

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Kristjan Bolčič

Uporaba dualnih kvaternionov v prostorski kinematiki

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Marjeta Krajnc

Ljubljana, 2016

KAZALO

1. Uvod	4
2. Kinematika togega telesa	4
2.1. Homogene koordinate	4
2.2. Gibanje togega telesa	5
2.3. Eulerjevi parametri	6
2.4. Evklidska grupa $SE(3)$	8
3. Kvaternioni	8
3.1. Zgodovinski uvod	8
3.2. Operacije na \mathbb{H}	9
3.3. Rotacije v prostoru	10
4. Uvod v dualne kvaternione	11
4.1. Uvod	11
4.2. Osnovne operacije	11
4.3. Opis gibanja togega telesa	12
5. Konstrukcija gibanja	15
5.1. Potrebna orodja	15
5.2. Sferična linearna interpolacija (Slerp)	18
5.3. Krivulja gibanja	22
5.4. ScLerp	23
6. Faktorizacija polinomov gibanja	26
6.1. Uvodne definicije	26
6.2. Obstoje faktorizacije	27
Slovar strokovnih izrazov	33
Literatura	34

Uporaba dualnih kvaternionov v prostorski kinematiki

POVZETEK

V diplomskem delu spoznamo različne metode za konstrukcijo togega gibanja v prostoru. Posebej si ogledamo transformacijo stanja togega telesa s homogenimi 4×4 matrikami. Spoznamo vektorski prostor kvaternionov in nekomutativno algebro dualnih kvaternionov. Dokažemo rotacijsko formulo v prostoru enotskih kvaternionov in izpeljemo preprosto metodo za interpolacijo linearnih poti na sferi, imenovano Slerp. Vpeljemo še eno metodo interpolacije, tokrat v prostoru enotskih dualnih kvaternionov, imenovano ScLerp. Spoznamo pomemben razred polinomov s koeficienti v prostoru dualnih kvaternionov, imenovanih *polinomi gibanja*. Na koncu pa dokažemo pomemben izrek v kolobarju polinomov $\mathbb{DH}[t]$, ki pravi, da je vsak generičen polinom razcepen na produkte linearnih rotacijskih faktorjev. S pomočjo izreka zapišemo osnovni algoritem za razcep generičnega polinoma gibanja na linearne faktorje.

The use of dual quaternions in spatial kinematics

ABSTRACT

In the thesis we learn about several construction methods for spatial displacements of rigid bodies. Transformation methods using homogeneous 4×4 matrices are considered and noncommutative algebra of quaternions and dual quaternions introduced. We present a simple method for interpolating linear curves on the sphere surface named Slerp. By using unit dual quaternions another interpolation method named ScLerp is defined. We also consider the ring of polynomials $\mathbb{DH}[t]$ and we introduce a special class of polynomials named *motion polynomials*. In the end we give a proof of the main theorem which says that every generic motion polynomial admits a factorization into linear rotational factors. Using the theorem we write a simple algorithm for factorizing generic motion polynomials into rotational linear factors.

Math. Subj. Class. (2010): 12D05, 11R52

Ključne besede: kvaternioni, dualni kvaternioni, Studyjeva kvadrika, Slerp, polinomi gibanja

Keywords: quaternions, dual quaternions, Study quadric, Slerp, motion polynomials

1. UVOD

V diplomski nalogi se bomo ukvarjali predvsem s konstrukcijo gibanja togega telesa. Togo telo je intuitivno gledano razsežno telo v prostoru z maso in volumnom. Za določitev stanja togega telesa ni dovolj, da poznamo položaj težišča v prostoru, pač pa potrebujemo tudi informacijo o njegovi orientaciji. Ogleдали si bomo več različnih predstavitev transformacij stanj, ki bodo med seboj ekvivalentne. Naš cilj je poiskati čim bolj enostaven zapis za transformacijo stanja. V tem primeru bomo govorili o gibanju togega telesa. Transformacijo stanja togega telesa si lahko predstavljamo kot afino preslikavo $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v} + \mathbf{t}$, $\mathbf{v}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$, $R \in \text{SO}(3)$, kjer je $\text{SO}(3)$ grupa ortogonalnih 3×3 matrik.

V prvem poglavju bomo ubrali mehanski pristop. Vpeljali bomo projektivne koordinate in homogene 4×4 matrike, ki nam bodo združile dva, na prvi pogled skoraj povsem ločena pojma *translacijskega* in *rotacijskega* dela gibanja.

V drugem poglavju bomo ponovili nekaj osnov nekomutativnega obsega kvaternionov. Ogleдали si bomo osnovne računske operacije in dokazali rotacijsko formulo. Enotski kvaternioni nam bodo omogočali, da bomo lahko sicer zapleten zapis rotacije z matriko iz $\text{SO}(3)$ identificirali z vektorjem v \mathbb{R}^4 .

V tretjem poglavju bomo spoznali nekomutativno algebro dualnih kvaternionov. Ogleдали si bomo osnovne računske operacije in že znane formule iz kvaternionov naravno prenesli na prostor dualnih kvaternionov. Pokazali bomo, kako lahko iz enotskega dualnega kvaterniona izluščimo predpis afine transformacije in obratno, kako afini transformaciji priredimo pripadajoči enotski dualni kvaternion.

V naslednjem poglavju bomo študirali več načinov predstavitve zveznega gibanja. Začeli bomo z ločenim translacijskim in rotacijskim delom, izkoristili bijektivno korespondenco med antipodnimi enotskimi kvaternioni na sferi \mathbb{S}^3 in s pomočjo tega konstruirali nekaj metod interpolacije enotskih kvaternionov. Pokazali bomo, kako lahko paru translacijske krivulje in krivulje v prostoru enotskih kvaternionov priredimo krivuljo v prostoru enotskih dualnih kvaternionov. Z uporabo že znanih trditev bomo iz dualnega kvaterniona lahko izluščili predpisa o translacijskem in rotacijskem delu. Za zaključek si bomo ogledali še interpolacijo v prostoru dualnih kvaternionov. Podali bomo tudi nekaj geometrijske intuicije nekaterih formul iz dualnih kvaternionov.

V zadnjem poglavju bomo spoznali poseben razred polinomov s koeficienti v prostoru dualnih kvaternionov, ki ležijo na mnogoterosti imenovani *Studyjeva kvadratika*. Imenovali jih bomo *polinomi gibanja*. Dokazali bomo, da je vsak generičen polinom gibanja razcepen na linearne rotacijske faktorje. Zapisali bomo osnovni algoritem razcepa. Za zaključek si bomo ogledali, kakšna gibanja lahko parametriziramo s pomočjo polinomov gibanja.

2. KINEMATIKA TOGEGA TELESA

2.1. Homogene koordinate. V nadaljevanju bomo točke v \mathbb{R}^3 predstavili s pomočjo homogenih koordinat

$$\hat{\mathbf{q}} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)^T\}.$$

Če homogene koordinate točke $\hat{\mathbf{q}}$ pomnožimo z $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dobimo predstavnika istega ekvivalenčnega razreda, tj. $\hat{\mathbf{q}} \sim \lambda\hat{\mathbf{q}}$. Pripadajoči kartezični koordinati točk $\hat{\mathbf{q}}$ in $\lambda\hat{\mathbf{q}}$ sta enaki. Če je prva komponenta $q_0 \neq 0$, lahko dobimo pripadajoče kartezične

koordinate kot

$$\mathbf{q} = (q'_1, q'_2, q'_3) \in \mathbb{R}^3,$$

kjer je $q'_i = \frac{q_i}{q_0}$, $i = 1, 2, 3$. Vidimo, da dobimo v primeru $q_0 = 0$ točke v neskončnosti.

2.2. Gibanje togega telesa.

Definicija 2.1. Fizikalno gledano je *togo telo* idealizacija končnorazsežnega trdnega telesa. Pri tem privzamemo, da se razdalja med poljubno izbranimi točkama telesa ne spreminja, če nanj delujejo zunanje sile. Togo telo je torej razsežno telo z maso in volumnom.

Za učinkovit zapis stanja togega telesa potrebujemo dva koordinatna sistema, *fiksen* in *gibajoč se* koordinatni sistem. Gibanje togega telesa ločimo na *translacijski* in *rotacijski del*. Izberimo si zdaj neko referenčno točko \mathbf{d} na togem telesu \mathcal{D} . V naših primerih bo ta točka največkrat kar težišče telesa \mathcal{D} .

Definicija 2.2. *Translacijska* krivulja gibanja togega telesa \mathcal{D} je prostorska parametrična krivulja $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero velja $\gamma(t) = \mathbf{d}(t)$, kjer smo z $\mathbf{d}(t)$ označili položaj težišča v času t glede na fiksen koordinatni sistem.

Z \mathbb{R}^3 označimo *fiksen* koordinatni sistem. Tukaj bo koordinatno izhodišče fiksirano, translacijsko krivuljo pa bomo zapisali v koordinatah tega koordinatnega sistema. Z \mathbb{E}^3 označimo *gibajoč se* koordinatni sistem. Orientacijo togega telesa podamo z baznimi vektorji v \mathbb{E}^3 . Izhodišče v tem primeru ni fiksirano. Intuitivno si lahko predstavljamo, da se koordinatno izhodišče \mathbb{E}^3 giblje po translacijski krivulji γ .

Pri opisu gibanja bomo potrebovali oznaki glede zapisa točk v obeh koordinatnih sistemih. Z \mathbf{x} bomo označili točko zapisano v fiksnih koordinatah, z \mathbf{x}' pa točko zapisano v *telesnih* koordinatah. Telesne koordinate bodo podane s točkami glede na trenutno izhodišče gibajočega se sistema $\mathbb{E}^3(t)$, s čimer smo poudarili, da je le ta odvisen od parametra t .

Opomba 2.3. Telesne koordinate bomo potrebovali le za zapis baze gibajočega se koordinatnega sistema.

Naš cilj je zapisati transformacijo, ki bo pretvorila koordinate fiksnega sistema v koordinate gibajočega se sistema. Transformacijo lahko po trditvi iz [7, poglavje 29.2.2] zapišemo z uporabo homogenih koordinat s 4×4 matriko oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad a_{0,0} \neq 0, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Pripadajoča transformacija se glasi $\hat{\mathbf{x}} \mapsto A\hat{\mathbf{x}}$. Kartezične koordinate izhodišča gibajočega se koordinatnega sistema \mathbb{E}^3 dobimo iz

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} = (a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0})^T.$$

Sledi, da so kartezične koordinate izhodišča \mathbb{E}^3 enake $\left(\frac{a_{1,0}}{a_{0,0}}, \frac{a_{2,0}}{a_{0,0}}, \frac{a_{3,0}}{a_{0,0}}\right)^T$.

Orientacijo gibajočega se koordinatnega sistema \mathbb{E}^3 opiše rotacijska matrika $R \in \text{SO}(3)$,

$$R = \frac{1}{a_{0,0}} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Opomba 2.4. Z oznako $\text{SO}(3)$ označujemo specialno ortogonalno grupo 3×3 matrik $\text{SO}(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det Q = 1, QQ^T = I\}$.

V primeru, da je transformacija A odvisna od časa, govorimo o *gibanju* tega telesa. Naj bo $A = A(t)$, kjer je $t \in [t_0, t_1]$. Gibanje tega telesa je zvezno, kadar so funkcije $a_{i,j}$ za $i, j = 1, 2, 3$ zvezne. Definirajmo preslikavo

$$(\hat{\mathbf{x}}, t) \mapsto A(t)\hat{\mathbf{x}}.$$

Kakor pri spremembi stanja tega telesa lahko tudi pri transformaciji $A = A(t)$ določimo položaj izhodišča gibajočega se koordinatnega sistema kot

$$A(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} = (a_{0,0}(t), a_{1,0}(t), a_{2,0}(t), a_{3,0}(t))^T,$$

pripadajoče kartezične koordinate pa kot $\left(\frac{a_{1,0}(t)}{a_{0,0}(t)}, \frac{a_{2,0}(t)}{a_{0,0}(t)}, \frac{a_{3,0}(t)}{a_{0,0}(t)}\right)^T$. Rotacijsko matriko $R = R(t)$ dobimo kot podmatriko v $A(t)$, kjer vsako komponento delimo z utežjo $a_{0,0}(t)$,

$$R(t) = \frac{1}{a_{0,0}(t)} \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & a_{1,3}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & a_{2,3}(t) \\ a_{3,1}(t) & a_{3,2}(t) & a_{3,3}(t) \end{bmatrix}.$$

Bazo gibajočega se koordinatnega sistema v času t dobimo kot

$$A(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}'_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_i \in \mathbb{E}^3, \quad i = 1, 2, 3.$$

2.3. Eulerjevi parametri. V splošnem je težko predpisati tako matriko $A(t)$, da bo pripadajoča podmatrika $R(t)$ ortogonalna za vsak $t \in [t_0, t_1]$. V izogib temu problemu bomo pokazali, da lahko vsako ortogonalno matriko zapišemo s pomočjo štirih parametrov.

Definicija 2.5. Naj bodo $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ in naj velja pogoj

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Parametre (q_0, q_1, q_2, q_3) imenujemo *normalizirani Eulerjevi parametri*.

Trditev 2.6 ([7, poglavje 29.2.3]). *Vsako matriko $Q \in \text{SO}(3)$ lahko zapišemo kot*

$$Q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix},$$

kjer so q_0, q_1, q_2, q_3 *normalizirani Eulerjevi parametri*.

