UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Nina Poklukar

Metrična dimenzija grafa in premer

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Ljubljana, 2016

Kazalo

Metrična dimenzija grafa in premer

Povzetek

Delo diplomskega seminarja govori o grafih z enako metrično dimenzijo in premerom. Najprej povzamemo osnovne pojme teorije grafov in z njimi opišemo pojem metrične dimenzije grafa. Izbrane pojme obravnavamo tudi na primerih. Sledi nekaj izrekov iz teorije grafov skupaj z dokazi, nato pa osrednji izrek dela diplomskega seminarja. V dokazu osrednjega izreka je narejen seznam grafov, katerih premer in metrična dimenzija sta enaka 2.

Metric dimension and diameter of a graph

Abstract

We are interested in graphs with equal diameter and metric dimension. We first present basic terms of graph theory and basic facts about the metric dimension of a graph. Several examples are listed to illustrate the concepts introduced. After some theorems from graph theory are presented, the main result of this thesis is proved. The theorem gives the complete list of the graphs of diameter 2 whose metric dimension is also equal 2.

Math. Subj. Class. (2010): 05C05, 05C07, 05C12, 05C35.

Ključne besede: razdalja v grafu, premer, baza, metrična dimenzija, pot, podgraf, cikel, polni graf, drevo.

Keywords: distance in graph, diameter, basis, metric dimension, path, subgraph, cycle, complete graph, tree.

1. Uvod

Grafi se uporabljajo na ogromno področjih – z njimi predstavljamo različna omrežja (cestno omrežje, telekomunikacijsko omrežje ...), v kemiji z grafi upodabljamo strukture kemijskih spojin, v biologiji nam ponazarjajo družinska drevesa in sistematiko, v fiziki in elektrotehniki si jih lahko predstavljamo kot električna vezja, ali pa nam predstavljajo uporabo strojev in orodij. Srečujemo jih vsepovsod, v geografiji kot zemljevide, arhitekturi in gradbeništvu kot tlorise ali konstrukcije, najdemo pa jih tudi v ekonomiji, glasbi, celo v običajnih časopisih kot uganke, labirinte ... Grafi se pojavljajo tudi v različnih vejah matematike, posebej v kombinatoriki in optimizaciji, skratka povsod, kjer želimo podatke ponazoriti s točkami in črtami med njimi. To delo diplomskega seminarja spada v vejo matematike, ki se ukvarja s teorijo grafov.

Ustavimo se najprej pri naslovu dela diplomskega seminarja. *Graf* sestavljajo točke oziroma vozlišča, ki so med seboj povezana s črtami. *Metrika* v matematiki pomeni posplošitev pojma razdalje. Beseda nam že daje slutiti, da nas bodo zanimale razdalje med točkami. *Dimenzija* je karakteristika prostora, identificira prostor in objekte v njem. Pomeni razsežnost, velikost. Ob besedi *premer* nam na pamet najprej pade krog, kjer je premer največja možna razdalja med poljubnima točkama, ki ležita na krožnici. Tudi v grafu je premer definiran podobno. Natančne definicije pojmov sledijo v naslednjem poglavju, znotraj katerega si bomo pogledali tudi lastnosti nekaterih znanih družin grafov. Nato se bomo posvetili sami metrični dimenziji, jo spoznali na nekaj primerih in družinah grafov in se seznanili z njeno uporabo v vsakdanjem življenju. Na koncu pa bomo pozornost namenili grafom, ki imajo metrično dimenzijo enako svojemu premeru.

2. Osnovni pojmi teorije grafov

V tem poglavju bomo predstavili osnovne pojme iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju diplomskega seminarja. Nazorno so opisani v [8] in [12].

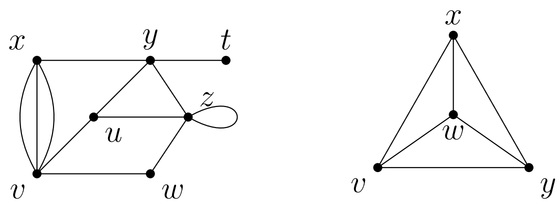
Graf G sestavlja (običajno končna) neprazna množica elementov, ki jih poimenujemo *vozlišča* grafa, in seznam (neurejenih) parov teh elementov, ki jih imenujemo *povezave* grafa. Množico vozlišč grafa označimo z $V = V(G)$, seznam povezav pa z $E = E(G)$. Če sta v in u vozlišči grafa G, potem za povezavi $\{u, v\}$ ali $\{v, u\}$ (krajše uv ali vu) rečemo, da *povezujeta* vozlišči u in v. Če je $\{u, v\}$ povezava grafa G, tedaj pravimo, da sta vozlišči u in v *sosednji* in pišemo $u \sim v$. Vozlišči u in v sta *krajišči* povezave uv.

Grafom, kjer dopuščamo *vzporedne povezave* in *zanke* oz. *povratne povezave* (to so povezave, ki imajo obe krajišči enaki, tj. povezave oblike $\{v, v\}$), pravimo *multigrafi.* Če želimo poudariti, da mislimo grafe brez zank in vzporednih povezav, jim rečemo *enostavni grafi.* Pri risanju grafov vozlišče ponazorimo kot točko v ravnini, povezavo med sosednjima vozliščema pa kot krivuljo (običajno kot daljico) s krajiščema v točkah ravnine, ki ustreza krajiščema povezave.

Stopnja ali *valenca* vozlišča u v grafu G , ki jo označimo z $\deg_G(u)$ (tudi $\deg(u)$), je enaka številu povezav grafa, ki imajo u za svoje krajišče. Vozliščem stopnje 0 pravimo *izolirana vozlišča*, vozliščem stopnje 1 pa *listi.*

Graf G je *regularen*, če obstaja tako število k, da velja $\deg_G(u) = k$ za vsak $u \in V(G)$. Rečemo, da je graf G k-regularen, oziroma da je regularen stopnje k.

Slika 1 prikazuje graf G z množico vozlišč $V(G) = \{x, y, t, u, v, w, z\}$ in seznamom povezav $E(G) = \{xv, xv, xv, xy, yu, yz, zz, zw, wv, uz, uv, yt\}$. Graf G na tej sliki je



(a) G (b) H

Slika 1: Grafa G in H.

multigraf. V vozlišču z ima zanko, med vozliščema x in y pa tri vzporedne povezave. Stopnja vozlišča x v G je enaka 4, stopnja vozlišča z v G pa je 5 ($\deg_G(z) = 5$). Vozlišče t je list. Graf H s slike 1 ima vsa vozlišča enake stopnje, $\deg_H(u) = 3$ za vsak $u \in V(H)$, zato je 3-regularen ali *kubičen*.

Stopnje vozlišč in število povezav grafa veže naslednja enakost:

Lema 2.1. *Za vsak graf G velja*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Dokaz. Naj bo M množica vseh urejenih parov $(u, e) \in V(G) \times E(G)$, za katere je u krajišče povezave e. Preštejemo elemente množice M. Po eni strani je

$$|M| = \sum_{u \in V(G)} \deg(u),$$

po drugi strani pa

$$|M| = \sum_{e \in E(G)} 2 = 2 \cdot |E(G)|.$$

Ker ima vsaka povezava dve krajišči, prispeva k vsoti stopenj grafa natanko 2. □

Posledica tega izreka je, da ima vsak graf sodo mnogo vozlišč lihe stopnje.

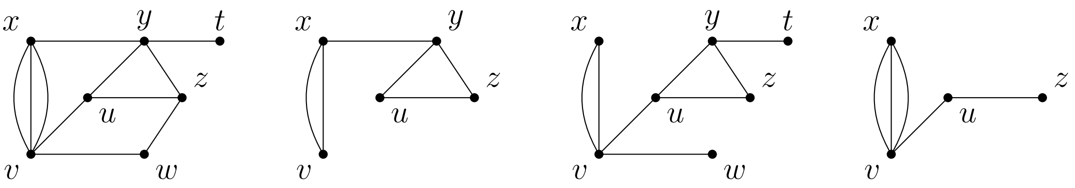
Graf G' je *podgraf* grafa G, če velja $V(G') \subseteq V(G)$ in $E(G') \subseteq E(G)$. Podgraf G' je *vpet*, če velja $V(G') = V(G)$, in je *induciran* z množico vozlišč $U \subseteq V(G)$, če velja $V(G') = U$ in $E(G') = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(G')\}$.

Naj bo G graf in $U \subset V(G)$. Z $G - U$ označimo graf, induciran z množico vozlišč $V(G) \setminus U$ (iz G odstranimo vsa vozlišča iz U in vse povezave, ki imajo vsaj eno krajišče v U). Za $F \subseteq E(G)$ bomo z $G - F$ označili graf G z odstranjenimi povezavami iz seznama F, torej vpet podgraf. Kadar odstranimo le eno vozlišče oziroma povezavo, oklepaje izpuščamo (pišemo $G - x$ namesto $G - \{x\}$).

Naj bo $e \in E(G)$. Z G/e označimo graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da identificiramo krajišči povezave e in odstranimo zanko (ta nastane iz povezave e) ter morebitne vzporedne povezave (te nastanejo, če je povezava e vsebovana v trikotnikih grafa G). Postopek imenujemo *skrčitev povezave*. Če delamo z multigrafi, nastalih vzporednih povezav ne odstranjujemo.

Graf G je *dvodelen*, če lahko množico vozlišč $V(G)$ zapišemo kot disjunktno unijo dveh podmnožic A, $B \subseteq V(G)$ tako, da je za vsako povezavo $uv \in E(G)$ eno od vozlišč u, v vsebovano v množici A, drugo pa v množici B. Množici A in B imenujemo množici *dvodelnega razbitja* grafa.

Graf G_3 s slike 2 je dvodelen. Za eno množico dvodelnega razbitja grafa G_3 vzamemo $\{x, u\}$, za drugo pa $\{v, z\}$.



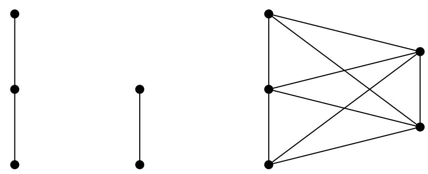
(a) G (b) G_1 (c) G_2 (d) G_3

Slika 2: Graf G, njegov podgraf G_1, vpeti podgraf G_2 in podgraf G_3, induciran z množico vozlišč $\{x, v, u, z\}$.

Komplementarni graf ali *komplement grafa* G je graf $\overline{G}$, za katerega velja, da je $V(\overline{G}) = V(G)$, vsebuje pa natanko tiste povezave, ki jih ni v grafu G.

Unija grafov G in H je graf $G \cup H$ z množico vozlišč $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ in seznamom povezav $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

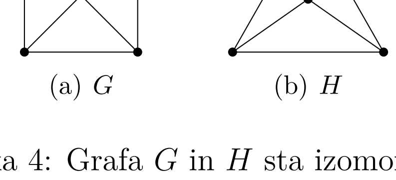
Spoj grafov $G = (V(G), E(G))$ in $H = (V(H), E(H))$, kjer je $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, je graf $G + H$, katerega množica vozlišč je $V(G) \cup V(H)$, seznam povezav pa $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{v_1v_2 \mid v_1 \in V(G), v_2 \in V(H)\}$. Spoj tako vsebuje $|V(G)| + |V(H)|$ vozlišč in $|E(G)| + |E(H)| + |V(G)| \cdot |V(H)|$ povezav. Spoj grafov je komutativen, tj. $G + H = H + G$.



(a) G (b) H (c) $G + H$

Slika 3: Grafa G in H ter njun spoj $G + H$.

Grafa G in H sta *izomorfna*, če lahko H dobimo iz G tako, da spremenimo oznake vozlišč – torej, če obstaja bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$, tako da je število povezav, ki povezujejo kateri koli par vozlišč v G, enako številu povezav, ki povezujejo pripadajoči par vozlišč v H, tj. da velja: $uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$. Oznaka: $G \cong H$.

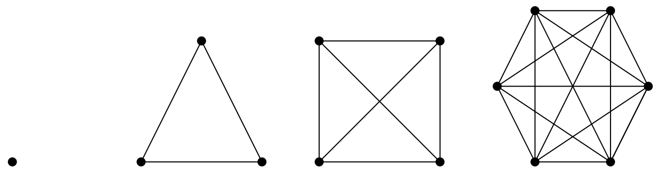


(a) G (b) H

Slika 4: Grafa G in H sta izomorfna.

2.1. **Nekatere družine grafov.** Oglejmo si nekaj najbolj znanih družin grafov, ki jih bomo pogosto uporabljali v nadaljevanju. Povzemimo jih iz [8] in [12].

