UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Rok Gregorič

Grothendieck-Riemann-Rochov izrek za kompaktne Riemannove ploskve

Delo diplomskega seminarja

Mentor: akad. prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2015

Kazalo

Grothendieck-Riemann-Rochov izrek za kompaktne Riemannove ploskve

Povzetek

V delu je predstavljena teorija Riemannovih ploskev preko teorije snopov. S pomočjo prvega Chernovega razreda je podana bijekcija med Picardovo grupo in razredno grupo divizorjev kompaktne Riemannove ploskve. Obravnavani so koherentni snopi in dokazan je strukturni izrek za Grothendieckovo grupo. Skupaj z Riemann-Hurwitzovo formulo in Grothendieckovo dualnostjo se te rezultate uporabi za dokaz Grothendieck-Riemann-Rochove formule za holomorfne preslikave med kompaktnimi Riemannovimi ploskvami.

Grothendieck-Riemann-Roch Theorem for Compact Riemann Surfaces

Abstract

In this work Riemann surface theory is developed via sheaf theory. The first Chern class is used to exhibit a bijection between the Picard group and the divisor class group of a compact Riemann surface. Coherent sheaves are studied and a structure theorem for the Grothendieck group is proven. These results are used in conjunction with the Riemann-Hurwitz formula and Grothendieck duality to prove the Grothendieck-Riemann-Roch theorem for holomorphic maps between compact Riemann surfaces.

Math. Subj. Class. (2010): 14C40, 30F10, 14C20, 32C35, 18F20, 19L10

Ključne besede: Riemannova ploskev, snop, koherentnost, kohomologija, holomorfna preslikava, divizor, prvi Chernov razred, Grothendieckova grupa

Keywords: Riemann surface, sheaf, coherence, cohomology, holomorphic map, divisor, first Chern class, Grothendieck group

1. Uvod

Teorija Riemannovih ploskev je klasično področje matematike, ki leži na križišču kompleksne analize in algebraične geometrije. Številni pomembni rezultati so bili najprej znani za Riemannove ploskve, pogosto le v posebnih oblikah. Te so navdihnile številne generacije matematikov in vodile razvoj različnih področij, ta razvoj pa je naposled privedel do slovečih izrekov, ki jih poznamo danes. Primere je mogoče najti po celotni pokrajini sodobne matematike, od algebraične topologije in teorije števil, pa vse do analize več kompleksnih spremenljivk.

Eden izmed njih je Grothendieck-Riemann-Rochov izrek, kronski dragulj teorije presekov, razvite v zgodnji drugi polovici prejšnjega stoletja, kot predstavljeni v [12] ali [3]. Oglejmo si njegovo zgodovinsko pot[1]!

1.1. Zgodovinska pot Riemann-Rochovega izreka. Prvo obliko izreka je dokazal Bernhard Riemann leta 1857 v [29], članku, s katerim je iniciiral proučevanje Riemannovih ploskev. Vendar ga ni izrazil v obliki, ki jo poznamo danes, temveč kot neenakost. Riemannov učenec Gustav Roch je izračunal razliko in dopolnil izrek do enakosti, ki jo je objavil v [30] leta 1879. Max Noether ter italijanska šola algebraične geometrije z Enricom Castelnuovom na čelu so do leta 1897 uspeli dokazati posplošitev izreka iz algebraičnih krivulj na algebraične ploskve. Določeni vidiki Riemann-Rochovega izreka za ploskve so bili še dolgo nejasni (tako imenovani superpresežek) in kljub številnim poskusom še več kot petdeset let ni nihče znal niti formulirati dobre analogije izreka v dimenziji tri ali več.

Medtem je algebraična geometrija doživljala velik razcvet. V zgodnjih petdesetih letih se je pojavila Lerayeva teorija snopov in omogočila bliskovit razvoj kompleksne analize v prej neslutene višave. Jean-Pierre Serre, eden izmed arhitektov te revolucije, je uperil svoj pogled v algebraično geometrijo in začel vanjo uvajati jezik snopov. Ta pristop se je izkazal za zelo plodnega, kot je med drugim pokazala Serrejeva sicer okorna formulacija tega, kaj naj bi pravila splošna n-dimenzionalna Riemann-Rochova formula. Kot domnevo jo je v pismu Kodairi in Spencerju, naslovljenemu dne 29. 9. 1953, delil z matematično srenjo. Proti koncu leta 1954 je Friedrichu Hirzebruchu uspelo izpiliti natačno formulacijo izreka, ki danes nosi ime Hirzebruch-Riemann-Roch, in ga dokazati. O tem je leta 1956 napisal vplivno monografijo [18]. Njegov dokaz je tesno slonel na analitičnih metodah in ga tako ni bilo mogoče razširiti izven karakteristike nič. Kljub temu je Serreja Hirzebruchov izrek prepričal in leta 1955 je objavil članek [31], ki se šteje za začetek množične uporabe metod snopov v algebraični geometriji.

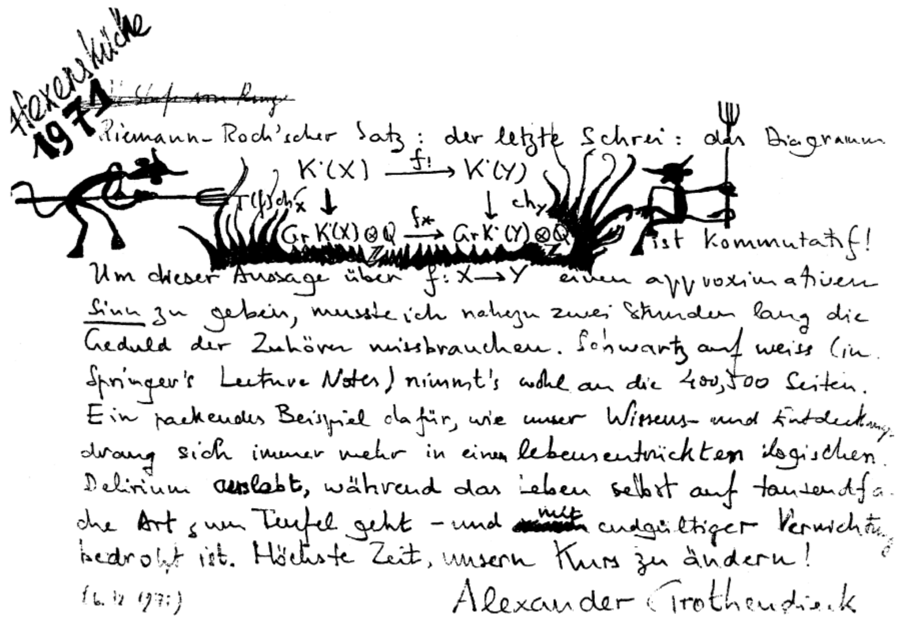
Čez dve leti je njegovemu znancu Alexandru Grothendiecku uspel preboj. Hirzebruchov izrek je posplošil na način, da ni več veljal zgolj v karakteristiki nič - veljal ni niti več zgolj nad obsegi, temveč nad poljubnimi raznoterostmi. To je bil eden prvih primerov Grothendieckovega vplivnega "relativnega" pogleda, ki je rezultate o prostorih spremenil v rezultate o preslikavah med njimi. Dokaz Grothenieck-Riemann-Rochovega izreka, ki sta ga leta 1958 v [4] objavila Armand Borel in Serre[2], se je, poleg po v tistih časih neobičajni splošnosti, odlikoval še s tem, da je bil enostavnejši od Hirzebruchovega. Edina cena, ki jo je bilo za to moč in eleganco potrebno

[1] Glavni viri za zgodovinske podatke so [5], [7] in [17].

[2] Grothendieck namreč še ni bil povsem zadovoljen z dokazom in je po svojem mnenju zadovoljiv dokaz objavil šele več kot deset let kasneje v [3].

plačati, je bila visoka mera abstraktnosti – to nemara dobro strne pakt, ki ga je Grothendieck sklenil z algebraično geometrijo nasploh.

Zgodba se tu seveda ne ustavi. Če naj omenimo le nekaj nadaljnjega razvoja, so tu Atiyah-Hirzebruchovi prevodi Grothendieck-Riemann-Rochovega izreka v diferencialno [1] in kompleksno geometrijo [2], Fulton-Mac Phearsonovi rezultati za singularne sheme, predstavljeni v [12], daljnosežna posplošitev Panin-Smirnova za orientirane kohomološke predteorije [27] ter alternativni pristop s Hochschildovo kohomologijo in izpeljano kategorijo koherentnih snopov, ki sta ga v [20, poglavje 5] podala Kashiwara-Schapira.



SLIKA 1. Grothendieckov lastnoročni komentar na izrek, reprodukcija dostopna v [28].

1.2. **Ureditev dela.** V tem delu ne bomo sledili zgodovinskemu razvoju, niti ne bomo spoznali splošne oblike Grothendieck-Riemann-Rochovega izreka. Namesto tega bomo razvili teorijo Riemannovih ploskev in na koncu dosegli in dokazali Grothendieck-Riemann-Rochovo formulo zgolj v tem kontekstu in zgolj s temi orodji. Pri tem ne bomo sledili standardnemu dokazu, kot ga je mogoče najti v [12] ali [4]. Okvirna ideja standardnega dokaza je, da morfizem pri faktorizaciji skozi svoj graf razpade na kompozitum zaprte vložitve in projekcije. Takšna faktorizacija je seveda nemogoča, če želimo ostati v svetu Riemannovih ploskev, saj je graf preslikave podmnožica višjedimenzionalnega prostora. Namesto tega bomo dokaz naslonili na dekompozicijske rezultate za Grothendieckovo grupo kompaktne Riemannove ploskve in Grothendieckovo dualnost. V določenem pogledu bomo torej prikrojili standardni kohomološki dokaz Riemann-Rochovega izreka za Riemannove ploskve, kot ga najdemo v [11, §16], [15, poglavje IV, §1] in [33, razdelek 17], za dokaz Grothendieck-Riemann-Rochovega izreka.

Opišimo organizacijo dela. Celotno besedilo je napisano v jeziku snopov, zato dodatek A podaja uvodno ekspozicijo o teoriji snopov in fiksira notacijo. Ker pa je teorija snopov zgolj formalizem in ne dejanska vsebina, se dodatek A nahaja na koncu dela. V razdelku 2 se seznanimo z osnovnimi pojmi, ki jih bomo proučevali: Riemannovimi ploskvami, holomorfnimi preslikavami, koherentnimi snopi itd. Razdelek 3 je namenjen divizorjem in njihovi povezavi z obrnljivimi snopi ter ramifikacijo. Tehnično srce dela je razdelek 4, v katerem so strnjeni strukturni rezultati o koherentnih snopih na kompaktni Riemannovi ploskvi, ki omogočajo obravnavo Riemann-Rochove teorije v razdelku 5. Po dokazu Grothendieck-Riemann-Rochovega izreka si ogledamo še nekaj njegovih preprostejših posledic. Čisto na koncu se skriva dodatek B, v katerem se nahaja posebej izstopajoč dokaz izreka 4.8, na katerem sloni razdelek 4. Bralec lahko brez vsake škode izpusti dodatek B, v kolikor je pripravljen vzeti izrek 4.8 na vero.

Opombe, razmetane skozi celotno besedilo, bodo poleg dejanskih opomb pogosto poskušale komunicirati intuitivne in hevristične pripombe, ki po avtorjevem skromnem mnenju pripomorejo k celostnem razumevanju snovi. S tem v obziru bodo pogosto manj rigorozne in vsebovale manj podrobnosti kot glavno besedilo, včasih bodo namenjene le bralcem z določenim predznanjem, ki sicer ni predpostavljeno, itd. V zameno bo razvoj osrednje snovi logično neodvisen od vsebine opomb – bralcu, ki ne bo želel, ne bo treba prebrati niti ene.

Fiksirajmo nekaj algebraične terminologije: s pojmom kolobar vselej mislimo komutativen unitalen kolobar in vsak homomorfizem kolobarjev naj ohranja enoto. Celostno polje pomeni kolobar brez deliteljev niča, glavni kolobar pa je celostno polje, v katerem je vsak ideal glavni. Za homomorfizem R-modulov $\varphi\colon M \to N$ je njegovo kojedro R-modul $\operatorname{coker}\varphi = N/\operatorname{im}\varphi$. Projektiven modul je takšen R-modul, ki je izomorfen direktnemu sumandu nekega prostega R-modula. Nasplošno se, kar se algebre tiče, držimo notacij in konvencij iz [21].

2. Riemannove ploskve

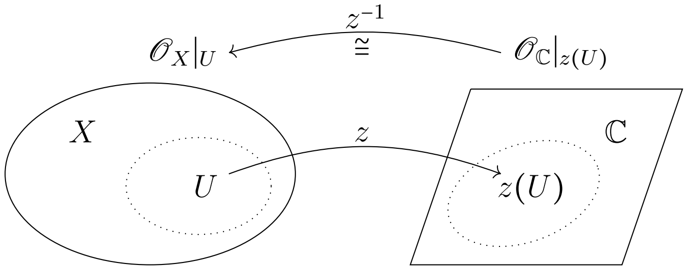
2.1. Riemannove ploskve in holomorfne preslikave. Kot dogovorjeno, privzemamo, kar se tiče teorije snopov, notacijo in pojme iz dodatka A. Sicer se držimo standardnih konvencij, skladnih npr. s [15] in [31]. V skladu z dodatkom A označuje $\mathscr{C}_X$ snop zveznih funkcij v $\mathbb{C}$ na topološkem prostoru X.

Predsnop $U \mapsto \mathscr{O}(U)$, ki odprti podmnožici $U \subseteq \mathbb{C}$ priredi kolobar holomorfnih funkcij na njej, zadošča lastnosti lepljenja. To sledi iz dejstva, da je holomorfnost lokalen pojem. Dobljeni snop imenujemo *snop holomorfnih funkcij na* $\mathbb{C}$ in ga označimo $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$.

Definicija 2.1. *Riemannova ploskev* je povezan parakompakten Hausdorffov topološki prostor X skupaj s podsnopom kolobarjev $\mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{C}_X$ na njem, tako da za vsak $x \in X$ obstaja odprta okolica U in odprta vložitev $z\colon U \to \mathbb{C}$, da desno komponiranje z z inducira izomorfizem $z^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}} \cong \mathscr{O}_X|_U$ snopov kolobarjev na U.

Definicijo spremlja določena količina terminologije. Snop $\mathscr{O}_X$ imenujemo *snop holomorfnih funkcij na* X ali *strukturni snop* X. Njegovim prerezom pravimo *holomorfne funkcije*. Preslikavo z imenujemo *koordinatna karta* ali *koordinatni sistem* ali samo *koordinata*, njeno domeno U pa *koordinatna zaplata*. Vidimo lahko, da za vsako odprto množico $U \subseteq X$ in točko $x \in X$ obstaja koordinatna zaplata $W \subseteq U$, ki to točko vsebuje. Neprazen presek koordinatne zaplate z odprto množico je namreč spet koordinatna zaplata, katere koordinatni sistem dobimo z zožitvijo.

Definicijo Riemannove ploskve lahko ubesedimo tudi takole: za poljubno koordinatno karto $z\colon U \to \mathbb{C}$ lahko vsako holomorfno funkcijo $h \in \mathscr{O}_X(U)$ enolično zapišemo



Slika 2. Riemannova ploskev X s koordinato z na zaplati U.

v obliki $h = f(z)$ za neko holomorfno funkcijo $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}}(z(U))$. Tu je $f(z)$ zgolj sugestivna notacija za kompozitum $f \circ z$. Morda to razloži izbiro črke z za koordinatni sistem: vsako holomorfno funkcijo na X lahko lokalno zapišemo kot holomorfno funkcijo na domeni $z(U) \subseteq \mathbb{C}$ "v spremenljivki z".

Opomba 2.2. Iz definicije v posebnem sledi, da je vsaka Riemannova ploskev lokalno homeomorfna odprti podmnožici $\mathbb{C}$ in je zato dvodimenzionalna topološka mnogoterost oz. topološka ploskev. Od tod izvira ime Riemannove ploskve, čeprav bi bil nemara bolj nedvoumen izraz *kompleksne krivulje*, saj gre za enodimenzionalne kompleksne mnogoterosti. Kompleksne ploskve imajo namreč štiri realne dimenzije.

Primer 2.3. Vsaka domena $U \subseteq \mathbb{C}$, tj. povezana odprta podmnožica, nosi strukturo Riemannove ploskve s snopom $\mathscr{O}_U = \mathscr{O}_{\mathbb{C}}|_U$.

Primer 2.4. Naj bo $\mathbb{P}^1$ kot topološki prostor enak $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tj. enotočkovna kompaktifikacija kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. Množici $U = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ in $V = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ tvorita odprto pokritje za $\mathbb{P}^1$ in preslikavi $z\colon U \to \mathbb{C}$ in $w\colon V \to \mathbb{C}$ s predpisoma $\zeta \mapsto \zeta$ oziroma $\zeta \mapsto 1/\zeta$ sta homeomorfizma. Strukturni snop $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ lahko definiramo preko njegovih zožitev

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}|_U = z^{-1}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}}), \qquad \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}|_V = w^{-1}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}}),$$

kjer gre za slike podsnopa $\mathscr{O}_{\mathbb{C}} \subseteq \mathscr{C}_{\mathbb{C}}$ po povleku $z^{-1}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{C}} \to \mathscr{C}_U$ oziroma $w^{-1}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{C}} \to \mathscr{C}_V$. Iz lastnosti lepljenja sledi, da je s tem snop kolobarjev $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ na $\mathbb{P}^1$ enolično določen. Preslikavi z in w sta po definiciji koordinati, zato dobimo Riemannovo ploskev $\mathbb{P}^1$, ki jo imenujemo *Riemannova sfera*.

Opomba 2.5. Kot namiguje notacija, ima $\mathbb{P}^1$ tudi drugačno interpretacijo kot enotočkovna kompaktifikacija $\mathbb{C}$. Je namreč enodimenzionalni kompleksni projektivni prostor. V višjih dimenzijah igrajo njegovo vlogo projektivni prostori $\mathbb{P}^n$ in ne sfere S^{2n}, ki niti ne dopuščajo kompleksne strukture za $n \geq 4$, glej [24, poglavje 24, §4]. Ali S^6 dopušča kompleksno strukturo je znano odprto vprašanje.

Opomba 2.6. Opisana definicija Riemannove ploskve dandanes v kompleksni geometrij ni najbolj popularna (za razliko od algebraične geometrije, kjer je pristop s snopi prevladujoč). Namesto nje je Riemannova ploskev običajno definirana kot parakompakten Hausdorffov topološki prostor X skupaj s *kompleksnim atlasom*, ki ga tvorita pokritje $\{U_i\}$ skupaj z odprto vložitvijo $z_i\colon U_i \to \mathbb{C}$ za vsak i, tako da je prehodna preslikava $z_j \circ z_i^{-1}\colon z_i(U_i \cap U_j) \to z_j(U_i \cap U_j)$ za vsak par indeksov i, j holomorfna funkcija.

Denimo, da je Riemannova ploskev X podana s kompleksnim atlasom $\{(U_i, z_i)\}$. Preslikava $f\colon X \to \mathbb{C}$ je tedaj *holomorfna funkcija*, če je za vsak i kompozitum $f \circ z_i^{-1}$, ki slika iz odprte podmnožice $z(U_i) \subseteq \mathbb{C}$, holomorfen. Strukturni snop $\mathscr{O}_X$ je podan kot predsnop, ki odprti množici $U \subseteq X$ priredi kolobar holomorfnih funkcij na njej, kjer U obravnavamo z induciranim atlasom $\{(U \cap U_i, z_i|_{U \cap U_i})\}$.

Obratno recimo, da je X Riemannova ploskev podana s strukturnim snopom. Kompleksen atlas dobimo tako, da vsaki koordinatni zaplati U_i priredimo koordinatni sistem z_i. Na ta način dobimo bijekcijo med strukturami Riemannove ploskve na danem prostoru, podrobnosti je mogoče najti v [13, poglavje 1].

Prednost pristopa s snopi je med drugim, da več različnih atlasov na istem prostoru lahko definira isto kompleksno strukturo, torej isto Riemannovo ploskev, medtem ko je Riemannova ploskev enolično določena s svojim strukturnim snopom. Kljub vsemu pa je za konkretne primere v praksi lažje najti atlas in preveriti holomorfnost prehodnih preslikav.

Definicija 2.7. Naj bosta X in Y Riemannovi ploskvi. Zvezna preslikava $f: X \to Y$ se imenuje *holomorfna*, če za povlek $f^{-1}: \mathscr{C}_Y \to \mathscr{C}_X$ velja $f^{-1}\mathscr{O}_Y \subseteq \mathscr{O}_X$.

Po definiciji povleka snopov je holomorfnost zvezne preslikave $f: X \to Y$ ekvivalentna zahtevi, da za vsako zvezno funkcijo $g: U \to \mathbb{C}$ za odprt $U \subseteq Y$ velja, da je g holomorfna natanko tedaj, ko je $g \circ f$ holomorfna na $f^{-1}(U) \subseteq X$. Upoštevajoč, da koordinatni sistemi enačijo holomorfne funkcije na Riemannovi ploskvi s holomorfnimi funkcijami na odprtih domenah v $\mathbb{C}$, je mogoče to izraziti še na tretji način kot zahtevo, da je za vsak par koordinatnih sistemov z na X in w na Y kompozitum $w \circ f \circ z^{-1}$ holomorfna funkcija.

Trditev 2.8. *Naj bo X Riemannova ploskev. Holomorfne funkcije na X, tj. globalni prerezi snopa $\mathscr{O}_X$, bijektivno sovpadajo s holomorfnimi preslikavami iz X v $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Iz lastnosti zveznih funkcij je jasno, da holomorfne preslikave v $\mathbb{C}$ zadoščajo lepljenju. Torej je predsnop $\mathscr{F}$, ki vsaki odprti množici $U \subseteq X$ priredi kolobar holomorfnih preslikav $U \to \mathbb{C}$, podsnop v $\mathscr{C}_X$. Jasno je, da trditev velja za odprte domene $U \subseteq \mathbb{C}$, torej tudi lokalno na Riemannovi ploskvi X v vsaki koordinatni zaplati posebej. Sledi, da sta $\mathscr{O}_X$ in $\mathscr{F}$ podsnopa snopa $\mathscr{C}_X$, ki se ujemata nad vsakim elementom odprtega pokritja. Po lastnosti lepljenja morata biti enaka. □

V luči trditve 2.8 ne bomo razlikovali med holomorfnimi preslikavami v $\mathbb{C}$ in holomorfnimi funkcijami. Na odprtih domenah $U \subseteq \mathbb{C}$ se pojem holomorfne funkcije ujema s tistim iz kompleksne analize. Lokalno, tj. v koordinatnih zaplatah preko koordinatnega sistema, lahko tako uporabljamo rezultate kompleksne analize. Dokaz naslednje trditve je arhetipski primer takšnega premisleka.

Trditev 2.9. *Vsaka nekonstantna holomorfna preslikava $f: X \to Y$ Riemannovih ploskev je odprta.*

Dokaz. Izrek o odprti preslikavi iz kompleksne analize pravi, da so nekonstantne holomorfne funkcije odprte. Posledično je za vsako koordinato $z: U \to \mathbb{C}$ na X in $w: V \to \mathbb{C}$ na Y kompozitum $\tilde{f} = w \circ f \circ z^{-1}$ odprt. Brez škode lahko predpostavimo, da je $f(U) \subseteq V$, iz česar sledi, da je $f|_U = w^{-1} \circ \tilde{f} \circ z$ kompozitum treh odprtih preslikav in zato odprt tudi sam. Ker koordinatne zaplate U tvorijo pokritje za X in je odprtost lokalna lastnost, mora biti f odprta preslikava. □

Trditev 2.10. *Naj bosta X in Y Riemannovi ploskvi, X kompaktna in $f: X \to Y$ holomorfna preslikava. Tedaj je f ali konstantna ali pa je surjektivna in je za vsak $y \in Y$ praslika $f^{-1}(y)$ končna.*

Dokaz. Denimo, da f ni konstantna in ima množica $f^{-1}(y)$ neskončno elementov za neko točko $y \in Y$. Ta praslika je zaprta podmnožica kompaktnega topološkega prostora X, iz česar sledi, da ima stekališče. Označimo ga z x. Naj bo $w: U \to \mathbb{C}$ koordinatni sistem na Y okoli točke y. Preslikava f je zvezna, zato je $f^{-1}(U)$ odprta in lahko izberemo koordinatni sistem $z: V \to \mathbb{C}$ na X tako, da velja $x \in V \subseteq f^{-1}(U)$. Ker je f holomorfna, je $\tilde{f} = w \circ f \circ z^{-1}: z(V) \to w(U)$ holomorfna funkcija. Sledi, da ima množica $\tilde{f}^{-1}(w(y))$ stekališče v $z(V)$ in po izreku o identičnosti je $\tilde{f}$ konstantno enaka $w(y)$. Torej je f konstantna na odprti podmnožici $U \subseteq X$ in zaradi povezanosti X povsod. To ne more biti, zato je množica $f^{-1}(y)$ končna.

Pokazati moramo še, da je f surjekcija. Po trditvi 2.9 je odprta preslikava, ker pa slika iz kompaktnega prostora v Hausdorffovega, je tudi zaprta. Zaradi povezanosti mora biti njena slika celoten Y. □

Posledica 2.11. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Vse holomorfne funkcije na X so konstantne.*

Dokaz. Naj bo $f: X \to \mathbb{C}$ holomorfna. Če ne gre za konstantno funkcijo, je po prejšnji trditvi $f(X) = \mathbb{C}$. To ne gre, saj je zvezna slika kompakta vselej kompaktna. □

Opomba 2.12. Trditev 2.10 izraža dihotomijo holomorfnih preslikav med kompaktnimi Riemannovimi ploskvami. Njene ramifikacije bomo čutili skozi večino preostanka dela in celo dokaz glavnega izreka bo ločeno in z različnima pristopoma obravnaval primera konstantne ter nekonstantne preslikave. Poenoteno obravnavo konstatnih in nekonstantnih holomorfnih preslikav bi lahko dobili na primer tako, da bi na konstantno preslikavo gledali kot na ničdimenzionalno kompleksno mnogoterost. Namesto tega bomo sprejeli dihotomijo in ostali neomajno v svetu Riemannovih ploskev.

Glavni fokus tega dela leži v kompaktnih Riemannovih ploskvah, na katerih po posledici 2.11 ni veliko holomorfnih funkcij. Bolj fleksibilne so *meromorfne funkcije*, ki jih definiramo kot prereze snopa obsegov $\mathscr{M}_X$, ki je posnopitev predsnopa $U \mapsto K(U)$, pri čemer je $K(U)$ obseg ulomkov kolobarja $\mathscr{O}_X(U)$. Kanonična inkluzija $\mathscr{O}_X(U) \to K(U)$ inducira morfizem snopov kolobarjev $\mathscr{O}_X \to \mathscr{M}_X$, na podlagi katerega lahko vsako holomorfno funkcijo identificiramo z neko meromorfno funkcijo. Lokalno, natančneje na koordinatni zaplati $z: U \to \mathbb{C}$, je mogoče vsako meromorfno funkcijo $h \in \mathscr{M}_X(U)$ zapisati kot $h = f(z)/g(z)$ za neki holomorfni funkciji $f, g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}}(z(U))$, ki nimata nobene skupne ničle in pri čemer g ni identično enaka nič. Drugače povedano, izomorfizem $z^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}} \cong \mathscr{O}_X|_U$ se razširi do izomorfizma $z^{-1}\mathscr{M}_{\mathbb{C}} \cong \mathscr{M}_X|_U$.