Primer 2.7. Oglejmo si konkreten primer zvezne transformacije stanj tega telesa. Naše modelno telo bo homogena kocka $\mathcal{D} = [-1, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$. Za translacijsko krivuljo vzemimo $\gamma(t) = (\alpha \cos(t) - \alpha, \alpha \sin(t), \beta t)$, $t \in [0, T]$, $\alpha, \beta, T \in \mathbb{R}$. Za referenčno točko translacijske krivulje vzemimo težišče kocke \mathcal{D} , ki je očitno v izhodišču fiksnega koordinatnega sistema \mathbb{R}^3 . Vidimo, da mora za začetno stanje pri $t = 0$ veljati $\gamma(0) = (0, 0, 0)^T$, s čimer smo gibanju dali začetno lego. Opišimo sedaj rotacijski del. Ker smo videli, da je analitično zelo težko sestaviti takšno matriko $R(t)$, ki bo

ortogonalna za vsak t , bomo eno smer fiksirali, rotirali pa bomo ortogonalno na to smer. Izberimo matriko

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da gre za ortogonalno matriko za vsak $t \in [0, T]$. Lotimo se konstrukcije preslikave togega gibanja. Za lažjo predstavo bomo najprej izračunali stanja telesa \mathcal{D} v časih $t = 0, t = 1, t = 2$ in $t = T$. Izračunajmo najprej položaje težišča kocke. Za posamezne čase dobimo

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= (0, 0, 0)^T, \\ \gamma(1) &= (\alpha \cos(1) - \alpha, \alpha \sin(1), \beta)^T, \\ \gamma(2) &= (\alpha \cos(2) - \alpha, \alpha \sin(2), 2\beta)^T, \\ \gamma(T) &= (\alpha \cos(T) - \alpha, \alpha \sin(T), T\beta)^T. \end{aligned}$$

Izračunajmo še pripadajoče bazne vektorje gibajočega se koordinatnega sistema \mathbb{E}^3 v časih $t = 1, 2, T$. Označimo z $\mathbf{e}'_i(t)$ i -ti bazni vektor gibajočega se koordinatnega sistema v času t :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1(1) &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right), 0 \right)^T, & \mathbf{e}'_2(1) &= \left(-\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right), 0 \right)^T, \\ \mathbf{e}'_1(2) &= \left(\cos\left(\frac{4\pi}{T}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{T}\right), 0 \right)^T, & \mathbf{e}'_2(2) &= \left(-\sin\left(\frac{4\pi}{T}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{T}\right), 0 \right)^T, \\ \mathbf{e}'_1(T) &= (1, 0, 0)^T, & \mathbf{e}'_2(T) &= (0, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

Za $\mathbf{e}'_3(t)$ pa velja $\mathbf{e}'_3(t) = (0, 0, 1)^T$ za vsak $t \in [0, T]$. Transformacijo zapišimo še s homogeno matriko iz $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, kjer lahko utež iz projektivnih koordinat postavimo na 1:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \cos(t) - \alpha & \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \\ \alpha \sin(t) & \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \\ \beta t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

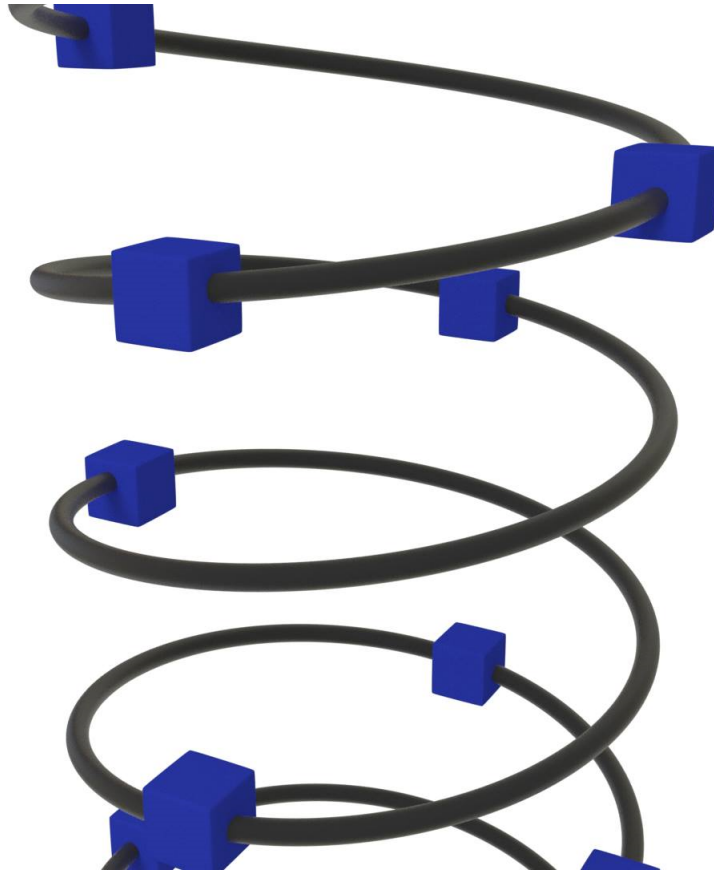
Ekvivalentno lahko bazne vektorje gibajočega se koordinatnega sistema \mathbb{E}^3 dobimo kot

$$A(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}'_i{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}'_i{}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_i \in \mathbb{E}^3, \quad i = 1, 2, 3,$$

položaj težišča v času t pa kot

$$A(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma(t)^T \end{bmatrix}.$$

Gibanje kocke v prostoru si lahko ogledamo na sliki 1. ◇



SLIKA 1. Gibanje kocke po spirali iz primera 2.7. Avtor: Leon Lončarič

2.4. Evklidska grupa $SE(3)$. Transformacijo stanja togega telesa si lahko predstavljamo kot preslikavo, ki vsako točko telesa zavrti in translira. Iz tega sledi, da je transformacija stanja togega telesa ekvivalentna neki izometriji \mathbb{R}^3 , ki ohranja orientacijo. Želimo imeti tako strukturo, kjer bomo bolj zapletene transformacije lahko zapisali kot kompozitum preprostih, kar nas pripelje do posebnega razreda afinih transformacij.

Definicija 2.8. *Grupo translacij* prostora \mathbb{R}^3 definiramo kot

$$\mathcal{T} = \{\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{t} : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Definicija 2.9. *Evklidsko grupo* direktnih izometrij prostora \mathbb{R}^3 definiramo kot

$$SE(3) = \{\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto R\mathbf{x} + \mathbf{t} : R \in SO(3) \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Zvezno togo gibanje lahko po [6, poglavje 1] identificiramo z neko krivuljo $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow SE(3)$, kjer za vsak čas t dobimo *direktno* izometrijo prostora \mathbb{R}^3 . Direktna izometrija je preslikava, ki ohranja kote, razdalje in orientacijo.

3. KVATERNIONI

3.1. Zgodovinski uvod. Leta 1843 je bilo znano, da lahko na kompleksna števila gledamo kot na točke v ravnini in da lahko dve kompleksni števili geometrično seštejemo in zmnožimo. Irski matematik Hamilton je zato začel iskati način, kako bi lahko enako storil tudi za točke v prostoru. Naravno je bilo poskusiti s trojico števil oblike $a + bi + cj$, kar pa ni dalo zelenih rezultatov. Nastopile so težave pri

definiranju množenja. Ker ni uspel definirati množenja na množici trojic števil, je poskusil z idejo, da bi lahko to storil s četvorico takih števil z lastnostjo $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Tako je Hamilton prišel do *kvaternionov*.

3.2. Operacije na \mathbb{H} . Prostor kvaternionov \mathbb{H} je 4-dimenzionalen vektorski prostor s standardnim skalarnim produktom v \mathbb{R}^4 nad obsegom \mathbb{R} s standardno bazo $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$,

$$\mathbf{1} = (1, (0, 0, 0)^T), \quad \mathbf{i} = (0, (1, 0, 0)^T), \quad \mathbf{j} = (0, (0, 1, 0)^T), \quad \mathbf{k} = (0, (0, 0, 1)^T).$$

Vsak kvaternion lahko zapišemo kot $\mathcal{Q} = (q_0, \mathbf{q})$, kjer je $q_0 \in \mathbb{R}$ skalarni del, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ pa vektorski del kvaterniona. Kvaternione lahko identificiramo z vektorji v \mathbb{R}^4 , $\mathcal{Q} \equiv (q_0, q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^4$. Kvaternion z ničelnim skalarnim delom se imenuje *čisti* kvaternion in tak kvaternion identificiramo z vektorjem v \mathbb{R}^3 . Na množici \mathbb{H} definiramo seštevanje in množenje na sledeč način. Naj bosta $\mathcal{Q} = (q_0, \mathbf{q})$, $\mathcal{P} = (p_0, \mathbf{p})$. Vsoto definiramo po komponentah kot

$$\mathcal{Q} + \mathcal{P} = (q_0 + p_0, \mathbf{q} + \mathbf{p}) = (q_0 + p_0, (q_1 + p_1, q_2 + p_2, q_3 + p_3)^T),$$

produkt pa je enak

$$\mathcal{Q}\mathcal{P} = (q_0p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}),$$

kjer smo $z \cdot$ označili običajni skalarni produkt v \mathbb{R}^3 , $z \times$ pa vektorski produkt v \mathbb{R}^3 .

Definicija 3.1. Vsakemu kvaternionu $\mathcal{Q} = (q_0, \mathbf{q}) \in \mathbb{H}$ lahko priredimo *konjugirani* kvaternion \mathcal{Q}^* . Definiramo ga kot

$$\mathcal{Q}^* = (q_0, -\mathbf{q}).$$

Trditev 3.2. Naj bo $\mathcal{Q} = (q_0, (q_1, q_2, q_3)^T) \in \mathbb{H}$ in \mathcal{Q}^* njegov konjugiran kvaternion. Potem je

$$\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}^*\mathcal{Q} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\mathbf{1} = \|\mathcal{Q}\|^2\mathbf{1}.$$

Dokaz. Po definiciji kvaternionskega množenja dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* &= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\mathbf{1} + (-q_0q_1 + q_1q_0 - q_2q_3 + q_3q_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (-q_0q_2 + q_1q_3 + q_2q_0 - q_3q_1)\mathbf{j} + (-q_0q_3 - q_1q_2 + q_2q_1 + q_3q_0)\mathbf{k} \\ &= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\mathbf{1}. \end{aligned} \quad \square$$

Definicija 3.3. Norma kvaterniona $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}$ je definirana kot

$$\|\mathcal{Q}\| = \sqrt{\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*}.$$

Trditev 3.4 ([3, poglavje 1]). Množica \mathbb{H} opremljena z metriko $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \|\mathcal{P} - \mathcal{Q}\|$ je metrični prostor.

Trditev 3.5. Inverz poljubnega neničelnega kvaterniona $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}$ dobimo kot

$$\mathcal{Q}^{-1} = \frac{\mathcal{Q}^*}{\|\mathcal{Q}\|^2}.$$

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz trditve 3.2. □

3.3. Rotacije v prostoru.

Trditev 3.6. Označimo s $\mathbb{H}_e = \{\mathcal{Q} \in \mathbb{H} : \|\mathcal{Q}\| = 1\}$ množico enotskih kvaternionov. Tedaj lahko vsak $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$ zapišemo kot

$$\mathcal{Q} = \cos \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + \mathbf{e} \sin \frac{\phi}{2},$$

kjer je $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{e}\| = 1$, $\phi \in [0, 2\pi)$.

Dokaz. Zapišimo normo kvaterniona $\mathcal{Q} = (q_0, \mathbf{q}) \in \mathbb{H}_e$

$$\|\mathcal{Q}\| = \sqrt{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2} = 1.$$

Iz enakosti $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ sledi, da obstaja tak kot ψ , da bo $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 1$. Kot ψ izberemo tako, da bo $q_0^2 = \cos^2 \psi$. Vektorski del \mathbf{q} mora biti oblike $\mathbf{q} = \mathbf{u} \sin \psi$ oziroma $\mathbf{u} = \frac{1}{\sin \psi} \mathbf{q}$. Iskani kot je potem enak $\phi = 2\psi$. \square

Rodriguesova formula [13] za rotacijo vektorja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ za kot ϕ okrog osi rotacije \mathbf{e} je

$$R\mathbf{v} = R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cos \phi + (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) \sin \phi + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos \phi).$$

Trditev 3.7. Vsako rotacijo vektorja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ okoli osi \mathbf{e} za kot ϕ lahko zapišemo kot

$$(1) \quad R\mathbf{v} = \mathcal{Q}\mathcal{V}\mathcal{Q}^{-1},$$

kjer je $\mathcal{V} = (0, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}$, $\mathcal{Q} = \cos \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + \mathbf{e} \sin \frac{\phi}{2} \in \mathbb{H}_e$.

Dokaz. Naj bo enotski vektor \mathbf{e} os rotacije in $\mathcal{Q} = \cos \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + \mathbf{e} \sin \frac{\phi}{2}$. Pokazali bomo, da je zapis

$$\mathcal{Q}\mathcal{V}\mathcal{Q}^{-1} = (\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + \mathbf{e} \sin \frac{\phi}{2})\mathcal{V}(\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{1} - \mathbf{e} \sin \frac{\phi}{2})$$

ekvivalenten Rodriguesovi formuli za rotacijo $R(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{v}$. Po formuli za produkt kvaternionov dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\mathcal{V}\mathcal{Q}^{-1} &= \left(\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \right) (0, \mathbf{v}) \left(\cos \frac{\phi}{2}, -\sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \right) \\ &= \left(-\sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}, \cos \frac{\phi}{2} \mathbf{v} + \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{v} \right) \left(\cos \frac{\phi}{2}, -\sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \right) \\ &= \left(-\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} + \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} + \sin^2 \frac{\phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}, \right. \\ &\quad \left. \sin^2 \frac{\phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e} + \cos \frac{\phi}{2} \left(\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{v} + \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{v} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{v} + \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{v} \right) \times \left(-\sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \right) \right) \\ &= \left(0, (1 - \cos \phi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e} + \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{v} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{v} + 2 \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{v} \right) \\ &= (0, (1 - \cos \phi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e} + \cos \phi \mathbf{v} + \sin \phi (\mathbf{e} \times \mathbf{v})), \end{aligned}$$

kar je pa ravno Rodriguesova formula za rotacijo vektorja \mathbf{v} za kot ϕ okoli osi \mathbf{e} . \square

Trditev 3.8 ([7, poglavje 29.3.3]). *Obstaja bijektivna korespondenca med pari anti-podnih enotskih kvaternionov na sferi $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ in matrikami $Q \in \text{SO}(3)$. Pripadajoča ortogonalna matrika enotskemu kvaternionu $\mathcal{Q} = (q_0, (q_1, q_2, q_3)^T)$ je oblike*

$$Q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}.$$

4. UVOD V DUALNE KVATERNIONE

4.1. Uvod. V drugem poglavju smo videli, kako lahko s pomočjo homogenih koordinat in transformacijskih matrik zapišemo transformacijo stanj togega telesa. Naš cilj bo predstaviti alternativo temu zapisu s pomočjo dualnih kvaternionov.

Definicija 4.1. Označimo z \mathbb{D} množico *dualnih* števil. Dualno število je oblike $\mathbf{D} = a + \varepsilon b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ in za abstraktni element ε velja $\varepsilon^2 = 0$.

S pomočjo dualnih števil bomo konstruirali nekomutativno algebro dualnih kvaternionov. Vemo, da na kvaternione lahko gledamo kot na vektorje v \mathbb{R}^4 . Zapišimo poljuben kvaternion $\mathcal{Q} = (a, b, c, d)$, kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vzemimo zdaj $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{D}$. Vsako dualno število lahko zapišemo kot $\mathbf{A} = a + \varepsilon a'$. Zapišimo zdaj naš nov objekt kot

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = (a + \varepsilon a', b + \varepsilon b', c + \varepsilon c', d + \varepsilon d') = (a, b, c, d) + \varepsilon(a', b', c', d'),$$

pri čemer sta (a, b, c, d) , (a', b', c', d') kvaterniona. Dobljen objekt imenujemo *dualni kvaternion*.

4.2. Osnovne operacije. Označimo z $\mathbb{D}\mathbb{H}$ množico dualnih kvaternionov

$$\mathbb{D}\mathbb{H} = \{\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{P} : \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{H}, \varepsilon^2 = 0\}.$$

Na dualne kvaternione lahko gledamo kot na dvojico kvaternionov. Poljuben $\mathbf{Q} \in \mathbb{D}\mathbb{H}$ lahko zapišemo kot

$$\mathbf{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = \mathcal{Q}_1 + \varepsilon \mathcal{Q}_2.$$

Vsoto dveh dualnih kvaternionov $\mathbf{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$, $\mathbf{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ definiramo kot

$$\mathbf{Q} + \mathbf{P} = (\mathcal{Q}_1 + \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_2 + \mathcal{P}_2) = (\mathcal{Q}_1 + \mathcal{P}_1) + \varepsilon(\mathcal{Q}_2 + \mathcal{P}_2),$$

produkt dveh dualnih kvaternionov pa je enak

$$\mathbf{Q}\mathbf{P} = (\mathcal{Q}_1 + \varepsilon \mathcal{Q}_2)(\mathcal{P}_1 + \varepsilon \mathcal{P}_2) = \mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1 + \varepsilon(\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}_2\mathcal{P}_1) + \varepsilon^2(\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2),$$

kjer je zadnji člen enak 0 zaradi pogoja $\varepsilon^2 = 0$.