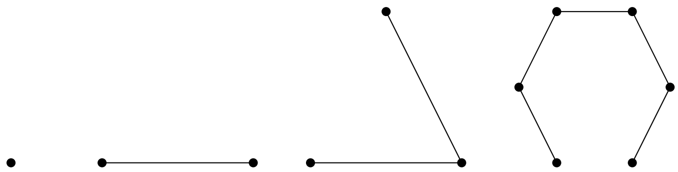
- **Polni grafi** K_n: $V(K_n) = \mathbb{Z}_n$, $E(K_n) = \{uv \mid u, v \in \mathbb{Z}_n, u \neq v\}$. Polni graf K_n ima n vozlišč in $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ povezav. Je $(n-1)$-regularen graf in je dvodelen le za $n = 1$ in $n = 2$. Podgraf grafa G, ki je izomorfen nekemu polnemu grafu K_n, imenujemo *polni podgraf* ali *klika*.



(a) K_1 (b) K_3 (c) K_4 (d) K_6

Slika 5: Polni grafi K_1, K_3, K_4 in K_6.

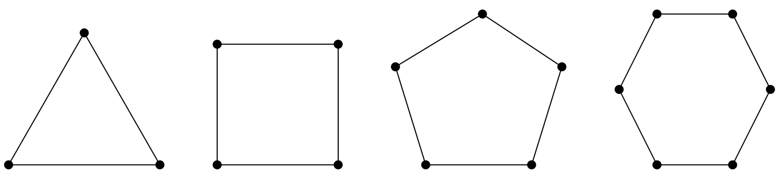
- **Poti** P_n: $V(P_n) = \mathbb{Z}_n$, $E(P_n) = \{u(u+1) \mid u = 0, 1, \ldots, n-2\}$. Pot P_n ima n vozlišč in $n-1$ povezav. Njena dolžina je $n-1$. Za $n = 1$ in $n = 2$ je enaka grafu K_n. Vse poti so dvodelni grafi.



(a) P_1 (b) P_2 (c) P_3 (d) P_6

Slika 6: Poti P_1, P_2, P_3 in P_6.

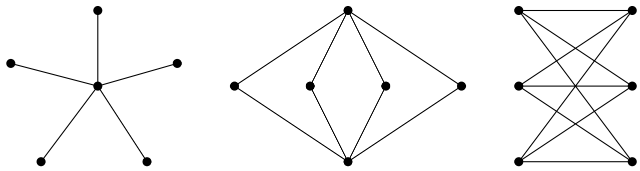
- **Cikli** C_n $(n \geq 3)$: $V(C_n) = \mathbb{Z}_n$, $E(C_n) = \{u(u+1) \mid u \in \mathbb{Z}_n\}$. Kadar dopuščamo tudi multigrafe, sta definirana še cikla C_1 (zanka) in C_2 (par vzporednih povezav). Cikel C_n ima n vozlišč in n povezav. Je 2-regularen graf in je dvodelen natanko tedaj, ko je n sodo število. Vsak 2-regularen graf je disjunktna unija enega ali več ciklov. Cikel C_3 imenujemo tudi *trikotnik*. Z odstranitvijo katere koli izmed povezav cikla C_n dobimo pot P_n.



(a) C_3 (b) C_4 (c) C_5 (d) C_6

Slika 7: Cikli C_3, C_4, C_5 in C_6.

- **Polni dvodelni grafi** $K_{m,n}$: $V(K_{m,n}) = A \cup B$, kjer velja $|A| = m$, $|B| = n$ in $A \cap B = \emptyset$, $E(K_{m,n}) = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$. Poln dvodelni graf $K_{m,n}$ ima $m + n$ vozlišč in $m \cdot n$ povezav. Graf $K_{m,n}$ je regularen natanko tedaj, ko je $m = n$. Vsi grafi $K_{m,n}$ so dvodelni. Grafom $K_{1,n}$ pravimo tudi *zvezde*. Polni dvodelni grafi $K_{m,n}$ so primer spoja grafov: $K_{m,n} \cong \overline{K_m} + \overline{K_n}$.



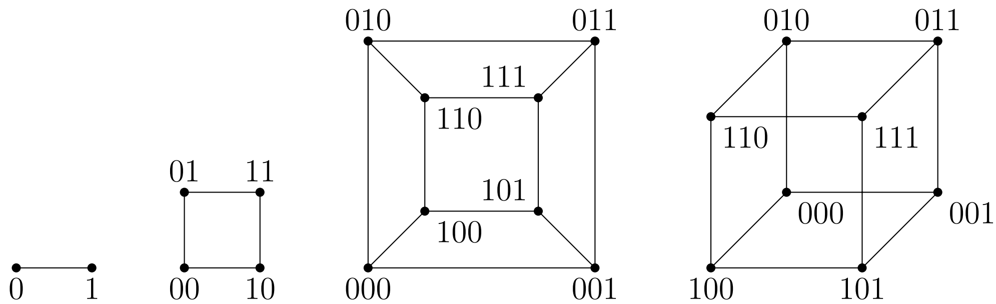
(a) $K_{1,5}$ (b) $K_{2,4}$ (c) $K_{3,3}$

Slika 8: Polni dvodelni grafi $K_{1,5}$, $K_{2,4}$ in $K_{3,3}$.

- **Hiperkocke** Q_d: $V(Q_d) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_d) \mid u_i \in \{0,1\}\}$,

$$E(Q_d) = \{uv \mid u, v \in V(Q_d) : \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i| = 1\}.$$

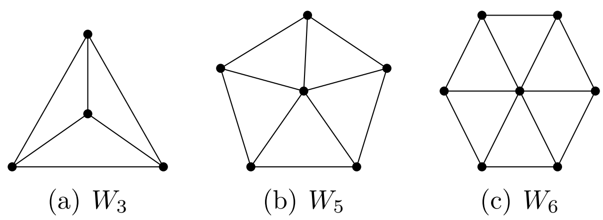
  Običajno med hiperkocke štejemo tudi 0-razsežno kocko $Q_0 = K_1$. Hiperkocka Q_d (skelet d-razsežne kocke) ima 2^d vozlišč in $d \cdot 2^{d-1}$ povezav. Je d-regularen graf. Vse hiperkocke so dvodelni grafi (za množici dvodelnega razbitja vzamemo množico vozlišč, ki imajo liho/sodo mnogo komponent enakih 0).



(a) Q_1 (b) Q_2 (c) Q_3 (d) Q_3

Slika 9: Hiperkocki Q_1 in Q_2 ter dve sliki hiperkocke Q_3.

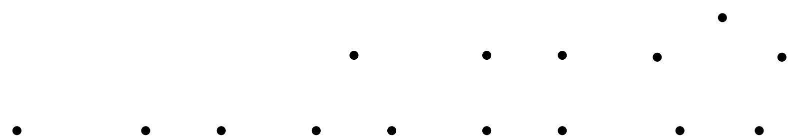
- **Kolesa** W_n ($n \geq 3$): $V(W_n) = \mathbb{Z}_n \cup \{\infty\}$, $E(W_n) = \{u(u+1), u\infty \mid u \in \mathbb{Z}_n\}$. Graf W_n ima $n+1$ vozlišč in $2n$ povezav. Edino regularno kolo je $W_3 \cong K_4$. Nobeno kolo ni dvodelen graf. Kolesa so primer spoja grafov: $W_n = K_1 + C_n$.



(a) W_3 (b) W_5 (c) W_6

Slika 10: Kolesa W_3, W_5, in W_6.

- **Prazni grafi** N_n: $V(N_n) = \mathbb{Z}_n$, $E(N_n) = \emptyset$. N_n so grafi brez povezav z n izoliranimi vozlišči. Stopnja vozlišča $\deg(u) = 0$ za vsak $u \in V(N_n)$, N_n je zato regularen stopnje 0.



(a) N_1 (b) N_2 (c) N_3 (d) N_4 (e) N_5

Slika 11: Prazni grafi N_1, N_2, N_3, N_4 in N_5.

2.2. **Metrične lastnosti.** Zaporedje vozlišč $v_0 v_1 \ldots v_k$ grafa G je *sprehod* dolžine k, če $v_i \sim v_{i+1}$ za $0 \leq i < k$. Sprehod je *enostaven* (rečemo mu tudi *sled*), če so vse povezave na njem različne, tj. vsebuje vsako povezavo grafa največ enkrat. Sprehod je *sklenjen*, če je $v_0 = v_k$. Pravimo mu tudi *obhod*. Sprehod, na katerem so vsa vozlišča različna, je *pot*, enostaven sklenjen sprehod z vsaj eno povezavo, na katerem sta enaki le prvo in zadnje vozlišče, pa je *cikel* grafa. Zaradi enostavnosti dopuščamo tudi sprehode dolžine 0, tj. sprehode oblike v_0. Sprehod dolžine 0 je hkrati tudi pot, domenimo pa se, da ga ne bomo imeli za cikel.

Lema 2.2. *Če med vozliščema grafa obstaja sprehod dolžine k, potem med njima obstaja tudi pot dolžine največ k.*

Dokaz. Naj bosta u in v poljubni vozlišči grafa G, med katerima obstaja sprehod. Med vsemi sprehodi med u in v izberimo najkrajšega, denimo $S = v_0 v_1 \ldots v_m$, $u = v_0$, $v = v_m$. Dovolj je dokazati, da je S pot. Pa denimo, da temu ni tako. Tedaj obstaja v zaporedju $v_0, v_1, \ldots, v_m$ kako vozlišče, ki se ponovi, denimo $v_i = v_j$ za $0 \leq i < j \leq m$. Vendar tedaj je tudi $S' = v_0 v_1 \ldots v_i v_{j+1} \ldots v_m$ sprehod med u in v, ki pa je očitno krajši od sprehoda S. To pa nasprotuje naši izbiri sprehoda S in dokazuje, da je S pot. $\square$

Za vozlišči u in v rečemo, da sta v isti *povezani komponenti*, če med njima obstaja sprehod. Relacija biti v isti povezani komponenti je ekvivalenčna. Njenim ekvivalenčnim razredom rečemo *povezane komponente* grafa. Graf G je *povezan*, če ima eno samo povezano komponento. *Drevo* je acikličen povezan graf, *gozd* pa je acikličen graf.

V povezanem grafu G je *razdalja* $d_G(u, v)$ (tudi $d(u, v)$) med vozliščema u in v v grafu G definirana kot število povezav na najkrajši poti med u in v. Če taka pot ne obstaja, za razdaljo vzamemo vrednost ∞. Kot pove lema 2.2, bi lahko razdaljo ekvivalentno definirali tudi kot dolžino najkrajšega sprehoda med danima vozliščema. S tako definirano razdaljo postane množica vozlišč povezanega grafa metrični prostor, funkcija razdalje pa metrika, saj zanjo velja (iz [3]):

(1) $d_G(u, v) \geq 0$, enakost pa velja natanko tedaj, ko je $u = v$,
(2) $d_G(u, v) = d_G(v, u)$,
(3) $d_G(u, w) + d_G(w, v) \geq d_G(u, v)$.

V povezanem grafu G razdaljo med množico vozlišč $S \subseteq V(G)$ in vozliščem $v \in V(G)$ definiramo kot $d_G(v, S) = \min_{u \in S} d_G(v, u)$.

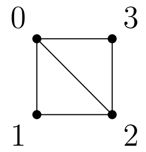
Ko na grafu definiramo razdaljo, se nam porodi precej novih pojmov.

Po definiciji podgrafa je vsak podgraf spet graf in vsak graf je podgraf samega sebe. Za vsak podgraf H grafa G velja, da je $d_H(u, v) \geq d_G(u, v)$. V primeru, ko je za poljubni vozlišči $u, v \in H$, $d_H(u, v) = d_G(u, v)$, pravimo, da je H *izometrični podgraf* grafa G. Vsak izometrični podgraf je tudi inducirani podgraf, medtem ko obrat tega ne drži.

Premer grafa G je maksimum razdalj med poljubnima vozliščema u, $v \in G$. Označimo ga z $\mathrm{diam}(G)$:

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d_G(u,v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

Primer 2.3. Določimo premer grafa G na sliki 12.



Slika 12: Graf G iz primera 2.3.

- $d(0,0) = d(1,1) = d(2,2) = d(3,3) = 0$
- $d(0,1) = d(1,0) = 1$
- $d(0,2) = d(2,0) = 1$
- $d(0,3) = d(3,0) = 1$
- $d(1,2) = d(2,1) = 1$
- $d(1,3) = d(3,1) = 2$
- $d(2,3) = d(3,2) = 1$

Največje med števili, tj. $\max\{0,1,1,1,1,2,1\} = 2$, torej je $\mathrm{diam}(G) = 2$.