Trditev 2.13. *Naj bo X Riemannova ploskev. Meromorfne funkcije na X, tj. globalni prerezi snopa $\mathscr{M}_X$, bijektivno sovpadajo s holomorfnimi preslikavami iz X v $\mathbb{P}^1$.*

Dokaz. Podobno kot dokaz trditve 2.8. □

Primer 2.14. Premislimo, kaj so meromorfne funkcije na $\mathbb{P}^1$. Naj bo $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ holomorfna. Njeno zožitev na $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ je mogoče zapisati kot $g(z)/h(z)$ za nek par celih funkcij $g, h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, kar bomo v nadaljevanju označevali $\mathbb{C}^\times$, je $z = 1/w$ in lahko zapišemo $f|_{\mathbb{C}^\times} = g(1/w)/h(1/w)$. Ker je f holomrofna (kot preslikava) tudi okoli točke ∞, mora imeti funkcija $\zeta \mapsto g(1/\zeta)/h(1/\zeta)$ v točki $\zeta = 0$ pol ali odstranljivo singularnost. Sledi, da imata obe funkciji g in h kvečjemu pol v neskončnosti (ne moreta imeti bistvene singularnosti), iz česar sledi, da sta polinoma. Na ta način vidimo, da velja $\mathscr{M}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{C}(z)$, tj. obseg racionalnih funkcij nad obsegom $\mathbb{C}$.

Primer zagotavlja, da smo bili uspešni, vsaj na Riemannovi sferi. Čeprav dopušča le konstantne holomorfne funkcije, pa tvorijo meromorfne funkcije na njej neskončno dimenzionalen vektorski prostor. V kasnejših razdelkih bomo pokazali, da je to splošen fenomen in velja za vsako kompaktno Riemannovo ploskev.

Lema 2.15. *Naj bo $f: X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava Riemannovih ploskev in naj bo $x \in X$ poljubna točka. Naj bosta $z: U \to \mathbb{C}$ in $w: V \to \mathbb{C}$ koordinatna sistema na X oziroma Y, tako da je $z(x) = w(f(x)) = 0$. Tedaj obstajata naravno število n in holomorfna funkcija h na $z(U)$ s $h(0) \neq 0$, za katera velja*

$$w \circ f = h(z) z^n.$$

Število n je neodvisno od izbire koordinatnih sistemov z in w.

Dokaz. Vemo, da je kompozitum $\tilde{f} = w \circ f \circ z^{-1}$ holomorfna funkcija med dvema okolicama koordinatnega izhodišča $\mathbb{C}$. Osnoven rezultat kompleksne analize je, da lahko zapišemo $\tilde{f}(\zeta) = h(\zeta)\zeta^n$ za neko holomorfno funkcijo h s $h(0) \neq 0$, kjer je n stopnja ničle, ki jo ima $\tilde{f}$ v točki 0. □

Število n iz leme imenujemo *stopnja holomorfne preslikave f v točki x* in ga označimo z $\deg_x(f)$. Če je f meromorfna funkcija in je $f(x) = 0$, potem rečemo, da ima f *ničlo reda* $\deg_x(f)$ *v točki x*, če je $f(x) = \infty$, pa da ima tam *pol reda* $\deg_x(f)$. Red ničle oziroma minus red pola v dani točki x označimo kot $\operatorname{ord}_x(f)$. Tako je $\operatorname{ord}_x(f) > 0$ natanko tedaj, ko je x ničla funkcije f, in $\operatorname{ord}_x(f) < 0$ tedaj, ko je x pol. Povezava med redom in stopnjo v točki x je torej

$$\operatorname{ord}_x(f) = \pm \deg_x(f),$$

pri čemer izberemo $+$, če je x ničla in $-$, če je x pol funkcije f. Včasih bomo redu ničle oziroma pola rekli tudi *stopnja* ali *večkratnost* ničle oziroma pola, v primeru česar bomo vseeno mislili $\operatorname{ord}_x(f)$ in ne $\deg_x(f)$.

Zaključek leme 2.15 hevristično pravi, da holomorfna preslikava f v točki x daje povezavo $w = z^n$ med koordinato z okoli x in w okoli $f(x)$. Če fiksiramo sistem w, lahko to naredimo rigorozno.

Posledica 2.16. *Naj bo $f: X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava Riemannovih ploskev in naj bo $x \in X$ poljubna točka. Naj bo $w: V \to \mathbb{C}$ koordinatni sistem na Y, tako da je $w(f(x)) = 0$. Tedaj obstajata takšen koordinatni sistem $z: U \to \mathbb{C}$ na okolici $U \subseteq X$ točke x, da velja $z(x) = 0$, $f(U) \subseteq V$ in $w \circ f = z^n$.*

Dokaz. Naj bo $z: U \to \mathbb{C}$ poljuben koordinatni sistem na okolici točke x za katerega velja $f(U) \subseteq V$. Po prejšnji lemi je $w \circ f = h(z)z^n$ za neko holomorfno funkcijo h na $z(U)$ s $h(0) \neq 0$. Če U po potrebi zmanjšamo, lahko dosežemo, da je h brez ničel na U. Tedaj lahko vzamemo njen koren in iz kompleksne analize vemo, da tako spet dobimo holomorfno funkcijo. Koordinatni sistem $\tilde{z} = z\sqrt[n]{h(z)}$ je iskane oblike. □

Lema 2.15 omogoča, da pokažemo naslednjo trditev, ki jo bomo na ključen način uporabili v dokazu dekompozicijskih rezultatov razdelka 4.

Trditev 2.17. *Naj bo X Riemannova ploskev in $x \in X$ poljubna točka. Bilka strukturnega snopa $\mathscr{O}_{X,x}$ je glavni kolobar.*

Dokaz. Lahko je videti, da je zarodek $f_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ obrnljiv v $\mathscr{O}_{X,x}$ natanko tedaj, ko velja $f(x) \neq 0$.

Fiksiramo koordinato z okoli x, za katero je $z(x) = 0$, in pišimo kar z za zarodek v točki x, ki ga z definira, če nanjo gledamo kot na holomorfno funkcijo. V luči leme 2.15 lahko vsak element $f_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ enolično zapišemo kot $h_x z^n$ za neki obrnljiv $h_x \in \mathscr{O}_{X,x}$. Vidimo, da ima $\mathscr{O}_{X,x}$ natanko en maksimalen ideal $\mathfrak{m}_x = \{f_x \in \mathscr{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$ in to je glavni ideal, generiran z elementom z. Po Zornovi lemi je vsak ideal vsebovan v maksimalnem, vsak podideal v $\mathscr{O}_{X,x}z$ pa je generiran z elementom z^n za nek n. □

Enolični zapis elementov kolobarja $\mathscr{O}_{X,x}$ iz dokaza trditve se razširi tudi na meromorfne zarodke in vsak $f_x \in \mathscr{M}_{X,x}$ je mogoče na samo en način izraziti kot $h_x z^n$, kjer $h(x) \neq 0$ in $n \in \mathbb{Z}$. To število je ravno red funkcije f v točki x, tj. $n = \operatorname{ord}_x(f)$.

2.2. **Snopi $\mathscr{O}_X$-modulov.** V tem podrazdelku bomo spoznali snope modulov in navedli nekaj osnovnih konstrukcij, ki jih vključujejo. Vsaj dokler ne pridemo do lokalno prostih snopov, bomo privzeli filozofijo razdelka A in podali samo hitro, za nadaljevanje potrebno razlago brez dokazov in podrobnosti. Te je mogoče najti v [31, poglavje I§2] ali [13, poglavje A].

Definicija 2.18. Naj bo X Riemannova ploskev. Snop abelovih grup $\mathscr{F}$ na X je *snop $\mathscr{O}_X$-modulov*, če nosi za vsak odprt $U \subseteq X$ abelova grupa $\mathscr{F}(U)$ strukturo $\mathscr{O}_X(U)$-modula in za vsako inkuzijo $U \subseteq V$ odprtih podmnožic, prerez $s \in \mathscr{O}_X(V)$ ter holomorfno funkcijo $f \in \mathscr{O}_X(V)$ velja

$$(f \cdot s)|_U = f|_U \cdot s|_U.$$

Iz definicije je jasno, da je za snop $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{F}$ in vsako točko $x \in X$ bilka $\mathscr{F}_x$ modul nad kolobarjem $\mathscr{O}_{X,x}$.

Primer 2.19. Primeri snopov $\mathscr{O}_X$-modulov so snop $\mathscr{O}_X$ sam, njegove direktne potence $\mathscr{O}_X^n$, snop meromorfnih funkcij $\mathscr{M}_X$ in trivialni snop 0. Velik razred primerov bomo spoznali v razdelku 3.2.

Definicija 2.20. Morfizem snopov $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ je *morfizem snopov $\mathscr{O}_X$-modulov*, če je za vsak odprt $U \subseteq X$ homomorfizem $\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}'(U)$ homomorfizem $\mathscr{O}_X(U)$-modulov.

V situaciji te definicije imajo snopi $\ker\varphi$, $\operatorname{coker}\varphi$ in $\operatorname{im}\varphi$, definirani v podrazdelku A.2, naravno strukturo snopov $\mathscr{O}_X$-modulov. Za vsak par snopov $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$ je direktna vsota $\mathscr{F} \oplus \mathscr{F}'$ tudi snop $\mathscr{O}_X$-modulov in isto velja za kvocientni snop $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$, če je $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ podsnop $\mathscr{O}_X$-modulov. Sledi, da lahko govorimo o *jedrih*, *kojedrih*, *direktnih vsotah* in povezanih pojmih, kot so npr. *eksaktna zaporedja*, v kontesktu snopov $\mathscr{O}_X$-modulov. Kadar bomo v nadaljevanju nekvantificirano govorili o morfizmih in eksaktnih zaporedjih, bo šlo vedno za morfizme oziroma eksaktna zaporedja $\mathscr{O}_X$-modulov.

Množica $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$ homomorfizmov $\mathscr{O}_X$-modulov iz $\mathscr{F}$ v $\mathscr{F}'$ je na očiten način $\mathscr{O}_X(X)$-modul, zato posnopitev predsnopa $U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{F}'|_U)$ podaja snop $\mathscr{O}_X$-modulov, ki ga označimo $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$ in imenujemo *snop Hom*. V posebnem, ko je $\mathscr{F}' = \mathscr{O}_X$, dobimo *dualni snop* $\mathscr{F}^\vee = \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$. Podobno imenujemo posnopitev predsnopa $U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{F}'(U)$ *tenzorski produkt snopov $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$* in zanj pišemo $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}'$.

Oglejmo si še, kako je s funktorialnostjo snopov $\mathscr{O}_X$-modulov. Naj bo $f\colon X \to Y$ holomorfna preslikava Riemannovih ploskev in $\mathscr{F}$ snop $\mathscr{O}_Y$-modulov. Potem je $f^{-1}\mathscr{F}$ snop abelovih grup na X, vendar ne gre za snop $\mathscr{O}_X$-modulov. Mutandum mutandis v diskusiji tega podrazdelka lahko govorimo o snopih modulov nad poljubnimi snopi kolobarjev, ne le nad $\mathscr{O}_X$. Povlek $f^{-1}\mathscr{F}$ je v tem smislu snop $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-modulov in *povlek snopov $\mathscr{O}_Y$-modulov po f* definiramo enostavno kot $f^*\mathscr{F} = f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$. Kadar ne bo priložnosti za pomoto z f^{-1}, bomo f^* imenovali samo *povlek po f* Očitno je povlek kontravariantno funktorialen, tj. za holomorfni preslikavi $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ velja $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Podobno slika za holomorfno preslikavo $f\colon X \to Y$ tudi funktor potiska f_* iz $\mathscr{O}_X$-modulov v $\mathscr{O}_Y$-module, vendar zanj ni potrebno speminjati definicije. Namreč, za snop $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{F}$ nosi snop $f_*\mathscr{F}$ strukturo $f_*\mathscr{O}_X$-modula. Za odprto množico $U \subseteq Y$ in holomorfno funkcijo $h \in \mathscr{O}_Y(U)$ je $h \circ f \in \mathscr{O}_X(f^{-1}(U))$, snop $f_*\mathscr{O}_X$ pa je posnopitev predsnopa $U \mapsto \mathscr{O}_X(f^{-1}(U))$. Tako dobimo kanoničen morfizem snopov kolobarjev $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ na Y. Preko njega postane $f_*\mathscr{F}$ snop $\mathscr{O}_Y$-modulov. Kovariantna funktorialnost potiska se ohrani, tj. za holomorfni preslikavi $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ velja $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Če je $\mathscr{F}$ snop $\mathscr{O}_X$-modulov, potem ima kohomološka grupa $H^i(X, \mathscr{O}_X)$ za vsak $i \geq 0$ strukturo $\mathscr{O}_X(X)$-modula, ki se v primeru $i = 0$ strinja s strukturo $\mathscr{O}_X(X)$-modula na $H^0(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$ iz definicije $\mathscr{O}_X$-modula. Po predpisu višjih direktnih slik $R^i f_*\mathscr{F}$ sledi, da so tudi to snopi $\mathscr{O}_Y$-modulov za vsako holomorfno preslikavo $f\colon X \to Y$ in vsak $i \geq 0$. Za poljubno kratko eksaktno zaporedje $\mathscr{O}_X$-modulov je pripadajoče kohomološko dolgo eksaktno zaporedje tudi zaporedje $\mathscr{O}_X$-modulov in isto velja za dolgo eksaktno zaporedje direktnih slik. Dokaze teh trditev je mogoče najti v [15, Trditev 2.6, str. 208].

Definicija 2.21. Naj bo X Riemannova ploskev. Snop $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{E}$ imenujemo *lokalno prost*, če za vsak $x \in X$ obstaja neka okolica U in za neko nenegativno celo število r izomorfizem snopov $\mathscr{O}_U$-modulov $\mathscr{E}|_U \cong \mathscr{O}_U^r$. Število r imenujemo *rang snopa* $\mathscr{E}$. Lokalno proste snope ranga 1 imenujemo *obrnljivi snopi*.

Iz povezanosti X in zveznosti koordinatnih preslikav je razvidno, da je rang lokalno prostega snopa dobro definiran.

Primer 2.22. Naj bo X Riemannova ploskev in naj bo $z\colon U \to \mathbb{C}$ koordinatni sistem na X. Tedaj za vse odprte podmnožice $W \subseteq U$ definirajmo $\Omega_X|_U(W)$ kot množico elementov oblike $f(z)\,dz$, kjer f preteče holomorfne funkcije na $z(W)$, na dz pa lahko gledamo samo kot na formalen simbol. Če je $w\colon V \to \mathbb{C}$ drug koordinaten sistem na X, potem identificirajmo $(\Omega_X|_U)|_{U\cap V}$ in $(\Omega_X|_V)|_{U\cap V}$ po identifikaciji $dz = \frac{dz}{dw}dw$, oziroma natančnejše

$$f(z)\,dz = (f \circ z \circ w^{-1})(w) \cdot (z \circ w^{-1})'(w)\,dw,$$

kjer $'$ zaznamuje odvod holomorfne funkcije na domeni $w(U \cap V) \subseteq \mathbb{C}$. S to identifikacijo se po lastnosti lepljenja lokalno podani snopi $\Omega_X|_U$, ko U preteče vse koordinatne zaplate na X, zlepijo v natančno en snop $\mathscr{O}_X$-modulov Ω_X. Imenujemo ga *snop holomorfnih diferencialnih form*, njegove prereze pa *holomorfne diferencialne forme*. Iz podane konstrukcije je jasno, da je Ω_X obrnljiv, saj je za vsako koordinatno zaplato U vgrajen izomorfizem $\Omega|_U \cong \mathscr{O}_X$ s predpisom $f(z)\,dz \mapsto f(z)$.

Opomba 2.23. Definicija snopa holomorfnih diferencialnih form Ω_X v primeru 2.22 je malo nerodna. Mnogo elegantnejši opis tega snopa lahko dobimo, če si privoščimo ekskurzijo v dve kompleksni dimenziji. Preslikava $x \mapsto (x,x)$ podaja zaprto holomorfno vložitev $\Delta\colon X \to X \times X$, ki ji pravimo *diagonalna vložitev*. Holomorfne funkcije, ki so nič vzdolž $\Delta(X)$, tvorijo snop idealov $\mathscr{I}_{\Delta(X)} \subseteq \mathscr{O}_{X\times X}$. Izkaže se, da lahko snop Ω_X identificiramo s povlekom $\Delta^*\big(\mathscr{I}_{\Delta(X)}/\mathscr{I}^2_{\Delta(X)}\big)$, glej [15, poglavje II 8]. Intuitivno lahko to definicijo razumemo tako, da se vprašamo, kaj želimo od snopa diferencialnih form. Vsaki holomorfni funkciji $f \in \mathscr{O}_X(U)$ želimo prirediti diferencial $df \in \Omega_X(U)$, tako da bo zadoščal Leibnitzovemu pravilu $d(fg) = f\,dg + g\,df$, aditivnosti in da bo za konstantno funkcijo f veljalo $df = 0$. Iz drugega pogoja sledi, da je v poljubni izbrani točki x potrebno znati odvajati samo funkcije z $f(x) = 0$, torej elemente maksimalnega ideala $\mathfrak{m}_x \subset \mathscr{O}_{X,x}$. Iz Leibnitzovega pravila sledi, da mora $\mathfrak{m}_x^2$ ležati v jedru diferenciala. Kandidat za bilko $\Omega_{X,x}$ je tako kvocientni modul $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, pri katerem je diferencial $d_x\colon \mathscr{O}_{X,x} \to \Omega_{X,x}$ podan s predpisom $d_x f = f - f(x) \mod \mathfrak{m}_x^2$. Snop $\Delta^*\big(\mathscr{I}_{\Delta(X)}/\mathscr{I}^2_{\Delta(X)}\big)$ ni nič drugega kot globalna izvedba te konstrukcije.

Lokalno prosti snopi so zaprti za jemanje direktnih slik, potiskov in povlekov po holomorfnih preslikavah, niso pa zaprti za jemanje kojeder ali ekvivalentno kvocientov (kasneje bomo to eksplicitno pokazali v primeru 4.21). Uporabno je definirati večji razred snopov $\mathscr{O}_X$-modulov, ki ne bo trpel za to pomanjkljivostjo.

Definicija 2.24. [3] Naj bo X Riemannova ploskev in naj bo $\mathscr{F}$ snop $\mathscr{O}_X$-modulov. Pravimo, da je $\mathscr{F}$ *koherenten*, če ima vsaka točka $x \in X$ odprto okolico U, za katero obstaja eksaktno zaporedje $\mathscr{O}_U^p \to \mathscr{O}_U^q \to \mathscr{F}|_U \to 0$ za neki nenegativni celi števili p in q.

Izkaže se, da je kategorija koherentnih snopov zelo primerna za obravnavanje vprašanj o eksaktnosti. Razlog za to se v veliki meri skriva v naslednji lemi, kot bo pokazala njena posledica, v kateri bomo videli, da so koherentni snopi zaprti za vse operacije na snopih, ki si jih lahko zaželimo.

Lema 2.25 ([31, str. 18, Izrek 1])**.** *Naj bo X Riemannova ploskev in*

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

kratko eksaktno zaporedje snopov $\mathscr{O}_X$-modulov. Če sta dva izmed snopov $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ in $\mathscr{F}''$ koherentna, potem je tudi tretji koherenten.

Posledica 2.26. *Koherentni snopi na dani Riemannovi ploskvi so zaprti za jemanje direktnih produktov, jeder, kojeder, slik, kvocientov, tenzorskih produktov, dualov in snopov Hom.*

Dokaz. Če je $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ morfizem $\mathscr{O}_X$-modulov, imamo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F}' \to \operatorname{coker}\varphi \to 0$$

in iz leme 2.25 sledi, da koherentnost snopov $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$ implicira koherentnost kojedra. Dokazi za direktne produkte, jedra, slike in kvociente gredo podobno preko naravnih kratkih eksaktnih zaporedij.

Za koherenten $\mathscr{F}$ naj bo $U \subseteq X$ takšna podmnožica, da obstaja eksaktno zaporedje $\mathscr{O}_U^p \to \mathscr{O}_U^q \to \mathscr{F}|_U \to 0$. Tenzorski produkt je desno-eksakten funktor, zato

[3] V splošnem je definicija koherentnosti drugačna od navedene, definirana lastnost pa se imenuje *končna prezentiranost*. Koherentnost je v splošnem strožji pogoj, a ker je po Okinem izreku [13, poglavje 2, §5.2] strukturni snop Riemannove ploskve (in splošnejše poljubnega kompleksnega prostora) koherenten, se pojma ujemata po [31, str. 21, Trditev 7].

tenzorriranje s $\mathscr{F}'|_U$ porodi eksaktno zaporedje snopov $\mathscr{O}_U$-modulov

$$\mathscr{F}'|_U^p \to \mathscr{F}'|_U^q \to (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}')|_U \to 0.$$

Če je $\mathscr{F}'$ koherenten, smo torej zožitev tenzorskega produkta $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$ izrazili kot kojedro morfizma koherentnih snopov, torej je po že dokazanem koherenten na U. Množice U tvorijo pokritje za X in koherentnost je očitno lokalna lastnost, zato je snop $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}'$ koherenten na celotnem X. Dokaz za eksaktnost snopa Hom (in v posebnem tudi duala) je enak, le da se namesto desno-eksaktnega tenzorskega produkta uporabi levo-eksaktni funktor Hom in upošteva, da so jedra morfizmov koherentnih snopov koherentna. □

Primer 2.27. Posledica 2.26 morda daje napačen vtis, da so vsi snopi $\mathscr{O}_X$-modulov, ki nas bodo zanimali, koherentni. Protiprimer je že srečani snop meromorfnih funkcij $\mathscr{M}_X$, ki ni koherenten. To lahko vidimo npr. z uporabo leme 4.30, iz katere sledi, da je kompleksnen vektorski prostor $\Gamma(X, \mathscr{M}_X)$ neskončno dimenzionalen. V primeru 4.6 je opisano, kako Grauertov izrek iz podrazdelka 4.1 narekuje, da bi koherentnost snopa $\mathscr{M}_X$ implicirala, da je $\dim \Gamma(X, \mathscr{M}_X) < \infty$. Alternativno lahko to vidimo neposredno. Za koordinatno zaplato $z: U \to \mathbb{C}$ namreč množica prerezov $\mathscr{M}_X(U)$ vsebuje potenco z^{-n} za poljubno naravno število n in ta je nad holomorfnimi funkcijami neodvisna od vseh z^{-k} za $k < n$. Torej ne more za noben q obstajtati epimorfizem snopov $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{O}_U^q \to \mathscr{M}_X|_U$, kaj šele, da bi bil $\mathscr{M}_X$ koherenten.

Za vsako holomorfno preslikavo $f: X \to Y$ je $f^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$ in funktor f^* je eksakten, zato je povlek koherentnega snopa koherenten. Da tudi funktor potiska f_* ohranja koerentnost, sledi iz Grauertovega izreka, ki ga bomo navedli v podrazdelku 4.1. V razdelku 4 bomo nasploh podrobneje proučevali lastnosti in strukturo koherentnih snopov na Riemannovih ploskvah. Na tej točki si oglejmo le nekaj o koherentnosti in snopu Hom.

Lema 2.28. *Naj bo X Riemannova ploskev. Naj bo $\mathscr{F}$ koherenten in $\mathscr{F}'$ snop $\mathscr{O}_X$-modulov. Za vsako točko $x \in X$ imamo izomorfizem $\mathscr{O}_{X,x}$-modulov*

$$\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')_x \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x, \mathscr{F}'_x).$$

Dokaz. Naj bo U odprta okolica točke x in $\mathscr{O}_U^p \to \mathscr{O}_U^q \to \mathscr{F}|_U \to 0$ eksaktno zaporedje $\mathscr{O}_U$-modulov. Vemo, da je funktor $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_x$ eksakten, funktor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(-, \mathscr{F}'_x)$ pa levo-eksakten, zato z njuno zaporedno uporabo dobimo eksaktno zaporedje $\mathscr{O}_{X,x}$-modulov

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x, \mathscr{F}'_x) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{O}_{X,x}^q, \mathscr{F}'_x) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{O}_{X,x}^p, \mathscr{F}'_x).$$

Alternativno bi lahko uporabili levo-eksaktni funktor $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{F}')$ in vzeli bilke v x, da bi dobili eksaktno zaporedje $\mathscr{O}_{X,x}$-modulov

$$0 \to \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')_x \to \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^q, \mathscr{F}')_x \to \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^p, \mathscr{F}')_x.$$

Iz definicije snopa Hom sledi, da obstajajo kanonični navpični morfizmi v komutativnem diagramu

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')_x \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^q, \mathscr{F}')_x \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^p, \mathscr{F}')_x \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x, \mathscr{F}'_x) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{O}_{X,x}^q, \mathscr{F}'_x) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_{X,x}^p, \mathscr{F}'_x),
\end{tikzcd}$$

eksaktnost vrstic katerega smo pravkar preverili. Desni dve navpični puščici sta identitetni preslikavi $\mathscr{F}'^q_x \to \mathscr{F}'^q_x$ in $\mathscr{F}'^p_x \to \mathscr{F}'^p_x$, zato je po lemi o petih tudi prva navpična puščica izomorfizem. $\square$

Posledica 2.29. *Naj bo X Riemannova ploskev. Naj bo $\mathscr{E}$ lokalno prost in $\mathscr{F}$ snop $\mathscr{O}_X$-modulov. Tedaj obstaja izomorfizem snopov $\mathscr{O}_X$-modulov*

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\mathscr{F}) \cong \mathscr{E}^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}.$$

Dokaz. Dovolj je pokazati, da je kanonični morfizem $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{E}^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ izomorfizem na bilkah. Po lemi 2.28 so bilke snopa Hom izomorfne modulu $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{E}_x,\mathscr{F}_x)$, bilke tenzorskega produkta pa so izomorfne $\mathscr{E}_x^\vee \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{F}_x$, pri čemer je spet po lemi $\mathscr{E}_x^\vee \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{E}_x,\mathscr{O}_{X,x})$ dualni $\mathscr{O}_{X,x}$-modul. Zaključek zdaj sledi iz naslednjega algebraičnega rezultata. $\square$

Lema 2.30. *Naj bo R kolobar, E končno generiran prost R-modul in M poljuben R-modul. Tedaj je kanonični homomorfizem $E^\vee \otimes_R M \to \mathrm{Hom}_R(E,M)$ izomorfizem.*

Dokaz. Naj tvorijo $x_1,\dots,x_n \in E$ množico generatorjev za E kot prost R-modul. Po univerzalni lastnosti prostih modulov je vsak homomorfizem R-modulov $\varphi\colon E \to M$ enolično določen z elementi $\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n) \in M$. Za dani indeks i naj bo $x_i^\vee \in E^\vee$ podan s predpisom $x_i \mapsto x_i$ in $x_j \mapsto x_j$ za vse $j \neq i$. Jasno je, da ima vsak element tenzorskega produkta $E^\vee \otimes_R M$ enoličen zapis v obliki $x_1^\vee \otimes y_1 + \cdots + x_n^\vee \otimes y_n$ za neke $y_1,\dots,y_n \in M$. Iz povedanega sledi, da se za poljuben $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(E,M)$ zgolj in samo element $x_1^\vee \otimes \varphi(x_1) + \cdots + x_n^\vee \otimes \varphi(x_n)$ po kanoničnem homomorfizmu slika v φ. Torej je kanonični izomorfizem bijekcija in tako izomorfizem. $\square$

Jasno je, da so lokalno prosti snopi zaprti za operacije duala in tenzorskega produkta, saj velja $\mathscr{O}_X^r \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^s \cong \mathscr{O}_X^{rs}$. Na ta način dobimo na množici izomorfnostnih razredov lokalno prostih snopov strukturo komutativnega monoida z enoto $\mathscr{O}_X$. S pomočjo posledice 2.29 pa lahko opišemo njegove obrnljive elemente.

