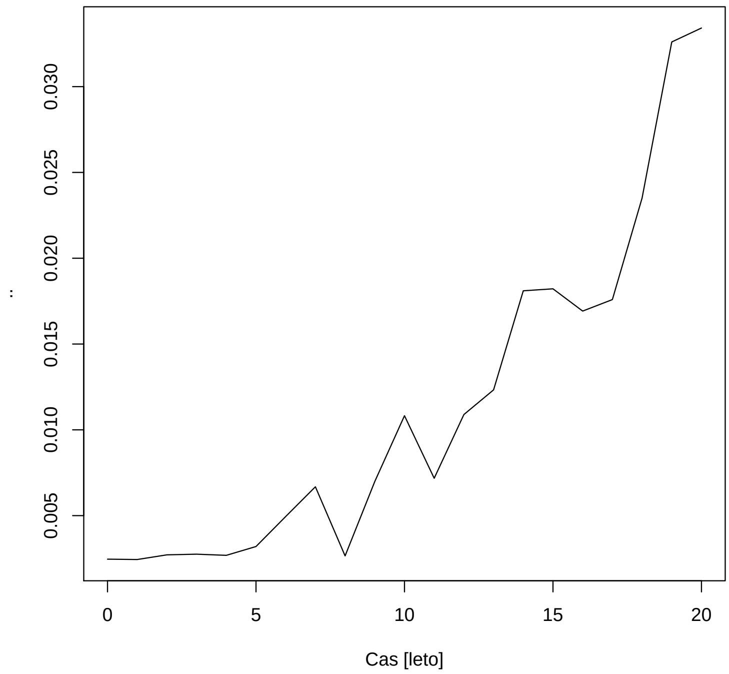
– $\Delta Z_t^\mu \sim N(0,\Delta t)$;

Spremenljivka x označuje začetno starost zavarovanca, c_1 in c_2 pa sta primerno izbrani konstanti, odvisni od spola in starosti zavarovanca. Za primer gibanja μ_t smo izbrali konstanti c_1 in c_2, ki ustrezata moškemu, staremu 60 let. Za izračun gibanja smrtnosti μ_t v 20 letih smo uporabili parametre v tabeli 4. Graf gibanja smrtnosti μ_t je predstavljen na sliki 10. Graf nam prikazuje, kolikšen je delež smrtnosti moških ob določenem času. Vidimo, da umre približno 1% moških starih 70 let.

Tudi v tem primeru je ΔZ_t^μ normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Z_t^r, Z_t^K, Z_t^S in Z_t^μ so med sabo neodvisne slučajne spremenljivke za vse t.

μ
$\mu_0 = \hat{\mu}(0)$
$\xi_\mu = 0{,}50$
$\sigma_\mu = 0{,}03$
$c_1 = 90{,}43$
$c_2 = 10{,}36$
$\Delta t = 1$

TABELA 4. Parametri, uporabljeni v simulaciji gibanja smrtnosti μ_t.



SLIKA 10. Graf μ_t.

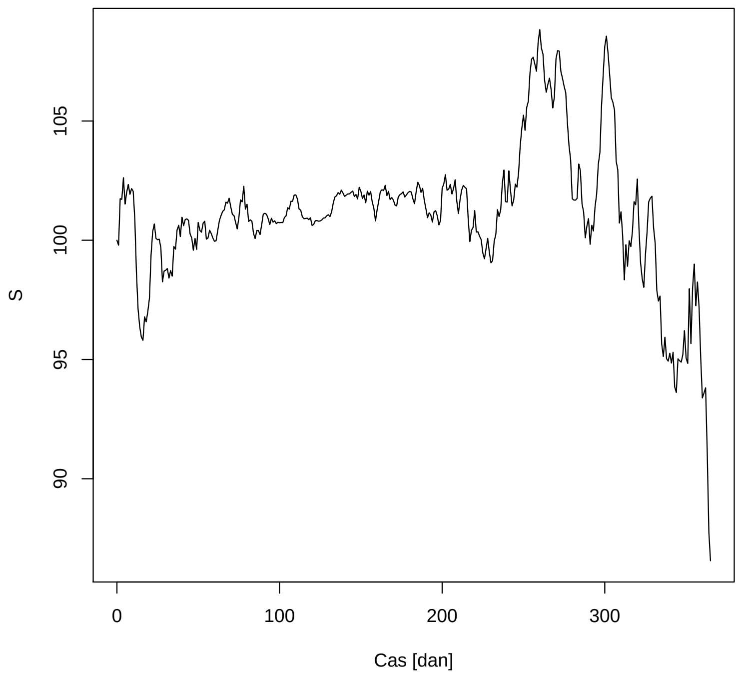
(5) Gibanje stanja na računu A_t podaja enačba:

$$\Delta A_t = A_{t+1} - A_t = A_t \frac{\Delta S_t}{S_t} - \varphi A_t \Delta t - \Delta B_t^L.$$