Največji premer grafa na n vozliščih ima pot P_n. Premer poti je kar njena dolžina, ki je $n-1$ za $n \geq 1$. Po definiciji polnega grafa je $\mathrm{diam}(K_n) = 1$ za $n \geq 2$, saj sta vsaki dve vozlišči med seboj povezani. Pri polnem dvodelnem grafu je $\mathrm{diam}(K_{m,n}) = 2$, če je $m + n \geq 3$, saj je vsako vozlišče iz ene množice dvodelnega razbitja grafa $K_{m,n}$ povezano z vsemi vozlišči iz druge množice dvodelnega razbitja tega grafa. Med poljubnima vozliščema v grafu $K_{m,n}$ je torej razdalja 1, če sta vozlišči v različnih množicah dvodelnega razbitja, in 2, če sta izbrani vozlišči v isti množici razbitja. Premer hiperkocke Q_d je d, saj moramo izbrati najmanj d povezav, da vozliščem na hiperkocki spremenimo vseh d koordinat. Cikle C_n si za trenutek poenostavljeno predstavljajmo kot krožnice, na katerih leži n točk. To nam pomaga ugotoviti njihov premer. Postavimo se v poljubno vozlišče cikla. Če je cikel sod, do najbolj oddaljene točke vodi pot dolžine $\frac{n}{2}$. Če pa je cikel lih, sta najbolj oddaljeni točki dve, najkrajša pot do ene od njiju pa je dolga $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. V obeh primerih je za cikel C_n njegov premer $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

3. Metrična dimenzija grafa

Poznamo več vrst dimenzij grafov, med drugim metrično, particijsko, krepko izometrično, Fibonaccijevo in konveksno. V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali metrično dimenzijo grafov. Osnovno o njej najdemo v [17]. Naj bodo grafi, s katerimi se bomo ukvarjali, končni, enostavni in povezani.

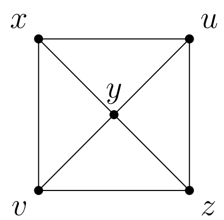
3.1. **Definicija metrične dimenzije.** Vektorju razdalje vozlišča v do množice vozlišč $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, ki ga označimo z $r(v|W) = (d(v,w_1), \ldots, d(v,w_n))$, rečemo *metrična predstavitev vozlišča v glede na množico W*. Množica W je *rešljiva množica grafa G*, če za poljubni različni vozlišči u in $v \in V(G)$ velja, da je $r(u|W) \neq r(v|W)$. W je torej rešljiva množica grafa G, če imajo vozlišča G paroma različne metrične predstavitve glede na množico W. Rešljivi množici grafa G z najmanjšim številom vozlišč pravimo *najmanjša rešljiva množica* ali *baza* grafa G. Število n (moč baze) imenujemo *metrična dimenzija grafa* G, ki jo označimo z $\dim(G)$.

Vidimo, da ima vektor razdalje toliko koordinat, kolikor je moč baze. Če noben par vozlišč grafa G nima enakih koordinat, rečemo, da je konfiguracija baznih vozlišč *veljavna*.

Prvi je pojem minimalne rešljive množice (metrične baze) grafa vpeljal Slater leta 1975, vendar pod imenom *lokacijska množica*, metrično dimenzijo pa je imenoval *lokacijsko število*. Leta 1976 sta Harary in Melter v [4] isto število poimenovala *metrična dimenzija* grafa. To poimenovanje se je tudi ohranilo. Od tedaj je koncept rešljivih množic in baze precej raziskovan in se pojavlja na različnih področjih.

3.2. **Določanje metrične dimenzije grafov na primerih.** Na primerih dveh grafov si poglejmo, kako določimo bazo in z njo metrično dimenzijo danega grafa.

Primer 3.1. Določimo metrično dimenzijo grafa G na sliki 13.

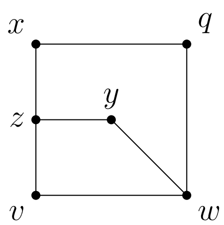


Slika 13: Graf G iz primera 3.1, $\dim(G) = 2$.

- $B_1 = \{x\}$ ni baza, saj je $r(u|B_1) = r(y|B_1) = r(v|B_1) = (1)$ in $r(z|B_1) = (2)$. Podobno ne morejo biti bazne množice $B_2 = \{u\}$, $B_3 = \{v\}$, $B_4 = \{z\}$.
- $B_5 = \{y\}$ ni baza, saj je $r(x|B_5) = r(v|B_5) = r(z|B_5) = r(u|B_5) = (1)$.
- $B_6 = \{x, y\}$: $r(u|B_6) = (1, 1)$, $r(v|B_6) = (1, 1)$, $r(z|B_6) = (2, 1)$ ni baza, zaradi simetrije tudi ne $\{u, y\}$, $\{z, y\}$, $\{v, y\}$.
- $B_7 = \{x, z\}$: $r(u|B_7) = (1, 1)$, $r(v|B_7) = (1, 1)$, $r(y|B_7) = (1, 1)$ ni baza, prav tako ne $\{u, v\}$.
- $B_8 = \{x, u\}$: $r(v|B_8) = (1, 2)$, $r(y|B_8) = (1, 1)$, $r(z|B_8) = (2, 1)$ je baza, enako $\{u, z\}$, $\{z, v\}$, $\{v, x\}$.

Moč baze je 2, torej je $\dim(G) = 2$.

Primer 3.2. Določimo metrično dimenzijo grafa H na sliki 14.



Slika 14: Graf H iz primera 3.2, $\dim(H) = 2$.

- $B_1 = \{x\}$ ni baza, saj je $r(z|B_1) = r(q|B_1) = (1)$, podobno ne morejo biti bazne množice $B_2 = \{y\}$, $B_3 = \{v\}$ in $B_4 = \{q\}$,

- $B_5 = \{z\}$ ni baza, saj je $r(x|B_5) = r(v|B_5) = r(y|B_5) = (1)$, podobno ne more biti bazna množica $B_6 = \{w\}$,
- $B_7 = \{x, w\}$: $r(v|B_7) = r(y|B_7) = (2, 1)$, torej B_7 ni baza,
- $B_8 = \{x, q\}$: $r(v|B_8) = r(y|B_8) = (2, 2)$, torej B_8 ni baza,
- $B_9 = \{x, z\}$: $r(v|B_9) = r(y|B_9) = (2, 1)$, torej B_9 ni baza,
- $B_{10} = \{z, y\}$: $r(x|B_{10}) = r(v|B_{10}) = (1, 2)$, torej B_{10} ni baza,
- $B_{11} = \{z, v\}$: $r(x|B_{11}) = r(y|B_{11}) = (1, 2)$, torej B_{11} ni baza,
- $B_{12} = \{z, w\}$: $r(y|B_{12}) = r(v|B_{12}) = (1, 1)$, torej B_{12} ni baza,
- $B_{13} = \{z, q\}$: $r(v|B_{13}) = r(y|B_{13}) = (1, 2)$, torej B_{13} ni baza,
- $B_{14} = \{v, y\}$: $r(z|B_{14}) = r(w|B_{14}) = (1, 1)$, torej B_{14} ni baza,
- $B_{15} = \{v, w\}$: $r(q|B_{15}) = r(y|B_{15}) = (2, 1)$, torej B_{15} ni baza,
- $B_{16} = \{y, w\}$: $r(q|B_{16}) = r(v|B_{16}) = (2, 1)$, torej B_{16} ni baza,
- $B_{17} = \{w, q\}$: $r(v|B_{17}) = r(y|B_{17}) = (1, 2)$, torej B_{17} ni baza,
- $B_{18} = \{x, y\}$: $r(z|B_{18}) = (1, 1)$, $r(v|B_{18}) = (2, 2)$, $r(w|B_{18}) = (2, 1)$, $r(q|B_{18}) = (1, 2)$, torej B_{18} je baza, prav tako pa za bazne množice lahko izberemo $\{x, v\}$, $\{v, q\}$ in $\{y, q\}$.

Moč baze je 2, torej je $\dim(G) = 2$.

Čeprav sta grafa iz zadnjih primerov le na petih in šestih vozliščih, smo za metrično dimenzijo morali obravnavati kar nekaj možnosti. To nam že daje slutiti, da določanje metrične dimenzije poljubnega grafa ni enostavna naloga, je celo NP-težek problem. Ugotavljanje, ali je metrična dimenzija danega grafa manjša od neke vrednosti, pa je NP-poln problem. Obstajajo postopki za izračun metrične dimenzije določenih družin grafov, ki problem določanja metrične dimenzije rešijo v polinomskem času. Na primer, za poti znamo metrično dimenzijo izračunati v konstantnem času, za drevesa pa v linearnem.

3.3. **Uporaba metrične dimenzije.** Tudi v vsakdanjem življenju srečujemo metrično dimenzijo. Uporablja se npr. pri miselnih problemih in igrah, kot sta tehtanje kovancev in mastermind. Prav tako jo srečujemo pri preverjanju računalniškega omrežja, v kemiji pri proučevanju kemijskih struktur in podobno. Nekaj uporab najdemo v [13], [14] in [16].

3.3.1. *Sonar, loran.* V poplavi pametnih telefonov se premalo zavedamo, kako ti delujejo. Eden izmed načinov njihove uporabe je tudi navigacija, kjer se telefon za izračun trenutne lokacije poveže s sateliti. Uporabo metrične dimenzije lahko prikažemo na sistemih loran in sonar. Loran (Long Range Navigation) je elektronski sistem za navigacijo, ki za delovanje uporablja časovno razliko med sprejemom radijskih signalov, ki jih oddajajo več kot trije oddajniki, in sprejemnikom, da določimo sprejemnikov položaj. Sonar (Sound Navigation And Ranging) je tehnika, ki uporablja širjenje zvočnih valov, ki se odbijejo od opazovanega objekta in na podlagi časovne razlike oceni položaj opazovanega objekta. Za kar najboljšo učinkovitost sistemov loran in sonar (v smislu kvaliteta/stroški), jih skušamo postaviti tako, da s čim manj oddajniki učinkovito pokrijemo največji možen del terena. Postavitev omenjenih sistemov lahko predstavimo z grafom, kjer vozlišča O predstavljajo položaj oddajnikov, tako da je položaj vsakega vozlišča, ki ponazarja trenutno lokacijo objekta, enolično določen s koordinatami razdalj do vozlišč oddajnikov. Množica vozlišč O je množica baznih vozlišč grafa. S pomočjo metrične dimenzije tako lahko določimo minimalno število potrebnih oddajnikov, da lahko enolično ugotovimo lokacijo objekta na določenem področju. Če kateri od oddajnikov odpove, dobimo neveljavno konfiguracijo baznih vozlišč, torej ne moremo več enolično določiti koordinat vozlišča (lokacije), v katerem se nahaja opazovani objekt.

Sistem GPS (Global Positioning System) vsebuje med 24 in 31 aktivnih satelitov, ki po orbitah krožijo okoli Zemlje in pošiljajo signale iz 20.300 kilometrov nad Zemljinim površjem nazaj na Zemljo. Ker so zelo oddaljeni, pokrijejo veliko območje, na katerega lahko signal pošiljajo, ali pa ga iz njega prejemajo. Locirani so tako, da GPS sprejemnik na Zemlji vedno prejema signal iz vsaj štirih satelitov, ki so potrebni za izračun natančne lokacije sprejemnika. Najmanjša množica satelitov, ki je potrebna za izračun natančne lokacije sprejemnika predstavlja metrično bazo, njena moč oz. število satelitov pa metrično dimenzijo. Na Zemlji podatke iz satelitov sprejemajo štiri postaje, ki te podatke pošljejo v centralno postajo, kjer jih popravijo in pošljejo nazaj na satelite. Prav zaradi velike oddaljenosti satelitov in popravkov podatkov lahko pride do nekaj metrov odstopanj od dejanske lokacije GPS sprejemnika.

3.3.2. *Robotika.* Navigacijo robota lahko opišemo s strukturiranim grafom, v katerem se robot premika od enega vozlišča k drugemu. Robot natančno ve, kje v grafu se nahaja, saj lahko svoj položaj enolično določi s pomočjo orientacijskih točk na tem grafu. Če robot pozna razdaljo med njim in dovolj veliko množico orientacijskih točk, je njegov položaj v grafu enolično določen. Robot zato pošlje signal, da ugotovi, koliko je oddaljen od vsake orientacijske točke, saj na podlagi tega natančno ve svoj položaj. Da bi orientacijske točke postavili ekonomično (da bi jih bilo čim manj), moramo izračunati najmanjše število potrebnih orientacijskih točk danega grafa in določiti njihove položaje. Torej moramo izračunati metrično dimenzijo danega grafa in najti njegovo bazo, ki nam določa orientacijske točke.

3.4. **Metrična dimenzija nekaterih družin grafov.** Da bi določili metrično dimenzijo nekaterih družin grafov, bomo najprej dokazali nekaj dodatnih trditev – naslednjo najdemo v [13].