Definicija 4.2. Naj bo $\mathbf{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) \in \mathbb{D}\mathbb{H}$. Priredimo mu *konjugirani* dualni kvaternion *tipa I* s predpisom

$$\mathbf{Q}^* = \mathcal{Q}_1^* + \varepsilon \mathcal{Q}_2^*.$$

Definicija 4.3. Kongjugirani dualni kvaternion *tipa II* je podan s predpisom

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathcal{Q}_1^* - \varepsilon \mathcal{Q}_2^*.$$

Definicija 4.4. Norma dualnega kvaterniona \mathbf{Q} je enaka

$$\|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^*.$$

Dualne kvaternione z $\|\mathbf{Q}\| = 1$ imenujemo *enotski* dualni kvaternioni.

Trditev 4.5. Naj bo $\mathbf{Q} = \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{P}$ dualni kvaternion, kjer je $\mathcal{Q} \neq 0$. Potem je njegov inverz enak

$$\mathcal{Q}^{-1}(1 - \varepsilon\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1}).$$

Dokaz. Izračunajmo produkt $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}$. Dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} &= (\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{P})(\mathcal{Q}^{-1}(1 - \varepsilon\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1})) \\ &= (\mathcal{Q}\mathcal{Q}^{-1}(1 - \varepsilon\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1}) + \varepsilon\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1}(1 - \varepsilon\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1})) \\ &= 1 - \varepsilon\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1} + \varepsilon\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1} - \varepsilon^2(\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Podobno pokažemo, da je to tudi levi inverz. □

Ker ima podmnožica $\{\varepsilon\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \in \mathbb{H}\}$ delitelje nič, vidimo, da $\mathbb{D}\mathbb{H}$ ni obseg.

4.3. Opis gibanja togega telesa. V tem razdelku bo opisano, kako lahko s pomočjo enotskih dualnih kvaternionov zapišemo transformacijo stanj nekega togega telesa. Stanje je podano s položajem težišča glede na fiksni koordinatni sistem \mathbb{R}^3 in z orientacijo gibajočega se koordinatnega sistema \mathbb{E}^3 glede na fiksni koordinatni sistem.

Naj bo $\mathbf{Q} \in \mathbb{D}\mathbb{H}$. Zapišimo ga kot $\mathbf{Q} = \mathcal{R} + \varepsilon\mathcal{T}$, kjer \mathcal{R} predstavlja rotacijski del tj. orientacijo, \mathcal{T} pa translacijski del. Naš cilj je poiskati kakšnim zahtevam morata zadoščati kvaterniona \mathcal{R} in \mathcal{T} , da bo dualni kvaternion \mathbf{Q} podajal transformacijo stanja togega telesa. Naj bo $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ točka v \mathbb{R}^3 . Točki \mathbf{v} priredimo dualni kvaternion \mathbf{V} oblike

$$\mathbf{V} = (1, 0, 0, 0) + \varepsilon(0, v_x, v_y, v_z).$$

Pripadajočo transformacijo točke \mathbf{v} z dualnim kvaternionom \mathbf{Q} , kateri podaja transformacijo stanja togega telesa dobimo kot

$$(2) \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}\mathbf{V}\bar{\mathbf{Q}}.$$

Dobljen rezultat je ponovno dualni kvaternion, ki ga lahko razcepimo na translacijski in rotacijski del, kot bo prikazano v nadaljevanju. S tem je transformacija stanja togega telesa enolično določena.

Oglejmo si sedaj konstrukcijo gibanja. Naj bo $\mathcal{R} = \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2}$ kvaternion, ki predstavlja rotacijo za kot ϕ okoli osi \mathbf{u} . Po predpostavki je \mathcal{R} enotski kvaternion. Naš cilj je konstruirati enotski dualni kvaternion, ki bo ekvivalenten neki transformaciji iz $SE(3)$. Naj bo $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ translacijski vektor. Točka \mathbf{v} , transformirana z rotacijo R in nato translirana v smeri \mathbf{t} , je točka $R\mathbf{v}^T + \mathbf{t}$. Kompozicijo transformacij R, \mathbf{t} lahko z enostavnim zapisom predstavimo z enotskim dualnim kvaternionom. Translacijski vektor \mathbf{t} lahko vložimo v prostor kvaternionov kot $\mathcal{T} = 0 + t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k} = (0, t_1, t_2, t_3)$. Zdaj ju lahko komponiramo v naslednji dualni kvaternion

$$(3) \quad \mathbf{Q} = \mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}\mathcal{R}.$$

Če je transformacija čista rotacija, tj. kadar je $\mathbf{t} = 0$, dobimo iz formule $\mathbf{Q} = \mathcal{R}$. V primeru, da gre samo za translacijo, dobimo $\mathbf{Q} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}$.

Trditev 4.6. Dualni kvaternion $\mathbf{Q} = \mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}\mathcal{R}$, kjer je \mathcal{R} enotski kvaternion, \mathcal{T} pa čisti kvaternion, ki predstavlja translacijo, je enotski dualni kvaternion.

Dokaz. Izračunajmo normo

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* &= \left(\mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}\mathcal{R}\right) \left(\mathcal{R}^* + \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{T}\mathcal{R})^*\right) \\
&= \mathcal{R}\mathcal{R}^* + \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{R}^* + \mathcal{R}\mathcal{R}^*\mathcal{T}^*) \\
&= 1 + \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{T}^* + \mathcal{T}) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

kjer smo na zadnjem koraku upoštevali, da je \mathcal{T} čisti kvaternion in zato $\mathcal{T}^* = -\mathcal{T}$. \square

Sedaj bi želeli obratno. Za dan enotski dualni kvaternion $\mathbf{Q} = \mathcal{P} + \varepsilon\mathcal{Q}$ želimo pridobiti informacijo o rotacijskem in translacijskem delu. Vemo, da lahko enotski dualni kvaternion \mathbf{Q} po drugi strani zapišemo tudi v obliki $\mathbf{Q} = \mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}\mathcal{R}$. Če zapisa enačimo, dobimo zahtevi

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \mathcal{R}, \\
\mathcal{Q} &= \frac{1}{2}\mathcal{T}\mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Iz spodnje enačbe izračunamo $\mathcal{T} = 2\mathcal{Q}\mathcal{R}^* = 2\mathcal{Q}\mathcal{P}^*$. Da bi lahko opisali delovanje transformacije (2) na poljubno točko \mathbf{v} , vloženo kot čisti kvaternion $\mathcal{V} = (0, \mathbf{v}^T)$, jo najprej vložimo v prostor dualnih kvaternionov s predpisom $\mathcal{V} \mapsto 1 + \varepsilon\mathcal{V}$. Transformacijsko formulo (2) v bolj pregledni obliki dobimo z množenjem

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(1 + \varepsilon\mathcal{V})\overline{\mathbf{Q}} &= \left(\mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}\mathcal{R}\right) (1 + \varepsilon\mathcal{V}) \left(\mathcal{R}^* - \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{T}\mathcal{R})^*\right) \\
&= \mathcal{R}\mathcal{R}^* + \varepsilon \left(\frac{1}{2}(\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{R}^* - \mathcal{R}\mathcal{R}^*\mathcal{T}^*) + \mathcal{R}\mathcal{V}\mathcal{R}^* \right) \\
&= 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{2}(\mathcal{T} - \mathcal{T}^*) + \mathcal{R}\mathcal{V}\mathcal{R}^* \right) \\
&= 1 + \varepsilon(\mathcal{R}\mathcal{V}\mathcal{R}^* + \mathcal{T}).
\end{aligned}$$

Iz tretjega poglavja prepoznamo formulo (1), to je $\mathcal{R}\mathcal{V}\mathcal{R}^*$, ki nam predstavlja transformacijo $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}$. Iz dualnega dela lahko izločimo predpis za kompozicijo rotacije in translacije

$$\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v} + \mathbf{t}, \quad R \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3.$$

Primer 4.7. Oglejmo si primer uporabe zgornje formule. Naj bo $\mathbf{v} = (\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, točka v \mathbb{R}^3 . Priredimo ji njen čisti kvaternion $\mathcal{V} = (0, (\alpha, 0, 0)^T) = \alpha\mathbf{i} \in \mathbb{H}$. Radi bi zarotirali točko \mathbf{v} okoli osi $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ za kot $\phi = \frac{2\pi}{3}$ in nato dobljeno točko translirali v smeri vektorja $\mathbf{t} = (0, 0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Rotacijo R lahko z uporabo trditve 3.6 zapišemo z enotskim kvaternionom

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \sin \frac{\pi}{3} \\
(4) \quad &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Z uporabo rotacijske formule (1) izračunamo kvaternionski produkt

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\mathcal{V}\mathcal{R}^* &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) (\alpha\mathbf{i}) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{\alpha}{4} (-1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= \alpha\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Po rotaciji dobimo točko $(0, \alpha, 0)$ in jo nato transliramo v smeri $(0, 0, \beta)$. Končni rezultat je točka $(0, \alpha, \beta)$.

Oglejmo si še izračun z uporabo transformacijskih formul dualnih kvaternionov. Translacijo zapišemo s kvaternionom $\mathcal{T} = \beta\mathbf{k}$, pripadajoči dualni kvaternion pa kot $\mathbf{Q} = \mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}\mathcal{R}$, kjer je \mathcal{R} enak (4). Z uporabo (4) izračunamo $\mathbf{Q}(1 + \varepsilon\mathcal{V})\overline{\mathbf{Q}}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(1 + \varepsilon\mathcal{V})\overline{\mathbf{Q}} &= \mathcal{R}\mathcal{R}^* + \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{T} - \mathcal{T}^* + \mathcal{R}\mathcal{V}\mathcal{R}^*) \\ &= 1 + \varepsilon(\beta\mathbf{k} + \alpha\mathbf{j}) \\ &= (1, 0, 0, 0) + \varepsilon(0, 0, \alpha, \beta).\end{aligned}$$

S tem smo pokazali ustreznost računanja z dualnimi kvaternioni. Sliko točke \mathbf{v} s to transformacijo preberemo iz vektorskega dualnega dela, tj. $(0, \alpha, \beta)$. \diamond

Do zdaj smo vpeljali predpis za afine transformacije oblike $R\mathbf{x} + \mathbf{t}$, torej kompozitum rotacije in translacije. Kaj lahko povemo v primeru kompozituma translacije in rotacije?

Trditev 4.8. Če računamo transformacijo $\mathbf{v} \mapsto R(\mathbf{v} + \mathbf{t})$, je pripadajoči dualni kvaternion oblike

$$\mathbf{Q} = \mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{R}\mathcal{T}.$$

Dokaz. Izračunajmo, kako predpis za transformacijo deluje na točko \mathbf{v} :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(1 + \varepsilon\mathcal{V})\overline{\mathbf{Q}} &= \left(\mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{R}\mathcal{T}\right) (1 + \varepsilon\mathcal{V}) \left(\mathcal{R}^* - \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{R}\mathcal{T})^*\right) \\ &= \left(\mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{R}\mathcal{T} + \varepsilon\mathcal{R}\mathcal{V}\right) (\mathcal{R}^* - \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{T}^*\mathcal{R}^*) \\ &= \mathcal{R}\mathcal{R}^* + \varepsilon(\mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{R}^* + \mathcal{R}\mathcal{V}\mathcal{R}^*) \\ &= 1 + \varepsilon\mathcal{R}(\mathcal{V} + \mathcal{T})\mathcal{R}^*.\end{aligned}$$

Ponovno iz vektorskega dualnega dela prepoznamo predpis $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{R}(\mathcal{V} + \mathcal{T})\mathcal{R}^*$. \square

Naj bo \mathbf{v} točka v prostoru. Vložimo jo v prostor dualnih kvaternionov kot $1 + \varepsilon\mathcal{V}$. Imejmo zaporedje enotskih dualnih kvaternionov, ki podajajo transformacije stanj togega telesa. Označimo te dualne kvaternione s $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$. Prepričajmo se, da je produkt enotskih dualnih kvaternionov spet enotski dualni kvaternion. Vzemimo $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{D}\mathbb{H}_e$. Izračunamo normo

$$\|\mathbf{PQ}\| = (\mathbf{PQ})(\mathbf{PQ})^* = \mathbf{PQ}\mathbf{Q}^*\mathbf{P}^* = 1.$$

Iz tega sledi, da lahko kompozicijo transformacij zapišemo kot produkt pripadajočih dualnih kvaternionov. Točko \mathbf{v} , vloženo v prostor dualnih kvaternionov in nato

preslikano z zaporedjem transformacij $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$, lahko na enoličen način zapišemo kot

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon\mathcal{V}' &= \mathbf{Q}_n(\mathbf{Q}_{n-1} \cdots (\mathbf{Q}_n(1 + \varepsilon\mathcal{V})\overline{\mathbf{Q}_1}) \cdots \overline{\mathbf{Q}_{n-1}})\overline{\mathbf{Q}_n} \\ &= (\mathbf{Q}_n \cdots \mathbf{Q}_1)(1 + \varepsilon\mathcal{V})(\overline{\mathbf{Q}_n \cdots \mathbf{Q}_1}). \end{aligned}$$

Če označimo $\mathbf{X} = \mathbf{Q}_n \cdots \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{DH}_e$, potem lahko zgornjo transformacijo zapišemo v obliki

$$1 + \varepsilon\mathcal{V} \mapsto \mathbf{X}(1 + \varepsilon\mathcal{V})\overline{\mathbf{X}} = 1 + \varepsilon\mathcal{V}'.$$

5. KONSTRUKCIJA GIBANJA

V tem poglavju si bomo ogledali konstrukcijo gibanja togega telesa. Za dan nabor točk $T_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 0, \dots, n$ in orientacij $A_0, A_1, \dots, A_n \in \text{SO}(3)$ gibajočega se koordinatnega sistema želimo konstruirati tak par $(\gamma(t), A(t))$, $\gamma : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(t) \in \text{SO}(3)$, da je $\gamma(t_i) = T_i$, $A(t_i) = A_i$. Najprej bomo preslikavo konstruirali kot v prvem poglavju, nato pa bomo uporabili dejstvo o bijektivni korespondenci med pari antipodnih enotskih kvaternionov in grupo $\text{SO}(3)$. Na koncu si bomo ogledali še zapis te preslikave s pomočjo dualnih kvaternionov. Naš cilj bo na enostaven način zapisati krivuljo s koeficienti v prostoru dualnih kvaternionov. Za krivuljo bo moralo veljati $\mathbf{G}(t) \in \mathbb{DH}_e$ za vsak čas $t \in [t_0, t_n]$. Dobili bomo enotski dualni kvaternion, ki se bo ujemal s transformacijami iz četrtega poglavja.

Opomba 5.1. Pri konstrukciji bomo uporabili dejstvo, da vsak enotski dualni kvaternion enolično določa stanje togega telesa, tj. njegov položaj v \mathbb{R}^3 in orientacijo podano z baznimi vektorji \mathbb{E}^3 .

5.1. Potrebna orodja. Za konstrukcijo preslikave bomo potrebovali nekaj dejstev iz numeričnih metod, posebej si bomo ogledali sferično linearno interpolacijo (Slerp) in interpolacijo polinomske parametrične krivulje v \mathbb{R}^3 .