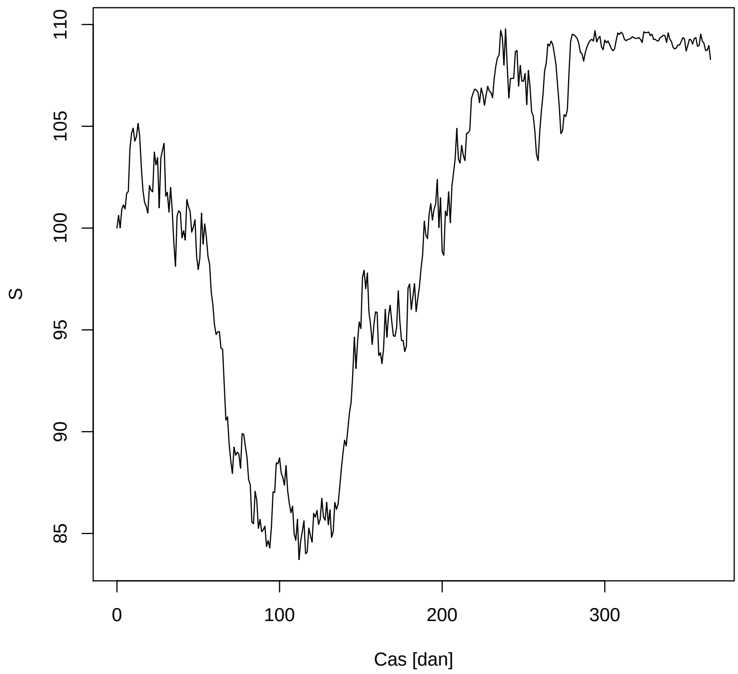
Kot smo omenili že prej, je φ delež upravljalskih stroškov, ki naj bi krili tudi jamstva, ki jih izberemo ob podpisu pogodbe. Zavarovalnica si s tem zagotovi sredstva, ki jih bo ob poteku pogodbe dolžna izplačati zavarovancu. To pomeni, da bo zavarovalnica za višje garancije zavarovancu periodično jemala več. Vidimo tudi, da je stanje na računu odvisno od gibanja referenčnega portfelja, saj se začetna vplačana premija v celoti naloži v referenčni portfelj. Videli smo, da model za gibanje referenčnega sklada S_t vsebuje normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, zato bo tudi izračun gibanja stanja na računu A_t za vsako ponovitev drugačen, kar je razvidno s slik 11 in 12. Za izračun gibanja stanja na računu A_t v 10 letih smo uporabili parametre v tabeli 5. Ker smo za ΔB_t^L izbrali vrednost 0, to predstavlja gibanje stanja na računu v primeru, ko v 10 letih ne prejmemo nobenega izplačila.

A
$A_0 = 100$
$\varphi = 0{,}06$
$\Delta B_t^L = 0$
$\Delta t = \frac{1}{365}$

Tabela 5. Parametri, uporabljeni v simulaciji gibanja stanja na računu A_t.



Slika 11. Graf A_t.

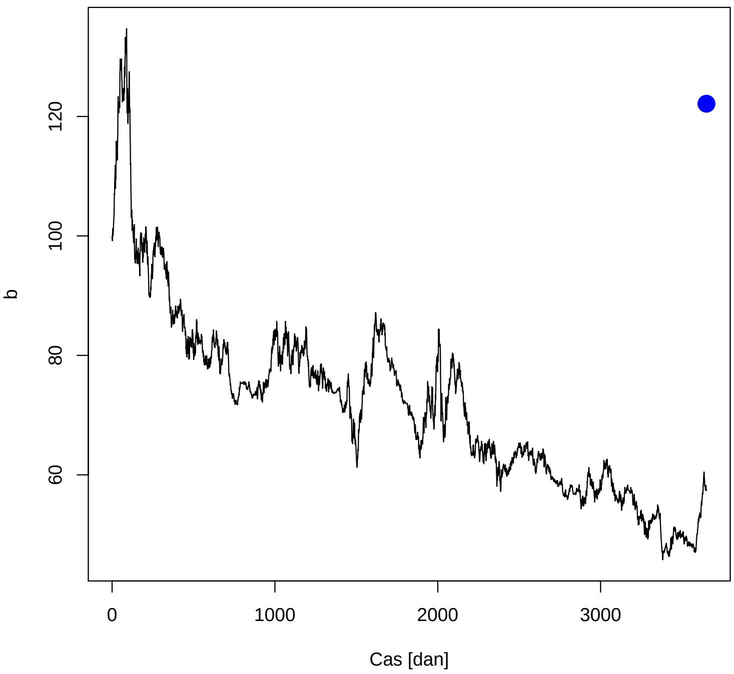


SLIKA 12. Prikaz vpliva slučajnih spremenljivk v modelu gibanja stanja na računu A_t.