Lema 3.3. *Naj bo $G = (V(G), E(G))$ povezan graf. Naj bodo u, v in w njegova vozlišča in naj bo $uv \in E$. Če je $d(u, w) = d$, tedaj je $d(v, w) \in \{d - 1, d, d + 1\}$.*

Dokaz. Ločimo dve možnosti:

- Če iz v do w ne moremo priti po drugi poti kakor preko u, je dolžina najkrajše poti med v in w enaka $d + 1$. Najprej gremo od v do u in ker sta ti vozlišči povezani, je razdalja med njima 1, nato pa gremo od u do w po najkrajši poti med njima, ki ima d povezav. Najkrajša pot med v in w je torej vsota obeh dolžin, $d + 1$.
- Če imamo med v in w drugo pot, lahko nastopi več možnosti. Če je ta pot:
  - dolga d, potem je dolžina najkrajše poti med u in w enaka dolžini najkrajše poti med v in w, torej d.
  - dolga $d - 1$, potem iz v do w ne gremo preko u, saj to ne bi bila več najkrajša pot. Torej je najkrajša pot dolžine $d - 1$.
  - krajša od $d - 1$, potem d ni več dolžina najkrajše poti med u in w, saj bo dobili krajšo pot med u in w, če bi šli preko v. To pa je protislovje s predpostavko, da je d dolžina najkrajše poti med u in w.
  - daljša od $d + 1$, potem je najkrajša pot med w in v tista preko u. Ta pa je dolga $d + 1$.

□

Kousar, Tomescu in Husnine v [9] podajo naslednja izreka, ki ju bomo kasneje pogosto uporabili. Njuna dokaza najdemo v [13].

Izrek 3.4. *Naj bo $G = (V(G), E(G))$ graf, katerega metrična dimenzija je 2, in naj bo $\{a, b\} \subset V(G)$ metrična baza za G. Potem velja:*

(1) *Med a in b obstaja natanko ena najkrajša pot P.*
(2) *Stopnja vozlišč a in b je kvečjemu 3.*
(3) *Vsa vozlišča iz P, različna od a in b, imajo stopnjo kvečjemu 5.*

Dokaz. (1) Recimo, da obstajata dve najkrajši poti P_1 in P_2 med baznima vozliščema a in b. Izberimo si dve vozlišči, recimo jima x in y, za kateri velja, da se vsako nahaja na svoji najkrajši poti P_1 ali P_2 in sta obe od a enako oddaljeni. Sedaj poglejmo koordinate vozlišč x in y. Ker se obe dve vozlišči nahajata na najkrajši poti med a in b in sta od a enako oddaljeni, imata enake koordinate, kar je v protislovju z izbiro $\{a, b\}$ za bazno množico. Sledi, da je najkrajša pot med a in b enolično določena, torej sta poti P_1 in P_2 enaki.

(2) Naj bodo $(0, x)$ koordinate baznega vozlišča a. Vsa sosednja vozlišča a imajo prvo koordinato enako 1. Po lemi 3.3 morajo biti druge koordinate teh vozlišč iz množice $\{x - 1, x, x + 1\}$, da so koordinate vseh vozlišč različne. Zaradi tega je stopnja a največ 3. Enako velja za bazno vozlišče b.

(3) Naj bo x poljubno vozlišče na najkrajši poti P med baznima vozliščema a in b. Naj bodo njegove koordinate enake (p, q). Razdalja med a in b je $p + q = r$. Sosednja vozlišča vozlišča x imajo po lemi 3.3 lahko naslednje koordinate: $(p-1, q)$, $(p+1, q)$, $(p, q-1)$, $(p-1, q-1)$, $(p+1, q-1)$, $(p, q+1)$, $(p + 1, q + 1)$ ali $(p - 1, q + 1)$. Vendar ne obstaja nobeno sosednje vozlišče vozlišča x s koordinatama $(p-1, q-1)$, saj se obe koordinati hkrati ne moreta zmanjšati, saj je že tako vsota obeh komponent najmanj r, ko smo na P, ki je najkrajša pot med a in b, tako pa bi dobili še krajšo pot, protislovje. Prav tako ne obstaja nobeno sosednje vozlišče vozlišča x s koordinatama $(p, q - 1)$ ali $(p - 1, q)$, saj tako vozlišče ne leži na najkrajši poti P med a in b, sicer bi bila vsota njegovih komponent enaka r. Izven P tako vozlišče tudi ne more ležati, saj po prvi točki tega izreka obstaja natanko ena najkrajša pot P. Če se našemu vozlišču ena koordinata ni spremenila, se mu zato mora spremeniti druga in sicer za $+1$, ker je P najkrajša, manjše vsote komponent nekega vozlišča kot je $r + 1$ pa ne moremo dobit, saj nismo na P. Tako nam ostane pet možnosti za sosednja vozlišča. Zato je stopnja poljubnega vozlišča med a in b na najkrajši poti P kvečjemu 5.

□

Trditev 3.5. *Če je $\dim(G) = k$ in $\operatorname{diam}(G) = d$, tedaj je $|V(G)| \leq d^k + k$.*

Dokaz. Naj ima graf G na n vozliščih bazo moči k. Ker je $\operatorname{diam}(G) = d$, so vse komponente vektorja razdalje poljubnega vozlišča do bazne množice vozlišč grafa G cela števila med 0 in d. Le k vektorjev razdalje (baznih vozlišč do baze) ima eno komponento enako 0. Tako imamo k možnosti, kam postavimo ničlo oziroma drugače povedano, katero od baznih vozlišč si izberemo. Vsako od preostalih vozlišč grafa G mora dobiti enolično določene koordinate iz ene od d^k možnost. Torej imamo d^k možnosti. Zato ima graf G, ko seštejemo možnosti za k baznih vozlišč in preostala vozlišča, največ $d^k + k$ možnosti za izbiro različnih koordinat za vozlišča in s tem največ $d^k + k$ vozlišč. □

Za $n, d \in \mathbb{N}$ označimo s $f(n, d)$ najmanjše celo število k, za katero je $d^k + k \geq n$.

Izrek 3.6. *Naj bo G povezan graf na n vozliščih ($n \geq 2$) in naj bo* $\operatorname{diam}(G) = d$. *Tedaj je* $f(n,d) \leq \dim(G) \leq n - d$.

Dokaz. Najprej določimo zgornjo mejo. Naj bosta u in v vozlišči grafa G, za kateri je $d(u,v) = d$, in naj bo $u = v_0v_1 \dots v_d = v$ pot med vozliščema u in v. Naj bo $W = V(G) - \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$. Ker je $d(u, v_i) = i$ za $1 \leq i \leq d$, sledi, da je W rešljiva množica za G moči $n - d$. Zato je $\dim(G) \leq n - d$.

Po izreku 3.5 je $n \leq d^k + k$ za $k = \dim(G)$, kjer je $f(n,d)$ najmanjše tako število, je $f(n,d) \leq k$. □

Iz [1], [2], [5], [6], [7], [10], [11] in [13] povzemimo nekaj dejstev v naslednji izrek, njegov dokaz in v zaključek poglavja.

Izrek 3.7. *Veljajo naslednje trditve.*

(1) *Če je* $|V(G)| = n$, *velja* $1 \leq \dim(G) \leq n - 1$.
(2) $\dim(G) = n - 1 \Leftrightarrow G = K_n$ $(n \geq 2)$.
(3) $\dim(G) = 1 \Leftrightarrow G = P_n$.
(4) $\dim(C_n) = 2$ $(n \geq 3)$.
(5) $\dim(G) = n - 2 \Leftrightarrow G = K_{s,t}$ $(s, t \geq 1, n \geq 4)$, $G = K_s + \overline{K_t}$ $(s \geq 1, t \geq 2)$ *ali* $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$ $(s, t \geq 1)$.
(6) $\dim(K_{1,n}) = n - 1$ $(n \geq 2)$.
(7) $\dim(G_1 + G_2) \geq \dim(G_1) + \dim(G_2)$.

Dokaz. (1) Opazimo, da je za vsak povezan graf $G = (V(G), E(G))$ in vsako urejeno podmnožico vozlišč $\{w_1, \dots, w_k\} = W \subset V(G)$ i-ta koordinata vektorja razdalje $r(w_i|W)$ enaka 0, vsaka i-ta koordinata vektorja razdalje vseh ostalih vozlišč pa pozitivna. Tako iz $r(u|W) = r(v|W)$ sledi, da je $u = v$ za $u \in W$. Ko torej ugotavljamo, ali je neka urejena podmnožica $W \subset V(G)$ rešljiva množica za graf G, lahko to preverjamo le za vozlišča $V(G) - W$, saj je $w \in W$ edino vozlišče v G, katerega razdalja do vozlišča w je enaka 0. Posledično so $V(G) - \{v\}, v \in G$, rešljive množice za vsak povezan graf G. Tako za vsak povezan graf na več kot dveh vozliščih velja $1 \leq \dim(G) \leq n - 1$.

(2) ($\Leftarrow$) Naj bo K_n poln graf na n vozliščih. Naj bo $\dim(K_n) < n - 1$, recimo $n - 2$. Imamo torej $n - 2$ baznih vozlišč, ki imajo različne koordinate, saj pri vseh baznih vozliščih nastopajo različne možnosti z elementoma 0 in 1. Ker so vsa vozlišča v polnem grafu med seboj povezana, sta preostali vozlišči od vseh baznih vozlišč enako oddaljeni. Zato imata enake koordinate glede na izbrano bazo, kar je protislovje z izbiro baze za K_n. Torej je $\dim(K_n) > n - 2$. Pokažimo sedaj, da je $\dim(K_n) = n - 1$. Sedaj imamo $n - 1$ baznih vozlišč z različnimi koordinatami. Ker je število vozlišč grafa K_n enako n, nam preostane še eno vozlišče, ki je od vseh baznih vozlišč enako oddaljeno, hkrati pa se njegove koordinate razlikujejo od koordinat preostalih baznih vozlišč, saj v svojih koordinatah ne vsebuje elementa 0. Taka postavitev baznih vozlišč nam da veljavno konfiguracijo za poln graf K_n, kar pomeni, da je $\dim(K_n) = n - 1$.

($\Rightarrow$) Dokažimo negacijo implikacije, torej: če graf G ni poln (manjka mu npr. ena povezava), sledi, da je $\dim(G) \neq n - 1$, torej po (1) strogo manjša od $n - 1$. Po izreku 3.6 je za nepoln povezan graf G metrična dimenzija $\dim(G) \leq n - 2$, saj je $\operatorname{diam}(G) = 2$.

(3) ($\Leftarrow$) Če je G pot, njegov list tvori bazno množico, torej je $\dim(v) = 1$.

($\Rightarrow$) Naj ima graf G metrično dimenzijo 1. Če je vozlišče u bazno vozlišče grafa G, je stopnje 1, sicer bi imela vsa sosednja vozlišča vozlišča u enako koordinato, in sicer (1).

Recimo, da G ni pot. Pot sestavljajo vozlišča, ki imajo stopnjo največ 2. Zato graf G vsebuje vozlišče v, katerega stopnja je najmanj 3. Naj bo $N = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ množica sosedov vozlišča v. Ker obstaja le eno bazno vozlišče, ima vsako vozlišče grafa G le eno koordinato, ki nam pove njeno razdaljo do baznega vozlišča. Naj bo d koordinata vozlišča v. Po lemi 3.3 imajo koordinate vseh vozlišč v množici N eno izmed vrednosti $\{d-1, d, d+1\}$. Nobeno vozlišče v množici N ne more biti na razdalji d od baznega vozlišča, saj je koordinata d določena z vozliščem v. Ker je $|N| \geq 3$, imata vsaj dve vozlišči v množici N enako koordinato in s tem neveljavno konfiguracijo baznih vozlišč. Pridemo do protislovja, saj smo predpostavili, da je $\dim(G) = 1$.

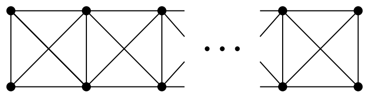
Implikacijo iz leve proti desni točke (3) lahko dokažemo tudi takole: recimo, da je graf G povezan, z $\dim(G) = 1$, metrična baza pa množica $W = \{w\}$. Za vsako vozlišče $v \in V(G)$ je $d(v|W) = d(v, w)$ nenegativno število, manjše ali enako $n-1$. Ker so vektorji razdalj vozlišč grafa G do baze W kar razdalje, obstaja vozlišče $u \in G$, za katerega je $d(u, w) = n-1$. Torej je $\operatorname{diam}(G) = n-1$, kar nam pove, da je $G = P_n$.

(4) Ker cikli niso poti, ne morejo imeti metrične dimenzije 1. Predpostavimo, da sta za opis vseh vozlišč poljubnega cikla C_n dovolj dve bazni vozlišči. Ločimo dva primera:
   - Naj ima cikel C_n liho število vozlišč. Fiksiramo prvo izmed dveh baznih vozlišč, s katerima bomo podali bazo. Drugo bazno vozlišče poljubno postavimo v eno izmed preostalih vozlišč cikla C_n. Ker ima graf C_n liho število vozlišč, imajo vsa vozlišča različne vektorje razdalje do bazne množice. Torej za cikel lihe dolžine velja, da lahko za bazni vozlišči izberemo poljubni dve vozlišči. Sledi, da je $\dim(C_n) = 2$ za lihi cikel.
   - Naj ima sedaj cikel C_n sodo vozlišč. Eno izmed baznih vozlišč na ciklu fiksirajmo, drugo vozlišče pa postavimo na cikel v katero koli vozlišče, razen v tisto, ki je od prvega izbranega baznega vozlišča oddaljeno za $\frac{n}{2}$. Na ta način vedno dobimo bazo – noben par vozlišč na ciklu nima enakega vektorja razdalje do baze. Sledi, da je $\dim(C_n) = 2$ za cikle sode dolžine.