Trditev 2.31. *Naj bo X Riemannova ploskev in $\mathscr{L}$ obrnljiv snop na njej. Tedaj velja $\mathscr{L}^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X$.*

Dokaz. Iz definicije obrnljivega snopa sledi, da je $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L},\mathscr{L})$ posnopitev predsnopa, ki je na elementih dovolj finega pokritja ploskve X podan s predpisom $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{O}_U,\mathscr{O}_U) \cong \mathscr{O}_U$. Po lastnosti lepljenja je snop enolično določen s svojo zožitvijo na pokritje, zato je $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L},\mathscr{L}) \cong \mathscr{O}_X$. Želeno izomorfnost dobimo z uporabo posledice 2.29. $\square$

Izomorfnostni razredi obrnljivih snopov na dani Riemannovi ploskvi X tvorijo na podlagi trditve grupo za operacijo tenzorskega produkta, kjer je inverz razreda obrnljivega snopa $\mathscr{L}$ podan s snopom $\mathscr{L}^\vee$. To je *Picardova grupa* Riemannove ploskve X in jo označimo $\mathrm{Pic}(X)$.

Opomba 2.32. Pojem lokalno prostega snopa je v določenem smislu ekvivalenten pojmu *holomorfnega vektorskega svežnja*, tj. takšne surjektivne holomorfne preslikave $p\colon E \to X$ iz kompleksne mnogoterosti E, da za neko pokritje $\{U_i\}$ obstajajo biholomorfizmi $\theta_i\colon U_i \times \mathbb{C}^r \to p^{-1}(U_i)$, za katere komutira diagram

$$\begin{tikzcd} U_i \times \mathbb{C}^r \arrow[r, "\theta_i"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ U_i \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

katerega neoznačeni puščici sta projekcija na prvi faktor in inkluzija, ter tako, da je za vsak par indeksov i in j kompozitum $\theta_i^{-1} \circ \theta_j : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r$ podan s predpisom $(x, v) \mapsto (x, Av)$ za nek linearen endomorfizem A vektorskega prostora $\mathbb{C}^r$. *Prerez svežnja E nad $U \subseteq X$* je holomorfna preslikava $s: U \to E$, za katero velja $p \circ s = \mathrm{id}_U$. Pišemo $s \in \Gamma(U, E)$ in svežnju E priredimo snop podan s predpisom $U \mapsto \Gamma(U, E)$. Pot v obratno smer poteka v groben tako, da za snop $\mathscr{E}$ uvedemo primerno topologijo in kompleksno strukturo na disjunktno unijo $E = \coprod_{x \in X} \mathscr{E}_x$, surjekcijo p pa podamo s predpisom $\mathscr{E}_x \mapsto x$. Na ta način dobimo preslikavi v obe smeri med holomorfnimi vektorskimi svežnji in lokalno prostimi snopi, katerih zožitvi na izomorfnostne razrede podajata bijekciji.

Zares velja več: opisani preslikavi dajeta ekvivalenco kategorij. Torej je uporaba lokalno prostih snopov namesto morda bolj geometrijskih vektorskih svežnjev primarno stvar okusa, vendar je v s teorijo snopov prežetemu pristopu h geometriji, ki smo ga ubrali, to bolj naravna izbira.

Omenimo še, da v primeru $r = 1$ dobimo korespondenco med obrnljivi snopi in holomorfnimi svežnji premic ter, da bilka $\mathscr{E}_x$ nad točko $x \in X$ sovpada z vlaknom $p^{-1}(x)$, kjer je snopu $\mathscr{E}$ prirejen svežen̄j $p: E \to X$.

3. Divizorji

3.1. **Pojem divizorja.** Na kompaktni Riemannovi ploskvi ima vsaka meromorfna funkcija, ki ni konstantno enaka nič, končno mnogo ničel in polov, v katerih ima natančno predpisane večkratnosti. Tako meromorfna funkcija iz ploskve izbere končno mnogo točk in jim predpiše celoštevilske vrednosti – konstrukcija, ki je v teoriji Riemannovih ploskev še kako pomembna.

Definicija 3.1. *Divizor* na Riemannovi ploskvi X je vsaka formalna vsota oblike $D = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ za neke $a_i \in \mathbb{Z}$ in neke točke $x_i \in X$, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ poljuben. Drugače povedano, divizor je element $\mathbb{Z}\langle X \rangle$, tj. proste abelove grupe, generirane s točkami ploskve X.

Primer 3.2. Na vsako točko $x \in X$ lahko gledamo kot na divizor $x = 1 \cdot x$ in na prazno množico kot na trivialni divizor $0 = \sum_{x \in X} 0 \cdot x$.

Primer 3.3. Kot že omenjeno, so najpomembnejši primeri divizorjev tisti, ki pripadajo meromorfnim funkcijam. Formalno definiramo *divizor neničelne meromorfne funkcije f* na X kot

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f) x.$$

V analogiji s tem označimo za poljuben divizor $D = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ njegove koeficiente z ord, torej

$$\mathrm{ord}_x(D) = \begin{cases} a_i, & x = x_i, \\ 0, & x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}. \end{cases}$$

Seveda je ekvivalentno podati divizor ali pa preslikavo $\mathrm{ord}_-(D): X \to \mathbb{Z}$, torej bi divizorje lahko enačili s preslikavami $X \to \mathbb{Z}$ s končnim nosilcem, kot npr. [11].

Iz definicije je razvidno, da je divizorje mogoče seštevati in, da za vse divizorje D, D' in točke $x \in X$ velja

$$\mathrm{ord}_x(D + D') = \mathrm{ord}_x(D) + \mathrm{ord}_x(D').$$

Grupo divizorjev, ki seveda ni nič drugega kot prosta abelova grupa $\mathbb{Z}\langle X \rangle$, označimo $\mathrm{Div}(X)$. Poleg strukture abelove grupe nosi $\mathrm{Div}(X)$ še naravno delno urejenost, kjer predpišemo, da je $D \le D'$ natanko tedaj, ko je $\mathrm{ord}_x(D) \le \mathrm{ord}_x(D')$ za vse $x \in X$. Delna urejenost je usklajena s seštevanjem, tj. iz $D \le D'$ za vsak D'' sledi $D + D'' \le D' + D''$. Če velja $D \ge 0$, imenujemo D *efektiven divizor*.

Konstrukcija divizorja neničelne meromorfne funkcije podaja preslikavo

$$\mathrm{div}\colon \mathscr{M}_X^\times(X) \to \mathrm{Div}(X),$$

ki je tudi homomorfizem abelovih grup, če množico neničelnih meromorfnih preslikav $\mathscr{M}_X^\times(X)$ opremimo z operacijo množenja. Drugače povedano, za vse neničelne meromorfne funkcije f, g in vse točke $x \in X$ velja

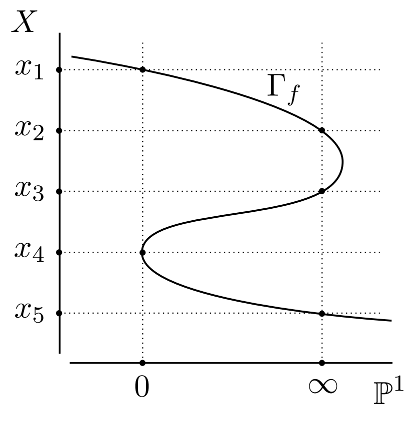
$$\mathrm{ord}_x(fg) = \mathrm{ord}_x(f) + \mathrm{ord}_x(g),$$

kar je očitno iz definicije reda meromorfne funkcije v točki. Kojedro preslikave div imenujemo *razredna grupa divizorjev* in pišemo

$$\mathrm{Cl}(X) \coloneqq \mathrm{Div}(X)/\,\mathrm{div}\left(\mathscr{M}_X^\times(X)\right).$$

Kot terminologija namiguje, rečemo, da sta dva divizorja D in D' v istem razredu, ali tudi, da sta *linearno ekvivalentna*, če je $D - D' = \mathrm{div}(f)$ za neko meromorfno funkcijo f. Notacijsko ne bomo razlikovali med divizorji ter njihovimi razredi, tj. v notaciji bomo zamolčali kanonično kvocientno projekcijo $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$. Iz konteksta bo jasno, ali D stoji za divizor ali za razred divizorjev, ki mu ta divizor pripada.

Opomba 3.4. Linearno ekvivalenco si lahko predstavljamo kot analogno pojmu homotopije v topologiji. Naj bosta D in D' linearno ekvivalentna divizorja z disjunknimi nosilci in naj bo $D, D' \ge 0$. Obstaja meromorfna funkcija f, da je $D - D' = \mathrm{div}(f)$, in iz efektivnosti obeh divizorjev sledi, da mora biti D natanko divizor ničel in D' natanko divizor polov f, obojih štetih z večkratnostmi. Če enakosti razumemo na pravilen način, je torej $D = f^{-1}(0)$ in $D' = f^{-1}(\infty)$. V tej neformalni analogiji s homotopijo torej vlogo intervala $[0,1]$ igra Riemannova sfera $\mathbb{P}^1$, vlogo homotopije pa f^{-1}. Kot je morda razvidno iz slike 3, si lahko predstavljamo, da D' dobimo iz D s "holomorfno deformacijo", ki jo predstavlja meromorfna funkcija f. Še bližje kot homotopiji, je ekvivalenca divizorjev homologiji oziroma kobordantnosti.



Slika 3. Analogija linearne ekvivalence s homotopijo za divizorja $D = x_1 + 2x_4$ in $D' = x_2 + x_3 + x_5$, kjer Γ_f označuje graf funkcije f.

3.2. **Snop, prirejen divizorju.** Intutivno se zdi jasno, da je na kompaktni Riemannovi ploskvi zelo malo holomorfnih funkcij in zelo veliko meromorfnih funkcij. S tem, da dopustimo funkcijam, da imajo pole, torej povečamo njihovo število. Osrednje vprašanje, ki vodi krog Riemann-Roch idej, je: koliko? Koliko funkcij pridobimo, če dopustimo, da imajo v neki točki enostaven pol? Kaj pa v dveh točkah? Kaj pa, če dopustimo pol višje stopnje? Da se lahko na smiseln način soočimo s takšnimi vprašanji, je koristno zbrati skupaj meromorfne funkcije, ki imajo lahko pole le v določenih točkah in tam največ določene stopnje.

Definicija 3.5. Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. *Snop prirejen divizorju* D na X je snop $\mathscr{O}_X$-modulov definiran nad vsako odprto podmnožico $U \subseteq X$ kot

$$\Gamma(U, \mathscr{L}(D)) = \{f \in \mathscr{M}_X^\times(U) \mid \operatorname{div}(f) + D|_U \geq 0\} \cup \{0\},$$

kjer je $D|_U = \sum_{x \in U} \operatorname{ord}_x(D)x$. Drugače povedano, funkcija $f \in \mathscr{M}_X^\times(U)$ je prerez snopa $\mathscr{L}(D)$ nad U natanko tedaj, ko velja

$$\operatorname{ord}_x(f) + \operatorname{ord}_x(D) \geq 0$$

za vse $x \in U$.

Primer 3.6. Če je $D = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ efektiven divizor, potem bo meromorfna funkcija f globalni prerez snopa $\mathscr{L}(D)$ natanko tedaj, ko bo v vseh točkah razen $x_1, \ldots, x_n$ holomorfna, v točki x_i pa bo morda imela pol stopnje $\leq a_i$. Torej je $\Gamma(X, \mathscr{L}(D))$ zares množica meromorfnih funkcij s predpisanimi najvišjimi možnimi poli, ki smo jo prej opisovali. V posebnem je $\mathscr{L}(0) = \mathscr{O}_X$.

Snopi prirejeni divizorjem igrajo pomembno vlogo v teoriji Riemannovih ploskev in kompleksni ter algebraični geometriji nasploh. So dokaj konkretni in obvladljivi primeri snopov $\mathscr{O}_X$-modulov, ki globalno v splošnem niso prosti. A enostavnosti navkljub je pogosto mogoče vprašanja o precej splošnih razredih snopov prevesti nanje. To bo vsebina razdelka 4.

Lema 3.7. *Za vsak par divizorjev D in D' na kompaktni Riemannovi ploskvi X velja*

$$\mathscr{L}(D + D') \cong \mathscr{L}(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(D')$$

in vsak snop oblike $\mathscr{L}(D)$ je obrnljiv.

Dokaz. Po definiciji divizorjev je mogoče najti takšno odprto pokritje $\{U_i\}$ ploskve X in takšne točke $x_i, x_i' \in U_i$, ki niso vsebovane v nobenem U_j za $j \neq i$, da je $D|_{U_i} = a_i x_i$ in $D'|_{U_i} = a_i' x_i'$ za neka cela števila a_i, a_i'. Po potrebi lahko vzamemo še finejše pokritje, da bodo vse U_i koordinante zaplate s koordinatnimi preslikavami z_i. Po definiciji snopa prirejenega divizorju je tedaj

$$\mathscr{L}(D)|_{U_i} = (z_i - x_i)^{-a_i} \mathscr{O}_{U_i},$$

kar dokazuje, da je snop $\mathscr{L}(D)$ lokalno prost ranga ena, tj. obrnljiv. Na enak način dobimo

$$\mathscr{L}(D + D')|_{U_i} = (z_i - x_i)^{-a_i} (z_i - x_i')^{-a_i'} \mathscr{O}_{U_i},$$

in po definiciji tenzorskega produkta je

$$(\mathscr{L}(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(D'))|_{U_i} = (z_i - x_i)^{-a_i} \mathscr{O}_{U_i} \otimes_{\mathscr{O}_{U_i}} (z_i - x_i')^{-a_i'} \mathscr{O}_{U_i}.$$

Iz tega je razvidno, da je za vsak indeks i predpis

$$(z_i - x_i)^{-a_i} (z_i - x_i')^{-a_i'} f \mapsto (z_i - x_i)^{-a_i'} \otimes (z_i -' x_i)^{-a_i'} f$$

izomorfizem zožitev snopov nad U_i, katerega inverz je kanonični morfizem $f \otimes g \mapsto fg$. Iz podanega predpisa je razvidno, da so ti izomorfizmi na presekih kompatibilno definirani, zato se zlepijo do enolično določenega homomorfizma $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{L}(D+D') \to \mathscr{L}(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(D')$. Iz pravkar opisane konstrukcije sledi, da je kanonični morfizem $\mathscr{L}(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(D') \to \mathscr{L}(D+D')$, lokalno podan z $f \otimes g \mapsto fg$, njegov inverz, torej gre za izomorfiezm. □

Iz leme lahko razberemo tudi kaj je inverz snopa prirejenega divizorju v grupi $\mathrm{Pic}(X)$; ker je $\mathscr{L}(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(-D) \cong \mathscr{O}_X$, mora biti $\mathscr{L}(D)^\vee \cong \mathscr{L}(-D)$.

Lema 3.8. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Predpis $D \mapsto \mathscr{L}(D)$ inducira homomorfizem grup $\mathscr{L}\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$, ki je injektiven.*

Dokaz. Preveriti moramo, da je snop $\mathscr{L}(D)$ do izomorfizma natančno določen z razredom divizorja D. Če je $D - D' = \mathrm{div}(f)$ za $f \in \mathscr{M}_X^\times(D)$, podaja množenje z f izomorfizem $\mathscr{L}(D') \to \mathscr{L}(D)$, katerega inverz je množenje z $1/f$. Zahvaljujoč lemi 3.7 je $\mathscr{L}$ torej res homomorfizem grup.

Treba je še pokazati, da je injektiven. Denimo, da je $\mathscr{L}(D) \cong \mathscr{L}(D')$ za nek par divizorjev D in D'. Tedaj iz leme 3.7 sledi, da je $\mathscr{O}_X \cong \mathscr{L}(D-D')$. Vemo, da neničelne homomorfne funkcije obstajajo (in celo, da sovpadajo z elementi $\mathbb{C}^\times$). Posledično mora imeti snop $\mathscr{L}(D-D')$ neničelen globlen prerez f, in ker za globalne holomorfne funkcije h velja $\mathrm{div}(h) = 0$ ter je $\mathscr{O}_X = \mathscr{L}(0)$, je tudi

$$\mathrm{div}(f) + D - D' = 0.$$

To pa ne pomeni nič drugega, kot da sta D in D' linearno ekvivalentna. □

Sedaj, ko poznamo način, kako razredu divizorjev priredimo element Picardove grupe, recimo, da bi želeli iti še v drugo smer; izomorfnostnemu razredu obrnljivega snopa $\mathscr{L}$ bi želeli prirediti razred divizorjev. Lahko bi poskusili postopati tako, da bi izbrali globalni prerez $s \in \mathscr{L}(X) \setminus \{0\}$ in poskušali vzeti divizor njegovih ničel štetih z večkratnostmi. Ta naivna ideja ne deluje povsem, saj obstajajo obrnljivi snopi, ki nimajo netrivialnih globalnih prerezov. S tem problemom se spoprimemo na enak način, kot smo se spoprijeli s tem, da na kompaktnih ploskvah ni nekonstantnih holomorfnih funkcij: namesto prerezov snopa $\mathscr{L}$, bomo uporabili *meromorfne prereze snopa* $\mathscr{L}$, s čimer mislimo prereze snopa $\mathscr{M}_X(\mathscr{L}) = \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_X$. Pot naprej nam odpira naslednji rezultat:

Lema 3.9. *Vsak obrnljiv snop na kompaktni Riemannovi ploskvi ima neničelni meromorfni prerez.*

Opomba 3.10. Lema 3.9 je neposredna posledica izreka 4.30, vendar je snov razdelka 4, ki vodi do njegovega dokaza, logično neodvisna od aplikacij leme 3.9 v tem poglavju, in tako na tem mestu nismo sklenili logične zanke.

Naj bo $\mathscr{L}$ obrnljiv snop na kompaktni Riemannovi ploskvi X. Bilka $\mathscr{L}_x$ je prost $\mathscr{O}_{X,x}$-modul ranga 1, torej lahko za poljuben izbran element $u_x \in \mathscr{L}_x \setminus \mathfrak{m}_x\mathscr{L}_x$ vsak zarodek $s_x \in \mathscr{L}_x$ zapišemo enolično kot produkt $s_x = f_x u_x$ za nek $f_x \in \mathscr{O}_{X,x}$. Iz definicije tenzorskega produkta sledi obstoj enake faktorizacije za meromorfne zarodke. Namreč: za vsak $s_x \in \mathscr{M}_X(\mathscr{L})_x$ obstaja natanko en $f_x \in \mathscr{M}_{X,x}$, da je $s_x = f_x u_x$. Če je s meromorfen prerez snopa $\mathscr{L}$, ki v bilki nad točko x inducira element s_x, definiramo *red prereza s v točki x* kot

$$\mathrm{ord}_x(s) = \mathrm{ord}_x(f_x).$$

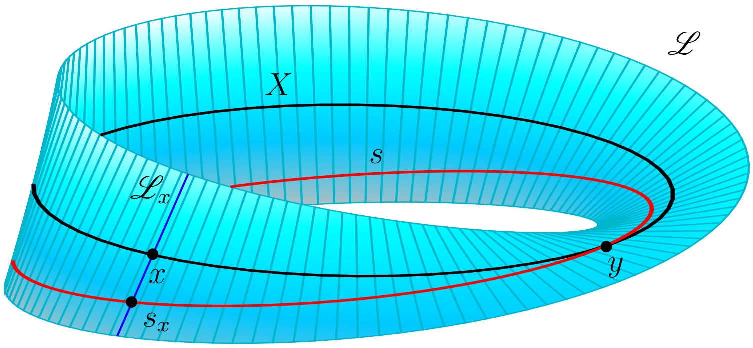
Ni težko videti, da je ta definicija dobra. Če izberemo nek drug $v_x \in \mathscr{L}_x \smallsetminus \mathfrak{m}_x\mathscr{L}_x$ in zapišemo $s_x = g_x v_x$, bo $g_x = f_x h_x$, kjer je $u_x = h_x v_x$. Po predpostavkah mora biti h_x obrnljiv holomorfen zarodek, tj. $h_x \in \mathscr{O}_{X,x} \smallsetminus \mathfrak{m}_x$, in zato

$$\mathrm{ord}_x(g_x) = \mathrm{ord}_x(f_x h_x) = \mathrm{ord}_x(f_x) + \mathrm{ord}_x(h_x) = \mathrm{ord}_x(f_x).$$

Torej je red neodvisen od izbire generatorja u_x. Zdaj lahko v skladu s primerom 3.3 vsakemu meromorfnemu prerezu s priredimo divizor po predpisu

$$\mathrm{div}(s) = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(s) x.$$

Razred divizorja $\mathrm{div}(s)$ za neničelni globalni meromorfni prerez s obrnljivega snopa $\mathscr{L}$ imenujemo *prvi Chernov razred snopa* $\mathscr{L}$ in označimo $c_1(\mathscr{L})$. Naslednji izrek bo med drugim objasnil, da opisana konstrukcija ni odvisna od izbire s.



Slika 4. Obrnljiv snop $\mathscr{L}$ na kompaktni Riemannovi ploskvi X je v skladu z opombo 2.32 prikazan[4] kot disjunktna unija svojih bilk. Z rdečo je označen njegov neničelen globalni prerez s, ki v vsaki točki določa element $s_x \in \mathscr{L}_x$. Velja $\mathrm{div}(s) = y$ in to je torej $c_1(\mathscr{L})$.

Izrek 3.11. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Predpis $\mathscr{L} \mapsto c_1(\mathscr{L})$ porodi homomorfizem grup $c_1 \colon \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$, ki je izomorfizem inverzen homomorfizmu opisanemu v lemi 3.8 .*

Dokaz. Recimo, da sta s in s' dva neničelna meromorfna prereza obrnljivega snopa $\mathscr{L}$. Naj bo $\{U_i\}$ odprto pokritje za X skupaj z izomorfizmi $\mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}$. Ti inducirajo izomorfizme $\mathscr{M}_X(\mathscr{L})|_{U_i} \cong \mathscr{M}_{U_i}$ in iz lastnosti lepljenja sledi, da je podati meromorfen prerez s snopa ekvivalentno kot podati po eno meromorfno funkcijo $s|_{U_i}$ na vsakem U_i, tako da zadoščajo očitnim kompatibilnostnim pogojem na presekih. Ker je $\mathscr{L}$ obrnljiv snop, sledi iz teh kompatibilnostnih pogojev, da je za vse i, j

$$\left.\frac{s|_{U_i}}{s'|_{U_i}}\right|_{U_i \cap U_j} = \left.\frac{s|_{U_j}}{s'|_{U_j}}\right|_{U_i \cap U_j},$$

[4] Slika 3.2 morda lahko deluje nekoliko zavajajoča. Na njej je holomorfen vektorski svežnj, vselej orientabilna mnogoterost, predstavljen z Möbiusovim trakom, znanim po svoji neorientabilnosti. Bralec lahko to pripiše dejstvu, da večina slik v topologiji in geometriji služi predvsem posredovanju intuicije o vpletenih prostorih in ne nujno o njihovem dejanskem izgledu (tako kot je tudi Riemannovo ploskev nepravilno predstsaviti kot krog ali krivuljo). Alternativno lahko opazi, da v algebraični geometriji nad $\mathbb{R}$ velja $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$ in vektorski sveženj pripadajoč snopu $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(-1)$ dejansko sovpada z (neskončnim) Möbiusovim trakom kot svežnjem nad S^1, torej je v kontekstu realne geometrije slika 3.2 povsem pravilna.

torej se ti prerezi zlepijo do enolično določene meromorfne funkcije $f = s/s' \in \mathscr{M}_X(X)$. Iz konstrukcije je očitno, da velja $s = fs'$, in zato

$$\operatorname{div}(s) - \operatorname{div}(s') = \operatorname{div}(f),$$

kar pokaže, da je prvi Chernov razred neodvisen od izbire meromorfnega prereza s.

Sedaj recimo, da je $\mathscr{L}'$ še en obrnljiv snop na X in naj bo $\varphi: \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ izomorfizem. Z njim je induciran izomorfizem $\varphi: \mathscr{M}_X(\mathscr{L}) \to \mathscr{M}_X(\mathscr{L}')$. Če je s globalni meromorfni prerez snopa $\mathscr{L}$, potem je $s' = \varphi_X(s)$ globalni meromorfni prerez snopa $\mathscr{L}'$. Ker je φ izomorfizem, je izomorfizem tudi morfizem $\mathscr{O}_{X,x}$-modulov, ki ga inducira na bilkah nad poljubno točko x. Iz definicije stopnje zarodka meromorfnega prereza sledi, da je

$$\operatorname{ord}_x(s) = \operatorname{ord}_x(s_x) = \operatorname{ord}_x(\varphi_x(s_x)) = \operatorname{ord}_x(\varphi_X(s)_x) = \operatorname{ord}_x(s').$$

Točka $x \in X$ je bila pri tem poljubna, zato je

$$c_1(\mathscr{L}) = \operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(s') = c_1(\mathscr{L}'),$$

kar pomeni, da je $c_1(\mathscr{L})$ neodvisen od izomorfnostnega razreda snopa $\mathscr{L}$ in res inducira preslikavo $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Cl}(X)$. Pokazati moramo še, da je homomorfizem $\mathscr{L}$ iz leme 3.8 njen inverz. Tedaj bo moral biti tudi c_1 homomorfizem. Sledilo bo namreč, da bo vsak obrnljiv snop do izomorfizma natančno oblike $\mathscr{L}(D)$ za nek divizor D, in potem bo po lemi 3.7

$$c_1(\mathscr{L}(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(D')) = c_1(\mathscr{L}(D + D')) = D + D' = c_1(\mathscr{L}(D)) + c_1(\mathscr{L}(D')).$$

Naj bo torej $\mathscr{L}$ lokalno obrnljiv snop, s njegov neničelen meromorfen prerez in označimo $D = \operatorname{div}(s)$. Množenje z $1/s$ inducira homomorfizem snopov $\varphi: \mathscr{L} \to \mathscr{M}_X$. Naj bo $s'_x \in \mathscr{L}_x$. Iz diskusije pred trditvijo vemo, da je $s'_x/s_x \in \mathscr{M}_{X,x}$ in velja

$$(1) \qquad \operatorname{ord}_x(s'_x/s_x) + \operatorname{ord}_x(D) = \operatorname{ord}_x(s'_x) - \operatorname{ord}_x(s_x) + \operatorname{ord}_x(s_x) = \operatorname{ord}_x(s') \geq 0,$$

saj je po definiciji stopnje zarodka $\operatorname{ord}_x(s') = \operatorname{ord}_x(f_x)$ za nek $f_x \in \mathscr{O}_{X,x}$, holomorfne funkcije pa ne morejo imeti polov, zato morajo imeti v vseh točkah nenegativno stopnjo. Po (1) je slika morfizma bilk $\varphi_x: \mathscr{L}_x \to \mathscr{M}_{X,x}$ vsebovana v $\mathscr{L}(D)_x \subset \mathscr{M}_{X,x}$, zato je φ v resnici morfizem snopov $\mathscr{L} \to \mathscr{L}(D)$. Množenje z s podaja morfizem snopov $\mathscr{L}(D) \to \mathscr{L}$, ki je očitno inverz morfizma φ, torej je to izomorfizem

$$\mathscr{L}(c_1(\mathscr{L})) = \mathscr{L}(D) \cong \mathscr{L}.$$

To pomeni, da je c_1 desni inverz homomorfizma $\mathscr{L}$, ki je po lemi 3.8 injektiven, zato mora biti tudi surjektiven in je izomorfizem. Posledično je c_1 njegov obojestranski inverz in je tudi sam izomorfizem. □

Sedaj vemo, da je vsak obrnljiv snop izomorfen snopu prirejenemu divizorju in, da je ta korespondenca podana s prvim Chernovim razredom. To bo igralo ključno vlogo v dekompozicijskih rezultatih za koherentne snope razdelka 4 in posledično v dokazu glavnega izreka. Pomen izreka 3.11 je hevristično v tem, da nam vprašanja o snopih, ki so "zvezni objekti", prevede na vprašanja o divizorjih, ki so "diskretni objekti".