7.1. **Simulacija primera za GMAB.** Denimo, da imamo pogodbo, ki vsebuje zgolj jamstvo minimalnega izplačila ob izteku akumulacijskega obdobja. To pomeni, da je ob koncu akumulacijskega obdobja zavarovalnica zavarovancu dolžna izplačati vsoto denarja b_T^A, ki je podana kot $b_T^A = \max\{A_T, G_T^A\}$. Za zagotovljeno izplačilo G_T^A izberemo primer $G_T^A = Pe^{\delta T}$, torej je $b_T^A = \max\{A_T, Pe^{\delta T}\}$. Katero izmed izplačil A_T in $Pe^{\delta T}$ bo ob koncu akumulacijskega obdobja višje, je odvisno od gibanja referenčnega portfelja, od višine φ, ki ga zavarovancu zaračuna zavarovalnica, in od višine zagotovljene obrestne mere δ. Na slikah 13 in 14 vidimo gibanje stanja na računu A_t v 10 letih, z modro piko pa je označeno zagotovljeno izplačilo $G_T^A = Pe^{\delta T}$ ob koncu akumulacijskega obdobja, torej po 10 letih. Na sliki 13 je zagotovljeno izplačilo G_T^A višje od stanja na računu ob času T, na sliki 14 pa vidimo, da je lahko zagotovljeno izplačilo G_T^A tudi precej nižje od stanja na računu ob izteku akumulacijskega obdobja. Za izračun gibanja stanja na računu A_t in zagotovljenega izplačila G_T^A smo uporabili parametre v tabeli 6. Čim bolj ustrezen φ za naš primer poiščemo s funkcijo, ki kot argumente sprejme φ, zagotovljeno obrestno mero δ in premijo P. Najprej simuliramo gibanje stanja na računu A_t in izračunamo zagotovljeno izplačilo $G_T^A = Pe^{\delta T}$, nato pa izračunamo $\max\{A_T, Pe^{\delta T}\}$. Dobljeni rezultat diskontiramo z $e^{-\int_0^t r_u du}$. Najbolj ustrezen φ bo tisti, pri katerem bo pričakovana vrednost $E\left[\max\{A_T, Pe^{\delta T}\} \cdot e^{-\int_0^t r_u du}\right]$ čim bližje začetni vplačani premiji P. Pravi φ je tisti, za katerega velja enakost $V_0 \equiv V_0(\varphi) = P$.

A, G_T^A
$A_0 = 100$
$\varphi = 0{,}06$
$\delta = 0{,}02$
$\Delta B_t^L = 0$
$\Delta t = \frac{1}{365}$

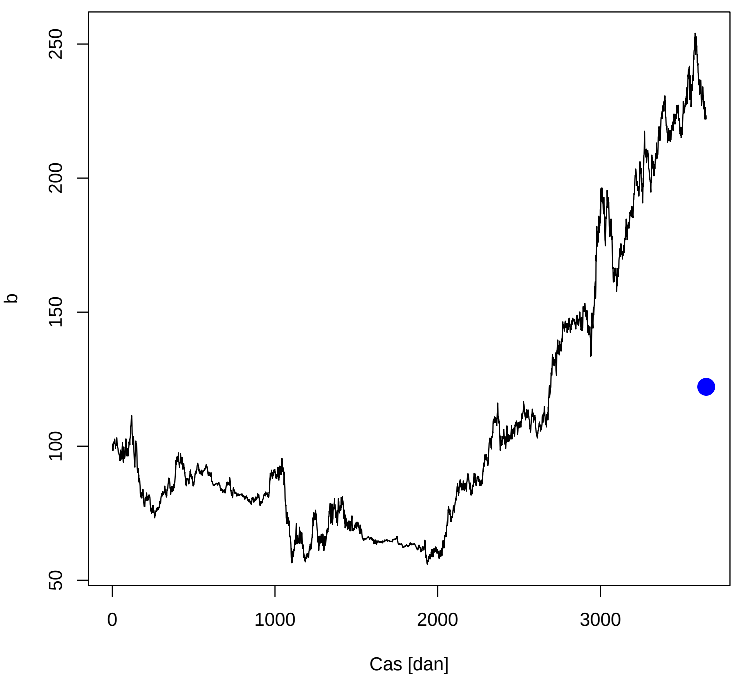
Tabela 6. Parametri, uporabljeni v simulaciji gibanja stanja na računu A_t.