(5) Dokaz te točke je daljši. Bralec ga lahko najde v [2].

(6) Zvezde $K_{1,n}$ so poseben primer polnih dvodelnih grafov $K_{s,t}$, zato je njihova metrična dimenzija $\dim(K_{1,n}) = 1 + n - 2 = n - 1$.

(7) Naj bo S rešljiva množica grafa $G_1 + G_2$. Premer grafa $G_1 + G_2$, $\operatorname{diam}(G_1 + G_2)$, je po definiciji spoja grafov največ 2. Zato je razdalja v grafu $G_1 + G_2$ med poljubnim vozliščem $v \in V(G_1)$ in množico $S \cap V(G_1)$ enaka 0, 1 ali 2. Če je $v \in S \cap V(G_1)$, je razdalja enaka 0, če je vozlišče $v \in V(G_1)$ povezano s kakim elementom iz $S \cap V(G_1)$, je razdalja enaka 1, v vseh ostalih primerih pa je enaka 2. Razdalja v grafu G_1 med vozliščem $v \in V(G_1)$ in vozliščem $u \in S \cap V(G_1)$ je enaka 0, 1 ali vsaj 2, odvisno od tega, ali je $d_{G_1+G_2}(u, v)$ enaka 0, 1 ali natanko 2. Če je $d_{G_1+G_2}(u, v) = 0$, je tudi $d_{G_1}(u, v) = 0$, če je $d_{G_1+G_2}(u, v) = 1$, je tudi $d_{G_1}(u, v) = 1$, če pa je $d_{G_1+G_2}(u, v) = 2$, je $d_{G_1}(u, v) \geq 2$. Enako velja za vozlišča grafa G_2 in množico $S \cap V(G_2)$. Torej



Slika 15: Družina grafov s poljubno velikim premerom, za katero velja $\dim(G+H) = \dim(G) + \dim(H)$.

je $S \cap V(G_1)$ rešljiva množica vozlišč grafa G_1, $S \cap V(G_2)$ pa rešljiva množica vozlišč grafa G_2.

Torej je $\dim(G_1) + \dim(G_2) \leq |S \cap V(G_1)| + |S \cap V(G_2)| = |S|$ in zato $\dim(G_1) + \dim(G_2) \leq \dim(G_1 + G_2)$.

□

Pri zadnji točki izreka 3.7 za večino parov grafov velja stroga neenakost. Enakost pa npr. velja v primeru, ko je premer obeh grafov, G_1 in G_2, enak 2, prav tako pa enakost velja za grafa G_1 in G_2, ki pripadata družini grafov s poljubno velikim premerom s slike 15. Zato obstajajo pari grafov s poljubno velikim premerom, za katere v 3.7 (7) velja enakost. V literaturi v omenjeni neenakosti najdemo tudi enačaj, a hitro najdemo protiprimer. Za polna grafa K_n in K_m, za katera velja $\dim(K_m) = m-1$ in $\dim(K_n) = n-1$, bi po enakosti veljalo, da je $\dim(K_m+K_n) = m+n-2$, a je spoj $K_m + K_n$ poln graf, zato ima metrično dimenzijo $m+n-1$.

Nekaj znanih metričnih dimenzij hiperkock je prikazanih v spodnji tabeli (tudi za $d = 0$).

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	d	≥ 15
$\dim(Q_d)$	0	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7	$\leq d$	$\leq d-5$

Znana je tudi vrednost metrične dimenzije za kolesa W_n: za $n = 3$ ali $n = 6$ je $\dim(W_n) = 3$, za vse ostale $n \geq 4$ pa je $\dim(W_n) = \lfloor \frac{2n+2}{5} \rfloor$. Za $n \notin \{1, 2, 3, 6\}$ je $\dim(K_1 + P_n) = \lfloor \frac{2n+2}{5} \rfloor$.

3.5. **Metrična dimenzija dreves.** Metrično dimenzijo drevesa lahko določimo z linearnim algoritmom. Harary in Melter v [4] vpeljeta naslednji koncept, lemo (navedimo jo brez dokaza) in izrek.

Naj bo T drevo. Naj T° označuje drevo, ki ga iz T dobimo tako, da pri vseh vozliščih stopnje 2 v T skrčimo eno od obeh povezav. Drevo T° imenujemo *obris* drevesa T.

Lema 3.8. *Za vsako drevo obstaja metrična baza, ki ne vsebuje vozlišč stopnje* 2.

Izrek 3.9. *Naj bo T drevo in T° njegov obris. Tedaj je* $\dim(T) = \dim(T^\circ)$.

Dokaz. Dovolj je pokazati, da skrčitev katere koli povezave s krajiščem stopnje 2 ne spremeni metrične dimenzije drevesa T. Dokažimo najprej neenakost $\dim(T) \geq \dim(T^\circ)$. Naj bo $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ metrična baza za T in naj bo $u \in V(T)$ vozlišče stopnje 2. Po lemi 3.8 lahko predpostavimo, da u ni v S. Naj bosta L_1 in L_2 povezani komponenti gozda $T - u$. Drevo T, ki smo mu skrčili eno od povezav s krajiščem v u, označimo s T^u, razdaljo med vozliščema v in w v T^u pa označimo z $d^u(v, w)$. Sedaj ločimo dva primera:

- Naj bosta vozlišči w_1 in w_2 v isti komponenti grafa $T - u$, recimo v L_1, in naj zadoščata $d^u(w_1, v_i) = d^u(w_2, v_i)$ za vse $i = 1, \ldots, n$. V T tako w_1 kot w_2 zadoščata enakosti $d(w_i, v_j) = d^u(w_i, v_j)$, če $v_j \in L_1$ in $d(w_i, v_k) = d^u(w_i, v_k) + 1$, če $v_k \in L_2$. Ker je S metrična baza za T, sledi, da je $w_1 = w_2$.

- Naj bo sedaj $w_1 \in L_1$ in $w_2 \in L_2$. Če je $v_j \in L_1$, je $d^u(w_1, v_j) = d(w_1, v_j)$ in $d^u(w_2, v_j) = d(w_2, v_j) - 1$. Torej je $d^u(w_1, v_j) \neq d^u(w_2, v_j)$. Tako nobeni dve vozlišči iz $T - u$ nimata enakega vektorja razdalj do S v T^u, torej je S metrična baza za T^u.

Da velja tudi $\dim(T) \leq \dim(T^\circ)$, sledi iz dejstva, da metrična baza za T° porodi rešljivo množico za T. $\square$

Če je T npr. pot $P_n, n \geq 1$, je $T^\circ = K_2$, katero koli od vozlišč K_2 pa je metrična baza za ta graf. Sledi, da je poljuben list grafa $T = P_n$ metrična baza.

Slater je podal tudi enostaven algoritem za iskanje metrične baze drevesa T: če je T pot, je njegova metrična dimenzija 1, metrična baza pa eno od krajišč poti. Zato privzemimo, da T ni pot. Naj bo L množica listov drevesa T in naj bo K množica vozlišč v T stopnje več kot 2, za katere velja, da so preko poti (tj. vozlišč stopnje 2), povezana z vsaj enim listom. Takim potem recimo *noge*. Tedaj je metrična dimenzija drevesa enaka $|L| - |K|$, metrično bazo pa dobimo, če iz L odstranimo za vsako vozlišče iz K po en list, ki je preko poti (tj. vozlišč stopnje 2) povezan z izbranim vozliščem iz K oziroma povedano drugače, vsakemu vozlišču iz K na koncih vseh nog razen ene izberemo bazna vozlišča. Vidimo, da so v metrična bazi drevesa vsebovani le listi. Dokaz bralec najde v [2].

4. Grafi z enako metrično dimenzijo in premerom

Sedaj, ko smo spoznali tako premer kot metrično dimenzijo, nas zanima, kateri grafi imajo metrično dimenzijo enako svojemu premeru. Ker je, kot smo že navedli, določanje metrične dimenzije poljubnega grafa NP-težek problem, se bomo v nadaljevanju osredotočili na majhne grafe, tj. na grafe majhnega premera in majhne metrične dimenzije. Iz razdelkov 2.2 in 3.4 in iz [15] vemo, da je za hiperkocke $\operatorname{diam}(Q_d) = \dim(Q_d)$ za $d \leq 4$, $d \in \mathbb{N}$. Za cikle je $\operatorname{diam}(C_n) < \dim(C_n)$ za $n = 3$, $\operatorname{diam}(C_n) = \dim(C_n)$ za $n = 4$ in $n = 5$, ter $\dim(C_n) < \operatorname{diam}(C_n)$ za vse $n \geq 6$. Pri poteh pa je $\dim(P_n) \leq \operatorname{diam}(P_n)$ za vse $n \geq 2$, enakost drži le v primeru, ko je $n = 2$. Premer je pri polnih grafih K_n enak metrični dimenziji le, ko je $n = 2$. Tedaj sta tako premer kot metrična dimenzija enaka 1. Polni dvodelni grafi zadoščajo pogoju $\operatorname{diam}(K_{m,n}) = \dim(K_{m,n})$ le, ko je $m + n = 4$, zvezde $K_{1,n}$ pa, ko je $n = 3$. Dobršen delež v tem odstavku omenjenih grafov, ki zadoščajo pogoju, da je njihova metrična dimenzija enaka premeru, bomo kot rešitve dobili tudi v naslednjem poglavju (do izomorfizma natančno).

4.1. Grafi z metrično dimenzijo in premerom 2.

Izreka 3.5 in 3.6 nam povesta, da za poljuben graf G na $n \geq 2$ vozliščih metrična dimenzija zadošča neenakostima $n - d^k \leq k \leq n - d$ za najmanjše tako celo število k, da je $d^k + k \geq n$. To nam da zgornjo mejo za število vozlišč grafa z dano metrično dimenzijo in premerom. Zgornja meja vozlišč je dosežena le za $\operatorname{diam}(G) \leq 3$ ali $\dim(G) = 1$. Tako za naš primer, ko je $\operatorname{diam}(G) = \dim(G) = 2$, dobimo graf na največ šestih vozliščih. Pri premeru in dimenziji 3 bi tako morali preverjati grafe na do 30 vozliščih, to pa so za nas že preveliki grafi. Sedaj se lotimo preštevanja grafov z zgoraj omenjenimi lastnostmi.

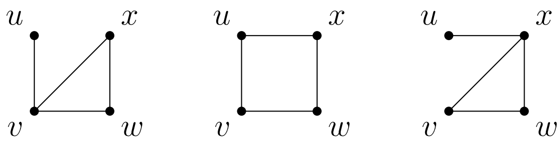
Izrek 4.1. *Obstaja natanko* 36 *neizomorfnih povezanih grafov, katerih metrična dimenzija in premer sta enaka* 2.

Ta izrek bomo razdelili na tri leme, ki jih bomo dokazali ločeno.

Na tem mestu je potrebno poudariti, da so v originalnem članku (glej [9]) avtorji našteli 37 grafov z zahtevanimi lastnostmi, vendar sta G_8 in G_{24} izomorfna.

Lema 4.2. *Število neizomorfnih povezanih grafov X na štirih vozliščih ali manj, za katere je* $\dim(X) = \operatorname{diam}(X) = 2$, *je enako* 4.

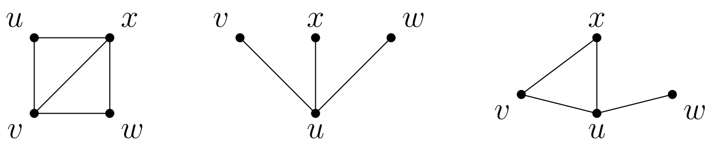
Dokaz. Premer grafa na dveh vozliščih je $1 < 2$, zato graf na dveh vozliščih s premerom 2 ne obstaja. Povezan graf na treh vozliščih je lahko trikotnik ($\operatorname{diam}(K_3) = 1 < 2$) lahko pa pot, katere $\dim(P_3) = 1$. Tako tudi na treh vozliščih ne obstaja graf s premerom 2. Torej ima X vsaj štiri vozlišča in zato po predpostavni izreka natanko štiri vozlišča, recimo jim $V(X) = \{u, v, w, x\}$. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je baza $\{v, w\}$. Najprej predpostavimo tudi, da je razdalja $d(v, w) = 1$ in da vozlišči u in x nista sosednji. Ker bi radi imeli med u in x pot dolžine 2, morata biti tako u kot x sosednja z enim izmed vozlišč $\{v, w\}$. Če sta u in x sosednja z v, je $\operatorname{diam}(X) = 2$. A u in x imata enak vektor razdalje glede na bazo $\{v, w\}$. Zato morata biti x in w povezana. Tako dobimo graf X_1 na sliki 16. Sedaj privzemimo, da je u povezan z x. Tako dobimo naslednje primere:



(a) X_1 (b) X_2 (c) X_3

Slika 16: Grafi iz dokaza leme 4.2.