Opomba 3.12. Skicirajmo alternativen pristop k prvemu Chernovemu razredu in dokazovanju izreka 3.11, ki je podrobneje izpeljan v [14, poglavje VII].

Mogoče je pokazati, da je grupa divizorjev $\mathrm{Div}(X)$ izomorfna globalnim prerezom kvocientnega snopa[5] $\mathscr{M}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times$, kjer $\mathscr{O}_X^\times$ in $\mathscr{M}_X^\times$ stojita za snop neničelnih holomorfnih oziroma meromorfnih funkcij. Divizor prirejen meromorfni funkciji pride iz zaporedja globalnih prerezov kanoničnega kratkega eksaktnega zaporedja snopov

$$0 \mapsto \mathscr{O}_X^\times \to \mathscr{M}_X^\times \to \mathscr{M}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times \to 0.$$

To pomeni, da je del pripadajočega kohomološkega dolgega eksaktnega zaporedja oblike

$$\mathscr{M}_X^\times(X) \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathscr{O}_X^\times) \to H^1(X, \mathscr{M}_X^\times).$$

Račun s Čechovo kohomologijo pokaže, da je $H^1(X, \mathscr{M}_X^\times) \cong 0$, iz česar sledi, da δ inducira izomorfizem $\mathrm{Cl}(X) \cong H^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$.

Naj bo $\{U_i\}$ pokritje ploskve X skupaj z izomorfizmi $\varphi_i : \mathscr{L}|_{U_i} \to \mathscr{O}_{U_i}$ za vsak i. Predpišimo $\varphi_{ij} = \varphi_i|_{U_{ij}} \circ \varphi_j^{-1}|_{U_{ij}}$, kar je element $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{U_{ij}}}(\mathscr{O}_{U_{ij}}, \mathscr{O}_{U_{ij}})$, torej se izraža kot množenje z nekim elementom $\mathscr{O}_X^\times(U_{ij})$. Očitno je zadoščeno kocikličnemu pogoju $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{kl} = 1$ za vse i, j, k, torej nabor φ_{ij} kot Čechov kocikel predstavlja element Čechove kohomologije pokritja $\check{H}^1(\{U_i\}, \mathscr{O}_X^\times)$. Različne izbire pokritja $\{U_i\}$ porodijo v limiti enoličen element grupe $\check{H}^1(X, \mathscr{O}_X^\times) = \varinjlim \check{H}^1(\{U_i\}, \mathscr{O}_X^\times)$. Za Riemannove ploskve po trditvi A.14 Čechova kohomologija sovpada s kohomologijo snopov, zato opisani postopek obrnljivemu snopu $\mathscr{L}$ priredi element $\varepsilon(\mathscr{L})$ v kohomološki grupi $H^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$. Po prehodu na izomorfnostne razrede obrnljivih snopov dobimo izomorfizem $\varepsilon : \mathrm{Pic}(X) \to H^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$.

Ekpliciten račun pokaže, da kompozitum $\varepsilon^{-1} \circ \delta$ sovpada s homomorfizmom $\mathscr{L}$ iz leme 3.8. Torej bi lahko prvi Chernov razred definirali kot $c_1(\mathscr{L}) = \delta^{-1} \circ \varepsilon(\mathscr{L})$ in zaključek izreka 3.11 bi bil neizbežen.

Opomba 3.13. *Eksponentno zaporedje* je ime za kratko eksaktno zaporedje snopov abelovih grup na X

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X^\times \to 0,$$

v katerem prva puščica celemu številu n priredi konstantno funkcijo $2\pi i n$, desna puščica pa je lokalno podana s predpisom $f \mapsto \exp(f)$. Porojeno kohomološko dolgo eksaktno zaporedje med drugim sestavlja morfizem $H^1(X, \mathscr{O}_X^\times) \to H^2(X, \mathbb{Z})$. Če ga komponiramo z izomorfizmom ε iz opombe 3.12, dobimo homomorfizem $\mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$. To je preslikava, ki je v topologiji in diferencialni geometriji razumljena pod imenom prvi Chernov razred. Kljub temu v nadaljevanju ne bo zmede, saj se bomo omejili izključno na algebraično-geometrijski pojem Chernovega razreda, s katerim smo se ukvarjali do zdaj.

3.3. **Funktorialnost in razvejišča.** Predpis $X \mapsto \mathrm{Div}(X)$ lahko na dva načina dopolnimo do funktorja: na kovarianten in na kontravarianten način.

Definicija 3.14. Naj bo $f : X \to Y$ holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev in naj bo D divizor na X. Njegov *potisk po* f je divizor na Y s predpisom

$$f_* D = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(D) f(x)$$

[5]Tako definirani divizorji nosijo ime *Cartierovi divizorji*, divizorji, kot jih sicer obravnavamo, pa *Weilovi divizorji*. Na nesingularnih prostorih X, torej tudi na Riemannovih ploskvah, se ta dva pojma ujemata, na singularnih prostorih pa so Cartierovi divizorji pogosto boljši pojem. Več je mogoče prebrati v [15, poglavje II, §6].

Če f ni konstantna, je za divizor D na Y njegov *povlek po* f divizor na X podan s predpisom

$$f^*D = \sum_{y \in Y} \mathrm{ord}_y(D) \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x(f)\, x \Big).$$

Kratek račun pokaže, da sta oba predpisa fuktorialna, tj. da za vsaki holomorfni preslikavi $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ velja $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ in $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ ter, da je $(\mathrm{id}_X)_* = (\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Div}(X)}$.

Primer 3.15. Za holomorfno preslikavo $f\colon X \to Y$ in točko $y \in Y$ lahko divizor f^*y razumemo kot prasliko točke y skupaj z večkratnostjo. Tako bi v analogiji med linearno ekvivalenco in homotopijo bilo pravilno reči, da je $D = f^*0$ in $D' = f^*\infty$ za meromorfno funkcijo $f\colon X \to \mathbb{P}^1$, katere divizor je $D - D'$.

Primer 3.16. Posebej pomemben je potisk po konstantni preslikavi $f\colon X \to *$. Imenujemo ga *stopnja divizorja* in, po identifikaciji $\mathrm{Div}(*) = \mathbb{Z}$, dani s predpisom $a \cdot * \mapsto a$, se stopnja za divizor D na X izraža kot

$$\deg(D) = f_*D = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(D).$$

Stopnja tako podaja homomorfizem grup $\deg\colon \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$.

Trditev 3.17 ([10, str. 18, Izrek 5])**.** *Naj bo $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Število* $\deg f^*y$ *je neodvisno od točke $y \in Y$. Velja neenakost $|f^{-1}(y)| \le \deg f^*y$, ki je enakost za vse točke $y \in Y$ razen za končno mnogo.*

Število $\deg f^*y$ imenujemo *globalna stopnja* ali samo *stopnja preslikave f*. Kot ime nakazuje, se ujema s topološkim pojmom stopnje zvezne preslikave, ki ga najdemo npr. v [34, str. 275]. Trditev 3.17 je del širše topološke zgodbe, opisane podrobno v [11, poglavje 1 §4], ki pravi, da je vsaka nekonstantna holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev razvejan krov. Točke, nad katerimi $f\colon X \to Y$ ni krov, ali ekvivalentno, kjer v trditvi 3.17 velja neenakost, se imenujejo *razvejišča*, in, če obstajajo, pravimo, da je preslikava f *razvejana* ali, da je *ramificirana*[6]. Podatke o razvejiščih zapišemo z dvema divizorjema: *ramifikacijski divizor* je divizor na X s predpisom

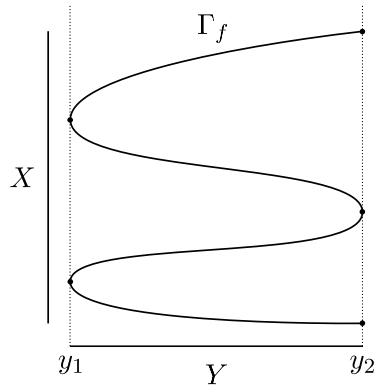
$$R_f = \sum_{x \in X} (\deg_x(f) - 1)x,$$

razvejiščni divizor pa je njegov potisk po f na Y, torej upoštevajoč definicijo potiska,

$$B_f = \sum_{y \in Y} \big(d - |f^{-1}(y)|\big)y,$$

kjer je d stopnja preslikave f.

[6] V kompleksni analizi se izraza razvejanost in ramifikacija pogosto uporabljata enakovredno, vendar obstaja subtilna distinkcija. Razvejanost je topološki pojem, ki izraža koliko preslikavi manjka do krova. Ramifikacija pa je algebraičen pojem, ki je poleg geometrije prominenten tudi v teoriji števil, glej npr. [32, poglavje III], kjer se tiče razcepa na praideale v celoštevilskih kolobarjih (številksih) obsegov. Povezavo med tema dvema pojmoma daje algebraična geometrija, ki omogoča poenoteno obravnavo algebraičnih krivulj in številskih obsegov, kot obrazloženo v [15, poglavje IV] ali [9, poglavje IV.11]. V tem delu se bomo, kar se tiče ramifikacije in razvejanosti, držali konvencij iz [15].



SLIKA 5. Za holomorfno preslikavo $f: X \to Y$ s takšnim grafom bi bilo $d = 4$ in $B_f = 2y_1 + y_2$.

Opomba 3.18. Pojem ramifikacije je mogoče opisati tudi bolj analitično: holomorfna preslikava $f: X \to Y$ je ramificirana natanko v tistih točkah $x \in X$, v katerih je $\det J_f(x) = 0$. Tu je $J_f(x)$ Jacobijeva matrika preslikave f v točki x, če nanjo gledamo kot na gladko preslikavo med gladkima ploskvama X in Y. Ramifikacijski divizor je torej vsota kritičnih točk štetih z večkratnostmi, razvejiščni divizor pa je vsota kritičnih vrednosti štetih z večkratnostmi.

S pomočjo trditve 3.17 je mogoče podati odgovor na zelo naravno vprašanje: kaj se zgodi, če naredimo zapored povlek in potisk divizorja po isti holomorfni preslikavi.

Posledica 3.19. *Naj bo $f: X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev stopnje d. Za vsak divizor D na Y velja*

$$f_* f^* D = d \cdot D.$$

Dokaz. Tako f_* in f^* sta homomorfizma abelovih grup, zato je formulo dovolj dokazati na generatorjih. Grupa $\mathrm{Div}(Y)$ je generirana s točkami $y \in Y$ in po trditvi 3.17 ter definiciji potiska je

$$f_* f^* y = f_* \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} d \cdot x \Big) = d \cdot y,$$

s čimer je posledica dokazana. □

Druga posledica trditve 3.17 je posplošitev principa argumentov iz klasične kompleksne analize v eni spremenljivki.

Posledica 3.20. *Za kompaktno Riemannovo ploskev X in vsak $f \in \mathscr{M}_X^\times(X)$ velja* $\deg \mathrm{div}(f) = 0$.

Dokaz. Po definiciji povleka in divizorja meromorfne funkcije je $\mathrm{div}(f) = f^* 0 - f^* \infty$, trditev 3.17 pa zagotavlja, da velja $\deg f^* 0 = \deg f^* \infty$. □

V luči primera 3.15 lahko posledico 3.20 izrazimo kot trditev, da imajo meromorfne funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah vedno enako število ničel in polov, če jih le štejemo z večkratnostjo. Iz nje sledi tudi, da je stopnja dobro definirana ne le na divizorjih, ampak tudi na razredih divizorjev, saj za $D - D' = \mathrm{div}(f)$ sledi, da mora biti $\deg D - \deg D' = 0$. Tako dobimo za vsako kompaktno Riemannovo ploskev X homomorfizem $\deg: \mathrm{Cl}(X) \to \mathbb{Z}$.

Izkaže se, da so razvejišča tesno povezana z diferencialnimi formami. Spomnimo se iz primera 2.22, da je snop holomorfnih diferencialnih form Ω_X obrnljiv snop. Njegov prvi Chernov razred imenujemo *kanonični divizor ploskve* X in označimo $K_X = c_1(\Omega_X)$. V luči definicije prvega Chernovega razreda je $K_X = \operatorname{div}(\omega)$ za poljubno neničelno globalno meromorfno diferencialno formo ω, tj. neničelen element $\omega \in \mathscr{M}_X(\Omega_X)$, in velja $\Omega_X \cong \mathscr{L}(K_X)$. Naslednji izrek pravi, da lahko vse o razvejiščih dane holomorfne preslikave izvemo tako, da opazujemo kako deluje na kanoničnem divizorju.

Izrek 3.21 (Riemann-Hurwitz)**.** *Naj bo $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Potem velja $R_f = K_X - f^*K_Y$.*

Dokaz. Fiksirajmo točko $x \in X$ in izberimo lokalne koordinate z na X okoli točke x in w na Y okoli točke $f(x)$, tako da velja $z(x) = w(f(x)) = 0$. Izberemo jih lahko tako, da se f lokalno izraža kot $w = z^n$, kjer je $n = \deg_x(f)$. Naj bo ω poljubna neničelna globalna meromorfna diferencialna forma na Y. Na koordinatni okolici U točke $f(x)$ jo je mogoče zapisati kot $\omega|_U = g(w)\,dw$ za nek $g \in \mathscr{M}_Y^\times(w(U))$. Na preseku $f^{-1}(U)$ s koordinatno okolico točke x podajmo lokalen meromorfen prerez snopa Ω_X kot

$$(g \circ f)\,df = n \cdot g(z^n) z^{n-1}\,dz. \tag{2}$$

Ko x preteče vse točke iz X, vidimo, da so ti lokalni prerezi kompatibilni in tako po lastnosti lepljenja dolačijo globalno meromorfno diferencialno formo na X, ki jo označimo $f^*\omega$. Iz lokalnega zapisa (2) forme $f^*\omega$ lahko preberemo, da v vsaki točki $x \in X$ velja

$$\operatorname{ord}_x(f^*\omega) = \deg_x(f)\operatorname{ord}_{f(x)}(\omega) + \deg_x(f) - 1.$$

Sedaj iz definicije ramifikacijskega divizorja sledi, da je

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f^*\omega) &= \sum_{x\in X}\Big(\operatorname{ord}_{f(x)}(\omega)\deg_x(f) + \deg_x(f) - 1\Big)x \\
&= \sum_{x\in X}\operatorname{ord}_{f(x)}(\omega)\deg_x(f)\cdot x + R_f \\
&= \sum_{y\in Y}\operatorname{ord}_y(\omega)\Big(\sum_{x\in f^{-1}(y)}\deg_x(f)x\Big) + R_f \\
&= \sum_{y\in Y}\operatorname{ord}_y(\omega) f^*y + R_f \\
&= f^*\operatorname{div}(\omega) + R_f,
\end{aligned}$$

in po trditvi 3.11 je izrek dokazan. □

Riemann-Hurewitzov izrek lahko ekvivalentno ubesedimo v jeziku snopov. Tedaj pravi, da je snop prirejen ramifikacijskem divizorju R_f natanko kvocientni snop $\Omega_{X/Y} = \Omega_X/f^*\Omega_Y$. Ta snop je v algebraični geometriji znan pod imenom *snop relativnih diferencialov* in je iz njega mogoče razbrati mnogo o gladkosti preslikave f, kot opisano v [15, poglavje II §8]. Če je $f\colon X \to Y$ konstantna preslikava, jo identificiramo s preslikavo $X \to *$ v enotočkoven prostor na katerem so vse funkcije konstantne. Torej ne more biti diferencialnih form in je snop relativnih diferencialov v tem primeru edino smiselno definirati kot $\Omega_{X/Y} = \Omega_X$.

V zgornji diskusiji smo privzeli, da je $f_*\Omega_X = \mathscr{L}(f_*K_X)$, oziroma, da povlek po f komutira s Chernovim razredom, kar ni težko preveriti.

Lema 3.22. *Naj bo $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Povlek divizorjev porodi homomorfizem $f^*\colon \mathrm{Cl}(Y) \to \mathrm{Cl}(X)$ in za vsak obrnljiv snop $\mathscr{L}$ na Y velja $f^*c_1(\mathscr{L}) = c_1(f^*\mathscr{L})$.*

Dokaz. Da bo f induciral homorfizem med razrednimi grupami, je zadostno in potrebno, da nese divizorje meromorfnih funkcij na Y v divizorje meromorfnih funkcij na X. To pa velja, saj je za $g \in \mathscr{M}_Y^\times(Y)$ po definicji povleka divzorja $f_* \operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(g \circ f)$.

Naj bo zdaj D poljuben divizor na Y. Vemo, da se na meromorfnih funkcijah povlek $f^*\colon \mathscr{M}_Y \to \mathscr{M}_X$ izraža s kompozicijo z f na desni, in po definiciji reda v točki velja za vsak $x \in X$ in vsak zarodek $g \in \mathscr{M}_{Y,f(x)}$

$$\operatorname{ord}_x(g \circ f) + \operatorname{ord}_x(f^*D) = \big(\operatorname{ord}_{f(x)}(g) + \operatorname{ord}_{f(x)}(D)\big) \deg_x(f).$$

Ker preslikava f ni konstantna, je $\deg_x(f) > 0$, torej sledi, da je $g \circ f \in \mathscr{L}(f^*D)_x$ natanko tedaj, ko je $g \in \mathscr{L}(D)_{f(x)}$. To pomeni, da povlek po f^* slika bilke podsnopa $\mathscr{L}(D) \subset \mathscr{M}_Y$ izomorfno v bilke podsnopa $\mathscr{L}(f^*D) \subset \mathscr{M}_X$. Posledično je $f^*\mathscr{L}(D) = \mathscr{L}(f^*D)$, kar je ekvivalentno kompatibilnosti s prvim Chernovim razredom, po kateri sprašuje trditev. $\square$

Spoznali smo, da lahko prireditvi $X \mapsto \operatorname{Pic}(X)$ in $X \mapsto \operatorname{Cl}(X)$ razumemo kot kontravariantna funktorja iz kategorije kompaktnih Riemannovih ploskev z nekonstantnimi holomorfnimi preslikavami za morfizme v kategorijo abelovih grup. Lema 3.22 pravi, da podaja prvi Chernov razred naravno transformacijo $c_1\colon \operatorname{Pic} \to \operatorname{Cl}$ med tema dvema funktorjema.

4. Struktura koherentnih snopov

Cilj tega razdelka je razviti strukturno teorijo koherentnih snopov na kompaktnih Riemannovih ploskvah, ki bo omogočala prevedbo vprašanj o koherentnih snopih na vprašanja o obrnljivih snopih.

4.1. Grothendieckova grupa.

Glede na to, da kratka eksaktna zaporedja koherentnih snopov v splošnem niso razcepna, se težko nadejamo posebej pomenljivih dekompozicijskih rezultatov za koherentne snope same. Pač pa lahko upamo na takšne rezultate na nivoju kratkih eksaktnih zaporedij.

Definicija 4.1. *Grothendieckova grupa* ali *K-grupa* Riemannove ploskve X je kvocientna grupa

$$K(X) = \mathbb{Z}\langle \operatorname{Coh}(X) \rangle / R$$

proste abelove grupe generirane s koherentnimi snopi[7] na X po podgrupi R generirani z elementi $\mathscr{F} - \mathscr{F}' - \mathscr{F}''$ za vsa kratka eksaktna zaporedja

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0.$$

Ideja za Grothendieckovo grupo je, da bi si želeli obstoj kratkega eksaktnega zaporedja snopov

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

predstavljati kot dejstvo, da je $\mathscr{F} \cong \mathscr{F}' \otimes \mathscr{F}''$. Vendar to ni res; vsako kratko eksaktno zaporedje koherentnih snopov namreč ni razcepno. K-grupa je poskus, da se tej nevšečnosti izognemo in na silo naredimo vsako kratko eksaktno zaporedje razcepno.

Podobno kot pri razredni grupi divizorjev ne bomo notacijsko razlikovali koherentnega snopa $\mathscr{F}$ od njegove slike v K-grupi po kanonični inkluziji $\operatorname{Coh}(X) \to K(X)$. Za katero situacijo gre, naj bi bilo razvidno iz konteksta.

[7] Strogo gledano je potrebno vzeti izomorfnostne razrede koherentnih snopov, saj bi sicer dobili pravi razred. Na množično-teoretične podrobnosti te vrste se v splošnem ne bomo ozirali.

Grothendieckovo grupo je mogoče karakterizirati tudi z univerzalno lastnostjo. Pravimo, da je preslikava $\varphi\colon \mathrm{Coh}(X) \to G$ za poljubno abelovo grupo G *aditivna*, če za vsako kratko eksaktno zaporedje koherentnih snopov

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

velja $\varphi(\mathscr{F}) = \varphi(\mathscr{F}') + \varphi(\mathscr{F}'')$.

Lema 4.2. *Naj bo X Riemannova ploskev in G abelova grupa. Vsak homomorfizem grup $K(X) \to G$ je enolično določen z aditivno preslikavo $\mathrm{Coh}(X) \to G$.*

Dokaz. Če je $\varphi\colon K(X) \to G$ homomorfizem grup, potem je neposredno po definiciji K-grupe kompozitum z inkluzijo $\mathrm{Coh}(X) \to K(X)$ aditiven. Po drugi strani se vsaka aditivna preslikava $\varphi\colon \mathrm{Coh}(X) \to G$ razširi do homomorfizma $\varphi\colon K(X) \to G$ po predpisu $\varphi(\mathscr{F} + \mathscr{F}') = \varphi(\mathscr{F}) + \varphi(\mathscr{F}')$. Aditivnost φ zagotavlja, da je to dobro definirano, in opisana korespondenca je očitno bijektivna. □

Lema 4.2 razkriva uporabnost K-grupe; vsako vprašanje o koherentnih snopih, v katerih koherentni snopi nastopajo aditivno, je ekvivalentno proučevati v kontekstu Grothendieckove grupe. Izkazalo se bo, da vprašanja tipa Riemann-Roch sodijo v to kategorijo.

Pojem K-grupe spominja na Picardovo grupo v tem, da sta obe grupi konstruirani iz določenih snopov, le da so za Grothendieckovo grupo to vsi koherentni snopi namesto zgolj obrnljivih. Glede na to, da povlek snopov inducira na prireditev $X \mapsto \mathrm{Pic}(X)$ strukturo kovariantega funktorja, se lahko vprašamo ali isto velja za prireditev $X \mapsto K(X)$. Lahko je videti, da je temu tako, saj je za holomorfno preslikavo $f\colon X \to Y$ povlek $f^*\colon \mathrm{Coh}(Y) \to \mathrm{Coh}(X)$ definiran kot kompozicija dveh funktorjev: $f^{-1}\colon \mathrm{Coh}(Y) \to \mathrm{Mod}_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}(X)$, ki je očitno aditiven in tenzorski produkt $- \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X\colon \mathrm{Mod}_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}(X) \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X)$, ki je aditiven po definiciji snopov $\mathscr{O}_X$-modulov. Tu za snop kolobarjev $\mathscr{R}$ na X označuje $\mathrm{Mod}_{\mathscr{R}}$ kategorijo snopov $\mathscr{R}$-modulov.

Poleg povleka poznamo za snope še potisk po holomorfni preslikavi. Seveda ni pričakovati, da bi ta induciral funktorsko strukturo na Picardovo grupo; četudi je snop $\mathscr{L}$ na X obrnljiv, njegov potisk $f_*\mathscr{L}$ po holomorfni preslikavi $f\colon X \to Y$ v splošnem ne bo obrnljiv, temveč bo lahko imel višji rang. Po drugi strani za Grothendieckovo grupo ta ovira izgine:

Izrek 4.3 (Grauert)**.** *Naj bo $f\colon X \to Y$ holomorfna preslikava kompaktnih Riemanovih ploskev in naj bo $\mathscr{F}$ koherenten snop na X. Tedaj je $R^i f_* \mathscr{F}$ koherenten snop na Y za vsako nenegativno celo število i.*

Dokaz mnogo močnejše oblike tega slovitega izreka je mogoče najti v [13, 10]. V posebnem za $i = 0$ iz njega sledi, da f_* ohranja koherentnost. Morda bi pričakovali, da se bo predpis $\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F}$ razširil do homomorfizma $f_*\colon K(X) \to K(Y)$, vendar to ni mogoče. Po lemi 4.2 vemo, da bi za to moralo veljati, da je $\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F}$ aditivna preslikava $\mathrm{Coh}(X) \to K(Y)$, torej bi želeli, da je za kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

koherentnih snopov na X tudi njegova slika po f_* eksaktna na Y. Vemo, da to v splošnem ni res; funktor f_* je samo levo eksakten. Namesto tega dobimo iz višjih direktnih slik dolgo eksaktno zaporedje

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^0 f_* \mathscr{F}' \arrow[r] & R^0 f_* \mathscr{F} \arrow[r] & R^0 f_* \mathscr{F}'' \arrow[dll, rounded corners] & \\
& R^1 f_* \mathscr{F}' \arrow[r] & R^1 f_* \mathscr{F} \arrow[r] & R^1 f_* \mathscr{F}'' \arrow[dll, rounded corners] & \\
& R^2 f_* \mathscr{F}' \arrow[r] & R^2 f_* \mathscr{F} \arrow[r] & R^2 f_* \mathscr{F}'' \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

snopov na Y, ki so po Grauertovem izreku koherentni. Torej v grupi $K(Y)$ velja[8]

$$
\begin{aligned}
0 &= R^0 f_* \mathscr{F}' - R^0 f_* \mathscr{F} + R^0 f_* \mathscr{F}'' - R^1 f_* \mathscr{F}' + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(R^i f_* \mathscr{F}' - R^i f_* \mathscr{F} + R^i f_* \mathscr{F}'' \right)
\end{aligned}
$$

in, če definiramo *izpeljani potisk snopa* $\mathscr{F}$ *po preslikavi* f kot

$$f_! \mathscr{F} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i R^i f_* \mathscr{F},$$

sledi iz povedanega naslednja trditev:

Trditev 4.4. *Naj bo* $f \colon X \to Y$ *holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Potem izpeljani potisk porodi homomorfizem* $f_! \colon K(X) \to K(Y)$.

V primeru 4.6 bomo videli nemara najpomembnejšo posebno obliko potiska, za kar bomo potrebovali enostaven drobec linearne algebre.

Lema 4.5. *Za vsako eksaktno zaporedje končno dimenzionalnih vektorskih prostorov*

$$0 \to V_1 \to V_2 \to \dots \to V_n \to 0$$

velja $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim V_i = 0$.