Definicija 5.2. *Lagrangeev interpolacijski polinom* stopnje $\leq n$, ki poteka skozi $n + 1$ točk (t_i, x_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, je podan s predpisom

$$P(t) = \sum_{j=0}^n P_j(t),$$

kjer je $P_j(t) = x_j \mathcal{L}_j(t)$, $\mathcal{L}_j(t) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{t - t_k}{t_j - t_k}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Polinome \mathcal{L}_j imenujemo *Lagrangeevi bazni polinomi*.

Definicija 5.3. *Polinomska krivulja* v \mathbb{R}^3 je parametrična krivulja

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

kjer so vse njene komponente polinomi v spremenljivki t .

Primer 5.4. Primer polinomske krivulje je $\gamma(t) = (4t^2 + t, t^2, 8t^3)$. \diamond

Definicija 5.5. *Stopnja* polinomske krivulje je maksimalna stopnja njenih koordinatnih funkcij.

Interpolacijski problem je sledeč. Imamo dano zaporedje točk $T_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ in zaporedje parametrov $t_i \in [0, 1]$, $i = 0, 1, \dots, n$. Želimo poiskati takšno

parametrično krivuljo $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^3$, da bo veljalo $\gamma(t_i) = (x_i, y_i, z_i) = T_i$. Iščemo torej interpolacijske polinome $x(t), y(t), z(t)$, da bo za vsak $i = 0, \dots, n$ veljalo

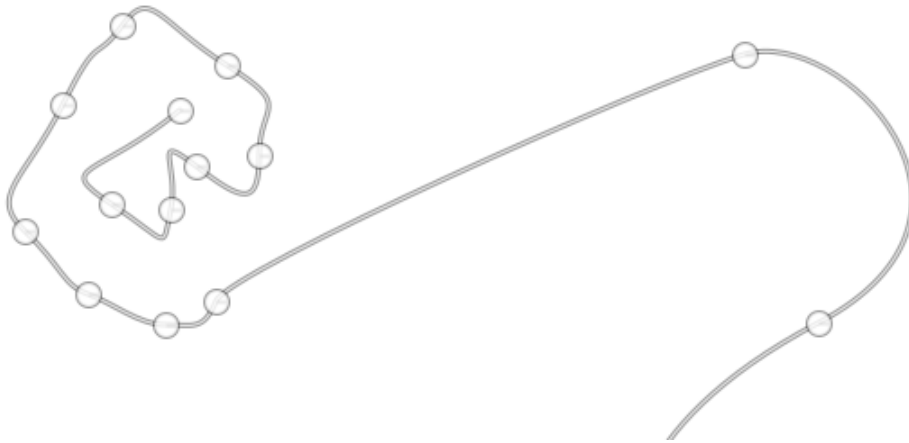
$$x(t_i) = x_i, \quad y(t_i) = y_i, \quad z(t_i) = z_i.$$

Trditev 5.6. Naj bo dano zaporedje točk (x_i, y_i, z_i) in časov t_i , $i = 0, 1, \dots, n$, ter naj velja še $|t_{i+1} - t_i| = \frac{1}{n}$ za vsak $i = 0, 1, \dots, n - 1$. V tem primeru so časi t_i izbrani ekvidistantno. Tedaj obstaja enolično določena polinomska parametrična krivulja podana s predpisom

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

kjer so $x(t), y(t), z(t)$ Lagrangeevi interpolacijski polinomi, za katere velja $x(t_i) = x_i$, $y(t_i) = y_i$, $z(t_i) = z_i$.

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz enoličnosti komponent (glej [12, izrek 10.1]). \square



SLIKA 2. Primer ravninske parametrične krivulje.

Opomba 5.7. Previdni moramo biti pri izbiri časov t_i . Premislimo, kaj se lahko zgodi pri izboru ekvidistantnih časov. Denimo, da imamo na enem delu zelo na gosto razporejene točke, na drugem delu pa zelo malo točk, kot je prikazano na sliki 2. To bi pomenilo, da bi se najprej zelo počasi gibali po krivulji, nato pa nenadoma pospešili do zadnjih točk T_i , kar pa nam seveda ni všeč, če želimo imeti vsaj približno enakomerno gibanje. Težavam se lahko izognemo s primerno izbranimi razdaljami med parametri ali z reparametrizacijo krivulje z naravnim parametrom.

Konstruirali smo učinkovit način zapisa translacijskega dela gibanja. Pri konkretnem problemu bomo vedno lahko predpostavili, da imamo dano zaporedje točk v \mathbb{R}^3 . V vseh naslednjih konstrukcijah krivulje gibanja bomo translacijsko krivuljo konstruirali po zgornjem postopku.

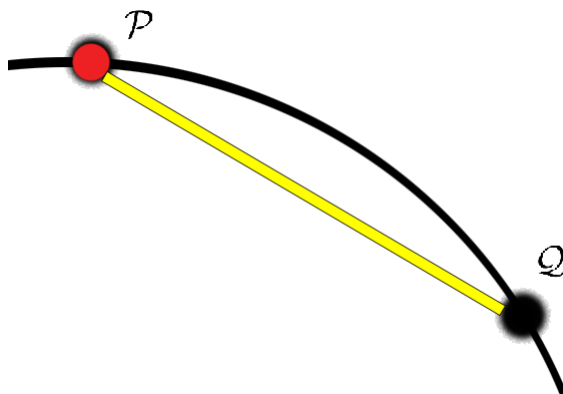
Sedaj bi se radi lotili rotacijskega dela gibanja. Spomnimo se, da lahko rotacijo v prostoru opišemo s pomočjo matrik iz $SO(3)$ ali z enotskimi kvaternioni. V tretjem poglavju smo videli, da sta ta dva zapisa ekvivalentna in da lahko enotskemu kvaternionu z uporabo Eulerjevih parametrov na enostaven način priredimo matriko in obratno. Izkoristimo to dejstvo in se iz zapletenih zapisov z matrikami preselimo v

prostor enotskih kvaternionov.

Geometrijsko gledano enotski kvaternioni ležijo na enotski sferi $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Recimo, da imamo neko krivuljo na \mathbb{S}^3 , ki leži v celoti na eni izmed hemisfer. Kaj nam ta krivulja predstavlja geometrijsko? Nanjo lahko po eni strani gledamo kot na krivuljo na \mathbb{S}^3 , po drugi strani pa kot na krivuljo v prostoru enotskih kvaternionov. Velja torej naslednje. Če bomo uspeli konstruirati najkrajšo možno pot med dvema točkama na \mathbb{S}^3 , bo pripadajoča krivulja podajala tudi pot v prostoru enotskih kvaternionov, ki bo v krajiščih ustrezala začetnemu in končnemu stanju naše predpisane rotacije. Najkrajša pot pa nam bo zagotavljala, da se bo rotacijski del gibanja obnašal naravno brez nepotrebnih zasukov. Prvi naiven poskus bi bil, da bi poskusili dva enotska kvaterniona \mathcal{Q}, \mathcal{P} povezati z linearno potjo.

Definicija 5.8 (Linearna interpolacija). Naj bosta $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$. Linearno pot med kvaternionoma označimo z

$$\text{Lerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) = \mathcal{Q}t + (1 - t)\mathcal{P}.$$



SLIKA 3. Primer linearne poti med dvema enotskima kvaternionoma.

Hitro se izkaže, da ta definicija ni dobra. Iz slike 3 vidimo, da ta pot zaide pod površino sfere. Posledično za vmesne čase t nimamo enotskih kvaternionov, kar pomeni, da nam vmesni predpisi ne podajajo rotacij. Potrebujemo močnejše orodje, ki nam bo zagotavljalo, da bo krivulja med kvaternionoma v celoti ležala na enotski sferi. Želimo pa še več. Ugodno bi bilo, da bi naša krivulja bila tudi geodetska krivulja na sferi. To bi pomenilo, da bi pripadajoča rotacija zares ustrezala našim željam in ne bi imeli nepotrebnih zasukov. Naslednja možna alternativa je, da bi sproti zagotavljali, da naši kvaternioni vedno ležijo na \mathbb{S}^3 . To pomeni, da bi predpis za Lerp sproti normalizirali in tako zagotovili, da bi res za vsak čas t dobili rotacijo.

Definicija 5.9 (Normalizirana linearna interpolacija). Naj bosta $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$. Potem krivuljo na enotski sferi med tema dvema kvaternionoma označimo z

$$\text{NLerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) = \frac{\text{Lerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)}{\|\text{Lerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)\|}.$$

Opomba 5.10. Uporaba NLerp je dobra za zelo majhne razdalje med kvaternionoma. Velika razdalja bi namreč pri normalizaciji povzročila velik pospešek v vmesnih kvaternionih kateri bodo najbližje izhodišču, posledično hitrost rotacije ne bi bila konstantna, kar bi pomenilo, da bi naša rotacija bila zelo nenaravna. Če

vzamemo dva bližnja kvaterniona, se NLERP izkaže kot učinkovita metoda za interpolacijo. Težave lahko nastopijo zaradi računanja norme.

5.2. Sferična linearna interpolacija (Slerp). Potrebujemo še nekoliko bolj učinkovito metodo, kjer bomo brez sprotne normalizacije dosegli, da bo naša krivulja ves čas ležala na enotski sferi. Za konstrukcijo naslednje metode bomo potrebovali nekaj elementarnih dejstev iz diferencialne geometrije in kvaternionijske analize. Dokaze o trditvah iz diferencialne geometrije lahko bralec najde v [5].

Definicija 5.11. Naj bo $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$. Zapišimo ga v obliki $\mathcal{Q} = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \mathbf{u} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)$. Funkcija $\log : \mathbb{H}_e \rightarrow \mathbb{H}$ je definirana s predpisom

$$\log \mathcal{Q} = \left(0, \mathbf{u} \frac{\phi}{2} \right).$$

Opomba 5.12. Iz definicije sledi, da je $\log(1, \mathbf{0}) = (0, \mathbf{0})$, v splošnem torej $\log \mathcal{Q} \notin \mathbb{H}_e$.

Definicija 5.13. Naj bo $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}$, $\mathcal{Q} = (0, \mathbf{u} \frac{\phi}{2})$. Funkcija $\exp : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_e$ je definirana s predpisom

$$\exp \mathcal{Q} = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \mathbf{u} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right).$$

Definicija 5.14. Naj bo $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$, $t \in \mathbb{R}$. Eksponent \mathcal{Q}^t je definiran kot

$$\mathcal{Q}^t = \exp(t \log \mathcal{Q}).$$

Opomba 5.15. Vsa pravila za potenciranje in logaritmiranje iz realnega primera se naravno prevedejo tudi na računanje s kvaternioni, funkciji \log in \exp sta si inverzni, funkcija \exp slika v množico \mathbb{H}_e (glej [1, poglavje 3.3.5]). Previdni moramo biti le pri pravilih, kjer uporabimo komutativnost. Tako na primer v \mathbb{H} v splošnem ne velja $(\mathcal{P}\mathcal{Q})^n = \mathcal{P}^n \mathcal{Q}^n$.

Trditev 5.16. Naj bo $\mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$, $\mathcal{Q} = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \mathbf{v} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)$, $t \in \mathbb{R}$. Potem je

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{Q}^t = \mathcal{Q}^t \log \mathcal{Q}.$$

Dokaz. Enakost bomo dokazali s primerjanjem leve in desne strani. Na levi strani imamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{Q}^t &= \frac{d}{dt} \exp(t \log \mathcal{Q}) = \frac{d}{dt} \exp\left(t \left(0, \mathbf{v} \frac{\phi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\cos\left(\frac{t\phi}{2}\right), \mathbf{v} \sin\left(\frac{t\phi}{2}\right) \right) = \frac{\phi}{2} \left(-\sin\left(\frac{t\phi}{2}\right), \mathbf{v} \cos\left(\frac{t\phi}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Po drugi strani pa imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^t \log(\mathcal{Q}) &= \exp(t \log \mathcal{Q}) \log \mathcal{Q} = \left(\cos\left(\frac{t\phi}{2}\right), \mathbf{v} \sin\left(\frac{t\phi}{2}\right) \right) \left(0, \mathbf{v} \frac{\phi}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{\phi}{2} \sin\left(\frac{t\phi}{2}\right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \frac{\phi}{2} \cos\left(\frac{t\phi}{2}\right) \mathbf{v} + \frac{\phi}{2} \sin\left(\frac{t\phi}{2}\right) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \right) \\ &= \frac{\phi}{2} \left(-\sin\left(\frac{t\phi}{2}\right), \cos\left(\frac{t\phi}{2}\right) \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

Leva in desna stran se ujemata, trditev je s tem dokazana. \square

Opomba 5.17. Tudi pravila za odvajanje se do komutativnosti naravno prenesejo iz realnega primera (glej [1, poglavje 3.3.8]). Posebej omenimo pravilo za odvajanje kompozituma funkcij, ki ga bomo uporabili v eni od naslednjih trditvev.

Lema 5.18. Naj bo $\mathcal{P} = (s, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}$, $\mathcal{Q}_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $\mathcal{Q}_2 = (s_2, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{H}_e$. Potem je

$$\langle (\mathcal{P}\mathcal{Q}_1), (\mathcal{P}\mathcal{Q}_2) \rangle = \|\mathcal{P}\|^2 \langle \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \rangle.$$

Dokaz. Navedli bomo le skico izračuna, celoten račun si lahko bralec ogleda v [1, lema 3]. Zapišimo kvaterniona po komponentah in izračunajmo

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}\mathcal{Q}_1, \mathcal{P}\mathcal{Q}_2 \rangle &= \langle (ss_1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1, s\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}_1), (ss_2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2, s\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) \rangle \\ &= s^2 s_1 s_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2) \\ &\quad + s_1 s_2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + s_1 ((\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2) + (s\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \|\mathcal{P}\|^2 \langle \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \rangle + s\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + s\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \\ &= \|\mathcal{P}\|^2 \langle \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Definicija 5.19. Naj bo X gladka podmnogoterost v nekem evklidskem prostoru. Krivulja $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ na mnogoterosti X je *geodetska krivulja* med točkama $\gamma(a) = A \in X$ in $\gamma(b) = B \in X$, če za vsako krivuljo $\delta : [a, b] \rightarrow X$ velja

$$\mathcal{L}(\gamma) < \mathcal{L}(\delta),$$

kjer smo z $\mathcal{L}(\gamma)$ označili dolžino krivulje. To pomeni, da je γ najkrajša krivulja med točkama A in B na mnogoterosti X .

Definicija 5.20. *Normalni presek* sfere \mathbb{S}^3 z ravnino \mathbb{P} skozi izhodišče je krožnica $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^3$.

Naš cilj je zdaj poiskati predpis za geodetsko krivuljo med enotskima kvaternionoma na sferi. Dobljeno krivuljo bomo imenovali *Slerp*. Brez dokaza navedimo naslednjo formulo za Slerp na sferi \mathbb{S}^3 .

Trditev 5.21 ([1, trditev 27]). Naj bosta $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$. Krivuljo Slerp na sferi \mathbb{S}^3 lahko zapišemo kot

$$\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^t.$$

Opomba 5.22. Iz simetrije enačbe opazimo, da je

$$\begin{aligned} \text{Slerp}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}; t) &= \mathcal{Q}(\mathcal{Q}^* \mathcal{P})^t, \\ \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; 1-t) &= \mathcal{P}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^{1-t} = \mathcal{P}\mathcal{P}^* \mathcal{Q}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^{-t} = \mathcal{Q}(\mathcal{Q}^* \mathcal{P})^t, \end{aligned}$$

in zato $\text{Slerp}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}; t) = \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; 1-t)$.