- Obstaja ena povezava med $\{v, w\}$ in $\{u, x\}$. Tedaj je $\operatorname{diam}(X) = 3$, protislovje.
- Naj bosta med $\{v, w\}$ in $\{u, x\}$ dve povezavi. Če je krajišče obeh povezav v ali w, smo v protislovju z izbiro baze. Zato mora ena povezava za svoje krajišče imeti vozlišče v in druga w. Na sliki 16 sta grafa X_2 in $X_3 \cong X_1$.
- Med $\{v, w\}$ in $\{u, x\}$ obstajajo tri povezave. Vsa vozlišča v takem grafu so stopnje manjše od 4, saj ima graf le štiri vozlišča. Zato imata dve povezavi za krajišče v, ena pa w. Tako dobimo graf X_4 na sliki 17.
- Če so med $\{v, w\}$ in $\{u, x\}$ štiri povezave, je $\operatorname{diam}(X) = 1$, protislovje.



(a) X_4 (b) X_5 (c) X_6

Slika 17: Grafi iz dokaza leme 4.2.

Naj bo sedaj $d(v, w) = 2$ in naj bo u vozlišče na poti med v in w. Ker je X povezan, mora biti x sosednji z vsaj enim izmed vozlišč u, v ali w. Če je x sosednji tako z v kot z w, potem obstajata dve najkrajše poti med v in w, kar je protislovje z izrekom 3.4. Če je x sosednji z enim izmed v in w, z u pa ne, je $\operatorname{diam}(X) = 3$, protislovje. Zato mora x biti sosednji z u. Če je torej x povezan le z u, obstaja le en graf, ki temu zadošča, to je X_5 s slike 17. Če pa je x sosednji z enim izmed $\{v, w\}$ in tudi z u, dobimo graf $X_6 \cong X_1$ s slike 17.

Štirje grafi z istima lastnostma so torej X_1, X_2, X_4 in X_5. □

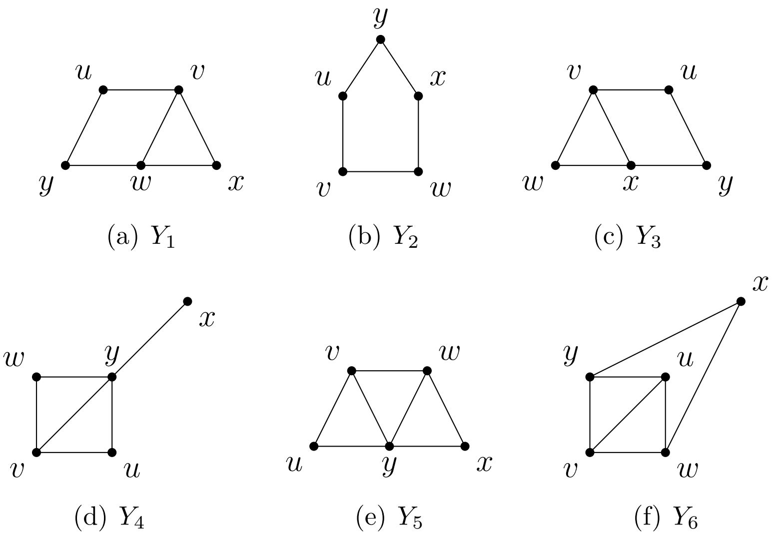
Lema 4.3. *Število neizomorfnih povezanih grafov Y na petih vozliščih, za katere je* $\dim(Y) = \operatorname{diam}(Y) = 2$*, je enako* 8.

Dokaz. Naj bo $V(Y) = \{u, v, w, x, y\}$. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je $\{v, w\}$ baza Y. Naj bo $d(v, w) = 1$ in naj bodo vozlišča u, x in y paroma nesosednja. Ker je Y povezan, mora biti vsako izmed vozlišč u, x in y povezano z vsaj enim izmed v in w. Po izreku 3.4 (2) morata biti $\deg(v)$ in $\deg(w) \leq 3$. Tako sledi, da sta v in w povezana vsak z največ dvema izmed vozlišč $\{u, x, y\}$, iz česar sledi $\operatorname{diam}(Y) = 3$, protislovje.

Naj sedaj obstaja ena povezava med dvema izmed vozlišč $\{u, x, y\}$, npr. $uy \in E(Y)$. Da bi dobili pot dolžine 2 od x do tako u kot y, da bo veljalo $\deg(v)$, $\deg(w) \leq 3$, mora biti x povezan tako z v kot tudi z w, v sosednji z u, w pa z y (ali pa mora simetrično biti x povezan z v in z w, v sosednji z y, w pa z u). Tako dobimo graf Y_1 s slike 18.

Predpostavimo sedaj, da obstajata dve povezavi med vozlišči iz množice $\{u, x, y\}$, npr. uy in $yx \in E(Y)$. Tako dobimo naslednje možnosti:

- Med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstaja ena povezava. Tedaj je $\operatorname{diam}(Y) \geq 3$, protislovje.
- Med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstajata dve povezavi. Če imata obe povezavi krajišče v ali w, je $\operatorname{diam}(Y) = 3$, protislovje. Zato mora ena povezava za krajišče imeti v, druga pa w. Če sta tako v kot w sosednja z istim vozliščem izmed $\{u, x\}$, spet dobimo protislovje, saj je $\operatorname{diam}(Y) = 3$. Če sta v in w oba sosednja z y, imata u in x enak vektor razdalje glede na bazo $\{v, w\}$, protislovje. Če je v povezan z enim izmed $\{u, x\}$ in w sosednji z y, je $\operatorname{diam}(Y) = 3$, protislovje. Naposled, če je v sosednji z enim izmed $\{u, x\}$ in w sosednji s preostalim vozliščem iz te množice, nam preostane le ena možnost za graf, to je graf Y_2 s slike 18.
- Naj bodo sedaj med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ tri povezave. Če imajo vse tri povezave za svoje krajišče v ali w, ima to vozlišče stopnjo več kot 3, kar je v protislovju z izrekom 3.4. Zato morata dve povezavi imeti za krajišče recimo v, ena pa w. Če je vozlišče v sosednje z u in x in je w povezan z y, imata u in x enak vektor razdalje glede na $\{v, w\}$, če pa so povezave uv, yv in $uw \in E(Y)$, je $\operatorname{diam}(Y) = 3$, protislovje. Če je v povezan z u in y, w pa z x, imata u in y enak vektor razdalje glede na $\{v, w\}$, zato smo v protislovju. Naj bosta u in y sedaj sosednja z v, z w pa naj bo sosednji y. Dobimo graf Y_4 s slike 18. V zadnjem primeru te točke predpostavimo, da sta u in x sosednji z v, w pa z x. Dobljeni graf je $Y_3 \cong Y_1$.
- Naj bodo sedaj med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ štiri povezave. Ker morata biti stopnji $\deg(v)$ in $\deg(w) \leq 3$, morata dve povezavi imeti za krajišče vozlišče v, drugi dve pa w. Najprej recimo, da sta vozlišči u in y povezani z obema elementoma v bazi. Takoj pridemo v protislovje z izbiro bazne množice. Nato recimo, da sta u in x oba povezana z obema elementoma iz baze – prav tako protislovje. Naj bo sedaj v povezan z u in y, w pa z x in y. Na sliki 18 je Y_5, ki ga dobimo na ta način. V zadnjem primeru pa naj bo v sosednji z u in y, w pa z x in u. Dobljeni graf je Y_6 s slike 18.



(a) Y_1 (b) Y_2 (c) Y_3

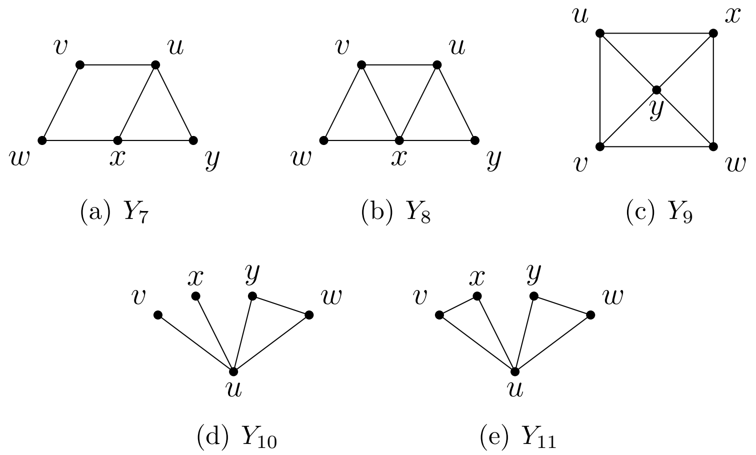
(d) Y_4 (e) Y_5 (f) Y_6

Slika 18: Grafi iz dokaza leme 4.3.

- Recimo, da med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstaja pet ali šest povezav. Tedaj obstaja vozlišče $t \in \{v, w\}$, katerega stopnja je 4, kar pa je v protislovju z izrekom 3.4 (2).

Predpostavimo, da obstajajo tri povezave med vozlišči iz množice $\{u, x, y\}$, tj. ux, xy, $uy \in E(Y)$. Obravnavajmo naslednje primere:

- Naj med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstaja natanko ena povezava. Tedaj je premer grafa Y enak 3, protislovje.
- Naj med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstajata dve povezavi. Če je obema povezavama skupno katero od krajišč v ali w, je $\operatorname{diam}(Y) = 3$, protislovje. Zato je krajišče ene povezave v, druge pa u. Če sta tako v kot w sosednja istemu izmed vozlišč u, x in y, obstajata vozlišči, ki imata enak vektor razdalje glede na bazo $\{v, w\}$, protislovje. Če sta v in w sosednja vsak svojemu vozlišču iz $\{u, x, y\}$, so ti trije grafi izomorfni. Na sliki 19 je $Y_7 \cong Y_1$.
- Naj med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstajajo tri povezave. Ker morata po izreku 3.4 (2) biti stopnji $\deg(v)$ in $\deg(w) \leq 3$, sledi, da imata dve povezavi za svoje krajišče npr. v, ena pa w. Če je v sosednji z dvema izmed vozlišč $\{u, x, y\}$ in je w povezan s preostalim vozliščem, potem obstajata vozlišči, ki imata enak vektor razdalje glede na bazo $\{v, w\}$. Če je v sosednji s poljubnima vozliščema iz $\{u, x, y\}$ in če je w sosednji s katerim koli od izbranih dveh vozlišč, dobimo graf $Y_8 \cong Y_5$ s slike 19.
- Naj med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstajajo štiri povezave. Ker morata biti stopnji v in w manjši ali enaki 3, sledi, da imata dve povezavi za svoje krajišče v, drugi dve pa u. Če je v sosednji s poljubnima vozliščema iz množice $\{u, x, y\}$ in je s tema vozliščema povezan tudi w, imata ti vozlišči enak vektor razdalje glede na bazo $\{v, w\}$. Če sta tako v kot w povezana s poljubnima vozliščema iz $\{u, x, y\}$, a ne z istima dvema, kot v prejšnjem primeru, zaradi simetrije cikla iz vozlišč u, x in y dobimo med seboj izomorfne grafe. Eden izmed njih je Y_9, ki ga vidimo na sliki 19.
- Če med $\{v, w\}$ in $\{u, x, y\}$ obstaja pet ali šest povezav, je $\deg(t) \geq 4$ za $t \in \{v, w\}$, kar je protislovje z izrekom 3.4 (2).



Slika 19: Grafi iz dokaza leme 4.3.

Sedaj privzemimo, da je $d(v, w) = 2$ in naj bo u vozlišče na najkrajši poti med v in w. Predpostavimo tudi, da x in y nista povezana.