Dokaz. Če je $n = 1$ ali $n = 2$, lema očitno velja. Privzemimo, da smo jo že dokazali za vsa eksaktna zaporedja dolžine n. Oglejmo si eksaktno zaporedje

$$0 \to V_1 \to V_2 \to \dots \to V_{n+1} \to 0$$

vektorskih prostorov. Velja $V_1 = \ker(V_2 \to V_3)$, zato je zaporedje

$$0 \to V_2/V_1 \to V_3 \to \dots \to V_{n+1} \to 0$$

eksaktno. Njegova dolžina je n, zato po uporabi indukcijske predpostavke velja

$$\sum_{i=0}^{n} (-1) \dim V_i = \dim V_2/V_1 + \sum_{i=3}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0,$$

kjer smo upoštevali, da je $\dim V_2/V_1 = \dim V_2 - \dim V_1$. □

Primer 4.6. Naj bo $f \colon X \to Y$ konstantna preslikava v točko $y_0 \in Y$. Nosilec potiska poljubnega snopa na X po f je le točka y_0, zato lahko rečemo, da $f_!$ jemlje vrednosti v podgrupi $K(y_0) \subseteq K(Y)$, ki jo generirajo snopi z nosilcem y_0. Vsak tak snop je enolično določen s svojo bilko nad y_0, torej jih lahko kanonično identificiramo s kompleksnimi vektorskimi prostori. Lahko je videti, da po tej identifikaciji koherentnost sovpada s končno dimenzionalnostjo. Dva vektorska prostora sta izomorfna natanko

[8] Notacija neskončnih vsot tu ne stoji za vrste, temveč za končne vsote nespecificirane dolžine. Kot bomo videli v posledici 4.9, je relevantno dolgo eksaktno zaporedje končno, in so zato sumandi v vsoti od nekje naprej vsi enaki nič.

tedaj, ko imato ista dimenzijo, zato po lemi 4.5 predpis na generatorjih $V \mapsto \dim V$ določa izomorfizem $K(y_0) \cong \mathbb{Z}$. Za snop $\mathscr{F}$ na X velja

$$(f_*\mathscr{F})_{y_0} = \Gamma(f^{-1}(y_0), \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$$

in podobno za višje direktne slike velja $(R^i f_*\mathscr{F})_{y_0} = H^i(X, \mathscr{F})$. Če je snop $\mathscr{F}$ koherenten, je potem po Grauertovem izreku $\dim H^i(X, \mathscr{F}) < \infty$ za vsako nenegativno celo število i. Izpeljani potisk po konstantni preslikavi f

$$f_!\mathscr{F} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathscr{F})$$

imenujemo *Eulerjeva karakteristika* snopa $\mathscr{F}$ in jo označimo $\chi(\mathscr{F})$. Trditev 4.4 skupaj z lemo 4.2 torej zagotavlja, da je $\chi\colon \mathrm{Coh}(X) \to \mathbb{Z}$ aditivna preslikava za vsako kompaktno Riemannovo ploskev X.

Opomba 4.7. Notacija za grupo $K(y_0)$ ni naključna. Če bi, kot omenjeno v opombi 2.12, gledali na y_0 kot na ničdimenzionalno kompleksno mnogoterost, bi bila to dejansko njegova Grothendieckova grupa. Namesto tega bo zadoščalo, da jo bomo po opisanem izomorfizmu vselej identificirali z $\mathbb{Z}$.

Primer 4.6, natančneje pojem Eulerjeve karakteristike, je v srcu kroga idej okoli Riemann-Rochovih izrekov in glavni razlog, da smo izpeljani potisk definirali z višjimi direktnimi slikami, je, da naravno pripelje do njega. Prednost tega pristopa je, da je skrajno konceptualen, ter deluje brez sprememb tudi v višjih dimenzijah, kjer dejansko ne gre drugače. V primeru kompaktnih Riemannovih ploskev pa je mogoče izpeljani potisk izraziti na način, ki obide višje direktne slike. Ključen je naslednji izrek, katerega dokaz je delegiran v razdelek B.

Izrek 4.8. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev in $\mathscr{F}$ koherenten snop na njej. Za vsak $i \geq 2$ velja $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$.*

Posledica 4.9. *Naj bo $f\colon X \to Y$ holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev in naj bo $\mathscr{F}$ koherenten snop na X. Tedaj v $K(f(X))$ velja $f_!\mathscr{F} = \dim \Gamma(X, \mathscr{F}) - \dim H^1(X, \mathscr{F})$, če je f konstantna, sicer pa $f_!\mathscr{F} = f_*\mathscr{F}$.*

Dokaz. Če je f konstantna, potem posledica sledi iz izreka 4.8. Naj torej f ne bo konstantna. Višje direktne slike snopa $\mathscr{F}$ po preslikavi f so definirane kot posnopitve predsnopa $U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathscr{F})$. Predsnop in njegova posnopitev imata iste bilke, zato je za vsak $y \in Y$

$$(R^i f_*\mathscr{F})_y = \varinjlim_{U \ni y} H^i(f^{-1}(U), \mathscr{F}) = H^i(f^{-1}(y), \mathscr{F}).$$

Druga enakost tu velja zato, ker je $f^{-1}(U)$ za dovolj majhno okolico U točke y unija disjunktnih okolic praslik $f^{-1}(y)$. Po trditvi 2.10ima f končna vlakna, torej je $f^{-1}(y)$ končna množica točk in ima Lebesguovo krovno dimenzijo nič. Po lemi A.15 ima zato snop $R^i f_*\mathscr{F}$ za $i \geq 1$ trivialne bilke v vseh točkah in tako mora biti trivialen. $\square$

Iz posledice takoj sledi, da predpis $X \mapsto K(X)$ na Riemannovih ploskvah in $f \mapsto f_!$ na holomorfnih funkcijah podaja kovarianten funktor iz kategorije kompaktnih Riemannovih ploskev s holomorfnimi preslikavami za morfizme v kategorijo abelovih grup. Pokazati je treba, da je $(f \circ g)_! = f_! \circ g_!$, kar je očitno, ko je vsaj ena izmed preslikav konstantna, ko pa ni nobena konstantna, je to ravno funktorialnost potiska.

Opomba 4.10. Tudi v višjih dimenzijah je res, da predpis $f \mapsto f_!$ naredi Grothendieckovo grupo v kovarianten fuktor (iz kategorije katere morfizmi so prave preslikave, kar je v dimenziji 1 res za vse holomorfne preslikave), a v odsotnosti rezultata v duhu posledice 4.9 je dokaz zahtevnejši in se opira na Grothendieckovo spektralno zaporedje, glej [4, razdelek 5. d].

Analogija med Grothendieckovo in Picardovo grupo je motivirala velik del zgornje razprave, vendar je formalno malce drugačna, kot bi morda ugibali. Predpis $\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ seveda porodi preslikavo $\mathrm{Pic}(X) \to K(X)$, ni pa nemudoma jasno ali gre za homomorfizem grup. Vzrok je v tem, da opazujemo $K(X)$ z napačno operacijo; poleg opisane grupne strukture, ki jo narekujejo kratka eksaktna zaporedja, nosi namreč tudi strukturo kolobarja. Kako jo definirati sugerira trditev 4.12

Lema 4.11. *Naj bo F prost R-modul. Tenzoriranje z F, torej $M \mapsto M \otimes_R F$, je eksakten funktor na kategoriji R-modulov.*

Dokaz. Vsak prost modul F je izomorfen direktnemu produktu R^n za nek $n \geq 1$ in preko tega izomorfizma funktor $M \mapsto M \otimes_R F$ sovpada s funktorjem $M \mapsto M^n$, ki je očitno eksakten. □

Trditev 4.12. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev in $\mathscr{E}$ lokalno prost snop na njej. Tenzoriranje z $\mathscr{E}$ ohranja eksaktna zaporedja, tj. predpis $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}$ podaja aditivno preslikavo* $\mathrm{Coh}(X) \to K(X)$.

Dokaz. Eksaktnost zaporedij snopov je dovolj preverjati na bilkah. Za vsak $x \in X$ je bilka $\mathscr{E}_x$ prost modul nad lokalnim kolobarjem $\mathscr{O}_{X,x}$, zato rezultat sledi iz leme 4.11 in tega, da je $(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E})_x = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{E}_x$ za vsak snop $\mathscr{F}$ in vsako točko $x \in X$. □

Množenje z lokalno prostim snopom $\mathscr{E}$ lahko torej na X definiramo tako, da za koherenten snop $\mathscr{F}$ predpišemo $\mathscr{E} \cdot \mathscr{F} = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}$. Zahvaljujoč posledici 4.33, je operacija množenja s tem že enolično določena na celem $K(X)$ in iz lastnosti tenzorskega produkta sledi, da s tem $K(X)$ postane kolobar. V luči tega je kanonična preslikava $\mathrm{Pic}(X) \to K(X)$ vložitev grupe multiplikativnih enot v kolobar.

Opomba 4.13. Za operacijo množenja na $K(X)$ je mogoče napisati ekspliciten predpis tudi za poljubna koherentna snopa $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$. Zaključek trditve 4.12 zanju ne velja, tenzoriranje z njima je v splošnem le desno eksaktno. Zato je potrebno ubrati podobno pot kot pri definiciji izpeljanega potiska in vzeti izpeljane funktorje iz tenzorskega produkta, ti. funktorje Tor, o katerih je mogoče prebrati v [21, poglavje XX, §6]. Formula za produkt se glasi

$$\mathscr{F} \cdot \mathscr{F}' = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Tor}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F}'),$$

kjer se enako kot pri izpeljanem potisku izkaže, da je vsota v resnici končna.

4.2. **Torzijski in prosti moduli.** V prihodnjem podrazdelku bomo potrebovali nekaj algebraičnih rezultatov. Brez vsake škode si jih lahko ogledamo v abstraktnem algebraičnem kontekstu.

Definicija 4.14. Naj bo M modul nad kolobarjem R. *Torzijski element* je takšen neničelen $x \in M$, da za nek neničelen $a \in R$ velja $ax = 0$. Torzijski elementi modula M tvorijo skupaj z 0 podmodul M^{tor}, ki se imenuje *torzijski podmodul.*

Lema 4.15. *Za vsak R-modul M velja* $(M^{\mathrm{tor}})^{\mathrm{tor}} = M^{\mathrm{tor}}$.

Dokaz. Vsak neničelen element torzijskega podmodula je po definiciji torzijski. □

Lema 4.16. *Naj bo M modul nad celostnim poljem R. Tedaj je kvocientni modul M/M^{tor} brez torzije.*

Dokaz. Recimo, da za $a \in R$ in $x \in M$ velja $a(x + M^{\mathrm{tor}}) = 0 + M^{\mathrm{tor}}$. To pomeni, da je $ax \in M^{\mathrm{tor}}$, zato obstaja nek neničelen $b \in R$, za katerega velja $b(ax) = 0$. Sledi, da je $(ba)x = 0$ in zato velja ali $x \in M^{\mathrm{tor}}$, v primeru česar je $x + M^{\mathrm{tor}} = 0 + M^{\mathrm{tor}}$, ali $ba = 0$. Ker R nima deliteljev niča, mora biti $a = 0$ in posledično $(M/M^{\mathrm{tor}})^{\mathrm{tor}} = 0$. □

Lema 4.17. *Naj bo R celostno polje in M končno generiran R-modul, ki ni enak svojemu torzijskemu podmodulu. Tedaj obstaja maksimalen prost podmodul $F \subset M$ in velja $(M/F)^{\mathrm{tor}} = M/F$.*

Dokaz. Po predpostavki obstajajo elementi $x_1, \ldots, x_n \in M$, da je $M = Rx_1 + \ldots + Rx_n$. Če ne bi bil noben izmed modulov Rx_i prost, bi bilo $M = M^{\mathrm{tor}}$, čemur ni tako. Torej po indukciji in reindeksiranju velja, da obstaja neko število $1 \leq m \leq n$, da je $F = Rx_1 + \ldots + Rx_m$ maksimalen prost podumodul modula M. Če za $x \in M$ v kvocientnem kolobarju induciran element $x + F \in M/F$ ni torzijski, je $F + Rx$ prost podmodul modula M, zato mora biti $x \in F$ oziroma $x + F = 0 + F$. □

Lema 4.18. *Naj bo R glavni kolobar in F končno generiran prost R-modul na n generatorjih. Vsak podmodul $F' \subseteq F$ je prost R-modul na največ n generatorjih.*

Dokaz. Če je $n = 1$, je $F \cong R$. Podmoduli R-modula R so natančno ideali kolobarja R in predpostavka, da je R glavni, zagotavlja, da je vsak ideal generiran z enim elementom in zato prost.

Nadaljujmo z indukcijo po n in recimo, da smo lemo že dokazali za vse glavne kolobarje na $n-1$ generatorjih. Brez škode za splošnost naj bo $F = R^n$ in naj bo $\pi \colon R^n \to R^{n-1}$ projekcija na prvih $n-1$ faktorjev, torej $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Za podmodul $F' \subseteq F$ je po indukcijski predpostavki $\pi(F') \subseteq R^{n-1}$ prost R-modul na največ $n-1$ generatorjih. Vsak prost modul je projektiven, zato je kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \ker \pi|_{F'} \to F' \xrightarrow{\pi} \pi(F') \to 0$$

razcepno in je $F' \cong \pi(F') \oplus \ker \pi|_{F'}$. Jedro $\ker \pi|_{F'}$ je podmodul modula R, zato je prost. Direktna vsota prostih modulov je prosta in lema je dokazana. □

Trditev 4.19. *Če je R glavni kolobar in je M končno generiran R-modul brez torzije, potem je M prost R-modul.*

Dokaz. Naj bodo $x_1, \ldots, x_n$ generatorji modula M nad R. Po dokazu leme 4.17 obstaja število $1 \leq m \leq n$, da je $F = Rx_1 + \ldots + Rx_m$ maksimalen prost podmodul. Za vsak $m < i \leq n$ tako obstaja $a_i \in R \setminus \{0\}$, da je $a_i x_i \in F$. Njihov produkt $a = a_{m+1} \ldots a_n$ je tudi neničelen, saj je R celostno polje, in velja $aM \subseteq F$. Modul F je prost, zato je po lemi 4.18 tudi aM prost modul. Predpis $x \mapsto ax$ z inverzom $x \mapsto a^{-1}x$ podaja izomorfizem $M \cong Ma$, torej je M prost modul. □

Posledica 4.20. *Naj bo R glavni kolobar, M končno generiran R-modul. Naj bo $M^\vee = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ dualni R-modul in $\varphi \colon M \to M^{\vee\vee}$ homomorfizem R-modulov, ki elementu $x \in M$ priredi preslikavo $\varphi(x) \colon M^\vee \to R$ s predpisom $f \mapsto f(x)$. Tedaj velja* $\ker \varphi = M^{\mathrm{tor}}$.

Dokaz. Za vsak $x \in M^{\mathrm{tor}}$ obstaja nek neničelen $a \in R$, da je $ax = 0$. Za poljuben $f \in M^\vee$ je torej $0 = f(ax) = af(x)$ in zato, ker je R celostno polje, mora biti $f(x) = 0$. S tem smo pokazali inkluzijo $M^{\mathrm{tor}} \subseteq \ker\varphi$.

Za drugo inkluzijo denimo, da je $x \in M$ takšen element, da je $f(x) = 0$ za vsak $f \in M^\vee$. Po že dokazani inkluziji in univerzalni lastnosti kvocienta inducira kvocientna projekcija $M \to M/M^{\mathrm{tor}}$ surjekcijo $(M/M^{\mathrm{tor}})^\vee \to M^\vee$. Na podlagi trditve 4.19 lahko postavimo $M/M^{\mathrm{tor}} = R^n$ in zapišimo $x + M^{\mathrm{tor}} = (x_1, \dots, x_n)$ za neke elemente $x_i \in R$. Naj bo $f_i \in (R^n)^\vee$ funkcional $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$. Če naj bo $f(x) = 0$ za vsak $f \in M^\vee$, mora veljati $x_i = f_i(x) = 0$ za vsak $i = 0, \dots, n$. Torej je $x + M^{\mathrm{tor}} = 0$ in inkluzija $\ker\varphi \subseteq M^{\mathrm{tor}}$ je dokazana. □

4.3. **Dekompozicijski rezultati.** Kot že rečeno, je glavni cilj razdelka 4 izpeljati dekompozicijske rezultate za koherentne snope na kompaktni Riemannovi ploskvi. V predprejšnjem podrazdelku smo spoznali K-grupo, ki bo služila kot prizorišče za dekompozicijske izreke.

Stopimo sedaj korak nazaj in se vprašajmo, zakaj bi sploh želeli proučevati koherentne snope. V mnogih pogledih so namreč lokalno prosti snopi tisti, ki nas najbolj zanimajo in so nam najbolj domači. A o številnih vprašanjih je pogosto mnogo lažje razmišljati v kontekstu koherentnih snopov. Enega pomembnejših vzrokov za to – namreč, da lokalno prosti snopi niso zaprti za jemanje kojeder, oziroma ekvivalentno, za kvocientiranje – ilustrira naslednji primer.

Primer 4.21. Naj bo D efektiven divizor na kompaktni Riemannovi ploskvi. Iz definicije prirejenega snopa sledi, da je $\mathscr{L}(-D) \subseteq \mathscr{O}_X$. Naj bo $\mathscr{S}$ kojedro inkluzije $\mathscr{L}(-D) \to \mathscr{O}_X$, torej kvocientni snop $\mathscr{S} = \mathscr{O}_X/\mathscr{L}(-D)$. Vemo, da so koherentni snopi zaprti za jemanje kojeder, zato je $\mathscr{S}$ koherenten snop. Če je $\mathrm{ord}_x(D) = 0$ za nek $x \in X$, kar velja za vse razen končno mnogo točk, je $\mathscr{L}(-D)_x = \mathscr{O}_{X,x}$ in zato $\mathscr{S}_x \cong 0$. Naj bo obratno x takšna točka, da bo $\mathrm{ord}_x(D) = n$. Izberimo koordinato z okoli x, tj. da velja $z(x) = 0$. Tedaj lahko bilko $\mathscr{O}_{X,x}$ identificiramo s konvergenčnimi kompleksnimi potenčnimi vrstami v spremenljivki z, bilko $\mathscr{L}(-D)_x$ pa z vrstami, ki imajo v izhodišču vsaj n-kratno ničlo. Inkluzija $\mathscr{L}(-D)_x \to \mathscr{O}_{X,x}$ se potem izraža kot

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i z^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i,$$

torej lahko identificiramo $\mathscr{S}_x = \mathbb{C}^n$ in kanončni homomorfizmom $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{S}_x$ je podan s predpisom

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Vidimo torej, da $\mathscr{S}$ še zdaleč ni lokalno prost snop, četudi je kojedro morfizma dveh lokalno prostih snopov.

Tekom primera 4.21 smo spoznali nov razred koherentnih snopov, katerih ime je motivirano z vizualno predstavo snopa $\mathscr{F}$ kot unijo bilk $\mathscr{F}_x$ po vseh točkah $x \in X$, kjer je vsaka bilka prilepljena na pripadajočo točko.

Definicija 4.22. Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Snop $\mathscr{O}_X$-modulov $\mathscr{S}$ je *nebotičen*, če je za vsak $x \in X$ bilka $\mathscr{S}_x$ končno dimenzionalen kompleksen vektorski prostor in za vse točke x v komplementu neke končne množice velja $\mathscr{S}_x = 0$.

Opomba 4.23. Struktura $\mathscr{O}_X$-modula se za nebotičen snop izraža na naslednji način: za netrivialen prerez $s \in \mathscr{S}(U)$ nad dovolj majhno množico U obstaja natanko ena točka $x \in U$, nad katero ima $\mathscr{S}$ netrivialno bilko. Prerez s je enolično določen z induciranim zarodkom $s_x \in \mathscr{S}_x$ in za $f \in \mathscr{O}_X(U)$ mora prerez $f \cdot s \in \mathscr{S}(U)$ sovpadati z zarodkom $f(x) \cdot s_x \in \mathscr{S}_x$.

Primer 4.21 predstavlja vodilni primer nebotičnih snopov, zato je upravičen do poimenovanja. Za efektiven divizor D na X imenujemo za njegov *strukturni snop* kvocientni snop

$$\mathscr{O}_D = \mathscr{O}_X / \mathscr{L}(-D).$$

V tem kontekstu efektiven divizor razumemo kot podprostor $D \subset X$ dimenzije 0. Snop $\mathscr{L}(-D)$ je snop idealov, s katerim je D definiran, tj. divizor D je množica ničel lokalnih prerezov snopa $\mathscr{L}(-D)$. Njegov strukturni snop igra za D enako vlogo, kot jo igra snop $\mathscr{O}_X$ za X; oboje so funkcije na svojem prostoru. Ker je divizor D diskreten, bi za vsako točko x iz njegovega nosilca, tj. kjer $\mathrm{ord}_x(D) \neq 0$, pričakovali le konstantne funkcije, oziroma, da bo $\mathscr{O}_{D,x} \cong \mathbb{C}$. Vendar namesto tega velja $\mathscr{O}_{D,x} \cong \mathbb{C}^n$, kjer je $n = \mathrm{ord}_x(D)$. Geometrijska razlaga tega je, da strukturni snop prostora D v točki x ne vsebuje samo vrednosti funkcij[9] na D, temveč tudi njihove odvode vse do reda $n-1$.

Trditev 4.24. *Naj bo X kompaktna Riemnnanova ploskev in $\mathscr{S}$ nebotičen snop na njej. Tedaj obstaja z izomorfnostnim razredom snopa $\mathscr{S}$ enolično določen efektiven divizor D na X, da velja $\mathscr{S} \cong \mathscr{O}_D$.*

Dokaz. Naj bo $\mathscr{S}$ nebotičen snop in definirajmo divizor D s predpisom $\mathrm{ord}_x(D) = \dim \mathscr{S}_x$. Lokalen izračun v koordinatah iz primera 4.21 pokaže, da velja $\mathscr{O}_D \cong \mathscr{O}_X / \mathscr{L}(-D)$. Iz eksplicitnega predpisa je razvidno, da je tako podana prireditev med efektivnimi divizorji in izomorfnostnimi razredi nebotičnih snopov bijektivna. □

Trditev 4.24 je podobna izreku 3.11 v tem, da zajeten razred snopov povsem popisuje z divizorji. Med drugim iz nje sledi, da so vsi nebotični snopi koherentni. Pokazali bomo, da je vsak koherenten snop mogoče zapisati kot vsoto lokalno prostega in nebotičnega snopa, vsaj v kontekstu Grothendieckove grupe. Za to potrebujemo nekaj pomožnih rezultatov o koherentnih snopih.

Lema 4.25. *Naj bo X Riemannova ploskev in $\mathscr{F}$ koherenten snop na njej. Naj bo x poljubna točka na X in U njena odprta okolica. Če za množico prerezov $s_1, \ldots, s_n \in \mathscr{F}(U)$ velja, da zarodki $(s_1)_x, \ldots, (s_n)_x$ generirajo $\mathscr{O}_{X,x}$-modul $\mathscr{F}_x$, potem obstaja takšna odprta okolica $V \subseteq U$ točke x, da je $\mathscr{F}|_V = \mathscr{O}_V s_1 + \ldots + \mathscr{O}_V s_n$.*

Dokaz. Če označimo $\mathscr{F}' = \mathscr{O}_U s_1 + \ldots + \mathscr{O}_U s_n$, podaja inkluzija tega podsnopa morfizem $\mathscr{F}' \to \mathscr{F}|_U$ snopov $\mathscr{O}_U$-modulov. Po predpostavki je inducirani morfizem bilk $\mathscr{O}_x^n \to \mathscr{F}_x$ izomorfizem $\mathscr{O}_{X,x}$-modulov, torej ima inverz in po lemi 2.28 se ta razširi do morfizma $\mathscr{F}|_W \to \mathscr{O}_W^n$ za neko odprto okolico $W \subseteq U$ točke x. Kompozituma teh dveh morfizmov podajata na bilke v x zarodka idetitetnih prerezov snopov $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_W}(\mathscr{F}|_W, \mathscr{F}|_W)$ in v $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_W}(\mathscr{O}_W^n, \mathscr{O}_W^n)$, torej se po definiciji zarodkov na neki še manjši okolici $V \subseteq W$ točke x dejansko strinjata z identitetnimi prerezi. □

Lema 4.26. *Naj bo X Riemannova ploskev. Koherenten snop $\mathscr{E}$ na X je lokalno prost natanko tedaj, ko je $\mathscr{E}_x$ prost $\mathscr{O}_{X,x}$-modul za vsak $x \in X$.*

---

[9] Če bi podobno dovolili tudi za prostore X, da imajo njihovi strukturni snopi lahko nilpotente, bi prišli do pojma *kompleksnih prostorov*, teorijo katerih lahko bralec najde razvito v [13] in [14].

Dokaz. Če je $\mathscr{E}$ lokalno prost, potem je očitno vsaka bilka prost modul. Za obratno smer opazimo, da iz leme 4.25 sledi, da za poljubno točko x prostost $\mathscr{O}_{X,x}$-modula $\mathscr{E}_x$ implicira obstoj odprte okolice U točke x, za katero je $\mathscr{E}|_U \cong \mathscr{O}_U^n$. □

Na enak način lahko iz leme 4.25 izpeljemo, da za dva morfizma $\mathscr{O}_X$-modulov $\varphi, \psi \colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ iz koherentnega snopa $\mathscr{F}$ velja, da je množica točk $x \in X$, za katere je $\varphi_x = \psi_x$, zaprta podmnožica v X.

Lema 4.27. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev in $\mathscr{F}$ koherenten snop na njej. Tedaj je množica točk, nad katerimi ima $\mathscr{F}$ netrivialne bilke, bodisi prazna bodisi končna bodisi celoten X.*

Dokaz. Definirajmo podsnop idealov $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{O}_X$ tako, da je za vsak $x \in X$ njegova bilka enaka anihilatorskemu idealu $\mathscr{O}_{X,x}$-modula $\mathscr{F}_x$, tj. množici vseh takšnih zarodkov $f_x \in \mathscr{O}_{X,x}$, da je množenje z njimi ničelni homomorfizem $\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$. Po definiciji in lemi 2.28 je $\mathscr{A}$ jedro kanoničnega morfizma koherentnih snopov $\mathscr{O}_X \to \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$, zato je tudi sam koherenten snop. Po trditvi 2.17 je $\mathscr{O}_{X,x}$ glavni kolobar, zato za vsak $x \in X$ obstaja holomorfen zarodek f_x, za katerega je $\mathscr{A}_x \cong \mathscr{O}_{X,x} f_x$. Zaradi koherentnosti $\mathscr{A}$ obstaja po lemi 4.25 okolica U točke x ter $f \in \mathscr{O}_X(U)$, da je $\mathscr{A}|_U = \mathscr{O}_U f$. Ko x preteče vse točke v X, tvorijo množice U odprto pokritje za X. Po kompaktnosti lahko izberemo končno podpokritje $U_1, \ldots, U_n$ s funkcijami $f_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$, da je $\mathscr{A}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i} f_i$.

Označimo z S množico točk nad katerimi ima $\mathscr{F}$ netrivialne bilke. Očitno je $x \in S$ natanko tedaj, ko je $\mathscr{A}_x$ pravi ideal v $\mathscr{O}_{X,x}$, torej leži x v preseku $S \cap U_i$ natanko tedaj, ko je $f_i(x) = 0$. Ničle holomorfnih funkcij nastopajo izolirano in jih je na vsakem kompaktu največ končno mnogo, zato je $S \cap U_i$ lahko prazna množica, končna množica, ali pa je enaka U_i, če je $f_i = 0$. V zadnjem primeru mora po principu identičnosti biti $f_i = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, n$ in posledično $S = X$. □

Izrek 4.28. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev in $\mathscr{F}$ snop $\mathscr{O}_X$-modulov. Tedaj je $\mathscr{F}$ koherenten natanko tedaj, ko obstajajo nebotičen snop $\mathscr{S}$, lokalno prost snop $\mathscr{E}$ in kratko eksaktno zaporedje*

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{F} \to \mathscr{E} \to 0.$$

Dokaz. Recimo, da za snop $\mathscr{F}$ obstaja kratko eksaktno zaporedje takšne oblike. Tako nebotični, kot tudi lokalno prosti snopi so koherentni, zato je po lastnosti dveh-od-treh tudi $\mathscr{F}$ koherenten.

Obratno naj bo $\mathscr{F}$ koherenten snop. Definirajmo njegov podsnop $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{F}$ tako, da za vsako točko $x \in X$ predpišemo $\mathscr{S}_x = \mathscr{F}_x^{\mathrm{tor}}$, tj. torzijski $\mathscr{O}_{X,x}$-podmodul. Ta podsnop po lemi 2.28 in posledici 4.20 sovpada z jedrom kanoničnega morfizma v dvojni dual $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\vee\vee}$, iz česar po lemi 2.25 sledi koherentnost snopa $\mathscr{S}$. Kvocientni snop $\mathscr{E} = \mathscr{F}/\mathscr{S}$ je koherenten in, ker je $\mathscr{O}_{X,x}$ glavni kolobar, so po trditvi 4.19 njegove bilke $\mathscr{E}_x$ proste za vsak x. Iz leme 4.26 sledi, da je $\mathscr{E}$ lokalno prost snop.