Slika 13. Primer, ko je stanje na računu A_T nižje od zagotovljenega izplačila G_T^A.

```
GMAB <- function(t, fi, delta, P, dt){
    if (t == 0)
        return (P);
    At <- A(t, fi, P, 0, dt)
    premija <- P*exp(delta*t*dt);
    maks <- max(At, premija)
    r <- r(t,dt)*t*dt
    obveznost <- maks*exp(-r)
    return(obveznost)
}
```

Funkcija 1. Funkcija za izračun ustreznega φ za primer GMAB.



Slika 14. Primer, ko je stanje na računu A_T višje od zagotovljenega izplačila G_T^A.

	GMAB				
$\delta\%$	0	1	2	3	4
$\varphi\%$	1,64	2,31	4,41	11,30	–

Tabela 7. Rezultati simulacije za primer GMAB.

V tabeli 7 so predstavljeni rezultati, ki smo jih dobili s funkcijo 1. Želimo poiskati tak φ, da bo funkcija 1 vrnila rezultat čim bližje začetni premiji P. Dolžino akumulacijskega obdobja smo nastavili na 10 let, časovni interval dt pa na 1 teden. Za premijo P smo izbrali vrednost 100 enot. Vidimo, da z naraščanjem zagotovljene obrestne mere δ narašča tudi delež φ, ki nam ga zaračuna zavarovalnica. V primeru zagotovljene obrestne mere 4% ne moremo najti ustreznega φ, da bi bila vrednost pogodbe v času 0 enaka premiji P. Ne glede na to, kako velik φ vstavimo v funkcijo 1, vrednost, ki nam jo vrne funkcija, ne bo dovolj blizu vrednosti premije P. To pomeni, da zavarovalnica ne more ustreči principu ekvivalence.

7.2. **Simulacija primera za GMDB in GMAB.** Če želimo pogodbi, ki nam jamči minimalno izplačilo ob izteku akumulacijskega obdobja, dodati še pogodbo z jamstvom minimalnega izplačila v primeru smrti, moramo izračunati tudi pričakovani čas smrti zavarovanca. To naredimo s pomočjo funkcije gibanja smrtnosti. Na začetku generiramo eksponentno porazdeljeno slučajno spremenljivko ε in nato računamo kumulativne vsote spremenljivke μ. Zanko za računanje vsot ponavljamo, dokler je vsota manjša od slučajne spremenljivke ε, ko pa vsota enkrat preseže ε, vrnemo indeks, do katerega smo seštevali, ki nam pove pričakovani čas smrti. Opisani postopek smo simulirali s funkcijo 2. Zagotovljeno izplačilo G_t^D v primeru smrti pred koncem akumulacijskega obdobja bomo izračunali kot $G_t^D = Pe^{\delta t}$, torej bo višina izplačila b_t^D enaka $b_t^D = \max\{A_t, Pe^{\delta t}\}$. Zagotovljeno izplačilo G_T^A v primeru doživetja zaključka akumulacijskega obdobja pa bomo izračunali kot $G_T^A = \max_{t_i<T} A_{t_i}$, pri čemer bomo obdobje zaklenitve stanja na računu nastavili na eno leto. Višina izplačila b_T^A bo torej v tem primeru enaka $b_T^A = \max\{A_T, \max_{t_i<T} A_{t_i}\}$.

```
cassmrti <- function(n, dt=1){
    eps <- rexp(1, rate = 1);
    Mis <- MiIter(n, dt);
    vsota <- Mis[1];
    i <- 1;
    while (i < n && vsota < eps){
        vsota = vsota + Mis[i]
        i = i+1;
    }
    return(i)
}
```

FUNKCIJA 2. Funkcija za izračun časa smrti.

```
GMABinGMDB <- function(t, fi, delta, P, dt){
    if (t == 0)
        return (P);
    tau <- cassmrti(t, dt)
    if (tau < t)
    {
        r <- r(tau,dt)*tau*dt
        Ad <- A(tau, fi, P, 0, dt);
        premija <- P*exp(delta*tau*dt);
        maks <- max(Ad, premija);
    }
    else
    {
        At <- A(t, fi, P, 0, dt);
        maksA <- P;
        for (i in 1:(t*dt))
        {
            Avmesni <- A(floor(i/dt), fi, P, 0, dt);
            maksA <- max(Avmesni, maksA)
        }
        maks <- max(At, maksA);
        r <- r(t,dt)*t*dt
    }
    obveznost <- maks*exp(-r);
    return(obveznost)
}
```

FUNKCIJA 3. Funkcija za izračun ustreznega φ za primer GMAB in GMDB.