- Naj med množicama $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$ obstaja ena povezava. Tedaj je $\operatorname{diam}(Y) \geq 3$, protislovje.
- Naj sedaj obstajata dve povezavi med $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$. Da bi med vozliščema y in x imeli pot dolžine 2, morata biti tako y kot x sosednja z vsaj enim izmed vozlišč v množici $\{u, v, w\}$. Če je to vozlišče katero od v ali w, smo v protislovju zaradi prevelikega premera grafa. Če pa je to vozlišče u, imata tako x kot y enak vektor razdalje, zato smo v protislovju z izbiro baze.
- Naj med $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$ obstajajo tri povezave. Naj bo x sosednji z u, y pa z v in w. Premer takega grafa je prevelik, protislovje. Če je x sosednji z enim izmed $\{v, w\}$, y pa z drugim od njiju ter še z u, dobimo spet graf s prevelikim premerom, protislovje. Naj bo eno vozlišče iz $\{x, y\}$ povezano z dvema, drugo pa le z enim baznim vozliščem. Dobimo graf, ki ima prevelik premer, prav tako pa $\{v, w\}$ ni baza. Kot naslednji primer privzemimo, da sta x in y sosednji vozlišči istega baznega vozlišča, eno izmed njiju pa je sosednje še z u. Tak graf ima prevelik premer, protislovje. Kot zadnji primer pa privzemimo, da sta tako x kot y povezana z u, eden od njiju pa še z enim baznim vozliščem, torej z v ali w. Dobimo graf, izomorfen Y_{10} s slike 19.
- Naj bodo sedaj med $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$ štiri povezave. Če sta oba x in y sosednja tako z v kot w, potem imata enak vektor razdalje glede na $\{v, w\}$, protislovje z izbiro baze. V naslednjem primeru privzemimo, da sta x in y oba sosednja z u ter še vsak z enim od baznih vozlišč, s katerim drugi ni povezan. Dobimo graf Y_{11} s slike 19. Če pa sta x in y oba sosednja tako z u kot z istim baznim vozliščem, smo v protislovju z bazno množico. Če je eno izmed vozlišč druge množice povezano z vsemi iz prve, drugo pa z enim od baznih vozlišč, ima dobljeni graf prevelik premer, prav tako pa smo v protislovju z izbrano bazo. Če pa je eno izmed vozlišč druge množice povezano z vsemi iz prve, drugo pa z u, imata u in vozlišče najvišje stopnje iz $\{x, y\}$ enak vektor razdalje do baze, protislovje. V naslednjem primeru naj bo eno vozlišče iz množice $\{x, y\}$ povezano z u in enim baznim vozliščem, drugo vozlišče iz te

množice pa z obema baznima vozliščema. Tedaj imata u in vozlišče iz $\{x, y\}$, ki z u ni sosednje, enak vektor razdalje do baze, protislovje.

Privzemimo, da sta x in y sedaj sosednja.

- Če obstaja le ena povezava med $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$, je $\mathrm{diam}(Y) \geq 3$, protislovje.
- Naj bosta sedaj $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$ povezani z dvema povezavama. Če sta vozlišči x in y obe sosednji z u, imata enak vektor razdalje do baze, protislovje. Naj bo sedaj x povezan z enim izmed baznih vozlišč, y pa z drugim. Dobimo cikel C_5, ki je izomorfen grafu Y_2 s slike 18. Če sta oba elementa množice $\{x, y\}$ povezana z istim baznim vozliščem, množica $\{v, w\}$ ni baza, protislovje, prav tako pa smo v protislovju tudi s premerom, ki je prevelik. Če je en element množice $\{x, y\}$ sosednji z enim od baznih vozlišč ter z u, drugi pa niti z u niti s katerim od baznih vozlišč, smo v protislovju s premerom. Do enakega tipa protislovja pridemo, če je en element množice $\{x, y\}$ povezan z u, drugi pa z enim od baznih vozlišč. Kot zadnje naj bo eden od elementov $\{x, y\}$ sosednji z obema baznima vozliščema. Ta element ima zato enak vektor razdalje do baze kot u, kar pa pomeni, da $\{v, w\}$ ni baza, protislovje.
- Množici $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$ naj bosta povezani s tremi povezavami. V prvem primeru naj bo poljubno vozlišče iz množice $\{x, y\}$ povezano z u in enim od baznih vozlišč, drugo pa z drugim baznim vozliščem. Dobimo graf, izomorfen Y_3 (slika 18). V drugem primeru, ko pa sta x in y oba povezana z u, eno od njiju pa še z enim od vozlišč v bazi, dobimo graf, izomorfen Y_4 (slika 18). V tretjem primeru, ko je eno od vozlišč x in y (recimo x) povezano z vsemi elementi množice $\{v, u, w\}$, drugo pa z nobenim, imata x in u enak vektor razdalje do baze, protislovje. Za četrti primer naj bo eno vozlišče iz množice $\{x, y\}$ sosednje z u in enim baznim vozliščem, s katerim naj bo sosednje tudi drugo vozlišče iz te množice. Dobimo graf s prevelikim premerom. Kot naslednji primer naj ima poljubno vozlišče iz množice $\{x, y\}$ razdaljo 1 do obeh baznih vozlišč, drugo vozlišče iz te množice pa naj bo povezano z enim od baznih vozlišč. Razdaljo 1 do obeh baznih vozlišč pa ima tudi u, protislovje. V zadnjem primeru naj bo eno vozlišče (recimo x) povezano z u, drugo pa z obema baznima vozliščema. Tako imata y in u enak vektor razdalje do bazne množice, spet smo v protislovju.
- Naj bodo med množicama $\{v, u, w\}$ in $\{x, y\}$ štiri povezave. Če je eno izmed vozlišč druge množice povezano z vsemi iz prve, drugo pa z enim od baznih vozlišč, je dobljeni graf protisloven s predpostavko o izbiri baze. V isto protislovje pridemo, če je eno izmed vozlišč druge množice povezano z vsemi iz prve, drugo pa z u. V naslednjem primeru naj bo eno vozlišče iz množice $\{x, y\}$ povezano z u in enim baznim vozliščem, drugo vozlišče iz te množice pa z obema baznima vozliščema. Tedaj imata u in vozlišče iz $\{x, y\}$, ki z u ni sosednje, enak vektor razdalje do baze, protislovje. Naj bosta sedaj x in y oba povezana z obema baznima vozliščema – že po konstrukciji smo v protislovju z izbiro bazne množice. Če pa sta vozlišči x in y povezani tako z u kot z istim baznim vozliščem, z drugim pa ne, množica $\{v, w\}$ ni baza, protislovje. V primeru, ko sta tako x kot y povezana z u, vsak pa še z enim od baznih vozlišč, s katerim drugi ni povezan, dobimo graf, izomorfen Y_5 s slike 18.

Neizomorfni grafi, ki ustrezajo predpostavkam leme, so torej Y_1, Y_2, Y_4, Y_5, Y_6, Y_9, Y_{10} in Y_{11}. □

Lema 4.4. *Število neizomorfnih povezanih grafov Z na šestih vozliščih, za katere je* $\dim(Z) = \operatorname{diam}(Z) = 2$, *je enako* 24.

Dokaz. Pri dokazu je potrebno poudariti, da v sledečih primerih ob drugačni izbiri povezav lahko pridemo do na videz drugačnih grafov, ki pa so izomorfni omenjenim grafom iz posameznega sklopa, ki ga obravnavamo.

Naj bo množica vozlišč $V(Z) = \{u, v, w, x, y, z\}$. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je $W = \{v, w\}$ baza grafa Z, zato imajo vozlišča $V(Z)\backslash W$ glede na urejeno množico W različne vektorje razdalj, ki so oblike $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ in $(2, 2)$. Vozlišče z, ki ima vektor razdalje do bazne množice W oblike $(1, 1)$, tj. $d(z, v) = d(z, w) = 1$, imenujemo glavno vozlišče, vozlišči z vektorjema razdalje do baze s koordinatama $(1, 2)$ ali $(2, 1)$ pa pomožni vozlišči. Oglejmo si naslednja dva primera:

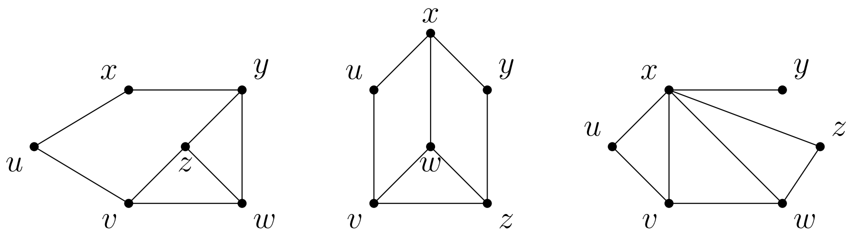
(1) $d(v, w) = 1$: Predpostavimo, da so vozlišča u, x, y in z paroma nesosednja. Ker mora biti graf povezan, mora biti vsako od vozlišč u, x, y in z z vsaj eno povezavo povezano z vozliščem v ali w. Ker moramo zadostiti pogoju o stopnji baznih vozlišč, sledi, da morata biti tako v kot w povezana z natanko dvema izmed vozlišč iz množice $\{u, x, y, z\}$, od koder je $\operatorname{diam}(Z) = 3$, protislovje.

Naj sedaj obstaja natanko ena povezava med dvema vozliščema iz množice $\{u, x, y, z\}$, recimo ji $xy \in E(Z)$. Da bi dobili pot dolžine 2 med z in vsemi izmed vozlišč u, x in y, mora ta pot vsebovati eno izmed vozlišč v ali w, od koder pa dobimo dve dodatni povezavi v izbrano vozlišče. Ker mora to veljati za vsa vozlišča u, x, y in z, bi bila stopnja v enem izmed baznih vozlišč v ali w večja kot 3, to pa je protislovje z izrekom 3.4 (2). Taka izbira vozlišč, ki bi zadoščala pogojem, torej ni možna za noben u, x in y. Isti argument nam pove tudi, da ni nobenega grafa, ki bi zadoščal kateri od naslednjih treh skupin:

- obstajata dve sosednji povezavi v podgrafu, induciranem z $\{u, x, y, z\}$,
- obstajata dve nesosednji povezavi v tem podgrafu,
- obstajajo tri povezave, ki v tem podgrafu inducirajo K_3.

Če obstajajo povezave ux, xy in $yz \in E(Z)$, ki v Z inducirajo P_4, zaradi pogoja $\operatorname{diam}(Z) = 2$ ločimo dva primera: če je z glavno vozlišče, sta posledično u in y pomožni vozlišči in je vektor razdalje vozlišča x enak $(2, 2)$, če pa sta u in x pomožni vozlišči, je y predstavljen z vektorjem razdalje do baznih vozlišč $(2, 2)$. V prvem primeru dobimo graf Z_1, v drugem primeru pa graf Z_2 s slike 20. Vse ostale možnosti so v protislovju s stopnjo baznih vozlišč, premerom, izbrano bazo, ali pa z razporeditvijo glavnih in pomožnih vozlišč ter vozliščem, ki je za vektor $(2, 2)$ oddaljeno od baze, tj. graf s tako izbranimi vozlišči ni možen.

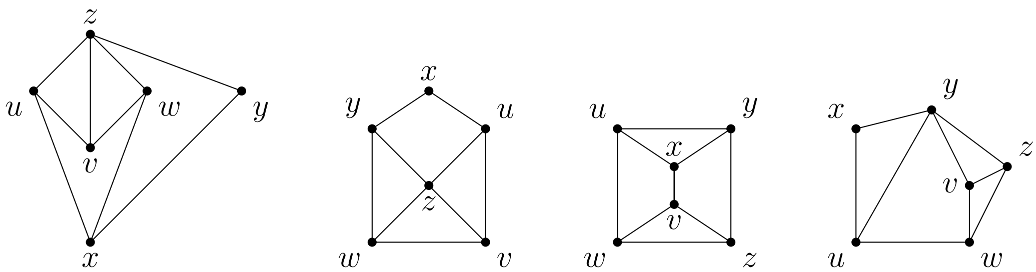
Če povezave ux, xy in xz inducirajo zvezdo, imamo prav tako dve možnosti: ali je x glavno vozlišče, u in z pa sta pomožni in je y glede na bazo $\{v, w\}$ predstavljen z vektorjem $(2, 2)$, kar nam da graf Z_3 (slika 20) ali pa je u glavno vozlišče, y in z pa pomožni in x predstavljen z vektorjem $(2, 2)$, od koder dobimo graf, izomorfen grafu Z_2 s slike 20. V vseh ostalih primerih smo v protislovju z izbiro bazne množice ali pa dobimo izomorfne grafe.



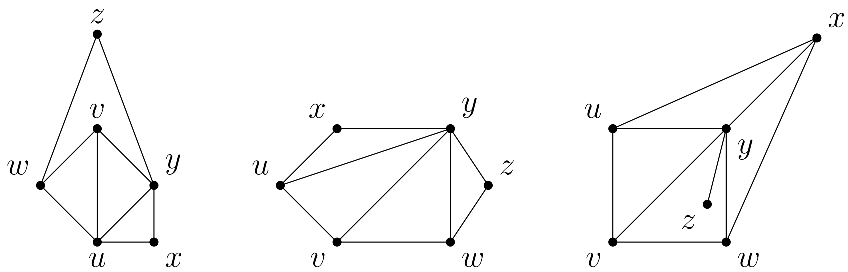
(a) Z_1 (b) Z_2 (c) Z_3

Slika 20: Grafi iz dokaza leme 4.4.