Trditev 5.23 ([1, trditev 28]). Naj bo $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^3$ krivulja na sferi $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Potem je γ vsebovana v normalnem preseku sfere \mathbb{S}^3 z ravnino skozi izhodišče $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^4$ natanko tedaj, ko je

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) = C\gamma(t), \quad C < 0 \in \mathbb{R}.$$

Trditev 5.24 ([1, trditev 28]). Najkrajša krivulja med dvema točkama vsebovana v normalnem preseku sfere $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ z ravnino skozi izhodišče je geodetska krivulja.

Trditev 5.25. Krivulja $\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; \cdot) : \mathbb{H}_e \times \mathbb{H}_e \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}_e$ je vsebovana v normalnem preseku sfere \mathbb{S}^3 z ravnino $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^4$ skozi izhodišče med točkama \mathcal{P} in \mathcal{Q} . Velja še

$$\left\| \frac{d}{dt} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) \right\| = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Pokazati moramo, da velja

$$\begin{aligned} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; 0) &= \mathcal{P}, \quad \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; 1) = \mathcal{Q}, \\ \|\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)\| &= 1, \quad t \in [0, 1], \\ \frac{d^2}{dt^2} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) &= C \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t), \quad C < 0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Prvi dve enakosti sledita iz definicij funkcij \exp, \log . Preverimo le za $t = 0$:

$$\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; 0) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^0 = \mathcal{P} \exp((0, \mathbf{0})) = \mathcal{P}(1, \mathbf{0}) = \mathcal{P}.$$

Oglejmo si normo krivulje $\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)$. Ker je norma produkta, produkt norm (za dokaz glej [1, trditev 9]) dobimo:

$$(6) \quad \|\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)\| = \|\mathcal{P}\| \cdot \|(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^t\| = 1 \|\exp(t \log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q}))\| = 1.$$

Izračunamo prvi odvod. Z uporabo (5) dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) &= \frac{d}{dt} \mathcal{P}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^t \\ &= \mathcal{P}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^t \log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q}) \\ &= \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) \log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q}), \end{aligned}$$

Dokažimo $\left\| \frac{d}{dt} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) \right\| = c$, $c \in \mathbb{R}$. Z upoštevanjem (6) dobimo

$$\left\| \frac{d}{dt} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) \right\| = \|\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) \log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})\| = \|\log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})\| = c,$$

kjer smo upoštevali, da je $\|\log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})\|$ neodvisna od parametra t . Izračunati moramo še drugi odvod. Z uporabo (5) dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) &= \mathcal{P}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^t (\log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q}))^2 \\ &= \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) (\log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q}))^2. \end{aligned}$$

Da bo krivulja res geodetska, moramo po trditvi 5.23 pokazati, da je $\log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^2$ negativno število. Ker sta $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$, je potem tudi njun produkt $\mathcal{P}^* \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$. Za enotski kvaternion vemo, da obstaja tak $\phi \in [0, 2\pi)$ in tak enotski vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, da ga lahko zapišemo kot $\mathcal{P}^* \mathcal{Q} = (\cos(\frac{\phi}{2}), \mathbf{v} \sin(\frac{\phi}{2}))$. Potem je

$$(\log(\mathcal{P}^* \mathcal{Q}))^2 = \left(0, \mathbf{v} \frac{\phi}{2}\right)^2 = \left(-\frac{\phi^2}{4}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \frac{\phi^2}{4}(\mathbf{v} \times \mathbf{v})\right) = \left(-\frac{\phi^2}{4}, 0\right),$$

in zato

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) = C \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t),$$

kjer je $C = -\frac{\phi^2}{4} < 0$. □

Pokazali smo, da je krivulja Slerp del normalnega preseka sfere z ravnino skozi izhodišče. Slerp bo tudi geodetska krivulja, če bomo pokazali, da je tudi najkrajša izmed dveh možnih krivulj normalnega preseka.

Opomba 5.26. Naj bosta $\mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{H}_e$. Kot ϕ med enotskima kvaternionoma definiramo kot

$$\langle \mathcal{Q}, \mathcal{P} \rangle = \cos \phi.$$

Trditev 5.27. Naj bosta $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$. Potem je $\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)$, $t \in [0, 1]$, najkrajša pot na normalnem preseku med kvaternionoma \mathcal{P}, \mathcal{Q} na \mathbb{S}^3 .

Dokaz. Vzemimo razpolovišče našega loka. Ta točka bo $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}} = \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; \frac{1}{2})$. Naj bo α kot med kvaternionoma \mathcal{P} in $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}$. Zagotovo bomo na najkrajši poti, če bo $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kar je ekvivalentno zahtevi $\cos(\alpha) \in [0, 1]$. Obravnavajmo predznak $\cos(\alpha)$. Zapišimo $\mathcal{P} = (p, \mathbf{p})$, $\mathcal{Q} = (q, \mathbf{q})$. Dobimo

$$\cos(\alpha) = \langle \mathcal{P}, \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; \frac{1}{2}) \rangle = \langle \mathcal{P}, \mathcal{P}(\mathcal{P}^* \mathcal{Q})^{\frac{1}{2}} \rangle.$$

Ker sta $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$, je potem tudi $\mathcal{P}^* \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$. Za ta primer, kjer smo se zaradi smiselnosti definicije krivulje $\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)$ omejili samo na desno hemisfero, bomo produkt zapisali v obliki $\mathcal{P}^* \mathcal{Q} = (\cos(\psi), \mathbf{u} \sin(\psi))$ za neki $\psi \in (-\pi, \pi)$ in neki enotski vektor \mathbf{u} . Vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \langle \mathcal{P}, (\mathcal{P}(\cos(\psi), \mathbf{u} \sin(\psi)))^{\frac{1}{2}} \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{P}, \mathcal{P} \exp\left(\frac{1}{2} \log(\cos \psi, \sin(\psi) \mathbf{u})\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{P}, \mathcal{P}\left(\cos\left(\frac{\psi}{2}\right), \mathbf{u} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{P}(1, \mathbf{0}), \mathcal{P}\left(\cos\left(\frac{\psi}{2}\right), \mathbf{u} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) \right\rangle \\ &= \|\mathcal{P}\|^2 \left\langle (1, \mathbf{0}), \left(\cos\left(\frac{\psi}{2}\right), \mathbf{u} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) \right\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\psi}{2}\right). \end{aligned}$$

Ker je $\psi \in (-\pi, \pi)$, je $\cos(\frac{\psi}{2}) > 0$ in zato $\cos(\alpha) > 0$. □

Oglejmo si geometrijsko konstrukcijo. Videli bomo, da je formula za Slerp neodvisna od dimenzije in lahko podoben razmislek uporabimo za geodetske krivulje na sferi poljubne dimenzije. V našem primeru se postavimo na sfero \mathbb{S}^3 . Preseki z ravninami skozi izhodišče nam bodo vedno dali ravninsko sliko, kot prikazuje slika 4.

Trditev 5.28. *Naj bosta $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{H}_e$ in naj bo $t \in [0, 1]$. Označimo $\cos(\phi) = \langle \mathcal{P}, \mathcal{Q} \rangle$. Potem velja naslednja formula*

$$\text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t) = \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathcal{P} + \frac{\sin(t\phi)}{\sin(\phi)} \mathcal{Q}.$$

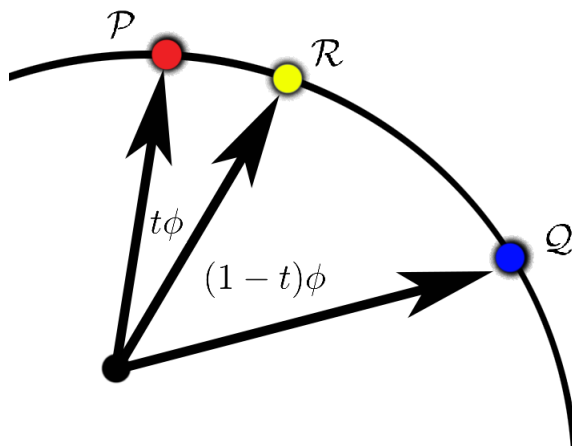
Dokaz. Oglejmo si sliko 4. Vsak vmesni kvaternion \mathcal{R} med kvaternionoma \mathcal{P} in \mathcal{Q} lahko zapišemo kot linearno kombinacijo teh dveh, torej

$$\mathcal{R}(t) = \alpha(t)\mathcal{P} + \beta(t)\mathcal{Q}.$$

Zahtevati moramo, da bo $\mathcal{R}(0) = \alpha(0)\mathcal{P} + \beta(0)\mathcal{Q} = \mathcal{P}$, od koder sledi $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$. Podobno iz $\mathcal{R}(1) = \alpha(1)\mathcal{P} + \beta(1)\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$ dobimo $\alpha(1) = 0$, $\beta(1) = 1$. Uporabimo skalarni produkt na kvaternionu $\mathcal{R}(t)$. Dobimo

$$(7) \quad \langle \mathcal{R}(t), \mathcal{P} \rangle = \cos(t\phi) = \alpha(t)\langle \mathcal{P}, \mathcal{P} \rangle + \beta(t)\langle \mathcal{P}, \mathcal{Q} \rangle = \alpha(t) + \beta(t) \cos(\phi),$$

$$(8) \quad \langle \mathcal{R}(t), \mathcal{Q} \rangle = \cos((1-t)\phi) = \alpha(t)\langle \mathcal{P}, \mathcal{Q} \rangle + \beta(t)\langle \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \rangle = \alpha(t) \cos(\phi) + \beta(t).$$



SLIKA 4. Presek \mathbb{S}^3 z ravnino skozi izhodišče.

Imamo dve enačbi z dvema neznankama. Poskusimo rešiti sistem in ga preoblikovati do formule v trditvi. Najprej iz enačbe (7) izrazimo $\alpha(t) = \cos(t\phi) - \beta(t) \cos(\phi)$. Vstavimo v enačbo (8) in dobimo

$$\begin{aligned} \cos(t\phi) \cos(\phi) - \beta(t) \cos^2(\phi) + \beta(t) &= \cos((1-t)\phi) \\ \beta(t)(1 - \cos^2(\phi)) &= \cos((1-t)\phi) - \cos(t\phi) \cos(\phi). \end{aligned}$$

Uporabimo adicijski izrek za funkcijo $\cos(\phi)$. Sledi

$$\beta(t) \sin^2(\phi) = \cos(\phi) \cos(t\phi) + \sin(\phi) \sin(t\phi) - \cos(t\phi) \cos(\phi).$$

Iz tega dobimo predpis za $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \frac{\sin(t\phi)}{\sin(\phi)}.$$

Vstavimo predpis za $\beta(t)$ v $\alpha(t)$ in dobimo

$$\alpha(t) = \cos(t\phi) - \frac{\sin(t\phi) \cos(\phi)}{\sin(\phi)}.$$

Pomnožimo s $\sin(\phi)$. Sledi da je

$$\alpha(t) \sin(\phi) = \cos(t\phi) \sin(\phi) - \sin(t\phi) \cos(\phi).$$

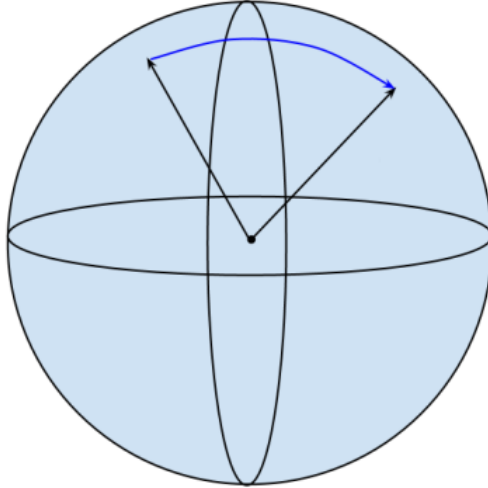
Torej je $\alpha(t) = \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin(\phi)}$. Trditev torej res velja. \square

5.3. Krivulja gibanja. Pripravili smo si vsa potrebna sredstva za konstrukcijo krivulje gibanja. Če združimo zgornji trditvi o konstrukciji translacijskega in rotacijskega dela, lahko zapišemo preslikavo $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}_e$, podano s predpisom

$$\psi(t) = (\gamma(t), \text{Slerp}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t)).$$

Radi pa bi poiskali tako preslikavo $\mathbf{G} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}\mathbb{H}_e$, ki bo podajala enako gibanje togega telesa kakor preslikava ψ .

Spomnimo se trditve 4.6, da nam enotski dualni kvaternion \mathbf{Q} podaja transformacijo stanja togega telesa. Vemo, da je tedaj ta dualni kvaternion oblike $\mathbf{Q} = \mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{T}\mathcal{R}$. Naš cilj je poiskati tako preslikavo $\mathbf{G}(t)$, ki nam bo za vsak čas t podajala enotski dualni kvaternion in posledično stanje togega telesa.



SLIKA 5. Slerp na sferi.

Oglejmo si to bolj natančno. Imamo dano zaporedje točk v prostoru in zaporedje enotskih kvaternionov kakor v prvem razdelku tega poglavja. Naj bo $\mathcal{T}_i = (0, T_i)$, i -ti translacijski vektor vloženi v \mathbb{H} in \mathcal{Q}_i i -ta rotacija predpisanega gibanja zapisana kot enotski kvaternion. Izberimo si ekvidistantne čase $t_i = \frac{i}{n}$. Želimo, da bo veljalo

$$\mathbf{G}(t_i) = \mathcal{Q}_i + \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{T}_i \mathcal{Q}_i \in \mathbb{DH}_e, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Iz predpisa preslikave \mathbf{G} vidimo, da je sestavljena iz preslikav \mathcal{T}, \mathcal{Q} . Kako bi se lotili konstrukcije \mathcal{T} ? Na \mathcal{T} lahko gledamo kot na prostorsko krivuljo, vloženo v prostor kvaternionov s preslikavo $\gamma(t) \mapsto (0, \gamma(t))$, kjer je $\gamma(t)$ interpolacijska krivulja v \mathbb{R}^3 , ki ustreza danemu zaporedju točk. Od tod ideja, da najprej s pomočjo trditve 5.6 o konstrukciji polinomskih prostorskih parametričnih krivulj skonstruiramo γ , jo vložimo v \mathbb{H} in jo nato skomponiramo s \mathcal{Q} . Ostane nam še konstrukcija \mathcal{Q} . Tukaj se bomo odločili za nekoliko neučinkovito metodo, ampak jo zaradi enostavnosti vseeno omenimo.

Slerp smo do zdaj uporabljali, kadar smo imeli podano začetno in končno rotacijo. Najbolj intuitivno bi bilo, da bi zlepili vse krivulje $\text{Slerp}(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_{i+1}; t)$. S tako konstrukcijo dobimo zaporedje krivulj

$$\text{Slerp}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2; t), \dots, \text{Slerp}(\mathcal{Q}_{i-1}, \mathcal{Q}_i; t), \dots, \text{Slerp}(\mathcal{Q}_{n-1}, \mathcal{Q}_n; t).$$

Opomba 5.29. Ta konstrukcija seveda ni optimalna. Ker smo lepili linearne poti na sferi, nastopijo težave z odvedljivostjo v krajiščih vsake od krivulj. Poleg tega hitrostni vektor ne bo zvezen glede na celotno zaporedje, ampak se bo nezvezno spreminjal ob prehodu z ene krivulje na drugo.