	GMDB & GMAB				
$\delta\%$	0	1	2	3	4
$\varphi\%$	5,21	6,31	8,90	13,00	25,10

TABELA 8. Rezultati simulacije za primer GMDB in GMAB.

V tabeli 8 so predstavljeni rezultati, ki smo jih dobili s funkcijo 3. Prav tako kot v primeru pogodbe GMAB, tudi v tem primeru želimo poiskati tak φ, da bo funkcija 3 vrnila rezultat čim bližje začetni premiji P. Dolžino akumulacijskega obdobja smo nastavili na 10 let, časovni interval dt na 1 teden, višino premije P pa na 100 enot.

7.3. **Rezultati simulacij iz** [1]**.** V spodnjih tabelah so predstavljeni rezultati iz članka [1]. Rezultati so bili pridobljeni z metodo Monte Carlo. Vrednosti parametrov za izračun posameznih količin pa so enake vrednostim, ki smo jih v izračunih uporabili mi. Vstopna starost zavarovanca je enaka 60 let, dolžina akumulacijskega obdobja pa je 5 let. V tabeli 9 so predstavljene vrednosti parametra φ za pogodbi GMDB in GMAB ter kombinacijo pogodb GMDB in GMAB za primer, ko je zagotovljeno izplačilo neodvisno od stanja na računu, torej sta G_t^D v primeru GMDB in G_T^A v primeru GMAB enaka $G_t^D = Pe^{\delta t}$ oz. $G_T^A = Pe^{\delta T}$. Opazimo, da višja kot je zagotovljena obrestna mera δ, večja je vrednost pogodbe in s tem višji φ. Vidimo tudi, da je v primeru pogodbe GMDB φ zanemarljiv, torej je dodatna cena jamstva zanemarljiva. To je posledica kratkega akumulacijskega obdobja in nizke vstopne starosti zavarovanca. V tabeli 10 so prav tako predstavljene vrednosti parametra φ za pogodbi GMDB in GMAB ter kombinacijo obeh pogodb, vendar tokrat za primer, ko je zagotovljeno izplačilo odvisno stanja na računu. V tem primeru je $G_t^D = \max\limits_{t_i<t} A_{t_i}$ oz. $G_T^A = \max\limits_{t_i<t} A_{t_i}$, kjer je pogostost zaklenitve stanj na računu mesečno, letno, vsake dve leti, po treh letih in v zadnjem primeru po štirih letih. Opazimo, da vrednost pogodbe močno pade, ko se pogostost zaklenitve stanja na računu z mesečne spremeni v letno.

V tabeli 9 vidimo, da v nekaterih primerih ne obstaja tak φ, da bi bila pogodba lahko pravično ovrednotena. To se zgodi, kadar so garancije previsoke. V našem primeru je to pri pogodbi GMAB z zagotovljeno obrestno mero $\delta = 4\%$ in v primeru, ko sklenemo pogodbi GMAB in GMDB hkrati z zagotovljenima obrestnima merama $\delta = 3\%$ in $\delta = 4\%$.

$\delta\%$	GMDB	GMAB	GMAB&GMDB
0	0,024	3,201	3,263
1	0,027	4,245	4,340
2	0,031	6,039	6,229
3	0,035	12,168	–
4	0,039	–	–

TABELA 9. $\varphi\%$ pri statičnem pristopu [1].

V tabeli 11 so predstavljene vrednosti φ za pogodbo GMIB, pri kateri je višina anuitete, ki jo prejema zavarovanec, enaka $b^I = A_T \max\{\eta,g\}$, kjer je η stopnja anuitete, g pa zagotovljena obrestna mera. Primer (Ia) je primer vseživljenjske anuitete, pri kateri se skupna vsota izplačil izračuna kot $B_t^L = b^I \sum_{i=1}^{\infty} 1_{t \geq T_i}$, s $(T \leq)T_1 < T_2 < \cdots$. V tabeli 12 pa so predstavljene vrednosti φ za kombinacijo

pogostost zaklenitve A_t	GMDB	GMAB	GMAB&GMDB
1/12	0,047	7,862	8,050
1	0,036	5,829	5,945
2	0,031	5,022	5,114
3	0,028	4,383	4,462
4	0,026	4,148	4,220