Če v Z obstajajo štiri povezave ux, xy, yz in uz, ki inducirajo C_4, ločimo dva primera: ali je z glavno vozlišče, u in x pomožni in y predstavljen kot $(2, 2)$ ali pa je z glavno vozlišče, u in y pomožni in x predstavljen z $(2, 2)$. Pripadajoča grafa sta Z_4 in Z_5 s slike 21. Zaradi simetrije so vsi ostali grafi izomorfni.



(a) Z_4 (b) Z_5 (c) Z_6 (d) Z_7



(e) Z_8 (f) Z_9 (g) Z_{10}

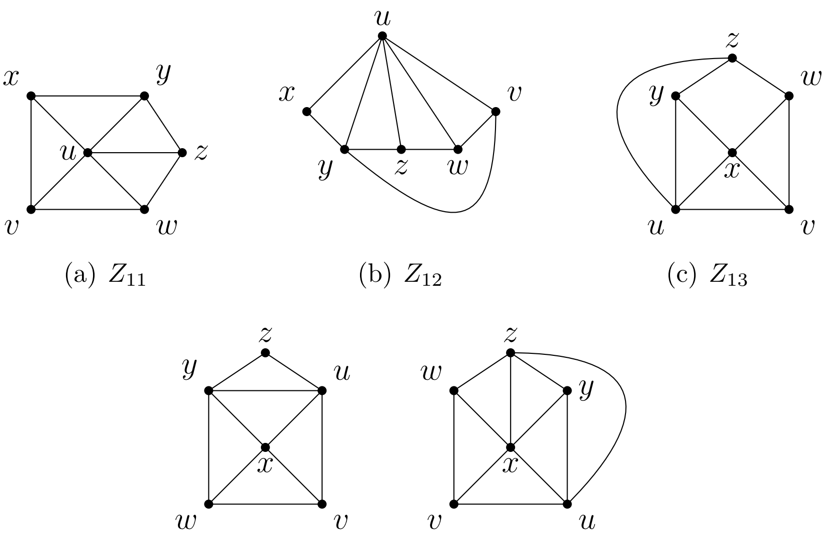
Slika 21: Grafi iz dokaza leme 4.4.

Če imamo štiri povezave ux, xy, yu, yz, ki inducirajo največji polni podgraf na treh vozliščih, imamo šest primerov:

- u je glavno vozlišče, x in z sta pomožni ter y predstavljen z $(2, 2)$, dobimo graf, izomorfen Z_5, (slika 21),
- z je glavno vozlišče, x in u sta pomožni ter y predstavljen z $(2, 2)$, dobimo graf Z_6, (slika 21),
- z je glavno vozlišče, y in u sta pomožni ter x predstavljen z $(2, 2)$, dobimo graf Z_7, (slika 21),
- u je glavno vozlišče, y in z sta pomožni ter x predstavljen z $(2, 2)$, dobimo graf Z_8, (slika 21),

- y je glavno vozlišče, u in z sta pomožni ter x predstavljen z $(2,2)$, dobimo graf Z_9, (slika 21),
- y je glavno vozlišče, u in x sta pomožni ter z predstavljen z $(2,2)$, dobimo graf Z_{10}, (slika 21).

Ostali grafi so ali izomorfni ali protislovni z izbiro baze.



(a) Z_{11} (b) Z_{12} (c) Z_{13}

(d) Z_{14} (e) Z_{15}

Slika 22: Grafi iz dokaza leme 4.4.

Če imamo pet povezav ux, xy, yz, uz, uy, ki inducirajo $K_4 - e$, ločimo štiri možnosti:

- u je glavno vozlišče, x in z sta pomožni ter y predstavljen z $(2,2)$, dobimo graf Z_{11}, (slika 22),
- u je glavno vozlišče, y in z sta pomožni ter x predstavljen z $(2,2)$, dobimo graf Z_{12}, (slika 22),
- x je glavno vozlišče, u in z sta pomožni ter y predstavljen z $(2,2)$, dobimo graf Z_{13}, (slika 22),
- x je glavno vozlišče, u in y sta pomožni ter z predstavljen z $(2,2)$, dobimo graf Z_{14}, (slika 22).

Vsi ostali grafi so zaradi simetrije izomorfni.

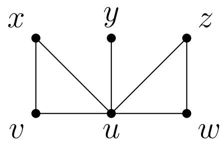
Če imamo šest povezav ux, xy, yz, uz, uy, xz, ki induciranjo K_4, dobimo do izomorfizma natančno le en možen graf, to je Z_{15}, kjer je x glavno vozlišče, u in z sta pomožni vozlišči in predstavitev y z vektorjem razdalje tega vozlišča do bazne množice je $(2,2)$ (slika 22).

(2) $d(v,w) = 2$:

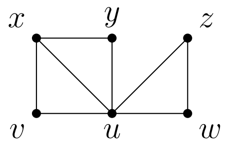
Naj bo u vozlišče na najkrajši poti med v in w. Tedaj je u glavno vozlišče.

Predpostavimo, da podgraf, induciran z $\{x,y,z\}$, nima nobene povezave. Tedaj sta x in z pomožni vozlišči in je y predstavljen z vektorjem $(2,2)$ glede na bazno množico. Dobimo graf Z_{16} s slike 23, ostala dva grafa sta temu izomorfna.

Če ima podgraf, induciran z $\{x,y,z\}$, eno povezavo $xy \in E(Z)$ in sta x in z pomožni vozlišči, vektor razdalje vozlišča y do bazne množice pa je $(2,2)$,



(a) Z_{16}



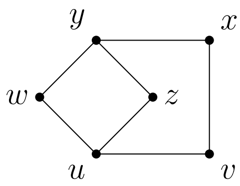
(b) Z_{17}

Slika 23: Grafi iz dokaza leme 4.4.

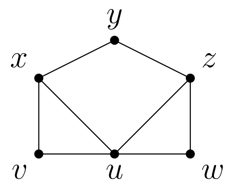
tedaj dobimo graf Z_{17} s slike 23. Če pa sta pomožni vozlišči x in y, z pa je predstavljen z $(2, 2)$, dobimo graf, ki je izomorfen grafu Z_3 s slike 20.

Če imamo dve povezavi xy, $yz \in E(Z)$, ločimo naslednja primera:

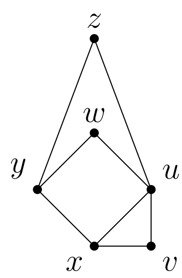
- x in y sta pomožni vozlišči in z je od bazne množice oddaljen za vektor $(2, 2)$, dobimo grafe Z_{18}, Z_{20}, Z_{21} in Z_{22}, (slika 24),
- x in z sta pomožni vozlišči in y je od bazne množice oddaljen za vektor $(2, 2)$, dobimo graf Z_{19} (slika 24) in graf, izomorfen grafu Z_9.



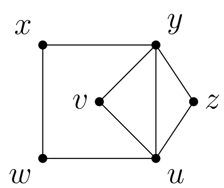
(a) Z_{18}



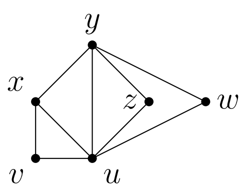
(b) Z_{19}



(c) Z_{20}



(d) Z_{21}



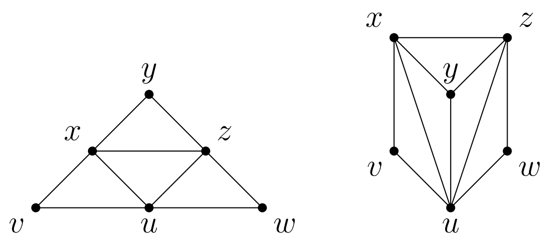
(e) Z_{22}

Slika 24: Grafi iz dokaza leme 4.4.

Nazadnje še poglejmo, kakšne grafe dobimo, če obstajajo tri povezave xy, yz in $xz \in E(Z)$, ki inducirajo K_3: upoštevamo, da sta dve vozlišči pomožni, tretje pa je predstavljeno z vektorjem razdalje $(2, 2)$ glede na bazno množico. Zaradi simetrije K_3 tu primerov s pomočjo glavnih in pomožnih vozlišč ne moremo ločiti, zato bomo grafe podali še s seznamom povezav med množicama vozlišč $\{v, u, w\}$ in $\{x, y, z\}$:

- x in y sta pomožni vozlišči, vektor razdalje vozlišča z do baze je (2, 2); $\{vy, uz, xw\}$, dobimo graf, izomorfen Z_2 (slika 20),
- y in z sta pomožni vozlišči, vektor razdalje vozlišča x do baze je (2, 2); $\{wz, zu, ux, vy\}$, dobimo graf, izomorfen Z_8 (slika 21),
- y in z sta pomožni vozlišči, vektor razdalje vozlišča x do baze je (2, 2); $\{vy, uz, zw\}$, dobimo graf, izomorfen Z_{19} (slika 24),

- x in z sta pomožni vozlišči, vektor razdalje vozlišča y do baze je (2, 2); $\{vx, xu, uz, zw\}$, dobimo Z_{23} (slika 25),
- x in z sta pomožni vozlišči, vektor razdalje vozlišča y do baze je (2, 2); $\{vx, xu, uz, zw, yu\}$, dobimo Z_{24} (slika 25).



(a) Z_{23} (b) Z_{24}

Slika 25: Grafi iz dokaza leme 4.4.

Neizomorfni grafi z zahtevanimi lastnostmi so torej vsi grafi s slik 20, 21, 22, 23, 24 in 25. □

Iz zadnjih treh lem sledi izrek 4.1.

Slovar strokovnih izrazov

Diameter premer – $\mathrm{diam}(G) = \max\{d_G(u,v) \mid u,v \in V(G)\}$
Dimension dimenzija – karakteristika prostora, identificira prostor in objekte v njem
Distance razdalja $d_G(u,v)$ – število povezav na najkrajši poti med u in v
Graph graf – neprazna množica vozlišč in seznam povezav
Inducted subgraph induciran podgraf – za $U \subseteq V(G)$ velja $V(G') = U$ in $E(G') = \{uv \in E(G) \mid u,v \in V(G')\}$
Isomorphism izomorfizem – bijektivna preslikava, za katero velja $f : V(G) \to V(H)$, $uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$
Leaf list – vozlišče stopnje 1 v drevesu
Metric basis metrična baza – rešljiva množica z najmanjšim številom vozlišč
Metric dimension metrična dimenzija – moč baze
Metrics metrika – posplošitev pojma razdalje
Resolving set rešljiva množica
Subgraph podgraf G' – $V(G') \subseteq V(G)$ in $E(G') \subseteq E(G)$
Tree drevo – acikličen povezan graf

Literatura

[1] G. G. Chappell, J. Gimbel in C. Hartman, *Bounds on the metric and partition dimensions of a graph*, Ars Combin. **88** (2008) 349–366.
[2] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson in O. R. Oellermann, *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Appl. Math. **105** (2000) 99–113.
[3] W. Goddard in O. R. Oellermann, *Distance in graphs*, v: Structural analysis of complex networks (ur. M. Dehmer), Birkhäuser/Springer, New York, 2011, str. 49–72.
[4] F. Harary in R. A. Melter, *On the metric dimension of a graph*, Ars Combin. **2** (1976) 191–195.
[5] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo in C. Seara, *On the metric dimension of some families of graphs*, [ogled 9. 8. 2015], dostopno na `http://www.ma3.upc.edu/users/pelayo/research/EXT\%20icgt.pdf`.

[6] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara in D. R. Wood, *Extremal graph theory for metric dimension and diameter*, Electron. J. Combin. **17(1)** (2010) P30, 28 str.

[7] H. Iswadi, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak in A. N. M. Salman, *The metric dimension of graph with pendant edges*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **65** (2008) 139–145.

[8] M. Juvan in P. Potočnik, *Teorija grafov in kombinatorika*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **39**, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2007.

[9] I. Kousar, I. Tomescu in S. M. Husnine, *Graphs with same diameter and metric dimension*, J. Prime Res. Math. **6** (2010) 22–31.

[10] A. Tivadar, *Particijska dimenzija grafov*, diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru, 2011.

[11] I. Tomescu in M. Imran, *R-sets and metric dimension of necklace graphs*, Appl. Math. Inf. Sci. **9(1)** (2015) 63–67.

[12] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma **63**, DMFA - založništvo, Ljubljana, 1997.

[13] M. Žuželj, *Metrična dimenzija grafa*, diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru, 2011.

[14] *Frequently asked questions*, 31. 7. 2014, [ogled 9. 8. 2015], dostopno na `http://www.gps.gov/support/faq/\#sats`.

[15] *Graphs with same diameter and metric dimension*, [ogled 9. 8. 2015], dostopno na `http://prr.hec.gov.pk/Chapters/7173H-2.PDF`.

[16] *How navigation works*, [ogled 9. 8. 2015], dostopno na `https://www.tomtom.com/en_in/maps/how-it-works/`.

[17] *Metric dimension (graph theory)*, [ogled 9. 8. 2015], dostopno na `Metricdimension(https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_dimension_(graph_theory)\#Trees`.