Pokazati je treba še, da je $\mathscr{S}$ nebotičen snop. Po prejšnji lemi je množica točk nad katerim $\mathscr{S}$ nima trivialne bilke, prazna, končna ali ves X. V prvih dveh primerih je $\mathscr{S}$ nebotičen, zato denimo, da nima $\mathscr{S}$ nikjer trivialne bilke. Naj bo $U \subset X$ dovoilj majhna odprta množica in $s \in \mathscr{S}(U)$ neničelen prerez. Po lemi 4.15 je $\mathscr{S}^{\mathrm{tor}} = \mathscr{S}$, zato obstaja takšna neničelna holomorfna funkcija $f \in \mathscr{O}_X(U)$, da je $f \cdot s = 0$. Ampak če v točki $x \in U$ velja $f(x) \neq 0$, je po opombi 4.23

$$s_x = (1/f)_x \cdot (f_x \cdot s_x) = 0.$$

Nekonstantna holomorfna funkcija na konstantni Riemannovi ploskvi ima lahko kvečjemu končno mnogo ničel, torej je prerez s trivialen v vseh razen v končno mnogo točkah. Ker je bil s poljuben, mora biti snop $\mathscr{S}$ nebotičen. $\square$

Opomba 4.29. Iz dokaza izreka 4.28 med drugim sledi alternativna karakterizacija nebotičnih snopov: to so natanko tisti snopi $\mathscr{S}$, za katere velja $\mathscr{S}^{\mathrm{tor}} = \mathscr{S}$. Takšni snopi se sicer imenujejo *torzijski snopi* in v višjih dimenzijah ne sovpadajo z nebotičnimi snop. Je pa res, da imajo analitičen nikjer gost nosilec, kar v dimenziji 1 pomeni ravno nebotičnost.

Po eni strani je izrek 4.28 alternativna karakterizacija pojma koherentnega snopa. Upravičuje intuicijo o koherentnih snopih kot o takšnih snopih, ki so skoraj povsod lokalno prosti. Po drugi strani pa je izrek 4.28 dekompozicijski rezultat, saj pravi, da lahko vsak koherenten snop $\mathscr{F}$ zapišemo v grupi $K(X)$ kot vsoto $\mathscr{F} = \mathscr{S} + \mathscr{E}$ za[10] nek nebotičen snop $\mathscr{S}$ in lokalno prost snop $\mathscr{E}$. Nadalje po trditvi 4.24 za vsak nebotičen snop $\mathscr{S}$ obstaja obrnljiv snop $\mathscr{L}$, da je $\mathscr{S} = \mathscr{O}_X + \mathscr{L}$. Torej znamo koherenten snop v Grothendieckovi grupi zapisati kot vsoto lokalno prostih snopov. Preostane nam še, da te razcepimo na vsote obrnljivih. To bomo dosegli preko davno obljubljenega izreka.

Izrek 4.30. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Vsak lokalno prost snop $\mathscr{E}$ na X ima neničelne globalne meromorfne prereze.*

Dokaz. Izberimo poljubno točko $x \in X$ in naravno število n. Po definiciji strukturnega snopa divizorja nx imamo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathscr{L}(-nx) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{nx} \to 0$$

in, ko tenzoriramo z $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(nx)$, dobimo po trditvi 4.12 kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(nx) \to \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{nx} \to 0. \tag{3}$$

Pri tem smo uporabili še, da je nebotičen snop $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{nx}$ invarianten pod tenzoriranjem z obrnljivimi snopi, saj imajo ti bilke izomorfne $\mathscr{O}_{X,x}$. Tenzorski produkt $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{nx}$ ima neničelno bilko samo nad točko x, prostorom Lebesguove dimenzije nič, zato po lemi A.15 velja

$$H^1(X, \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{nx}) = H^1(x, \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{nx}) = 0.$$

Nadalje je

$$\Gamma(X, \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{nx}) = (\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{nx})_x = \mathscr{E}_X \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{nr},$$

kjer je r rang lokalno prostega snopa $\mathscr{E}$. Na zaporedju (3) uporabimo Eulerjevo karakteristiko in po aditivnosti ter posledici 4.9 dobimo

$$\chi(\mathscr{E}) = nr - \chi(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(nx)).$$

Vidimo, da se, ko n rase preko vseh mej, isto dogaja z Eulerjevo karakteristiko snopa $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(nx)$. Za vsak x in n velja $\mathscr{L}(nx) \subseteq \mathscr{M}_X$ in zato

$$\dim \Gamma(X, \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_X) \geq \dim \Gamma(X, \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(nx)) \geq \chi(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(nx)),$$

kar dokazuje neskončno dimenzionalnost ter v posebnem tudi netrivialnost prostora globalnih meromorfnih prerezov snopa $\mathscr{E}$. $\square$

[10]Velja celo $\mathscr{F} \cong \mathscr{S} \oplus \mathscr{E}$. Dokaz je mogoče najti v [35, str. 7, Trditev 5.5].

Opomba 4.31. Izrek 4.30 je v literaturi pogosto dokazan kot posledica šibkega Riemann-Rochovega izreka. To je Serre-Weilova oblika Riemann-Rochovega izreka (izrek 5.13 v naslednjem razdelku) brez prispevka Serrejeve dualnosti. Ideja dokaza izreka 4.30 je v resnici ista, kot za standardnim dokazom šibkega Riemann-Rochovega izreka.

Posledica 4.32. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Za vsak lokalno prost snop $\mathscr{E}$ ranga $r \geq 2$ na X obstajata obrnljiv snop $\mathscr{L}$ in lokalno prost snop $\mathscr{E}'$ ranga $r-1$, ki tvorita eksaktno zaporedje*

$$0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}' \to 0.$$

Dokaz. Naj bo s poljuben neničelen globalen meromorfen prerez snopa $\mathscr{E}$ in označimo $D = \operatorname{div}(s)$. Tedaj za vsak neničelen $f \in \Gamma(U, \mathscr{L}(D))$ in vsak $x \in X$ velja

$$\operatorname{ord}_x(fs) = \operatorname{ord}_x(f) + \operatorname{ord}_x(D) \geq 0,$$

torej je $fs \in \mathscr{E}(U)$ ter posledično je $\mathscr{L} = \mathscr{L}(D)s$ podsnop v $\mathscr{E}$. Množenje z s podaja izomorfizem $\mathscr{L}(D) \cong \mathscr{L}$, zato gre za obrnljiv snop. Pokazati je treba še, da je kvocientni snop $\mathscr{E}' = \mathscr{E}/\mathscr{L}$ lokalno prost ranga $r-1$.

Fiksirajmo točko $x \in X$ in naj za $t_x \in \mathscr{L}$ velja $\mathscr{L}_x = \mathscr{O}_{X,x} t_x$, iz česar med drugim sledi, da je $\operatorname{ord}_x(t_x) = 0$. Velja $\mathscr{E}'_x = \mathscr{E}_x/\mathscr{O}_{X,x}t_x$ in zaradi lokalne prostosti $\mathscr{E}$, lahko izberemo izomorfizem $\mathscr{E}_x \cong \mathscr{O}^r_{X,x}$. Denimo, da po tem izomorfizmu t_x identificiramo z $f_x = (f_{1x}, \dots, f_{rx})$. Iz $\operatorname{ord}_x(t_x) = 0$ sledi, da je vsaj eden izmed komponentnih zarodkov f_{ix} obrnljiv, recimo f_{rx}. Homomorfizem $\mathscr{O}^r_{X,x} \to \mathscr{O}^{r-1}_{X,x}$ definiran s predpisom

$$(h_{1x}, \dots, h_{rx}) \mapsto (h_{1x} - h_{rx} f_{rx}^{-1} f_{1x}, \dots, h_{r-1,x} - h_{rx} f_{rx}^{-1} f_{r-1,x})$$

ima za jedero ravno $\mathscr{O}_{X,x} f_x$, torej gre na drugi strani izomorfizma za kojedro inkluzije $\mathscr{L}_x \to \mathscr{E}_x$. Sledi, da je bilka $\mathscr{E}_x$ prost $\mathscr{O}_{X,x}$-modul ranga $r-1$ in snop $\mathscr{E}'$, ki je kot kvocient dveh koherentnih snopov koherenten, je po lemi 4.26 lokalno prost istega ranga. □

Z indukcijo na rang je težko spregledati, da posledica zagotavlja, da lahko vsak lokalno prost snop v K-grupi zapišemo kot vsoto obrnljivih. Dosegli smo katarzo tega razdelka:

Posledica 4.33. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Slika kanonične preslikave $\operatorname{Pic}(X) \to K(X)$ generira celotno grupo. Drugače povedano, vsak element $K(X)$ je ekvivalenten končni vsoti obrnljivih snopov na X.*

Dokaz. Sledi iz kombinacije izreka 4.28, trditve 4.24 in posledice 4.32. □

5. Grothendieck-Riemann-Rochov izrek

5.1. **Glavni izrek.** Dekompozicija grupe $K(X)$, izpeljana v prejšnjem razdelku in strnjena v posledici 4.33, omogoča, da številne pojme, ki so bili prej definirani zgolj za obrnljive snope, po aditivnosti razširimo na celotno Grothendieckovo grupo[11].

Tako se rang lokalno prostega snopa razširi do homomorfizma $\operatorname{rk}: K(X) \to \mathbb{Z}$ in iz dokaza izreka 4.28 je mogoče videti, da je rang koherentnega snopa $\mathscr{F}$ na X podan s predpisom $\operatorname{rk} \mathscr{F} = \operatorname{rk}(\mathscr{F}/\mathscr{F}^{\mathrm{tor}})$. To je smiselno, saj je $\mathscr{F}/\mathscr{F}^{\mathrm{tor}}$ lokalno prost snop

[11]Da je razširitev na takšen način vedno enolična in dobro definirana, je mogoče pokazati s pomočjo Jordan-Hölderjevega izreka [21, str. 22, Izrek 35 in str. 156] ali pa preko determinante, kot omenjeno v primeru 5.5.

in, ker je $\mathscr{F}^{\mathrm{tor}}$ nebotičen snop, lahko rang koherentnega snopa opišemo kot rang, ki ga ima $\mathscr{F}$ nad skoraj vsako točko v X. Snopi ranga nič so natanko nebotični snopi.

Na enak način se prvi Chernov razred razširi do homomorfizma $c_1: K(X) \to \mathrm{Cl}(X)$. Enolično je podan s preslikavo $c_1: \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$, ki je aditivna in za vsak razred divizorjev D zadošča $c_1(\mathscr{L}(D)) = D$.

Primer 5.1. Izračunajmo prvi Chernov razred strukturnega snopa efektivnega divizorja D. Iz definicije strukturnega snopa divizorja sledi obstoj kratkega eksaktnega zaporedja

$$0 \to \mathscr{L}(-D) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_D \to 0$$

in po aditivnosti Chernovega razreda je

$$c_1(\mathscr{O}_D) = c_1(\mathscr{O}_X) - c_1(\mathscr{L}(-D)) = D.$$

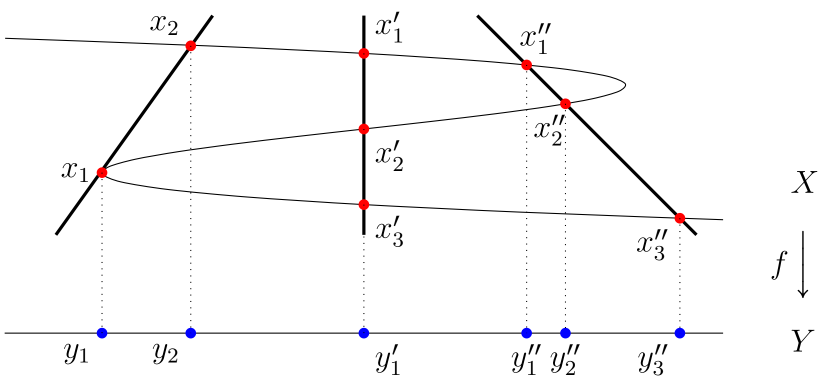
Zahvaljujoč trditvi 4.24 smo s tem izračunali prvi Chernov razred poljubnega nebotičnega snopa.

Za nekonstantno holomorfno preslikavo $f: X \to Y$ zagotavlja lema 3.22 skupaj s posledico 4.33, da za vsak element $\alpha \in K(Y)$ velja

$$c_1(f^*\alpha) = f^* c_1(\alpha). \tag{4}$$

Drugače povedano, prvi Chernov razred podaja naravno transformacijo med kontravariantnima funktorjema K in Cl iz kategorije kompaktnih Riemannovih ploskev z nekonstantnimi holomorfnimi preslikavami za morfizme v kategorijo abelovih grup.

Prireditev $X \mapsto K(X)$ je mogoče narediti tudi v kovarianten funktor iz kategorije Riemannovih ploskev z vsemi holomorfnimi preslikavami za morfizme v kategorijo abelovih grup, kjer holomorfni preslikavi $f: X \to Y$ priredimo izpeljani potisk $f_!: K(X) \to K(Y)$. Podobno poznamo potisk divizorjev $f_*: \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(Y)$. Naslednja lema bo prvi korak k povezavi med tema dvema potiskoma in iz nje bo v posebnem sledilo, da potisk divizorjev ohranja linearno ekvivalenco.



Slika 6. Ilustracija tega, da potisk ohranja linearno ekvivalenco; velja $2x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 2x_1'' + x_2''$ in $2y_1 + y_2 = 3y_2' = y_1'' + y_2'' + y_3''$ v razredni gupi $\mathrm{Cl}(X)$ oziroma $\mathrm{Cl}(Y)$. Slika je poustvarjena po [8, str. 27, slika 1.5].

Lema 5.2. *Naj bo $f: X \to Y$ holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Za vsak divizor D na X velja $c_1(f_!\mathscr{L}(D)) = f_*D + c_1(f_!\mathscr{O}_X)$.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da je D efektiven divizor. Zaradi aditivnosti preslikav $f_!$ in c_1 sledi, z enakim premislekom kot v primeru 5.1, da je

$$c_1(f_!\mathscr{O}_D) = c_1(f_!\mathscr{O}_X) - c_1(f_!\mathscr{L}(-D)).$$

Če pokažemo, da je $f_!\mathscr{O}_D = \mathscr{O}_{f_*D}$, dobimo iz primera 5.1

$$f_*D = c_1(f_!\mathscr{O}_X) - c_1(f_!\mathscr{L}(-D)),$$

kar je po preureditvi iskana formula za divizor $-D$.

Posebej obravnavamo primer, ko je f konstantna z vrednostjo $y \in Y$. Tedaj je slika homomorfizma $f_!$ vsebovana v podgrupi $K(y) \subseteq K(Y)$. V podrazdelku 4.1 smo se dogovorili za identifikacijo $K(y) \equiv \mathbb{Z}$ podano z $\mathscr{F} \mapsto \dim \mathscr{F}_y$, po kateri izpeljani potisk sovpada z Eulerjevo karakteristiko. Po drugi strani se po primeru 3.16 identificira potisk divizorjev f_* s homomorfizmom $\deg\colon \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$. Če vse to združimo, dobimo verigo enakosti

$$f_!\mathscr{O}_D = \chi(\mathscr{O}_D) = \dim \Gamma(X, \mathscr{O}_D) = \sum_{x\in X} \dim \mathscr{O}_{D,y} = \deg D = \mathscr{O}_{f_*D}.$$

V obratnem primeru, ko f ni konstantna, mora po posledici 4.9 biti $f_! = f_*$. Po definiciji potiska na bilkah preverimo, da velja

$$(f_*\mathscr{O}_D)_y = \bigoplus_{x\in f^{-1}(y)} \mathscr{O}_{D,x} = (\mathscr{O}_{f_*D})_y$$

za vsako točko y, in ker sta oba snopa $f_*\mathscr{O}_D$ in $\mathscr{O}_{f_*D}$ nebotična, sta posledično enaka.

Vrnimo se zdaj k splošnemu primeru, ko f bodisi je bodisi ni konstantna. Naj bo D poljuben divizor na X in zapišimo $D = D' - D''$ za par efektivnih divizorjev D', D''. Tenzoriranje kratkega eksaktnega zaporedja strukturnega snopa $\mathscr{O}_{D'}$ z obrnljivim snopom $\mathscr{L}(D)$ porodi kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathscr{L}(-D'') \to \mathscr{L}(D) \to \mathscr{O}_{D'} \to 0,$$

kjer smo upoštevali, da so nebotični snopi invariantni za tenzorske produkte z obrnljivimi snopi. Uporabimo na tem zaporedju aditivni preslikavi $f_!$ in c_1, s čimer dobimo iskano formulo

$$c_1(f_!\mathscr{L}(D)) = c_1(\mathscr{L}(-D'')) + c_1(f_!\mathscr{O}_{D'}) = -f_*D'' + c_1(f_!\mathscr{O}_X) + f_*D',$$

če le upoštevamo že izpeljano formulo za $-D''$ in enakost $f_!\mathscr{O}_{D'} = \mathscr{O}_{f_*D'}$. □

Posledica 5.3. *Naj bo $f\colon X \to Y$ holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Predpis $D \mapsto f_*D$ inducira homomorfizem grup $f_*\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(Y)$.*

Dokaz. Pokazati je treba le, da potisk divizorjev spoštuje linearno ekvivalenco. Če je f konstantna preslikava, je po posledici 3.20 za vsak $g \in \mathscr{M}_X^\times(X)$

$$f_* \operatorname{div}(g) = \deg \operatorname{div}(g) = 0 = \operatorname{div}(c)$$

za poljubno konstantno funkcijo z vrednostjo $c \neq 0$ na Y. Obratno, če f ni konstantna, velja po prejšnji lemi

$$c_1(f_*\mathscr{L}(\operatorname{div}(g))) = f_* \operatorname{div}(g) + c_1(f_*\mathscr{O}_X).$$

Ker je $\mathscr{L}(\operatorname{div}(g)) = \mathscr{O}_X$, dobimo enakost $f_* \operatorname{div}(g) = 0$ v grupi $\mathrm{Cl}(Y)$. Tako v obeh primerih vidimo, da je $f_* \operatorname{div}(\mathscr{M}_X^\times(X)) \subseteq \operatorname{div}(\mathscr{M}_Y^\times(Y))$, kar smo želeli dokazati. □

Sedaj vemo, da potisk divizorjev naredi Cl v kovarianten funktor iz kategorije Riemannovih ploskev v kategorijo abelovih grup, kakor naredi izpeljani potisk K-grupo. V luči formule (4) se lahko vprašamo, ali podaja tudi v tem primeru predpis $c_1: K(X) \to \mathrm{Cl}(X)$ naravno transformacijo med funktorjema K in Cl. Na to vprašanje odgovoraja Grothendieck-Riemann-Rochov izrek.

Opomba 5.4. Iz posledice 5.3 sledi, da za poljuben $g \in \mathscr{M}_X^\times(X)$ obstaja funkcija $\tilde{g} \in \mathscr{M}_Y^\times(Y)$, za katero je $\operatorname{div}(\tilde{g}) = f_* \operatorname{div}(g)$, vendar dani dokaz o njej ne pove ničesar. Izkaže se, da je preslikava $f^*: \mathscr{M}_Y(Y) \to \mathscr{M}_X(X)$ končna razširitev obsegov stopnje $[\mathscr{M}_X(X) : \mathscr{M}_Y(Y)] = \deg(f)$. Množenje z g podaja linearen avtomorfizem $h \mapsto g \cdot h$ vektorskega prostora $\mathscr{M}_X(X)$, zato je njegova determinanta neničelen element obsega $\mathscr{M}_Y(Y)$. Imenujemo ga *norma elementa* g in označimo $N_f(g)$. To je iskana meromorfna funkcija, tj. velja $f_* \operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(N_f(g))$, dokaz česar se najde v [12, str. 412, Lema A.3] ali [32, str. 50, Trditev 6]. Opisana konstrukcija norme, smiselna za vsako končno razširitev obsegov, izvira iz in je najpomembnejša v algebraični teoriji števil, kot je razvidno npr. iz [32].

Opomba 5.5. Alternativna pot do definicije prvega Chernovega razreda koherentnega snopa, ki obide Grothendieckovo grupo, se opira na pojem *determinante snopa*. Za koherenten snop $\mathscr{F}$ ranga r je $\det \mathscr{F}$ posnopitev predsnopa $U \mapsto \bigwedge^r \mathscr{F}(U)$, dobljenega z vnanjim produktom, osnovne lastnosti katerega je mogoče najti v [21, poglavje XIX, §1]. Ker za vsak vektorski prostor V dimenzije n velja $\dim \bigwedge^r V = \binom{n}{r}$, je determinanta lokalno prost snop ranga 1, tj. obrnljiv snop. Tako podaja aditivno preslikavo $\mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ in prvi Chernov razred se z njo izraža kot $c_1(\mathscr{F}) = c_1(\det \mathscr{F})$. Izkaže se, da za vsako kompaktno Riemannovo ploskev X homomorfizma abelovih grup $\det: K(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ in $\mathrm{rk}: K(X) \to \mathbb{Z}$ enolično določata kolobar $K(X)$, glej [15, str. 149, Naloga 6.11] za natančno formulacijo in [35] za dokaz.

Preden lahko zagrizemo v dokaz Grothendieck-Riemann-Rochovega izreka, rabimo najprej nekaj priprave; spoznati moramo še en mogočen izrek kompleksne in algebraične geometrije. Njegovega dokaza ne bomo navedli, za delen a zelo berljiv dokaz se lahko bralec posvetuje s [23, razdelek 6.4.3], sicer pa je dokaz mnogo splošnejše in močnejše oblike izreka mogoče najti v [16, poglavje III, §6], monografiji, kjer je bil izrek prvič predstavljen.

Izrek 5.6 (Grothendieckova dualnost)**.** *Naj bo $f: X \to Y$ holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Označimo $r = 1 - \dim(f(X))$. Tedaj za vsak koherenten snop $\mathscr{F}$ na X in vsak smiselen $i = 0, 1$ obstaja kanoničen izomorfizem*

$$\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_Y}(R^{r-i} f_* \mathscr{F}, \Omega_Y) \cong R^i f_* \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \Omega_X).$$

Opomba 5.7. Riemann-Rochova teorija je že od samega začetka in skozi svojo celotno zgodovino prepletena z dualnostjo. Na Rochov doprinesek k originalnemu izreku je mogoče s sodobnimi očmi gledati kot na prvi takšen dualnostni izrek. Kasneje je bila prav Serrejeva dualnost, objavljena v [33], rezultat, ki je Serreju omogočil razumevanje, da so klasični Riemann-Rochovi izreki za ploskve in krivulje formule za Eulerjevo karakteristiko obrnljivih snopov. Ta pogled je odprl pot vsemu nadaljnjemu razvoju.

Posledica 5.8 (Serrejeva dualnost)**.** *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Tedaj za vsak koherenten snop $\mathscr{F}$ na X in $i = 0, 1$ velja*

$$H^{1-i}(X, \mathscr{F})^* \cong H^i(X, \mathscr{F}^\vee \otimes \Omega_X),$$

kjer * na desni strani označuje dualen kompleksen vektorski prostor.

Dokaz. Naj bo $f\colon X \to Y$ konstantna preslikava v točko $y \in Y$. Snop $R^i f_* \mathscr{F}$ je nebotičen z netrivialno bilko kvečjemu nad y, kjer je enaka $H^i(X, \mathscr{F})$. Iz tega sledi, da je vsak morfizem snopov $R^i f_* \mathscr{F} \to \Omega_Y$ natanko določen z morfizmom bilk nad y, ki ga določa. Ker velja $\Omega_{Y,y} \cong \mathbb{C}$, je ta morfizem bilk linearna preslikava $H^i(X, \mathscr{F}) \to \mathbb{C}$ in snop $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_Y}(R^{r-i} f_* \mathscr{F}, \Omega_Y)$ je nebotičen z edino potencialno netrivialo bilko $H^{1-i}(X, \mathscr{F})^*$ nad točko y. Po drugi strani ima snop $R^i f_* \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \Omega_X)$ trivialne bilke nad vsemi točkami razen morda y, nad katero ima bilko $H^i(X, \mathscr{F}^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega_X)$. Iskani izomorfizem sledi neposredno iz uporabe Grothendieckove dualnosti za f. □

Direkten dokaz Serrejeve dualnosti je mogoče najti v [15, str. 243, Izrek 7.6], dva alternativna dokaza za primer kompaktnih Riemannovih ploskev, ki za naše potrebe povsem zadostuje, pa v [14, str. 225, Izrek 8] in [11, §17].

Opomba 5.9. Odnos med Serrejevo in Grothendieckovo dualnostjo je podoben odnosu med Hirzebruchovim in Grothendieckovim Riemann-Rochovim izrekom: kjer prvi govori o geometrijskih objektih, npr. Riemannovih ploskvah, govori drugi o morfizmih med njimi, npr. holomorfnih preslikavah. Klasično obliko za X dobimo iz Grothendieckove tako, da jo uporabimo za konstantno preslikavo $X \to *$. Motivacija za tem je kategorična; enotočkovni prostor $*$ je večinoma končni objekt v geometrijskih kategorijah prostorov (npr. kompleksnih mnogoterosti, raznoterosti, topoloških prostorov, shem,...), torej lahko vsak prostor X enolično identificiramo z njegovim morfizmom v $*$.

Lema 5.10. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev. Za vsak par lokalno prostega snopa $\mathscr{E}$ ranga r in obrnljivega snopa $\mathscr{L}$ na X velja*

$$c_1(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}) = c_1(\mathscr{E}) + r \cdot c_1(\mathscr{L}).$$

Dokaz. Dokazovali bomo z indukcijo na rang, kjer za $r = 1$ to sledi iz leme 3.7. Posledica 4.32 zagotavlja obstoj obrnljivega snopa $\mathscr{L}'$, lokalno prostega snopa $\mathscr{E}'$ ranga $r-1$ in kratkega eksaktnega zaporedja

$$0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}' \to 0$$

Tenzorski produkt z obrnljivim snopom $\mathscr{L}$ in, če po njem vzamemo prvi Chernov razred, dobimo po indukcijski predpostavki

$$c_1(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}) = c_1(\mathscr{L}' \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}) + c_1(\mathscr{E}' \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}) = c_1(\mathscr{L}') + c_1(\mathscr{E}') + r \cdot c_1(\mathscr{L}).$$

Ker je zaradi aditivnosti prvega Chernovega razreda in zgornjega kratkega eksaktnega zaporedja $c_1(\mathscr{E}) = c_1(\mathscr{L}') + c_1(\mathscr{E}')$, je lema dokazana. □

Naposled smo zadostno oboroženi za spopad z glavnim in titularnim izrekom dela.

Izrek 5.11 (Grothendieck-Riemann-Roch)**.** *Naj bo $f\colon X \to Y$ holomorfna preslikava kompaktnih Riemannovih ploskev. Za vsak $\alpha \in K(X)$ velja*

$$c_1(f_! \alpha) = f_* c_1(\alpha) - \tfrac{1}{2} \operatorname{rk}(\alpha) B_f.$$

Dokaz. Obe strani formule, ki jo želimo dokazati, sta aditivni glede na nastopajoči α, zato se je po posledici 4.33 dovolj omejiti na primer, ko je $\alpha = \mathscr{L}$, tj. izomorfnostni razred obrnljivega snopa na X. Po izreku 3.11 so to natanko razredi snopov oblike $\mathscr{L}(D)$ za divizorje D na X. Če lemo 5.2 zapišemo kot

$$c_1(f_! \mathscr{L}(D)) - f_* c_1(\mathscr{L}(D)) = c_1(f_! \mathscr{O}_X) - f_* 0,$$

vidimo, da je neodvisna od divizorja D, zato je izrek dovolj dokazati za trivialni divizor $D = 0$, tj. za primer $\alpha = \mathscr{O}_X$.