5.4. ScLerp. V tem razdelku si bomo ogledali, kako bi lahko direktno poiskali krivuljo \mathbf{G} z interpolacijo v prostoru dualnih kvaternionov. Do zdaj smo interpolacijo posebej ločili za translacijski in rotacijski del. Ker nam enotski dualni kvaternion podaja enolično določeno stanje togega telesa, je naravno vprašanje, ali ne bi bilo bolje interpolirati v prostoru enotskih dualnih kvaternionov in se s tem izogniti interpolaciji s krivuljama v dveh različnih prostorih. S pomočjo formule (3) lahko paru $(\mathcal{R}, \mathbf{t})$, $\mathcal{R} \in \mathbb{H}_e$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ priredimo enotski dualni kvaternion, ki opisuje to stanje. Če

označimo $\mathcal{T} = (0, \mathbf{t})$, lahko enotski dualni kvaternion, ki pripada \mathcal{R} in \mathbf{t} , zapišemo kot

$$\mathbf{Q} = \mathcal{R} + \frac{\varepsilon}{2}((0, \mathbf{t})\mathcal{R}) \in \mathbb{DH}_e.$$

Na tak način tvorimo zaporedje enotskih dualnih kvaternionov $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$. Problem smo uspeli prevesti na iskanje interpolacijske krivulje v prostoru enotskih dualnih kvaternionov, ki poteka skozi danih n enotskih dualnih kvaternionov. Predstavili bomo posplošitev metode Slerp v prostoru \mathbb{DH}_e .

Opomba 5.30. V tem poglavju smo si ogledali več različnih metod za interpolacijo rotacijskega dela. Pokazali smo, da Lerp nikakor ni uporabna za konstrukcijo rotacijskega dela. Vsak vmesni kvaternion bo ležal pod površino sfere in posledično ne bo enotski. Po drugi strani je seveda Slerp($\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t$) zaradi svojih lastnosti najboljša, a tudi računsko zelo zahtevna metoda. Na vsakem koraku moramo namreč evaluirati funkciji sin in cos, kar je zaradi potrebe po zelo natančnih izračunih zahtevno. Slabi računski približki nam lahko povzročijo velika odstopanja od zelenih vmesnih enotskih kvaternionov. Nlerp($\mathcal{P}, \mathcal{Q}; t$) se izkaže za zelo učinkovito metodo, če sta si kvaterniona zelo blizu, to pomeni da je norma $\|\mathcal{P} - \mathcal{Q}\|$ majhna. V tem primeru bi lahko z lepljenjem krivulj Nlerp dobili tudi bolj zapletena gibanja, analogno kot pri konstrukciji z uporabo Slerp. V vseh naših primerih smo se omejili na linearne poti, posledično bomo vedno imeli singularnosti v krajiščih in zato noben naš zlepek ne bo razreda \mathcal{C}^1 .

Definicija 5.31. Naj bo $(\gamma(t), R(t))$ par translacijske krivulje in rotacijske matrike. *Krivuljo gibanja* $\mathbf{G}(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{DH}_e$ v prostoru enotskih dualnih kvaternionov definiramo kot

$$\mathbf{G}(t) := \tau(R(t)) + \frac{\varepsilon}{2}((0, \gamma(t))\tau(R(t))),$$

kjer smo z $\tau(R(t))$ označili enotski kvaternion, ki ustreza rotacijski matriki $R(t)$.

Pri konstrukciji preslikave, ki jo bomo imenovali Sclerp, potrebujemo še nekaj dejstev iz algebre dualnih kvaternionov, katerih ne bomo dokazali. Dodajmo le, da se večina trditev iz kvaternionov naravno prenese na prostor dualnih kvaternionov. Dokaze najde bralec v [2] in [9].

Trditev 5.32 ([2, poglavje 4]). *Vsak $\mathbf{Q} \in \mathbb{DH}_e$ lahko zapišemo kot*

$$\mathbf{Q} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathbf{U} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

kjer je $\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1$, $\phi_0, \phi_1 \in [-\pi, \pi)$, $\mathbf{U} = (0, \mathbf{u}_0) + \varepsilon(0, \mathbf{u}_1)$, $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{u}_1\| = 1$.

Oglejmo si geometrijsko interpretacijo zgornje formule. Kot $\frac{\phi_0}{2}$ podaja kot rotacije, enotski vektor \mathbf{u}_0 pa os rotacije. Dualni kot $\frac{\phi_1}{2}$ podaja skalarno količino translacije po osi \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 pa je *moment* osi \mathbf{u}_0 . Moment nam pove položaj rotacijske osi v globalnem koordinatnem sistemu.

Definicija 5.33. Funkcija exp v prostoru enotskih dualnih kvaternionov je definirana kot

$$\mathbf{Q}^t = \exp(t \log \mathbf{Q}) = \cos\left(\frac{t\phi}{2}\right) + \mathbf{U} \sin\left(\frac{t\phi}{2}\right).$$

Tudi za dualne kvaternionne velja, da antipodne točke predstavljajo isto transformacijo togega telesa.

Opomba 5.34. Če \mathbf{Q}_0 in $-\mathbf{Q}_0$ predstavljata isto rotacijo, potenci $(\mathbf{Q}_0)^t, (-\mathbf{Q}_0)^t$ obrneta orientacijo, zato bo le ena izmed krivulj najkrajša.

Zdaj bi želeli posplošiti Slerp na interpolacijo v prostoru dualnih kvaternionov.

Trditev 5.35 ([9, trditev 41]). *Naj bosta $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{DH}_e$. Potem je najkrajša pot med dualnima kvaternionoma \mathbf{P}, \mathbf{Q} podana kot*

$$\text{ScLerp}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}; t) = \mathbf{P}(\mathbf{P}^*\mathbf{Q})^t.$$

Opomba 5.36. Geometrijska interpretacija zgornje formule je sledeča. Za vsak $t \in [0, 1]$ dobimo enotski dualni kvaternion, ki nam podaja stanje togega telesa. Potenco dualnega kvaterniona lahko zapišemo kot

$$(\mathbf{P}^*\mathbf{Q})^t = \cos\left(\frac{t\phi}{2}\right) + \mathbf{N} \sin\left(\frac{t\phi}{2}\right).$$

Dualni vektor \mathbf{N} predstavlja os v prostoru, ki ne poteka nujno skozi izhodišče \mathbb{R}^3 . Vidimo, da je os transformacije neodvisna od t in je zato konstanta v transformaciji. Dualni kot $t\frac{\phi}{2} = t\frac{\phi_0}{2} + \varepsilon t\frac{\phi_1}{2}$ podaja informacijo o osi rotacije in o količini translacije v smeri vektorskega dela dualnega vektorja $\mathbf{N} = \mathbf{n}_0 + \varepsilon\mathbf{n}_1$. Vse trditve, ki smo jih navedli o Slerp, veljajo tudi za ScLerp.

Tudi tukaj v splošnem velja, da uporaba ScLerp ni priporočena, če imamo bolj zapletena gibanja, kajti spet bi lepili linearne poti na sferi, kar bi povzročilo težave v krajiščih vsakega dela poti. A za preprosta gibanja, kjer uporabimo le začetno in končno stanje, se metoda ScLerp izkaže za učinkovito, saj nam ni treba posebej konstruirati translacijskega in rotacijskega gibanja. Težavo nam lahko predstavlja le sprotno transformiranje točk in rotacij $(\mathbf{t}, \mathcal{R}) \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{t}, \mathcal{R}) \in \mathbb{DH}_e$, ki pa se ji lahko izognemo s primerno implementacijo dualnih kvaternionov v računalniški sistem.

Za zaključek si oglejmo naslednji diagram, ki prikazuje korespondence med različnimi reprezentacijami stanj togega telesa.

$$\begin{array}{ccc} (\text{Transl. krivulja } \gamma(t), \text{ Matrika } A(t) \in \text{SO}(3)) & \xrightarrow{\phi} & ((0, \gamma(t)) \in \mathbb{H}, \text{ Slerp}) \\ \chi \downarrow & \nearrow \psi & \downarrow \Psi \\ \text{krivulja v } \mathbb{DH} & \xrightarrow{\Phi} & \text{krivulja v } \text{SE}(3) \end{array}$$

Pri tem so posamezne preslikave podane s predpisi

$$\chi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}([0, 1], \text{SO}(3)) \rightarrow \mathbb{DH},$$

$$\chi(\gamma, A)(t) = \mathcal{A}(t) + \frac{\varepsilon}{2}((0, \gamma(t))\mathcal{A}(t)),$$

$$\Phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{DH}_e) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \text{SE}(3)), \text{ izomorfizem (9) (glej poglavje 6.2),}$$

$$\phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}([0, 1], \text{SO}(3)) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H}_e),$$

$$\phi(\gamma, A)(t) = (\gamma, \mathcal{A})(t),$$

$$\psi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{DH}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H}_e), \text{ predpis (2),}$$

$$\Psi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H}_e) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \text{SE}(3)).$$

Zaradi lažje geometrijske predstave bo osnoven gradnik togega gibanja vedno dvojec

$$\begin{aligned} \text{Translacijski del } \gamma &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \text{Rotacijski del } R &: [0, 1] \rightarrow \text{SO}(3). \end{aligned}$$

Osnovna krivulja gibanja bo potem preslikava $t \mapsto (\gamma(t), R(t))$. Iz drugega poglavja vemo, da jo lahko zapišemo s homogeno matriko $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Alternativen zapis dobimo s transformacijo v prostor dualnih kvaternionov z uporabo preslikave χ . Tako pridemo do bijektivne korespondence med homogenimi 4×4 matrikami z elementi odvisnimi od časa in parametričnimi krivuljami v prostoru enotskih dualnih kvaternionov.

6. FAKTORIZACIJA POLINOMOV GIBANJA

V tem poglavju bomo spoznali poseben razred polinomov nad prostorom dualnih kvaternionov, ki parametrizirajo gibanje togega telesa. Večinoma bomo v tem poglavju sledili člankom [4, 11, 10]. Izkoristili bomo dejstvo, da je kvocientni prostor enotskih dualnih kvaternionov \mathbb{DH}_e izomorfen mnogoterosti $SE(3)$. Krivuljo na tej mnogoterosti lahko identificiramo s krivuljo v prostoru \mathbb{DH}_e . Gibanje bi radi opisali s polinomsko krivuljo generirano s polinomom $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$. Ukvarjali se bomo predvsem z razcepi takih polinomov. Razcep polinoma

$$\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n)$$

za nek fiksen $t \in \mathbb{R}$ nam poda način, kako lahko zapleteno transformacijo iz $SE(3)$ zapišemo kot kompozitum rotacij in translacij. Za vsak t bomo dobili enotski dualni kvaternion in s tem bomo določili stanje togega telesa. Enotski dualni kvaternion lahko identificiramo z neko transformacijo v $SE(3)$.

6.1. Uvodne definicije.

Definicija 6.1. Polinom s koeficienti v prostoru dualnih kvaternionov je oblike

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}_i t^i,$$

kjer so $\mathbf{A}_i \in \mathbb{DH}$.

Opomba 6.2. Zaradi nekomutativnosti dualnih kvaternionov se bomo držali načela, da spremenljivka t komutira z levimi in desnimi koeficienti polinoma $\mathbf{P}(t)$.

Definicija 6.3. *Konjugirani polinom* polinoma $\mathbf{P}(t)$ je podan s predpisom

$$\mathbf{P}^*(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}_i^* t^i.$$

Definicija 6.4. Naj bo $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$. *N-polinom* polinoma \mathbf{P} je podan s predpisom

$$\|\mathbf{P}(t)\| = (\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(t).$$

Hitro se lahko prepričamo, da je N-polinom spet polinom s koeficienti v \mathbb{D} .

Spomnimo se sedaj množice $\mathbb{DH}_e = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{DH}, \|\mathbf{Q}\| = 1\}$. Privzeli smo dejstvo, da obstaja izomorfizem med grupo togih transformacij $SE(3)$ in kvocientno množico \mathbb{DH}_e/\sim po relaciji $\mathbf{Q} \sim -\mathbf{Q}$ (glej [10, poglavje 2]). Vprašanje je, kakšnim zahtevam

mora zadoščati dualni kvaternion, da bo enotski. Vzemimo poljuben $\mathbf{Q} \in \mathbb{DH}$ oblike $\mathbf{Q} = \mathcal{P} + \varepsilon\mathcal{Q}$. Izračunamo njegovo normo in dobimo

$$\|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = (\mathcal{P} + \varepsilon\mathcal{Q})(\mathcal{P}^* + \varepsilon\mathcal{Q}^*) = \mathcal{P}\mathcal{P}^* + \varepsilon(\mathcal{Q}\mathcal{P}^* + \mathcal{P}\mathcal{Q}^*).$$

Če želimo, da bo njegova norma enaka 1, pridemo do zahtev $\mathcal{Q}\mathcal{P}^* + \mathcal{P}\mathcal{Q}^* = 0$ in $\mathcal{P}\mathcal{P}^* = 1$, kar nas pripelje do naslednje definicije.

Definicija 6.5. Množico $S = \{\mathbf{Q} = \mathcal{P} + \varepsilon\mathcal{Q} \in \mathbb{DH}, \mathcal{Q}\mathcal{P}^* + \mathcal{P}\mathcal{Q}^* = 0\}$, imenujemo *Studyjeva kvadrika*. Enotski dualni kvaternioni ležijo na Studyjevi kvadriki.

Obratno pa ni nujno vedno res. Premislimo, kateri so dualni kvaternioni z normo enako 0. Veljati mora

$$\|\mathbf{Q}\| = \mathcal{P}\mathcal{P}^* + \varepsilon(\mathcal{Q}\mathcal{P}^* + \mathcal{P}\mathcal{Q}^*) = 0.$$

To so čisti dualni kvaternioni, katerih kvaternionski del je enak 0. Ta množica je tudi množica neobrnjivih elementov. Hitro se prepričamo, da je produkt

$$\varepsilon\mathcal{P}\varepsilon\mathcal{Q} = \varepsilon^2\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0.$$

Imamo torej delitelje nič, posledično ti elementi niso obrnjlivi. Pri definiciji moramo biti nekoliko previdni. Tudi množica $E = \{\varepsilon\mathcal{P}; \mathcal{P} \in \mathbb{H}\}$ leži na Studyjevi kvadriki, norma teh dualnih kvaterninov pa je enaka 0. Iz tega sledi, da je mnogoterost $SE(3)$ izomorfna Studyjevi kvadriki brez množice E .

Definicija 6.6. Polinom $\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}_i t^i$ je *polinom gibanja*, če leži na Studyjevi kvadriki, tj. $\mathbf{P}\mathbf{P}^* \in \mathbb{R}[t]$ in je njegov vodilni koeficient \mathbf{A}_n obrnjliv v \mathbb{DH} .

Definicija 6.7. Naj bo $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$, kjer je \mathbb{K} poljuben kolobar. Polinom $P(t)$ je *moničen*, če velja, da je njegov vodilni koeficient $a_n = 1$.

Definicija 6.8. Naj bo \mathbf{P} polinom gibanja stopnje $n > 0$. S preslikavo $f_{\mathbf{P}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{DH}$, $t \mapsto \mathbf{P}(t)$ dobimo *sliko* polinomske krivulje, generirane s polinomom \mathbf{P} . Ko t preteče vsa realna števila, dobimo polinomsko krivuljo na Studyjevi kvadriki stopnje največ n .