TABELA 10. φ% pri statičnem pristopu [1].

pogodb GMIB in GMDB. Pri pogodbi GMDB je zagotovljeno izplačilo G_t^D neodvisno od stanja na računu, torej je $G_t^D = Pe^{\delta t}$, v primeru pogodbe GMIB pa je višina anuitete enaka kot v prejšnjem primeru.

g%	$\leq 5{,}00$	5,25	5,50	5,75	6,00
GMIB	0,000	0,012	0,779	1,662	2,507

TABELA 11. φ% – G_t^D neodvisen od stanja na računu, primer (Ia) [1].

g%	$\leq 5{,}00$	5,25	5,50	5,75	6,00
	GMIB & GMDB				
	0,024	0,037	0,806	1,691	2,538
	0,027	0,040	0,809	1,695	2,542
	0,031	0,043	0,813	1,699	2,547
	0,035	0,047	0,817	1,703	2,551
	0,039	0,052	0,822	1,708	2,557

TABELA 12. φ% – G_t^D neodvisen od stanja na računu, primer (Ia) [1].

V tabeli 13 so prav tako kot v tabeli 12 predstavljene vrednosti φ za kombinacijo pogodb GMDB in GMIB, le da je v tem primeru G_t^D pri pogodbi GMDB odvisen od stanja na računu, torej je $G_t^D = \max_{t_i<t} A_{t_i}$, v primeru pogodbe GMIB pa je prav tako kot prej $b^I = A_T \max\{\eta, g\}$.

Skupna lastnost tabel 9, 10, 12 in 13 je ta, da je φ v primeru GMDB&GMLB višji kot seštevek φ-jev pri GMLB in GMDB. Neujemanje lahko razložimo takole: s φ^D označimo pošteno stopnjo plačila za GMDB in s φ^L označimo pošteno stopnjo plačila za GMLB. Če vzamemo $\varphi = \varphi^D + \varphi^L$, bo vrednost računa manjša, kot če vzamemo vsako garancijo (GMDB in GMLB) s pripadajočo vrednostjo φ posebej.

V tabeli 14 so navedene vrednosti φ za najbolj pogost primer pogodbe GMWB, to je (Wa). V tem primeru so možni vsakoletni dvigi denarja do vnaprej določenega časa T', višina dviga denarja pa je enaka $\beta_t^W = \beta_t W_t$. Za T je izbran kar $T = 0$, kar pomeni takojšnji začetek dvigov denarja. Skupna vsota zneskov je $B_t^L = \sum_{i=1}^m b_{T_i}^W 1_{t\geq T_i} + \max\{A_{T'}, 0\} 1_{t\geq T'}$. Osnova W_t je določena kot $W_t = O = A_0$, zagotovljeni delež β pa je $\beta = \frac{1}{T'}'$, pri čemer je trajanje pogodbe T' enako 5, 10, 15 ali 20 let. Opazimo, da se vrednost φ vidno manjša z daljšanjem pogodbe.

$g\%$	$\leq 5{,}00$	5,25	5,50	5,75	6,00
pogostost zaklenitve A_t	GMIB & GMDB				
1/12	0,047	0,059	0,828	1,713	2,560
1	0,036	0,048	0,817	1,702	2,549
2	0,031	0,043	0,812	1,698	2,545
3	0,028	0,041	0,810	1,695	2,542
4	0,026	0,039	0,808	1,693	2,540

Tabela 13. $\varphi\%$ – G_t^D odvisen od stanja na računu, primer (Ia) [1].

T'	5	10	15	20
$\beta\%$	20,00	10,00	6,67	5,00
GMWB	3,919	1,953	1,207	0,820

Tabela 14. $\varphi\%$ – primer (Wa) – statični pristop [1].

Dodatek A. Simulacija

```
r <- function(t, dt){
    if(t == 0)
        return (0.03);
    prev  <- r(t-1, dt);
    ksi   <- 0.60;
    zeta  <- 0.03;
    sigma <- 0.03;
    x     <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
    return(prev + ksi*dt*(zeta - prev)
   + sigma*sqrt(prev)*x);
}
#rIter <- izracun n+1 prvih r-jev
#r_t dobimo, ce klicemo rIter(n)[t+1] ; n >= t+1
#npr. r_0 je na prvem mestu zaradi indeksiranja
rIter <- function(n, dt){
   rs <- rep(0,n+1);
   rs [1] <- 0.03;
    ksi   <- 0.60;
    zeta  <- 0.03;
    sigma <- 0.03;
   for(i in 2:(n+1))
   {
      x <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
      prev <- rs[i-1];
      rs[i] <- (prev + ksi*dt*(zeta - prev) + sigma*sqrt(prev)*x);
   }
   return (rs);
}


K <- function(t, dt){
    if(t == 0)
        return (0.04);
    prev  <- K(t-1, dt);
    ksi   <- 1.50;
    zeta  <- 0.04;
    sigma <- 0.40;
    x     <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
    return(prev + ksi*dt*(zeta - prev)
   + sigma*sqrt(prev)*x);
}
```

```
#KIter <- izracun n+1 prvih K-jev
#K_t dobimo, ce klicemo KIter(n)[t+1] ; n >= t+1
KIter <- function(n, dt){
   Ks <- rep(0,n+1);
   Ks[1] <- 0.04;
    ksi    <- 1.50;
    zeta   <- 0.04;
    sigma <- 0.40;
   for(i in 2:(n+1))
   {
       x <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
         if(Ks[i-1] < 0)
         {
              Ks[i-1] = 0;
         }
         prev <- Ks[i-1];
       Ks[i] <- (prev + ksi*dt*(zeta - prev) + sigma*sqrt(prev)*x);
   }
   return (Ks);
}


S <- function(t, P, dt){
    if (t == 0)
       return(P);
   prev <- S(t-1, P, dt)
   r <- r(t, dt);
   Kt <- K(t, dt);
   ro <- -0.70;
   x      <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
   return (prev*exp((r-0.5*Kt)*dt + sqrt(Kt)*(ro*x+sqrt(1-ro^2)*x)))
}

#SIter <- izracun n+1 prvih S-jev
#S_t dobimo, ce klicemo SIter(n)[t+1] ; n >= t+1
SIter <- function(n, P, dt){
   ro <- -0.70;
   logSs <- rep(0,n+1);
   logSs[1] <- log(P);
   rs <- rIter(n, dt)
   Ks <- KIter(n, dt)
   for (i in 2:(n+1)){
       x <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
         y <- rnorm(1, mean=0, sd=sqrt(dt));
       prev <- logSs[i-1]
         k = Ks[i];
         if(k < 0)
         {
              k = 0;
         }
       logSs[i] <- (prev+((rs[i]-0.5*k)*dt + sqrt(k)*(ro*x+sqrt(1-ro^2)*y)));
   }
   return (exp(logSs))
}

mi <- function(t, dt=1){
    if (t==0)
       return (mis(0))
   prev <- mi(t-1,dt)
   ksi <- 0.50;
   sigma <- 0.03;
   x      <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
   return(prev+ksi*(mis(t)-prev)*dt+sigma*sqrt(prev)*x)
}
mis <- function(h){
       c1 <- 90.43;
       c2 <- 10.36;
       xmis <- 60;
```

```
    return(c1^(-c2)*c2*(xmis+h)^(c2-1))
}

#MiIter <- izracun n+1 prvih Migr-jev
MiIter <- function(n, dt=1){

  ksi <- 0.50;
  sigma <- 0.03;
  Mis <- rep(0,n+1);
  Mis[1] <- mis(0);
  for (i in 2:(n+1)){
    x <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt));
    prev <- Mis[i-1]
    Mis[i] <- (prev+ksi*(mis(dt*(i-1))-prev)*dt
  +sigma*sqrt(prev)*x);
  }
  return (Mis)
}


#A <- izracuna stanje na racunu ob casu t
A <- function(t, fi, P, dB, dt){
   if(t == 0)
      return (P);
   Ss <- SIter(t, P, dt);
  return (Apomozna(t, fi, P, dB, dt, Ss))
 }

 #AIter <- izracuna stanja na racunu
AIter <- function(n, fi, P, dB, dt){
   As <- rep(0,n+1);
  As[1] <- P;
   Ss <- SIter(n, P, dt);
   for (i in 2:(n+1)){
     prev <- As[i-1]
     As[i] <- (prev + prev*((Ss[i+1]-Ss[i])/(Ss[i]))-fi*prev*dt-dB);
  }
  return (As)
}

#grafA
grafA  <- function(n=365, fi, P, dB, dt){
  As <- AIter(n, fi, P, dB, dt);
  x <- seq(0,n,1)
  plot(x,As, type="l",xlab="\u010Cas [dan]", ylab="A")
}

#grafb