Denimo najprej, da je f konstantna. Ker je snop $R^i f_* \mathscr{O}_X$ za $i = 0, 1$ nebotičen, je

$$(R^{1-i} f_* \mathscr{O}_X)^\vee \cong \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(R^{1-i} f_* \mathscr{O}_X, \Omega_Y) \cong R^i f_* \Omega_X,$$

kjer zadnji izomorfizem zagotavlja Grothendieckova dualnost. V grupi $K(Y)$ torej velja $(f_! \mathscr{O}_X)^\vee = f_! \Omega_X$ in uporaba leme 5.2 za divizor $K_X = c_1(\Omega_X)$ porodi enakost

$$-c_1(f_! \mathscr{O}_X) = c_1(f_! \Omega_X) = c_1(f_! \mathscr{O}_X) + f_* K_f.$$

Glede na to, da je $\Omega_{X/Y} = \Omega_X$ in zato po Riemann-Hurewitzovi formuli $B_f = f^* K_f$, ni to nič drugega kot Grothendieck-Riemann-Rochova formula za snop $\mathscr{O}_X$.

Če obratno f ni konstantna, dobimo iz Grothendieckove dualnosti, uporabljene za snop $\mathscr{O}_X$, izomorfizme

$$f_* \Omega_X \cong \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(f_* \mathscr{O}_X, \Omega_Y) \cong (f_* \mathscr{O}_X)^\vee \otimes_{\mathscr{O}_Y} \Omega_Y.$$

Aplikacija prvega Chernovega razreda, leme 5.10 in leme 5.2 porodi

$$c_1((f_* \mathscr{O}_X)^\vee) + d \cdot c_1(\Omega_Y) = c_1(f_* \Omega_X) = f_* c_1(\Omega_X) + c_1(f_* \mathscr{O}_X),$$

kjer je d stopnja preslikave f. V luči Riemann-Hurwitzovega izreka in posledice 3.19 je torej

$$2c_1(f_* \mathscr{O}_X) = -d \cdot K_Y + f_* K_X = -f_*(K_X - f^* K_Y) = -B_f,$$

s čimer je dokaz zaključen. □

Opomba 5.12. Enakost Grothendieck-Riemann-Rochovega izreka ne velja v grupi $\mathrm{Cl}(X)$, saj v njej deljenje z 2 ni definirano. Formalno torej velja v $\mathrm{Cl}(X)[\frac{1}{2}]$ ali, še bolj dekadentno, v $\mathrm{Cl}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Vse to je kakopak nepotrebno, saj bi lahko formulo zapisali v $\mathrm{Cl}(X)$ preprosto tako, da bi jo pomnožili s faktorjem 2.

V prejšnjem podrazdelku smo se vprašali, ali prvi Chernov razred podaja naravno trnasformacijo med kovariantnima funktorjema K in Cl. Grothendieck-Riemann-Rochov izrek odgovarja na to vprašanje negativno. Namesto tega skupaj z Riemann-Hurewitzovo formulo pravi, da iskano naravno transformacijo med K in Pic podaja predpis $X \mapsto 2c_1 - \mathrm{rk}(-) K_X$. To pomeni, da za vsako holomorfno preslikavo $f \colon X \to Y$ kompaktnih Riemannovih ploskev komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
K(X) \arrow[r, "2c_1 - \mathrm{rk}(-)K_X"] \arrow[d, "f_!"'] & \mathrm{Cl}(X) \arrow[d, "f_*"] \\
K(Y) \arrow[r, "2c_1 - \mathrm{rk}(-)K_Y"] & \mathrm{Cl}(Y).
\end{tikzcd}$$

Bistvo izreka je po svoje v tem, da pravi, da je obstrukcija k naravnosti c_1 natančno ramifikacija. Prvi Chernov razred je definiran z meromorfnimi prerezi na razredih koheretnih svežnjev lokalno podanih s snopi holomorfnih funkcij, podobno so divizorji v istem razredu, če se razlikujejo za ničle in pole meromorfne funkcije; pa vendar vse te analitične pojme povezuje razvejiščni divizor, ki nosi izključno topološko informacijo. To izraža enega bistvenih vidikov teorije Riemannovih ploskev: medsebojno prepletenost analitičnih, algebraičnih in topoloških lastnosti.

5.2. **Posledice.** Oglejmo si nekaj posledic Grothendieck-Riemann-Rochovega izreka. V podrazdelku 3.2 smo postavili za glavno vprašanje Riemann-Roch teorije to, koliko je na dani Riemannovi ploskvi meromorfnih funkcij s predpisanimi poli. Rigorozno lahko to formuliramo kot vprašanje po izračunu števila $\ell(D) = \dim \Gamma(X, \mathscr{L}(D))$. Ultimativna želja bi bila izraziti to število le s topološkimi invariantami ploskve in z divizorjem D samim. Klasična oblika Riemann-Rochovega izreka je delna uresničitev te želje.

Topološka invarianta, ki bo pri tem relevantna, je število $g = \dim H^1(X, \mathscr{O}_X)$, ki ga imenujemo *rod Riemannove ploskve* X. Skupaj s Serrejevo dualnostjo iz rezultata [9, str. 62, Trditev III.2.7] sledi, da se ujema s topološkim pojmom roda ploskve X, tj. rangom abelove grupe $H^1(X, \mathbb{Z})$.

Posledica 5.13 (Riemann-Roch, Serre-Weilova oblika)**.** *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev rodu g in naj bo $\mathscr{F}$ koherenten snop na X. Tedaj velja*

$$\chi(\mathscr{F}) = \deg c_1(\mathscr{F}) + \mathrm{rk}(\mathscr{F})(1-g).$$

Dokaz. Uporabimo Grothendieck-Riemann-Rochovo formulo za primer $\alpha = \mathscr{F}$ in f konstantna preslikava, upoštevajoč vse dogovorjene identifikacije z $\mathbb{Z}$ in v dokazu prejšnjega izreka s pomočjo Riemann-Hurewitza izpeljano formulo $\deg B_f = -2f_! \mathscr{O}_X = -2\chi(\mathscr{O}_X) = 2g-2$. □

Opomba 5.14. Serre-Weilova oblika Riemann-Rochovega izreka, podana in dokazana prvič v [33], je bila zgodovinsko motivacija za Hirzebruch-Riemann-Rochovo formulo, ki je njena razširitev v višje dimenzije.

Posledica 5.15 (Riemann-Roch, klasična oblika)**.** *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev rodu g in naj bo D divizor na X. Tedaj velja*

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg D + 1 - g.$$

Dokaz. Upoštevamo, da je po Serrejevi dualnosti

$$\dim H^1(X, \mathscr{L}(D)) = \dim H^0\left(X, \mathscr{L}(K_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}(D)^\vee\right) = \ell(K_X - D),$$

in vstavimo $\mathscr{F} = \mathscr{L}(D)$ v Serre-Weilovo obliko Riemann-Rochovega izreka. □

Riemann-Rochov izrek ne izrazi $\ell(D)$, temveč le njegovo razliko z $\ell(K_X - D)$, torej ni povsem idealen odgovor, željo po kakršnem smo izrazili v začetku tega podrazdelka. Vseeno ga je pogosto mogoče s pridom uporabiti, kot demonstrira naslednja standardna aplikacija.

Trditev 5.16. *Naj bo X kompaktna Riemannova ploskev roda* 0. *Tedaj je $X \cong \mathbb{P}^1$.*

Dokaz. Fiksirajmo poljubno točko $x \in X$. Iz Riemann-Rochovega izreka sledi, da je

$$\ell(x) \geq \ell(x) - \ell(K_X - x) = \deg x + 1 = 2.$$

Torej mora vektorski prostor $\Gamma(X, \mathscr{L}(x))$ vsebovati tudi kako nekonstantno meromorfno funkcijo – recimo ji f. Za poljuben $z \in \mathbb{C}$ je $f - z$ spet nekonstantna meromorfna funkcija na X in iz posledice 3.20 sledi, da je

$$0 = \deg \mathrm{div}(f - z) = |f^{-1}(z)| - |f^{-1}(\infty)| = |f^{-1}(z)| - 1,$$

saj ima po definiciji snopa $\mathscr{L}(x)$ njegov prerez f edini pol v točki x in to enostaven. S tem vidimo, da je meromorfna funkcija f kot holomorfna preslikava $X \to \mathbb{P}^1$ bijektivna. Slika iz kompaktnega v Hausdorffov prostor, zato je zaprta in ima zvezen inverz, ki je posledično tudi holomorfen. □

Opomba 5.17. Trditev 5.16 je prvi korak v teorijo z divizorji definiranih holomorfnih vložitev v projektivne prostore. Podrobno in zelo čitljivo ekspozicijo o tem je mogoče prebrati v [25, poglavje V §4] ter v večji splošnosti v [15, poglavje II §7]. Osnovna ideja je ta, da za dani divizor D na Riemannovi ploskvi X linearno neodvisna množica globalnih prerezov $s_0, \dots, s_n$ snopa $\mathscr{L}(D)$ pod določenimi pogoji definira holomorfno vložitev $X \to \mathbb{P}^n$ s predpisom

$$x \mapsto [s_0(x) : \dots : s_n(x)].$$

Potreben in zadosten pogoj za dobro definiranost je, da velja $\ell(D) > \ell(D-x)$ za vse $x \in X$, za vložitev pa, da je $\ell(D-x) > \ell(D-x-y)$ za vse pare $x, y \in X$, tudi $x = y$. Z Riemann-Rochovim izrekom je mogoče ob upoštevanju, da je $\deg K_X = 2g-2$, pokazati, da je tema dvema pogojema vedno zadoščeno za divizor D z $\deg D \geq 2g+1$. Sledi, da je vsako kompaktno Riemannovo ploskev roda g mogoče holomorfno vložiti v projektivni prostor $\mathbb{P}^{2g+1}$. To je mogoče še izboljšati: vložitev vselej obstaja že v $\mathbb{P}^3$, glej [15, poglavje IV, Posledica 3.6].

Opomba 5.18. Na trditev 5.16 lahko gledamo tudi kot na del Poincare-Koebejevega uniformizacijskega izreka, ki do biholomorfizma natančno klasificira vse enostavno povezane Riemannove ploskve, tj. ploskve roda nič. Kompaktne so, kot smo videli, le Riemannova sfera $\mathbb{P}^1$, nekompaktne pa so ali odprt disk ali celotna kompleksna ravnina $\mathbb{C}$. Standarden dokaz je mogoče najti v [11, §17], posebej eleganten alternativen argument pa v [6, str. 401, Izrek 11.12]

Druga uporaba Riemann-Rochovega izreka, ki jo bomo spoznali, govori o *eliptičnih krivuljah*, kar je ime za Riemannove ploskve roda 1. Topološko, tj. do homeomorfizma natančno, gre za torus $S^1 \times S^1$, vendar nosi kontinuum različnih kompleksnih struktur, ki med seboj niso biholomorfne. S topološkega vidika je jasno razvidno, da so točke eliptične krivulje v bijektivni korespondenci z abelovo grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Izkaže pa se, da je grupni zakon tesno povezan z analitičnimi oziroma algebraičnimi lastnostmi eliptične krivulje, kot opisuje naslednja trditev. Oznaka $\mathrm{Pic}^0(X)$ stoji za jedro kompozituma $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$, torej za podgrupo izomorfnostnih razredov obrnljivih snopov, katerih pripadajoči divizorji so stopnje nič.

Trditev 5.19. *Naj bo X eliptična krivulja in $x_0 \in X$ poljubna točka. S predpisom $x \mapsto \mathscr{L}(x - x_0)$ je podana bijekcija med točkami X in grupo $\mathrm{Pic}^0(X)$. Na ta način dobi eliptična krivulja strukturo abelove grupe.*

Dokaz. Preko izomorfima c_1 lahko delamo z razredi divizorjev stopnje 0. Naj bo D takšen divizor na X. Pokazati želimo, da obstaja natanko ena točka $x \in X$, da je divizor $x - x_0$ linearno ekvivalenten D. Ker je $g = 1$, je po Serrejevi dualnosti $\deg K_X = 2g - 2 = 0$. Če bi bil s globalni prerez snopa $\mathscr{L}(K_X - D - x_0)$, bi zato moralo po posledici 3.20 biti

$$-1 = \deg\left(\operatorname{div}(s) + K_X - D - x_0\right) \geq 0,$$

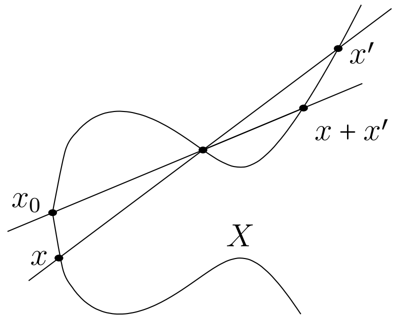
kar ni mogoče. Torej je $\ell(K_X - D - x_0) = 0$ in uporaba Riemann-Rochovega izreka porodi enakost

$$\ell(D + x_0) = \deg(D + x_0) + 1 - g = 1.$$

To pomeni, da obstaja neničelni globalni prerez s snopa $\mathscr{L}(D + x_0)$. Po definiciji prvega Chernovega razreda je $\operatorname{div}(s) = c_1(\mathscr{L}(D+x_0)) = D+x_0$ v $\mathrm{Pic}(X)$, iz definicije divizorja prereza obrnljivega snopa, podane v podrazrelku 3.2, pa je razvidno, da je divizor $\operatorname{div}(s)$ efektiven. To je torej efektiven divizor stopnje 1, kar je lahko le neka točka x. Sledi, da je $D = x - x_0$, torej je predpis podan v trditvi surjektiven. Edini način, da ne bi bil injektiven, bi bil, da bi za nek $s' \in \Gamma(X, \mathscr{L}(D + x_0))^*$ veljalo $\operatorname{div}(s') = x'$ za neko drugo točko na X. A ker je $\ell(D + x_0) = 1$, obstaja takšen $\lambda \in \mathbb{C}^*$, da je $s' = \lambda s$, zato je $\operatorname{div}(s') = \operatorname{div}(s')$ in je predpis iz trditve tudi injektiven. □

Pokazati je mogoče, da je grupa $\operatorname{Pic}^0(X)$ izomorfna grupi $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, torej v trditvi opisana grupna struktura na eliptični krivulji sovpada z grupno strukturo, ki jo nosi pod topološko identifikacijo s torusom, glej [15, poglavje IV §4].

Z vidika kompleksne analize je najbolj naravno eliptično krivuljo predstaviti kot kvocient $\mathbb{C}/\Sigma$ po abelovi podgrupi Σ ranga 2, kar naenkrat opisuje njeno grupno strukturo, da gre topološko za torus ter strukturo Riemannove ploskve.



SLIKA 7. Klasična konstrukcija grupne strukture na nesingularni kubični krivulji $X \subset \mathbb{P}^2$.

Opomba 5.20. Trditev 5.19 ponuja konceptualno zadovoljivo interpretacijo grupne strukture na eliptični krivulji. Za eliptične krivulje vložene v $\mathbb{P}^2$, tj. nesingularne kubične krivulje, gladke algebraične krivulje podane kot ničelne množice nerazcepnih polinomov tretje stopnje, to sovpada s klasično dokaj ad hoc konstrukcijo grupne strukture predstavljeno na sliki 7.

A. Dodatek: Teorija snopov

V tem razdelku bomo navedli osnovne pojme teorije snopov. To je jezik, v katerem je napisana sodobna algebraična geometrija in tudi to delo. Podrobno in temeljito obravnavo teorije snopov je mogoče najti v [31] ali [13, poglavje A]. V tem razdelku bomo zato močni in se ne bomo uklonili skušnjavi, da bi karkoli dokazali; rezultate bomo zgolj strnili za kasnejšo referenco. Predpostavljamo osnovno seznanjenost s pojmom direktne limite, ki jo bralec lahko pridobi npr. v [21, poglavje III.10].

A.1. **Predsnopi in snopi.** Topološkemu prostoru X priredimo *kategorijo odprtih podmnožic*, ki je kategorija, katere objekti so odprte množice $U \subseteq X$, morfizmi pa inkluzije med njimi.

Definicija A.1. Naj bo X topološki prostor. Kontravarianten funktor iz kategorije odprtih podmnožic X v kategorijo abelovih grup se imenuje *predsnop abelovih grup na X*.

Predsnope bomo označevali s pisanimi črkami, npr. $\mathscr{F}$. Da predsnop $\mathscr{F}$ priredi odprti množici $U \subseteq X$ abelovo grupo $\mathscr{F}(U)$ bomo pogosto zapisali kot $U \mapsto \mathscr{F}(U)$. Elementom $s \in \mathscr{F}(U)$ pravimo *prerezi predsnopa $\mathscr{F}$ nad U*. V luči tega $\mathscr{F}(U)$ imenujemo tudi *množica prerezov* in zanjo včasih uporabljamo alternativno notacijo

$\Gamma(U,\mathscr{F})$. Če odvozlamo definicijo, vidimo, da predsnop tvori družina abelovih grup $\mathscr{F}(U)$, po ena za vsako odprto podmnožico $U \subseteq X$, ter za vsako inkluzijo $U \subseteq V$ homomorfizem $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$. Ta homomorifzem pogosto imenujemo *zožitev* ali *restrikcija* in sliko elementa $s \in \mathscr{F}(V)$ po njej označimo $s|_U$. To komunicira intuicijo naslednjega primera.

Primer A.2. Naj bo X topološki prostor. Prireditev $U \mapsto \mathscr{C}(U)$, ki odprti množici priredi zvezne funkcije $U \to \mathbb{C}$ na njej in inkluziji $U \subseteq V$ priredi zožitev funkcij $f \mapsto f|_U$, (kar je homomorfizem grup $\mathscr{C}(V) \to \mathscr{C}(U)$) je predsnop. Imenujemo ga *snop zveznih funkcij na* X in ga označimo $\mathscr{C}_X$.

Definicija A.3. Naj bo X topološki prostor. Predsnop $\mathscr{F}$ abelovih grup na X je *snop*, če zadošča *lastnosti lepljenja*: za vsako družino odprtih množic $\{U_i\}$ in prerezov $s \in \mathscr{F}(U_i)$, za katero velja $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ za vse i, j, obstaja natanko en prerez $s \in \mathscr{F}(U)$, da je $s|_{U_i} = s_i$ za vse i.

Lastnost lepljenja zagotavlja, da je prereze poljubnega snopa na X dovolj definirati lokalno na kompatibilen način, pa se zlepijo do enolično definiranega *globalnega prereza*, tj. prereza nad celotnim X. Iz osnovne topologije vemo, da to velja npr. za zvezne funkcije na topološkem prostoru, torej je pred predsnop $\mathscr{C}_X$ iz primera A.2 zares snop, kot že njegovo ime namiguje.

Primer A.4. Naj bo X nekompakten parakompakten Hausdorffov prostor. Predpis $U \mapsto \mathscr{C}^{\mathrm{b}}(U)$, ki odprti množici priredi omejene zvezne funkcije na njej, inkluzijam pa zožitev funkcij, podaja predsnop $\mathscr{C}^{\mathrm{b}}_X$. Naj bo $\{U_n\}$ števno lokalno končno pokritje prostora X in $\{\varphi_n\}$ podrejena razčlenitev enote. Funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \varphi_n(x)$ je dobro definirana in zvezna, saj je v okolici vsake točke vsota končno mnogo neničelnih zveznih funkcij. Jasno je tudi, da je neomejena, po drugi strani pa je zožitev $f|_{U_n}$ navzgor omejena z n in navzdol z 0. Zdaj imamo množico prerezov $s_n = f|_{U_n} \in \mathscr{C}^{\mathrm{b}}_X(U_n)$, za katere velja $s_m|_{U_m \cap U_n} = s_n|_{U_m \cap U_n}$ za vse m, n, ki se ne zlepijo v globalni prerez predsnopa $\mathscr{C}^{\mathrm{b}}_X$. Sledi, da predsnop $\mathscr{C}^{\mathrm{b}}_X$ ni snop.

Primer A.5. Naj bo A poljubna abelova grupa in X topološki prostor. Konstantni predsnop A na X je predpis $U \mapsto A$, ki vsaki inkluziji odprtih podmnožic X priredi identiteto na A. Za netrivialno grupo A ta predsnop ne zadošča lastnosti lepljenja. Da dobimo *konstantni snop* A *na* X, moramo odprti podmnožici $U \subseteq X$ prirediti direktno vsoto toliko kopij grupe A, kolikor ima U povezanih komponent - prej smo ne glede na število komponent priredili samo eno kopijo A. Drugače povedano, prerezi konstantnega snopa so lokalno konstantne preslikave. V notaciji ne bomo ločili med grupo A in konstantnim snopom A. Za kaj gre, bo jasno iz konteksta.

Za dano točko $x \in X$ definiramo *bilko (pred)snopa* $\mathscr{F}$ *nad* x kot direktno limito

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U),$$

kjer je direktna limita vzeta po vseh odprtih okolicah točke x. To pomeni, da njene elemente, ki jih imenujemo *zarodki prerezov*, dobimo kot ekvivalenčne razrede prerezov na okolicah točke x, kjer $s \in \mathscr{F}(U)$ in $s' \in \mathscr{F}(V)$ definirata isti zarodek, če obstaja neka okolica $W \subseteq U \cap V$ točke x, da je $s|_W = s'|_W$. Zarodek prereza s v točki x označimo s_x.

Morfizmi med predsnopi oziroma snopi so definirani kot morfizmi med funktorji standardno, tj. kot *naravne transformacije*. To pomeni, da morfizem (pred)snopov

$\eta: \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ na X sestavlja po en homomorfizem grup $\eta_U: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}'(U)$ za vsak odprt $U \subseteq X$, tako da za vsako inkluzijo $U \subseteq V$ komutira diagram

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d] & \mathscr{F}'(V) \arrow[d] \\ \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\eta_U"] & \mathscr{F}'(U). \end{tikzcd}$$

Iz tega diagrama je razvidno, da η za vsak $x \in X$ inducira tudi homomorfizem $\eta_x: \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}'_x$ na nivoju bilk po predpisu $\eta_x(s_x) = \eta_U(s)_x$, kjer je $s \in \mathscr{F}(U)$ za poljubno okolico U točke x. Označimo s $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$ množico morfizmov med $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$.

Trditev A.6. *Naj bo X topološki prostor. Za vsak predsnop $\mathscr{F}$ na X obstaja snop $\mathscr{F}^+$ in morfizem predsnopov $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, da kompozicija z njim podaja bijekcijo* $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F}') \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{F}^+, \mathscr{F}')$ *za vsak snop $\mathscr{F}'$ na X.*

Snop $\mathscr{F}^+$ iz trditve imenujemo *posnopitev predsnopa $\mathscr{F}$*. Predstavljamo si, da je posnopitev kanoničen način, kako predsnopu dodati toliko prerezov, da bo zadoščal lastnosti lepljenja. S tem se sklada očitno dejstvo, da je $\mathscr{F}^+ \cong \mathscr{F}$ za vsak snop $\mathscr{F}$. Tudi za predsnope $\mathscr{F}$ pa za vsako točko $x \in X$ velja $\mathscr{F}_x \cong \mathscr{F}^+_x$, tj. predsnop in njegova posnopitev imata vse bilke iste. Z metodo posnopitve lahko vse predsnope, ki bi se pojavili, popravimo v snope, zato bomo od tu naprej obravnavali le snope.

Definicija A.7. Naj bo $f: X \to Y$ zvezna preslikava. Za snop $\mathscr{F}$ na X je njegov *potisk po f* snop $f_*\mathscr{F}$ na Y, ki je posnopitev predsnopa $U \mapsto \mathscr{F}(f^{-1}(U))$. Za snop $\mathscr{F}$ na Y je njegov *povlek po f* snop $f^{-1}\mathscr{F}$ na X, podan kot $U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{F}(V)$.

Opazimo lahko, da se za odprto preslikavo f definicija povleka poenostavi in velja $\Gamma(U, f^{-1}\mathscr{F}) = \mathscr{F}(f(U))$. Potreba po uporabi direktne limite se v splošnem pojavi le zato, ker množica $f(U)$ ni nujno odprta in tako ne moremo vzeti prerezov nad njo.

Primer A.8. Naj bo $i: * \to X$ inkluzija točke $x \in X$ v topološki prostor X, tj. naj velja $i(*) = x$. Snopi na enotočkovnem prostoru $*$ so samo abelove grupe in zanje velja $\mathscr{F}_* = \mathscr{F}(*)$. Po tej identifikaciji povlek poljubnega snopa $\mathscr{F}$ na X po i sovpada z njegovo bilko nad x, oziroma drugače povedano $i^{-1}\mathscr{F} = \mathscr{F}_x$.

Primer A.9. Naj bo $i: U \to X$ inkluzija odprte podmnožice $U \subseteq X$. Za snop $\mathscr{F}$ na X je njegov povlek po i znan kot *zožitev na U* in pišemo $i^{-1}\mathscr{F} = \mathscr{F}|_U$. To je snop na U, podan s predpisom $V \mapsto \mathscr{F}(V)$ za vse odprte podmnožice $V \subseteq U$. Npr. za snop zveznih funkcij očitno velja $\mathscr{C}_X|_U = \mathscr{C}_U$.

Opomba A.10. Diskusija tega razdelka je v veliki meri neodvisna od tega, da jemljejo (pred)snopi vrednosti v abelovih grupah; te so bile izbrane zgolj za bolj tekočo ekspozicijo. Mutandum mutandis vse, kar je v njihovem kontektsu smiselno, deluje, in bomo v nadaljevanju uporabljali, tudi za (pred)snope množic, kolobarjev, obsegov itd.

A.2. **Eksaktnost in kohomologija.** S snopi abelovih grup na prostoru X lahko imitiramo številne konstrukcije, ki jih poznamo za abelove grupe. Npr. za morfizem snopov abelovih grup $\eta: \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ lahko govorimo o njegovem *jedru* $\ker f$, ki je snop $U \mapsto \ker \eta_U$, njegovem *kojedru* $\operatorname{coker} \eta$, ki je posnopitev predsnopa $U \mapsto \operatorname{coker} \eta_U$, in njegovi *sliki* $\operatorname{im} \eta$, ki je definirana kot jedro kanoničnega morfizma $\mathscr{F}' \to \operatorname{coker} \eta$. Morfizem snopov abelovih grup $\eta: \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ je *monomorfizem*, če je $\ker \eta = 0$, in *epimorfizem*, če je $\operatorname{coker}\eta = 0$. Morfizem je *izomorfizem*, tj. ima obojestranski inverz za kompozicijo, natanko tedaj, ko je hkrati monomorfizem in epimorfizem.

Če sta $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$ snopa na X, če za vsak odprt $U \subseteq X$ velja $\mathscr{F}(U) \subseteq \mathscr{F}'(U)$, ter če ta inkluzija inducira morfizem snopov abelovih grup $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$, potem pravimo, da je $\mathscr{F}$ *podsnop snopa* $\mathscr{F}'$ in pišemo $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$. Tedaj kojedro inkluzijskega morfizma $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ imenujemo *kvocient snopa* $\mathscr{F}'$ *po podsnopu* $\mathscr{F}$ in ga označimo $\mathscr{F}'/\mathscr{F}$. Drugače povedano, gre za posnopitev predsnopa $U \mapsto \mathscr{F}'(U)/\mathscr{F}(U)$.

Na enak način za snope definiramo pojme homološke algebre: zaporedje snopov abelovih grup na danem topološkem prostoru

$$\mathscr{F}' \xrightarrow{\eta} \mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F}'' \tag{5}$$

je *eksaktno pri* $\mathscr{F}$, če velja $\operatorname{im}\eta = \ker\eta$. Rečemo, da je zaporedje *eksaktno*, če je eksaktno pri vsakem členu. V posebnem pravimo eksaktnemu zaporedju oblike

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0 \tag{6}$$

kratko eksaktno zaporedje. To, da je izpisano zaporedje kratko eksaktno, je ekvivalentno temu, da lahko $\mathscr{F}'$ identificiramo s podsnopom snopa $\mathscr{F}$ in da je kvocient $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ izomorfen snopu $\mathscr{F}''$.