Brez škode za splošnost bomo od zdaj naprej vedno lahko predpostavili, da je vodilni koeficient $\mathbf{A}_n = 1$. Vedno bomo namreč lahko z leve množili z njegovim inverzom in se tako znebili vodilnega koeficienta. Izkaže se [8, poglavje 2], da v tem primeru polinoma parametrizirata isto krivuljo gibanja. Lotimo se parametrizacije polinomske krivulje, generirane s polinomi gibanja. Za $t \in \mathbb{R}$ bo slika polinoma gibanja $\mathbf{P}(t)$ polinomska krivulja na Studyjevi kvadriki. Alternativno lahko nanjo gledamo kot na krivuljo na mnogoterosti $SE(3)$, kar nam sugestivno podaja gibanje togega telesa. V nadaljevanju se bomo posvetili faktorizaciji polinomov gibanja.

6.2. Obstoj faktorizacije. V tem razdelku bomo dokazali glavni izrek, in sicer da lahko vsak generičen polinom gibanja faktoriziramo na linearne faktorje. Translacijam ustrezajo dualni kvaternioni z le skalarnim kvaternionskim delom, tj. oblike $(\lambda, 0) \in \mathbb{H}$, in čistim vektorskim dualnim delom, tj. oblike $\varepsilon(0, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Definicija 6.9. Naj bo $\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}_i t^i \in \mathbb{DH}[t]$. Polinom lahko zapišemo kot

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{B}_i t^i + \varepsilon \sum_{i=0}^n \mathbf{C}_i t^i,$$

kjer velja $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}_i + \varepsilon\mathbf{C}_i$. Levo vsoto bomo imenovali *primarni* del, označili jo bomo s $\text{Primar}(\mathbf{P})$, desno vsoto pa *dualni* del polinoma \mathbf{P} . Označili jo bomo z $\text{Dual}(\mathbf{P})$.

Definicija 6.10. Polinom gibanja $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$ stopnje $n > 0$ je *generičen*, če ima N -polinom $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$ n različnih nerazcepnih kvadratnih faktorjev.

To pomeni, da $\text{Primar}(\mathbf{P})$ nima realnih faktorjev. Vsak tak faktor bi se pojavil v N -polinomu polinoma \mathbf{P} z večkratnostjo ≥ 2 .

Trditev 6.11 ([4, poglavje 2]). Naj bo $\mathbf{Q} = \mathcal{P} + \varepsilon\mathcal{Q} \in \mathbb{DH}_\varepsilon$. Izomorfizem $\psi : \mathbb{DH}_\varepsilon/\sim \rightarrow \text{SE}(3)$, kjer je $\mathbf{Q} \sim -\mathbf{Q}$, je podan s predpisom

$$(9) \quad \psi(\mathbf{Q}) = \phi_{\mathbf{Q}},$$

pri čemer je $\phi_{\mathbf{Q}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definirana preko preslikave

$$(0, \mathbf{x}) \in \mathbb{H} \mapsto \mathcal{P}(0, \mathbf{x})\mathcal{P}^* + \mathcal{Q}\mathcal{P}^* = (0, \phi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})) \in \mathbb{H}.$$

Predpis za $\phi_{\mathbf{Q}}$ torej sledi iz vektorskega dela kvaterniona.

Neničelni dualni kvaternion $\mathbf{Q} = \mathcal{P} + \varepsilon\mathcal{Q}$ predstavlja rotacijo, če in samo če sta njegova norma in njegova sled realni, tj. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*, \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^* \in \mathbb{R}$, in je kvaternionski vektorski del neničeln [8, poglavje 7.1]. Take dualne kvaternione bomo od zdaj naprej imenovali *rotacijski* kvaternioni.

Dualni kvaternion predstavlja translacijo, če in samo če sta njegova norma in njegova sled realni, vektorski kvaternionski del pa je enak 0. Imenujemo jih *translacijski* kvaternioni.

Oglejmo si poljubno polinomsko krivuljo $C \subset S$ stopnje n na Studyjevi kvadriki S . Potem obstaja parametrizacija krivulje C s polinomom

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{A}_n t^n + \mathbf{A}_{n-1} t^{n-1} + \dots + \mathbf{A}_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer so $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathbb{DH}$. Kakor prej lahko predpostavimo, da je vodilni koeficient tega polinoma enak 1. Vemo tudi, da je tak polinom tudi polinom gibanja, saj leži na Studyjevi kvadriki.

V tem razdelku se bomo omejili na faktorizacije poljubnih generičnih polinomov gibanja na produkt linearnih rotacijskih faktorjev, tj. faktorjev oblike $(t - \mathbf{H})$, kjer je \mathbf{H} rotacijski kvaternion. Vprašajmo se sledeče. Imamo dan polinom gibanja $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$. Ali obstaja takšna faktorizacija, da lahko polinom zapišemo kot

$$\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n), \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer so \mathbf{H}_i rotacijski kvaternioni. Odgovor na to vprašanje nam bo dal glavni izrek tega poglavja. Preden se lotimo dokaza izreka, potrebujemo nekaj lem.

Lema 6.12. Če je \mathbf{P} rotacijski kvaternion, potem je polinom $M(t)$, podan s predpisom

$$M(t) = (t - \mathbf{P})(t - \mathbf{P}^*),$$

v $\mathbb{R}[t]$ in nima realnih ničel.

Dokaz. Najprej pomnožimo linearna faktorja in dobimo

$$M(t) = t^2 - (\mathbf{P} + \mathbf{P}^*)t + \mathbf{P}\mathbf{P}^*.$$

Ker je dualni del \mathbf{P} oblike $\varepsilon(0, \mathbf{v})$, velja, da je $\mathbf{P} + \mathbf{P}^* \in \mathbb{R}$. Ker \mathbf{P} leži na Studyjevi kvadriki je potem $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$ element \mathbb{R} . Prvi del leme je dokazan. Dokažimo še, da nima realnih ničel. Diskriminanta polinoma $M(t)$ je enaka

$$\delta = (\mathbf{P} + \mathbf{P}^*)^2 - 4\mathbf{P}\mathbf{P}^* = (\mathbf{P} - \mathbf{P}^*)^2,$$

kar pomeni, da je $\delta < 0$, saj je kvadrat imaginarnih števil. To pomeni, da M nima realnih ničel. \square

Trditev 6.13. *Naj bo $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$ polinom gibanja stopnje $n > 0$ brez realnih faktorjev. Če obstaja faktorizacija $\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n)$, kjer so $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n \in \mathbb{DH}$ rotacijski kvaternioni, potem polinom $(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(t)$ nima realnih ničel.*

Dokaz. Predpostavimo, da obstaja faktorizacija

$$\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n).$$

Označimo $M_i(t) = (t - \mathbf{H}_i)(t - \mathbf{H}_i^*)$, $i = 1, \dots, n$. Po lemi 6.12 je $M_i \in \mathbb{R}[t]$ in nima realnih ničel. Izračunajmo

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(t) &= ((t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n))((t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n))^* \\ &= (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n)(t - \mathbf{H}_n^*) \cdots (t - \mathbf{H}_1^*) \\ &= M_1(t) \cdots M_n(t). \end{aligned}$$

Ker je $(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(t)$ produkt $M_i(t)$, ki so brez realnih ničel, trditev sledi. \square

Opomba 6.14. Na tem mestu je primerna opazka, da nad dualnimi kvaternioni faktorizacija na linearne člene ne pomeni faktorizacije do ničel natančno. Oglejmo si ta problem na konkretnem primeru. Naj bo $\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H})(t - \mathbf{K})$. Iz osnovne algebre bi sklepali, da sta \mathbf{H} in \mathbf{K} ničli tega polinoma. Toda po drugi strani, če pomnožimo linearne faktorja, dobimo

$$\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H})(t - \mathbf{K}) = t^2 - \mathbf{K}t - \mathbf{H}t + \mathbf{H}\mathbf{K},$$

kjer smo upoštevali dogovor, da spremenljivka t komutira z koeficienti. Vstavimo posebej \mathbf{K} in dobimo $\mathbf{K}^2 - \mathbf{K}^2 - \mathbf{H}\mathbf{K} + \mathbf{H}\mathbf{K} = 0$. Za \mathbf{H} pa imamo $\mathbf{H}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{H} \neq 0$, čim $\mathbf{H}\mathbf{K} \neq \mathbf{K}\mathbf{H}$.

Imamo vse potrebne definicije za dokaz glavnega izreka tega poglavja, ki nas bo pripeljal tudi do osnovnega algoritma za razcep generičnih polinomov gibanja.

Izrek 6.15. *Naj bo $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$ generičen polinom gibanja stopnje $n > 0$. Potem obstaja faktorizacija*

$$\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n),$$

kjer so $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$ rotacijski kvaternioni iz \mathbb{DH} .

Dokaz izreka bomo razbili na več lem.

Lema 6.16 (Osnovni izrek o deljenju). *Naj bosta $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{DH}[t]$. Predpostavimo, da je vodilni koeficient \mathbf{P}_2 enak 1. Potem lahko \mathbf{P}_1 enolično zapišemo kot*

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{P}_2 + \mathbf{R},$$

kjer sta $\mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathbb{DH}[t]$, $\deg(\mathbf{R}) < \deg(\mathbf{P}_2)$. Dalje, če je $\mathbf{H} \in \mathbb{DH}$ tak, da je $\mathbf{P}_2(\mathbf{H}) = 0$, potem je $\mathbf{P}_1(\mathbf{H}) = \mathbf{R}(\mathbf{H})$.

Dokaz. Lema je posplošitev osnovnega izreka o deljenju za nekomutativne kolobarje. Konkretno se bomo tukaj ukvarjali z deljenjem z desne. Označimo

$$n = \deg(\mathbf{P}_1) \text{ in } m = \deg(\mathbf{P}_2).$$

Če je $n < m$, imamo

$$\mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{P}_1.$$

Primer $m \leq n$ bomo dokazali z indukcijo. Predpostavimo, da je desno deljenje možno za vse polinome stopnje manj kot n . Polinom \mathbf{P}_1 bomo zapisali kot

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}t^n + \mathbf{P}_3, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{D}\mathbb{H}, \quad \deg(\mathbf{P}_3) < n.$$

Ker je vodilni koeficient polinoma \mathbf{P}_2 enak 1, lahko $\mathbf{A}t^n$ zapišemo kot

$$\mathbf{A}t^n = \mathbf{A}t^{n-m}\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4, \quad \text{kjer je } \deg(\mathbf{P}_4) < n.$$

Po indukcijski predpostavki lema velja za polinoma \mathbf{P}_3 in \mathbf{P}_4 . Zapišemo ju lahko kot

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_3\mathbf{P}_2 + \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{P}_4 = \mathbf{Q}_4\mathbf{P}_2 + \mathbf{R}_4,$$

kjer so $\deg(\mathbf{R}_3) < m$, $\deg(\mathbf{R}_4) < m$. Poberemo skupaj in zapišemo

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{A}t^{n-m} + \mathbf{Q}_4 + \mathbf{Q}_3)\mathbf{P}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4.$$

S tem smo dokazali indukcijski korak za polinome stopnje n .

Dokažimo sedaj še enoličnost zapisa. Predpostavimo, da imamo dva zapisa polinoma

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2 + \mathbf{R}_2.$$

Potem je $(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)\mathbf{P}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$. Če je $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_2$, potem ima polinom na levi večjo stopnjo kot polinom na desni. Velja namreč

$$\deg((\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)\mathbf{P}_2) \geq m, \quad \deg(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) < m,$$

kar pa ni možno. Sledi, da je $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ in $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$. S tem smo dokazali obstoj in enoličnost zapisa. Ostane nam še implikacija o ničlah. Pokazati moramo, da iz $\mathbf{P}_2(\mathbf{H}) = 0$ sledi $(\mathbf{Q}\mathbf{P}_2)(\mathbf{H}) = 0$. Zadošča preveriti primer, ko je \mathbf{Q} monom. Zapišimo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}t^r, \quad r \leq n - m.$$

Iz $\mathbf{P}_2(\mathbf{H}) = 0$ in $\mathbf{Q} = \mathbf{A}t^r$ sledi $\mathbf{A}\mathbf{P}_2(\mathbf{H})\mathbf{H}^r = 0$. Lema je sedaj v celoti dokazana. \square

Lema 6.17. *Naj bo $\mathbf{P} \in \mathbb{D}\mathbb{H}[t]$ in $\mathbf{H} \in \mathbb{D}\mathbb{H}$. Potem je $(t - \mathbf{H})$ desni faktor \mathbf{P} , če in samo če je $\mathbf{P}(\mathbf{H}) = 0$.*

Dokaz. Z uporabo leme 6.16 vemo, da lahko \mathbf{P} zapišemo kot

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t)(t - \mathbf{H}) + \mathbf{R},$$

kjer je $\deg(\mathbf{R}) < 1$. Vstavimo ničlo \mathbf{H} in dobimo

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{Q}(\mathbf{H})(\mathbf{H} - \mathbf{H}) + \mathbf{R} = 0,$$

kar pomeni $\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{R} = 0$ in zato $\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t)(t - \mathbf{H})$. \square

Lema 6.18. *Naj bo $\mathbf{P} \in \mathbb{D}\mathbb{H}[t]$ polinom gibanja. Naj bo $\mathbf{M} \in \mathbb{R}[t]$ moničen polinom stopnje 2, ki deli $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$, ne deli pa polinoma $\text{Primar}(\mathbf{P})$. Potem obstaja enolično določen rotacijski kvaternion $\mathbf{H} \in \mathbb{D}\mathbb{H}$, da je $\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{M}(\mathbf{H}) = 0$.*

Dokaz. Z uporabo leme 6.16 lahko zapišemo $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{M} + \mathbf{R}$, kjer sta $\mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathbb{D}\mathbb{H}[t]$, $\deg(\mathbf{R}) < 2$. Ker \mathbf{M} ne deli $\text{Primar}(\mathbf{P})$, sledi $\text{Primar}(\mathbf{R}) \neq 0$. Izračunajmo zdaj še njegov N-polinom $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^* = (\mathbf{Q}\mathbf{M} + \mathbf{R})(\mathbf{M}\mathbf{Q}^* + \mathbf{R}^*) = (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*\mathbf{M} + \mathbf{Q}\mathbf{R}^* + \mathbf{R}\mathbf{Q}^*)\mathbf{M} + \mathbf{R}\mathbf{R}^*.$$

Ker \mathbf{M} deli $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$, mora biti $\mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{C}\mathbf{M}$, kjer je $\mathbf{C} \in \mathbb{D}\mathbb{H}$. Spomnimo se, da so koeficienti N-polinoma v splošnem dualna števila. Predpostavimo zdaj, da je $\text{Primar}(\mathbf{C}) = 0$. To pomeni, da je

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^* = \varepsilon\mathbf{C}\mathbf{M}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{H}.$$

Iz tega sledi, da je $\text{Primar}(\mathbf{R}) = 0$, kar pa je protislovje z našo predpostavko, da M ne deli $\text{Primar}(\mathbf{P})$. Torej je $\text{Primar}(\mathbf{C}) \neq 0$. Vodilni koeficient polinoma \mathbf{R} ne more imeti ničelnega primarnega dela, saj bi iz $\mathbf{R}_1 = \varepsilon\mathcal{R}$ sledilo $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^* = 0 = \mathbf{C}$. To pa pomeni tudi, da je \mathbf{R}_1 obrnljiv nad \mathbb{DH} . Ker je $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^* = \mathbf{C}$, je tudi \mathbf{C} obrnljiv. Zapišimo zdaj naš polinom

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1t + \mathbf{R}_0.$$

$\mathbf{R}(t)$ je linearen polinom z obrnljivimi koeficienti. Izračunajmo njegovo ničlo. Iščemo tak $\mathbf{H} \in \mathbb{DH}$, da bo veljalo

$$\mathbf{R}(\mathbf{H}) = \mathbf{R}_1\mathbf{H} + \mathbf{R}_0 = 0.$$

Iz tega lahko \mathbf{H} izrazimo kot

$$\mathbf{H} = -\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_0 \in \mathbb{DH}.$$

Iz $\mathbf{R}(\mathbf{H}) = 0$ sledi $(\mathbf{R}\mathbf{R}^*)(\mathbf{H}) = \mathbf{C}M(\mathbf{H}) = 0$ in ker je \mathbf{C} obrnljiv nad \mathbb{DH} , sledi

$$M(\mathbf{H}) = 0.$$

Vstavimo ničlo \mathbf{H} v \mathbf{P} in dobimo

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{Q}M(\mathbf{H}) + \mathbf{R}(\mathbf{H}) = 0.$$

Torej je res \mathbf{H} ničla polinoma \mathbf{P} .