grafb <- function(n=365, fi, delta, P, dB, dt){
  As <- AIter(n, fi, P, dB, dt);
   Pd <- P*exp(delta*n*dt);
  x <- seq(0,n,1)
  plot(x,As, type="l",xlab="\u010Cas [dan]", ylab="b")
   points(n,Pd, col="blue",pch=21, bg="blue", cex=2)

}


#grafr <- narise graf za prvih n r-jev
grafr <- function(n=365, dt){
  rs <- rIter(n, dt);
  x <- seq(0,n,1)
  plot(x,rs, type="l",xlab="\u010Cas [dan]", ylab="r")
}

#grafK <- narise graf za prvih n K-jev
grafK <- function(n=365, dt){
  Ks <- KIter(n, dt);
```

```
    x <- seq(0,n,1)
    plot(x,Ks, type="l",xlab="\u010Cas [dan]", ylab="K")
}

#grafS <- narise graf za prvih n S-jev
grafS <- function(n=365,P, dt){
    Ss <- SIter(n, P, dt);
    x <- seq(0,n,1)
    plot(x,Ss, type="l",xlab="\u010Cas [dan]", ylab="S")
}
#grafMi <- narise graf za prvih n Mi-jev
grafMi <- function(n=20, dt=1){
    Mis <- MiIter(n, dt);
    x <- seq(0,n,1)
    plot(x,Mis, type="l",xlab="\u010Cas [leto]", ylab="\u03BC")
}

GMAB <- function(t, fi, delta, P, dt){
     if (t == 0)
          return (P);
     At <- A(t, fi, P, 0, dt)
     premija <- P*exp(delta*t*dt);
     maks <- max(At, premija)
     r <- r(t,dt)*t*dt
     obveznost <- maks*exp(-r)
     return(obveznost)
}

GMABinGMDB <- function(t, fi, delta, P, dt){
     if (t == 0)
          return (P);
     tau <- cassmrti(t, dt)
     if (tau < t)
     {
          r <- r(tau,dt)*tau*dt
          Ad <- A(tau, fi, P, 0, dt);
          premija <- P*exp(delta*tau*dt);
          maks <- max(Ad, premija);
     }
     else
     {
          At <- A(t, fi, P, 0, dt);
          maksA <- P;
          for (i in 1:(t*dt))
          {
               Avmesni <- A(floor(i/dt), fi, P, 0, dt);
               maksA <- max(Avmesni, maksA)
          }
          maks <- max(At, maksA);
          r <- r(t,dt)*t*dt
     }
     obveznost <- maks*exp(-r);
     return(obveznost)
}

cassmrti <- function(n, dt=1){
     eps <- rexp(1, rate = 1);
     Mis <- MiIter(n, dt);
     vsota <- Mis[1];
     i <- 1;
     while (i < n && vsota < eps){
          vsota = vsota + Mis[i]
          i = i+1;
     }
     return(i)
}
```

```
povp <- function(t, fi, delta, P, dt, pogodba)
{
    povprecje = 0;
    stIteracij  = 500;
    for (i in 1: stIteracij ){
        povprecje = povprecje + pogodba(t, fi, delta, P, dt);
    }
    return(povprecje /  stIteracij );
}

Apomozna <- function(t, fi, P, dB, dt, Ss){
   if(t == 0)
        return (P);
    prev  <- Apomozna(t-1, fi, P, dB, dt, Ss);
    return(prev + prev*((Ss[t+1]-Ss[t])/(Ss[t]))-fi*prev*dt-dB);
}
```

Slovar strokovnih izrazov

variable annuity variabilna anuiteta
guaranteed minimum death benefit jamstvo minimalnega izplačila v primeru smrti
guaranteed minimum accumulation benefit jamstvo minimalnega izplačila ob izteku akumulacijskega obdobja
guaranteed minimum income benefit jamstvo minimalne anuitete
guaranteed minimum withdrawal benefit jamstvo minimalnega dviga z računa zbranih sredstev
reference fund referenčni portfelj

Literatura

[1] A. R. Bacinello, P. Millossovich, A. Olivieri in E. Pitacco, *Variable annuities: A unifying valuation approach*, Insurance Math. Econom. **49** (2011) 285–297.
[2] H. Krašovec, *Slovar zavarovalništva: angleško-slovenski in slovensko-angleški*, Pegaz International, Ljubljana, 2006.
[3] P. O'Malley, *Development of GMxB markets in Europe*, 2008, [ogled 10. 7. 2016], dostopno na `www.actuaries.org/LIFE/Events/Stockholm/OMalley.pdf`.
[4] *Vasicek model*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 19. 3. 2016], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Vasicek_model`.
[5] *Lee–Carter model*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 19. 3. 2016], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Lee-Carter_model`.