Trditev A.11. *Naj bo X topološki prostor. Zaporedje snopov abelovih grup na X je eksaktno natanko tedaj, kadar je eksaktno inducirano zaporedje bilk nad vsako točko $x \in X$, tj. zaporedje oblike* (5) *je eksaktno pri $\mathscr{F}$ natanko tedaj, ko je za vsak $x \in X$ zaporedje abelovih grup*

$$\mathscr{F}'_x \xrightarrow{\eta_x} \mathscr{F}_x \xrightarrow{\mu_x} \mathscr{F}''_x$$

eksaktno pri $\mathscr{F}_x$.

Smiselno se zdi vprašanje, zakaj nismo raje definirali, da je zaporedje oblike (5) eksaktno, če je za vsako odprto podmnožico $U \subseteq X$ eksaktno zaporedje prerezov nad njo, torej zaporedje abelovih grup

$$\mathscr{F}'(U) \xrightarrow{\eta_U} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\mu_U} \mathscr{F}''(U).$$

Razlog je v tem, da je definicija eksaktnosti, kot smo jo podali, v določenem kategoričnem smislu pravilna: jedra, kojedra in ostali pojmi zadoščajo standardnim univerzalnim lastnostim in, da bomo imeli na razpolago orodja homološke algebre, mora biti eksaktnost definirana na podlagi jedra in slike. O razliki med eksaktnostjo in predlagano alternativo govori naslednja trditev.

Trditev A.12. *Naj bo X topološki prostor. Za vsak snop abelovih grup $\mathscr{F}$ na X in vsako nenegativno celo število i obstaja abelova grupa $H^i(X, \mathscr{F})$, tako da je $H^0(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$ in za vsako kratko eksaktno zaporedje oblike* (6) *obstaja eksaktno zaporedje*

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow H^0(X,\mathscr{F}') \longrightarrow H^0(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathscr{F}'') \\
\longrightarrow H^1(X,\mathscr{F}') \longrightarrow H^1(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{F}'') \\
\longrightarrow H^2(X,\mathscr{F}') \longrightarrow H^2(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^2(X,\mathscr{F}'') \longrightarrow \dots
\end{array}$$

v katerem prva vrstica sovpada z globalnimi prerezi zaporedja (6).

Abelovo grupo $H^i(X, \mathscr{F})$ iz trditve[12] imenujemo *i-ta kohomološka grupa snopa $\mathscr{F}$*, eksaktno zaporedje iz trditve pa *kohomološko dolgo eksaktno zaporedje*. Vidimo, da višje kohomološke grupe beležijo obstrukcijo temu, da bi bilo kratkemu eksaktnemu zaporedju snopov pripadajoče zaporedje globalnih prerezov tudi eksaktno – merijo torej, do kakšne mere lokalna eksaktnost ne zagotavlja globalne eksaktnosti.

Potrebovali bomo še relativno verzijo kohomologije. Če je $f: X \to Y$ zvezna preslikava, potem za kratko eksakto zaporedje snopov oblike (6) s potiskom po f porojeno zaporedje v splošnem ni eksaktno. Eksaktno je v prvih dveh členih, ne pa nujno v zadnjem. Zato za snop $\mathscr{F}$ na X definiramo *i-to izpeljano sliko po f* kot snop $R^i f_* \mathscr{F}$ na Y, ki je posnopitev predsnopa $U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathscr{F}|_{f^{-1}(U)})$. Iz trditve A.12 je mogoče izpeljati, da vsako kratko eksaktno zaporedje oblike (6) porodi dolgo eksaktno zaporedje

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^0 f_* \mathscr{F}' \arrow[r] & R^0 f_* \mathscr{F} \arrow[r] & R^0 f_* \mathscr{F}'' \arrow[dll, rounded corners] & \\
& R^1 f_* \mathscr{F}' \arrow[r] & R^1 f_* \mathscr{F} \arrow[r] & R^1 f_* \mathscr{F}'' \arrow[dll, rounded corners] & \\
& R^2 f_* \mathscr{F}' \arrow[r] & R^2 f_* \mathscr{F} \arrow[r] & R^2 f_* \mathscr{F}'' \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Primer A.13. Naj bo $f: X \to *$ konstantna preslikava. Snope abelovih grup na enotočkovnem prostoru $*$ je mogoče enačiti z abelovimi grupami. Tedaj za vsak snop $\mathscr{F}$ na X velja $f_* \mathscr{F} = \Gamma(X, \mathscr{F})$ in splošneje $R^i f_* \mathscr{F} = H^i(X, \mathscr{F})$ za vsako nenegativno celo število i. Nekoliko več podrobnosti o tem je mogče najti v primeru 4.6.

Večinoma bomo kohomologijo uporabljali zato, da bomo iz kratkih eksaktnih zaporedij snopov dobili dolga eksaktna zaporedja globalnih prerezov. Včasih pa je koristen tudi eksipliciten izračun kohomoloških grup. Eden izmed načinov je tako imenovani pristop *Čechove kohomologije*, ki ga bomo opisali v preostanku razdelka.

Naj bo $\mathcal{U}$ odprto pokritje topološkega prostora X in $\mathscr{F}$ snop abelovih grup na X. Definirajmo *Čechove i-kocikle snopa $\mathscr{F}$ glede na pokritje $\mathcal{U}$* kot abelovo grupo

$$\check{C}^i(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{j_0, \dots, j_i} \mathscr{F}(U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_i}),$$

kjer produkt teče po vseh indeksih, da so elementi $U_{j_k} \in \mathcal{U}$ paroma različni za $k = 0, \dots, i$. Označimo za lažje pisanje $U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_i} = U_{j_0, \dots, j_i}$. Definiramo homomorfizem $d^i: \check{C}^i(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to \check{C}^{i+1}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, tako da je za $s \in \check{C}^i(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, katerega komponente so $s_{j_1, \dots, j_i} \in \mathscr{F}(U_{j_1, \dots, j_i})$, komponenta slike $d^i s$ v množici prerezov $\mathscr{F}(U_{j_0, \dots, j_{i+1}})$ za poljubne indekse $j_0, \dots, j_{i+1}$ podana s predpisom

$$(d^i s)_{j_0, \dots, j_{i+1}} = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \left(s_{j_0, \dots, \widehat{j_k}, \dots, j_{i+1}} \right) \Big|_{U_{j_0, \dots, j_{i+1}}},$$

pri čemer $\widehat{j_k}$ označuje, da je indeks j_k izpuščen. Račun pokaže, da je $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Sedaj imenujemo *Čechova kohomološka grupa snopa $\mathscr{F}$ glede na pokritje $\mathcal{U}$* kvocientno

[12] V resnici trditev še ne določa grupe $H^i(X, \mathscr{F})$ enolično. Potreben je še kak tehnični pogoj, npr. da za vsak injektiven snop $\mathscr{F}$ na X velja $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$. Kar se v ozadju dogaja, je, da kohomologijo snopov definiramo kot desne izpeljane funktorje levo-eksaktnemu funktorju globalnih prerezov $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(X)$, glej [15, poglavje III, §2].

grupo

$$\check{H}^i(\mathcal{U},\mathscr{F}) = \ker d^i / \operatorname{im} d^{i-1},$$

kjer posebej definiramo $d^{-1} = 0$. Ko vzamemo direktno limito po vseh odprtih pokritjih $\mathcal{U}$ prostora X, urejenih glede na pofinitev, dobimo *Čechovo kohomološko grupo snopa* $\mathscr{F}$, torej je

$$\check{H}^i(X,\mathscr{F}) = \varinjlim \check{H}^i(\mathcal{U},\mathscr{F}).$$

Čechova kohomologija se v splošnem *ne* strinja s kohomologijo snopov, kot smo jo prej definirali. Da se ujemata, so potrebne topološke predpostavke na prostor X. Spomnimo se, da je prostor X *parakompakten*, če ima vsako njegovo pokritje lokalno končno podpokritje. Vsak kompakten prostor je očitno tudi parakompakten. Za naše potrebe bo zadoščal naslednji rezultat:

Trditev A.14 ([14, poglavje B, §3.4])**.** *Naj bo X parakompakten Hausdorffov topološki prostor. Za vsak snop abelovih grup $\mathscr{F}$ na X in vsako nenegativno celo število i velja $H^i(X,\mathscr{F}) \cong \check{H}^i(X,\mathscr{F})$.*

Za topološki prostor X imenujemo njegova *Lebesguova krovna dimenzija* najmanjše število n, da ima vsako pokritje $\mathcal{U}$ prostora X takšno pofinitev $\mathcal{U}'$, da je $U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_m = \varnothing$ za vse paroma različne $U_0, \ldots U_m \in \mathcal{U}'$ in vse $m > n$. Označimo $n = \dim X$. Izkaže se, glej [26, str. 306, Primer 6], da je Lebesguova krovna dimenzija topološka invarianta in da je dimenzija vsake kompaktne topološke ploskve enaka dva. V posebnem je $\dim X = 2$ za vse Riemannove ploskve X.

Lema A.15. *Naj bo X paraktompakten Hausdorffov prostor in $\mathscr{F}$ snop abelovih grup na X. Tedaj je $H^i(X,\mathscr{F}) = 0$ za vse $i > \dim X$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{U}$ poljubno pokritje prstora X in $\mathcal{U}'$ takšna pofinitev, katere vsi i-kratni preseki so prazni. Če je $i > \dim X$, takšna pofinitev obstaja, in velja

$$\check{C}^i(\mathcal{U}',\mathscr{F}) = \prod_{j_0,\ldots,j_i} \mathscr{F}(U_{j_0,\ldots,j_i}) = \prod_{j_0,\ldots,j_i} \mathscr{F}(\varnothing) = 0,$$

zato je $\check{H}^i(\mathcal{U}',\mathscr{F}) = 0$. Pokritje $\mathcal{U}$ je bilo poljubno, zato iz tega vidimo, da je

$$\check{H}^i(X,\mathscr{F}) = \varinjlim \check{H}^i(\mathcal{U},\mathscr{F}) = 0,$$

kar je po trditvi A.14 to, kar smo hoteli. □

B. Dodatek: Dokaz ničelnosti višje kohomologije

Cilj tega razdelka je dokazati izrek 4.8. Način dokazovanja ni tehnično zahtevnejši od preostanka dela, edini razlog, da je postavljen v dodatek, je, da je vsebinsko nekoliko disjunkten z obravnavano snovjo. Za dokaz rezultata o snopih $\mathscr{O}_X$-modulov uporabi gladke funkcije in je v določenem pogledu bolj analitično obarvan od preostanka dela, ki je sicer v precej algebraičnem duhu.

Predsnop $U \mapsto \mathscr{C}^\infty(U)$, ki odprti podmnožici $U \subseteq \mathbb{C}$ priredi kolobar gladkih funkcij na njej, zadošča lastnosti lepljenja. Imenujemo ga *snop gladkih funkcij na* $\mathbb{C}$ in ga označimo $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{C}}$.

Naj bo X Riemannova ploskev. Definirajmo *snop gladkih funkcij na* X kot takšen podsnop $\mathscr{C}^\infty_X \subseteq \mathscr{C}_X$, da za vsak koordinanti sistem $z\colon U \to \mathbb{C}$ na X podaja povlek $z^*\colon z^{-1}\mathscr{C}_{\mathbb{C}} \to \mathscr{C}_X|_U$ izomorfizem $z^{-1}\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{C}} \cong \mathscr{C}^\infty_X|_U$. Prerezom snopa $\mathscr{C}^\infty_X$ pravimo *gladke funkcije.* Opazimo, da gre za snop kolobarjev in, ker je vsaka holomorfna funkcija konstantna (saj velja $\mathscr{O}_{\mathbb{C}} \subset \mathscr{C}^\infty_{\mathbb{C}} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{C}}$), gre tudi za snop $\mathscr{O}_X$-modulov. Na standarden način je smiselno govoriti o *snopih* $\mathscr{C}^\infty_X$*-modulov.*

Primer B.1. Če bi v primeru 2.22 vlogo snopa $\mathscr{O}_X$ povsod nadomestili z $\mathscr{C}_X^\infty$, bi dobili snop *gladkih diferencialnih form.* Ta je na očiten način snop $\mathscr{C}_X^\infty$-modulov. Vsako gladko diferencialno formo lahko na koordinatni zaplati koordinate z enolično zapišemo v obliki $f(z)\,dz$ za f gladko funkcijo na neki domeni v $\mathbb{C}$.

Primer B.2. Bolj v splošnem, če je $\mathscr{F}$ snop $\mathscr{O}_X$-modulov, potem je tenzorski produkt $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{C}_X^\infty$-modulov. V analogiji z meromorfnimi prerezi uvedimo za ta tenzorski produkt oznako $\mathscr{C}_X^\infty(\mathscr{F})$. Prejšnji primer je zgolj $\mathscr{C}_X^\infty(\Omega_X)$.

Opomba B.3. Za lokalno prost snop $\mathscr{E}$ na X opisuje primer B.2 še posebej naravno konstrukcijo: če snop $\mathscr{E}$ sovpada s holomorfnimi prerezi vektorskega svežnja $p\colon E \to X$, potem dobimo snop $\mathscr{C}_X^\infty(\mathscr{E})$ kot snop gladkih prerezov istega svežnja, to je vseh takšnih gladkih preslikav $s\colon X \to E$, za katere velja $p \circ s = \mathrm{id}$.

Vsaka gladka funkcija f je tudi zvezna funkcija $X \to \mathbb{C}$, zato lahko govorimo o njenih vrednostih v točkah in njen *nosilec* definiramo kot podmnožico $\operatorname{supp} f \subseteq X$, ki je zaprtje vseh točk $x \in X$, za katere velja $f(x) \neq 0$. Za nekonstantne holomorfne funkcije smo videli, da je nosilec vselej celoten X, za gladke funkcije pa to ne velja. V tem se kaže, da gladke funkcije nimajo rigidnosti holomorfnih in zanje lokalna konstantnost še ne implicira globalne.

Opazimo, da imajo gladke funkcije *razčlenitev enote*, torej, da za vsako lokalno končno odprto pokritje $\{U_i\}$ ploskve X obstajajo gladke funkcije $\varphi_i \in \mathscr{C}_X^\infty(X)$, za katere velja $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i$ ter je $\sum_i \varphi_i = 1$, kjer je vsota zaradi lokalne končnosti pokritja v vsaki točki končna in tako dobro definirana. Ta osnovna lastnost gladkih funkcij sledi preko koordinat neposredno iz analognega rezultata za gladke funkcije na $\mathbb{C}$, dokaz katerega je v [22, str. 49 – 55]. Naslednji dokaz je iz [19, str. 195, Trditev 7.3.3].

Lema B.4. *Naj bo X Riemannova ploskev in naj bo $\mathscr{F}$ snop $\mathscr{C}_X^\infty$-modulov. Za vsak $i \geq 1$ velja $H^i(X, \mathscr{F}) \cong 0$.*

Dokaz. Na Riemannovih ploskvah se kohomologija snopov strinja s Čechovo, zato je dovolj pokazati, da je $\check{H}^i(X, \mathscr{F})$ trivialna za vsak $i \geq 1$. Naj bo $\mathcal{U}$ lokalno končno pokrtije za X. Izberimo element $s \in \check{C}^{i+1}(\mathcal{U}, \mathscr{C}_X^\infty)$ z $d^{i+1}s = 0$ in označimo z $s_{j_0,\ldots,j_{i+1}}$ njegovo komponento v $\mathscr{F}(U_{j_0,\ldots,j_{i+1}})$. Naj tvorijo gladke funkicije φ_i razčlenitev enote prirejeno pokritju $\mathcal{U}$ kot opisano pred lemo. Definirajmo element $s' \in \check{C}^i(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ komponentno po predpisu $s'_{j_0,\ldots,j_i} = \sum_k \varphi_k \cdot s_{k,j_0,\ldots,j_i}$, kjer k preteče vse indekse elementov pokritja $\mathcal{U}$. Potem je po definiciji Čechovega diferenciala d^i

$$(d^i s')_{j_0,\ldots,j_i} = \sum_k \sum_{l=0}^{i} (-1)^k \varphi_k \cdot s_{k,j_0,\ldots,\widehat{j_l},\ldots,j_i} = \sum_k \varphi_k \cdot s_{j_0,\ldots,j_i} = s_{j_0,\ldots,j_i},$$

pri čemer smo za drugo enakost uporabili, da je $d^{i+1}s = 0$. Po enakem argumentu kot v lemi A.14 torej Čechova kohomologija izgine. □

Novo definirane pojme zložimo v zaporedje snopov

$$0 \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{C}_X^\infty \to \mathscr{C}_X^\infty(\Omega_X) \to 0, \tag{7}$$

kjer je leva puščica inkluzija, desna pa morfizem snopov induciran lokalno na koordinatni zaplati s predpisom $f(z) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(z)\,dz$. Simbol $\overline{\partial}$ tu označuje standardni $\overline{\partial}$-operator na funkcijah ene kompleksne spremenljivke. Spomnimo se, da je gladka funkcija na domeni v $\mathbb{C}$ holomorfna natanko tedaj, ko je v jedru $\overline{\partial}$-operatorja. Preko koordinatnih sistemov ta trditev velja tudi na Riemannovi ploskvi X, a zgolj lokalno.

Eksaktnost zaporedij snopov je dovolj preverjati v bilkah, torej je zaporedje (7) eksaktno v $\mathscr{C}_X^\infty$. Eksaktnost v $\mathscr{O}_X$ je očitna, zato preostane le še naslednja lema.

V njenem dokazu bomo nekoliko liberalno uporabljali Stokesovo formulo in jezik diferencialnih form. Kratek in sproščen uvod v te pojme lahko bralec najde v [11, §9 & §10] ali [9, I.3 & I.4], v vse podrobnosti pa v [22, poglavji 12 & 16] ali [34, poglavji 7 & 8]. Priznajmo še, da gre le za stvar estetskosti in konciznosti; bralec, ki bi želel, bi lahko spodnji dokaz prepisal v vajo iz integracije po ravninskih območjih in namesto Stokesovega izreka uporabil Greeneovo formulo.

Lema B.5 (Dolbeaultova lema)**.** *Zaporedje* (7) *je eksaktno v* $\mathscr{C}_X^\infty(\Omega_X)$.

Dokaz. To je lokalna trditev, v smislu, da jo je dovolj pokazati na vsaki bilki posebej, zato lahko delamo v koordinatah. Brez škode za splošnost naj bo tako X disk radija $R > 0$ okoli izhodišča v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$. Naj bo f gladka funkcija na X in, ker nas zanima zgolj njen zarodek, ima lahko nosilec vsebovan kot strogo podmnožico v X. Cilj je najti takšno gladko funkcijo g, da je $\frac{\partial g}{\partial \bar\zeta} = f$. Definirajmo funkcijo $g\colon X \to \mathbb{C}$ kot

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi \wedge d\bar\xi.$$

Jasno je, da gre za gladko funkcijo. S substitucijo spremenljivk $\xi = \zeta + re^{i\theta}$, za katero izračun Jacobijeve matrike pokaže, da je $d\bar\xi \wedge d\xi = 2i\, dr \wedge d\theta$, utemeljimo prehod odvoda pod integralom

$$\frac{\partial g}{\partial \bar\zeta}(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\partial f(\zeta + re^{i\theta})}{\partial \bar\zeta} e^{-i\theta}\, dr\, d\theta.$$

Vrnimo se na prejšnje koordinate in upoštevajmo, da je pod integralskim znakom $\frac{\partial}{\partial \bar\zeta} = \frac{\partial}{\partial \bar\xi}$, pa je za $X' = X \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar\xi}\frac{d\xi \wedge d\bar\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{X'} \frac{\partial}{\partial \bar\xi}\left(\frac{f(\xi)}{\xi}\right) d\xi \wedge d\bar\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{X'} d\left(\frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right),$$

kjer je utemenjitev druge enakosti to, da je funkcia $1/\xi$ holomorfna na $X \setminus \{0\}$, integral pa je enak bodisi po X bodisi po X', utemeljitev tretje pa ponuja enakost $d\xi \wedge d\xi = 0$. Strateško zapišimo integral raje kot limito integralov

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X d\left(\frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{B_\epsilon} d\left(\frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right)$$

po kolobarjih $B_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < \zeta < R\}$. Zdaj uporabimo Stokesov izrek in po izreku o povprečni vrednosti za nek $0 \le \theta_\epsilon \le 2\pi$ dobimo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{B_\epsilon} d\left(\frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = f(\zeta + \varepsilon e^{i\theta_\varepsilon}),$$

pri čemer je dovolj integrirati samo po notranji krožnici, ki omejuje kolobar B_ε, ker po predpostavki nosilec f ne seka krožnice $|\xi| = R$. Ko izlimitiramo $\varepsilon \to 0$, dobimo $\frac{\partial g}{\partial \bar\zeta} = f$, kar smo želeli dokazati. □

Pravkar navedeni dokaz je bil vzet iz [11, §13]. Z njim smo naposled zmožni uresničiti namen tega razdelka.

Dokaz izreka 4.8. Naj bo najprej $\mathscr{E}$ lokalno prost snop na X. Iz Dolbeaultove leme sledi, da je (7) kratko eksaktno zaporedje snopov $\mathscr{C}_X^\infty$-modulov. Posebej je tudi eksaktno kot zaporedje $\mathscr{O}_X$-modulov in tenzorski produkt z lokalno prostim snopom je eksakten funktor. Torej imamo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{C}_X^\infty(\mathscr{E}) \to \mathscr{C}_X^\infty(\Omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}) \to 0,$$

in po lemi B.4 iz pripadajočega kohomološkega dolgega eksaktnega zaporedja sledi zaključek leme za snop $\mathscr{E}$.

Sedaj naj bo $\mathscr{F}$ splošen koherenten snop na X. Po izreku 4.28 (dokaz katerega je logično neodvisen od izreka 4.8) obstajata nebotičen snop $\mathscr{S}$ in lokalno prost snop $\mathscr{E}$, ki tvorita kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{F} \to \mathscr{E} \to 0.$$

Vsak nebotičen snop je mogoče pojmovati kot snop na točkah, nad katerimi ima netrivialne bilke. To je diskretna množica, ki ima Lebesguovo krovno dimenzijo enako 0, zato po lemi A.15 izrek velja za $\mathscr{S}$. Dokazali smo že, da velja za $\mathscr{E}$, zato iz kohomološkega dolgega eksaktnega zaporedja pripadajočega zgornjemu kraktemu eksaktnemu zaporedju izrek sledi tudi za $\mathscr{F}$. □

Opomba B.6. Alternativna pot dokazovanja izreka 4.8 bi bila lahko, da bi se sklicali na Serrejev izrek GAGA [15, str. 440, Izrek 2.1] za ekvivalenco kategorij koherentnih analitičnih snopov na kompaktni Riemannovi ploskvi (s kakrišnimi smo se ukvarjali v tem delu) in koherentnimi algebraičnimi snopi na sovpadajoči algebraični krivulji. Izrek 4.8 je zanje posledica Grothendieckovega izreka [15, str. 208, Izrek 2.7] o snopih na noetherskih topoloških prostorih.

Omenjeni Grothendieckov izrek velja za vse snope abelovih grup na noetherskem prostoru, kakršna je algebraična krivulja s topologijo Zariskega, vendar zaključek izreka 4.8 tako splošno ne velja. Za vsako kompaktno Riemannovo ploskev X se namreč kohomologija konstantnega snopa s poljubno abelovo grupo za vrednost po formalnem de Rhamovem izreku [14, poglavje B, §1.3] strinja s singularno kohomologijo z koeficienti v tej grupi in tako po [24, str. 150] velja $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Literatura

[1] M. F. Atiyah in F. Hirzebruch, *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **65**, 1959, str. 276–281.

[2] M. F. Atiyah in F. Hirzebruch, *The Riemann-Roch theorem for analytic embeddings*, Topology, **1**, 1962, str. 151–166.

[3] P. Berthelot, A. Grothendieck in L. Illusie *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1966-67 - Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch - (SGA 6)*, Lecture Notes in Mathematics **225**, Berlin, New-York, 1971.

[4] A. Borel in J.-P. Serre, *Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck)*, Bull. Soc. Math. France, **86**, 1958, str. 97–136.

[5] P. Colmez in J.-P. Serre, *Correspondance Grothendieck-Serre*, Documents Mathématiques (Paris), **2**, Société Mathématique de France, Paris, 2001.

[6] J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, verzija 21. 6. 2012, [ogled 12. 8. 2015], dostopno na `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf0.`.

[7] J. Dieudonné, *History of algebraic geometry. An outline of the history and development of algebraic geometry*, Wadsworth Mathematics Series, Wadsworth International Group, Belmont, 1985.

[8] D. Eisenbud in J. Harris, *3264 & All That Intersection Theory in Algebraic Geometry*, verzija 1. 4. 2013, [ogled 12. 8. 2015], dostopno na `http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic720403.files/book.pdf`.

[9] H. M. Farkas in I. Kra, *Riemann Surfaces, Second Edition*, Graduate Texts in Mathematics **71**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[10] F. Forstnerič, *Riemannove ploskve in analitična geometrija*, verzija 17. 4. 2014, [ogled 1. 10. 2014], dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~forstneric/datoteke/Riemannove%20ploskve2.pdf`.
[11] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer-Verlag, New York, Berlin 1991.
[12] W. Fulton, *Intersection Theory, Second Edition*, Ergebnisse der Matematik und Ihrer Grenzgebiet, 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[13] H. Grauert in R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **265**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[14] H. Grauert in R. Remmert, *Theory of Stein Spaces*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
[15] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York, Heidelberg 1977.
[16] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[17] F. Hirzebruch, L. Hörmander, J. Milnor, J.-P. Serre, I. M. Singer, *Prospects in mathematics. Proceedings of a Symposium*, Annals of Mathematics Studies, **70**, Princeton University Press, Princeton, 1971.
[18] F. Hirzebruch, *Neue Topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N. F.), Heft 9, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956.
[19] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Third Edition*, North-Holland Mathematical Library, **7.**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
[20] M. Kashiwara in P. Schapira, *Deformation Quantization Modules*, Astérisque **345**, 2012.
[21] S. Lang, *Algebra, Revised Third Edition*, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag, New York, 2004.
[22] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **218**, Springer-Verlag, New York, 2003.
[23] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **6**, Oxford University Press, New York, 2012.
[24] J. P. May, *A Concise Couse in Algebraic Topology*, Chicago Lecture Series in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1999.
[25] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics **5**, American Mathematical Society, Providence, 1995.
[26] J. R. Munkres, *Topology, A First Course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975.
[27] I. Panin in A. Smirnov, *Riemann-Roch Theorems for Oriented Cohomology*, Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **131**, Kluwer Acad. Publ. Dodrecht, 2004, str. 216–333.
[28] R. Vakil, *Math 245: Intersection Theory*, [ogled 12. 8. 2015], dostopno na `http://math.stanford.edu/~vakil/11-245/`.
[29] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*, J. Reine Angew. Math. **54**, 1857, str. 115–155.
[30] G. Roch, *Über die Anzahl der willkurlichen konstanten in algebraischen Functionen*, J. Reine Angew. Math. **64**, 1867, str. 372—276.
[31] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61**, 1955, str. 197–278.
[32] J.-P. Serre, *Local Fields*, Graduate Texts in Mathematics **67**, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1979.
[33] J.-P. Serre, *Un théorème de dualité*, Comment. Math. Helv. **29**, 1955, str. 9–26.
[34] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume One, Third Edition with corrections*, Publish or Perish, Inc., Huston, 2005.
[35] U. Thiel, *The bounded derived category of the category of coherent sheaves on a smooth projective curve*, verzija 24. 12. 2009, [ogled 12. 8. 2015], dostopno na `http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/~thiel/publications/derived_category_of_a_curve.pdf`.