Dokažimo zdaj še enoličnost. Predpostavimo, da obstaja neki drugi $\mathbf{H}' \in \mathbb{DH}$, da velja $\mathbf{P}(\mathbf{H}') = M(\mathbf{H}') = 0$. To implicira, da je $\mathbf{R}(\mathbf{H}') = 0$. Ker pa je ničla \mathbf{R} enolično določena, sledi, da je $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$. \square

Dokaz glavnega izreka 6.15. Izrek bomo dokazali s popolno indukcijo na stopnjo polinoma. Za $n = 0$ je trditev trivialna. Predpostavimo, da je $n > 0$. Ker $\text{Primar}(\mathbf{P})$ nima realnih faktorjev, tudi \mathbf{P} nima realnih faktorjev. Kar pomeni, da $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$ nima linearnih faktorjev.

Naj bo M eden izmed nerazcepnih kvadratnih faktorjev polinoma $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$. Po lemi 6.18, obstaja tak $\mathbf{H} \in \mathbb{DH}$, da je $M(\mathbf{H}) = \mathbf{P}(\mathbf{H}) = 0$. Z uporabo leme 6.17 vemo, da obstaja tak $\mathbf{Q} \in \mathbb{DH}[t]$, da lahko zapišemo $\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t)(t - \mathbf{H})$. Ker je $\deg(\mathbf{P}) = n$, sledi, da je $\deg(\mathbf{Q}) = n - 1$. N -polinom $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$ v razcepljeni obliki se glasi:

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(t) = (\mathbf{Q}(t)(t - \mathbf{H}))(\mathbf{Q}(t)(t - \mathbf{H}))^* = \mathbf{Q}(t)(t - \mathbf{H})(t - \mathbf{H}^*)\mathbf{Q}(t)^*,$$

kar pa lahko zapišemo kot $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*M$, tako da bo $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* \in \mathbb{R}[t]$. Dokazati moramo še, da \mathbf{Q} nima realnega faktorja. Ker realni faktorji komutirajo s koeficienti, bi to pomenilo, da bi bil tudi levi faktor in bi zato delil polinom \mathbf{P} . Iz tega že sledi, da isti razmislek velja za polinom $\text{Primar}(\mathbf{Q})$, saj bi tudi njegov realni faktor delil $\text{Primar}(\mathbf{P})$. Po indukcijski predpostavki znamo polinom \mathbf{Q} faktorizirati kot

$$\mathbf{Q}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_{n-1}).$$

Iz $\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t)(t - \mathbf{H})$ pa sledi $\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_{n-1})(t - \mathbf{H})$. \square

Opomba 6.19. V konstrukciji dokaza smo vedno predpostavili, da je $\mathbf{P}\mathbf{P}^* \in \mathbb{R}[t]$. Taki polinomi parametrizirajo polinomske krivulje v $SE(3)$, ki opišejo kompozitum rotacij in translacij. Izrek smo dokazali za primer, ko so bili linearni faktorji rotacijski kvaternioni.

Preden se lotimo zapisa preprostega algoritma, navedimo še nekaj opomb.

Opomba 6.20. Faktorizacija je vedno odvisna od vrstnega reda linearnih faktorjev v razcepu.

Opomba 6.21. Faktorizacija bo odvisna od vrstnega reda kvadratičnih faktorjev N -polinoma $\mathbf{P}\mathbf{P}^* \in \mathbb{R}[t]$. Imamo torej $n!$ možnih faktorizacij polinoma gibanja. Na i -tem koraku imamo na voljo $n - i$ izbir za izbiro nerazcepnega kvadratnega faktorja M_i .

Lotimo se zapisa algoritma. Imejmo dan polinom gibanja $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$. Želimo poiskati takšne rotacijske kvaternione $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$, da bomo lahko \mathbf{P} zapisali kot

$$\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n).$$

Algoritem nam bo kot izhod vrnil seznam $\{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n\}$.

ALGORITEM(Faktoriziraj generičen polinom gibanja)

VHOD : Generičen polinom gibanja

IZHOD : $H = \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n\}$

1: Razcepi $\mathbf{P}\mathbf{P}^* = M_1 \cdots M_n$

2 : $M = \{M_1, \dots, M_n\}$

3 : $H = \{\}$;

4: Dokler $\deg(\mathbf{P}) > 0$ ponavljaj

Izberi $M_i \in M \rightarrow M = M \setminus \{M_i\}$.

5: Izračunaj \mathbf{H}_i tako, da bo $M_i(\mathbf{H}_i) = \mathbf{P}(\mathbf{H}_i) = 0$.

6 : $H = \{H, \mathbf{H}_i\}$

7 : $P = P/(t - \mathbf{H}_i)$

Vrni $H = \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n\}$.

Opomba 6.22. Pri koraku 5 skupno ničlo \mathbf{H}_i polinomov $M_i(t)$ in $\mathbf{P}(t)$, poiščemo tako, da izračunamo ostanek pri deljenju $\mathbf{P}(t)$ z $M_i(t)$. Zapišemo ga v obliki $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1 t + \mathbf{R}_0$. Ničla \mathbf{H}_i je potem

$$\mathbf{H}_i = -\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_0.$$

Izrek 6.23. Naj bo $\mathbf{P} \in \mathbb{DH}[t]$ generičen polinom gibanja stopnje $n > 0$. Potem obstaja bijektivna korespondenca med faktorizacijami oblike

$$\mathbf{P}(t) = (t - \mathbf{H}_1) \cdots (t - \mathbf{H}_n)$$

in permutacijami n različnih kvadratičnih nerazcepnih faktorjev

$$(M_1 \cdots M_n)(t) = (\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(t).$$

Za vsako od teh faktorizacij velja $M_i(\mathbf{H}_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Dokaz. Pri dokazu izreka 6.15 smo vedno dopuščali poljubno izbiro kvadratičnega nerazcepnega faktorja M_i . Od tod sledi, da iz različnih izbir zaporedja M_i dobimo tudi različno faktorizacijo. Ujemanje sledi iz primerjave števila možnih izbir. Faktorizacij imamo $n!$, možnih zaporedij M_{i_1}, \dots, M_{i_n} je pa tudi $n!$. \square

Za zaključek si oglejmo uporabo algoritma na konkretnem polinomu gibanja.

Primer 6.24. Naj bo

$$\mathbf{P}(t) = t^2 - t(1 + (\varepsilon - 1)\mathbf{i} + (1 - \varepsilon)\mathbf{j} + 2(1 + \varepsilon)\mathbf{k}) - 1 - 2\varepsilon + \mathbf{i} - \varepsilon\mathbf{j} + (2 - \varepsilon)\mathbf{k}.$$

Po algoritmu moramo izračunati N -polinom $(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(t)$, ker je \mathbf{P} polinom gibanja zadošča izračunati normo primarnega dela polinoma. Zapišimo primarni del $\mathcal{Q}(t)$ polinoma gibanja $\mathbf{P}(t) = \mathcal{Q}(t) + \varepsilon\mathcal{R}(t)$. Iz realnih delov dualnih števil, dobimo, da

je zapis polinoma po komponentah enak $\mathcal{Q}(t) = (t^2 - t - 1, t + 1, -t, -2t + 2)$. Za N-polinom dobimo

$$\begin{aligned} (\mathbf{PP}^*)(t) &= (\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)(t) = (t^2 - t - 1, t + 1, -t, -2t + 2)(t^2 - t - 1, -t - 1, t, 2t - 2) \\ &= (t^2 - t - 1)^2 + (t + 1)^2 + t^2 + (-2t + 2)^2 = t^4 - 2t^3 + 5t^2 - 4t + 6 \\ &= (t^2 + 2)(t^2 - 2t + 3). \end{aligned}$$

Pripadajoča nerazcepna kvadratna faktorja sta enaka

$$M_1(t) = t^2 + 2, \quad M_2(t) = t^2 - 2t + 3.$$

Po algoritmu moramo zdaj poiskati skupno ničlo \mathbf{H}_1 polinomov $\mathbf{P}(t)$ in $M_1(t)$. Izračunati moramo ostanek pri deljenju $\mathbf{P}(t)$ z $M_1(t)$. Dobimo polinom oblike $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1 t + \mathbf{R}_0$, kjer sta koeficienta

$$\mathbf{R}_1 = -1 + (1 - \varepsilon)\mathbf{i} + (\varepsilon - 1)\mathbf{j} - 2(1 + \varepsilon)\mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_0 = -3 - 2\varepsilon + \mathbf{i} - \varepsilon\mathbf{j} + (2 - \varepsilon)\mathbf{k}.$$

Spomnimo se, da ničlo polinoma $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1 t + \mathbf{R}_0$ dobimo kot

$$\mathbf{H}_2 = -\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_0 = \left(\frac{-4}{7} + \frac{30}{49}\varepsilon\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{7} + \frac{3}{49}\varepsilon\right)\mathbf{j} + \left(\frac{9}{7} + \frac{13}{49}\varepsilon\right)\mathbf{k}.$$

Zdaj lahko delimo polinoma $\mathbf{P}(t)$ in $(t - \mathbf{H}_2)$. Dobimo še drugi linearni člen $(t - \mathbf{H}_1)$, kjer je \mathbf{H}_1 enak

$$\mathbf{H}_1 = 1 + \left(\frac{-3}{7} + \frac{19}{49}\varepsilon\right)\mathbf{i} + \left(\frac{8}{7} + \frac{-46}{49}\varepsilon\right)\mathbf{j} + \left(\frac{5}{7} + \frac{85}{49}\varepsilon\right)\mathbf{k}.$$

Velja $\mathbf{P}(\mathbf{H}_2) = M_1(\mathbf{H}_2) = 0$. Če bi začeli z $M_2(t)$ namesto $M_1(t)$, bi dobili drugo faktorizacijo $\mathbf{P} = (t - \mathbf{K}_1)(t - \mathbf{K}_2)$, kjer sta

$$\mathbf{K}_1 = (1 - \varepsilon)\mathbf{j} + (1 + \varepsilon)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{K}_2 = 1 - (1 - \varepsilon)\mathbf{i} + (1 + \varepsilon)\mathbf{k}.$$

Vidimo, da sta faktorizaciji res različni v obeh linearnih rotacijskih členih. \diamond

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

direct isometry direktna izometrija – izometrija prostora \mathbb{R}^3 , ki ohranja orientacijo

dual number dualno število – število oblike $a + \varepsilon b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon^2 = 0$

Euler parameters Eulerjevi parametri – četverica (q_0, q_1, q_2, q_3) , ki podaja enoličen zapis rotacijske matrike

generic motion polynomial generični polinom gibanja – polinom gibanja \mathbf{P} , katerega N-polinom ima n nerazcepnih kvadratičnih faktorjev

geodesic curve geodetska krivulja – najkrajša krivulja med izbranimi točkama na mnogoterosti

global coordinate system fiksni koordinatni sistem

homogeneous coordinates homogene koordinate

monic polynomial moničen polinom – polinom z vodilnim koeficientom 1

motion polynomial polinom gibanja – polinom s koeficienti v prostoru dualnih kvaternionov, ki parametrizira gibanje

normal intersection normalni presek

norm polynomial N-polinom – polinom $(\mathbf{PP}^*)(t)$

polynomial parametric curve parametrična polinomska krivulja – krivulja katere koordinatne funkcije so polinomi

rigid body togo telo – razsežno telo z maso in volumnom
rigid body coordinate system gibajoč se koordinatni sistem
screw axis os rotacije in translacije
spatial displacement transformacija stanja – sprememba stanja togega telesa
spherical linear interpolation sferična linearna interpolacija – metoda za interpolacijo geodetskih krivulj na sferi poljubne dimenzije
Study quadric Studyjeva kvadrika

LITERATURA

- [1] E. B. Dam, M. Kock in M. Lillholm, *Quaternions, interpolation and animation*, Technical Report DIKU-TR-98/5, Copenhagen, 1998; dostopno tudi na web.mit.edu/2.998/www/QuaternionReport1.pdf.
- [2] K. Daniilidis in E. Bayro-Corrochano, *The dual quaternion approach to hand-eye calibration*, Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition, 1996, 318–322.
- [3] A. El-Sayed Ahmed, S. Omran in A. J. Asad, *Fixed point theorems in quaternion-valued metric spaces*, Abstr. Appl. Anal., **2014**, Art. ID 258985; dostopno tudi na www.hindawi.com/journals/aaa/2014/258985/.
- [4] G. Hegedus, J. Schicho in H. P Schröcker, *Factorization of rational curves in the Study quadric and revolute linkages*. Mech. Mach. Theory **6** (2013) 142–152; dostopno tudi na www.arxiv.org/pdf/1202.0139v4.pdf.
- [5] H. P Jakobsen, *Course notes for Mathematics 3GE (diferential geometry)*, Matematisk Notetryk, Institute of Mathematics, University of Copenhagen, Denmark, Copenhagen, 1993.
- [6] B. Juettler, *Visualization of moving objects using dual quaternion curves*, Computer and Graphics **18** (1994) 315–326.
- [7] B. Juettler, M. G. Wagner, *Kinematics and animation*, v: Handbook of Computer Aided Geometric Design(ur. G. Farin, J. Hoschek in M.-S. Kim), North Holland, Amsterdam, 2002, 723–748.
- [8] B. Kenwright, *A Beginners guide to dual-quaternions: what they are, how they work, and how to use them for 3D character hierarchies*, The 20th International Conference on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision, 2012, 1–13; dostopno tudi na www.cs.gmu.edu/~jmlie/teaching/cs451/uploads/Main/dual-quaternion.pdf.
- [9] B. Kenwright, *Dual quaternions: From classical mechanics to computer graphics and beyond*, Oktober 2012, [ogled 22.09.2016], dostopno na www.xbdev.net/misc_demos/demos/dual_quaternions_beyond/paper.pdf
- [10] Z. Li, J. Schicho, H. P Schröcker, *Factorization of motion polynomials*, Technical report, Februar 2015, 1–4; dostopno na arxiv.org/pdf/1502.07600.pdf.
- [11] Z. Li, J Schicho in H.P Schröcker, *Spatial straight line linkages by factorization of motion polynomials*, Technical report, Oktober 2014; dostopno na arxiv.org/pdf/1410.2752.pdf.
- [12] B. Plestenjak, *Razširjen uvod v numerične metode*, Matematika–fizika **52**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2015.
- [13] *Rodrigues rotation formula*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 26. 8. 2016], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula.