UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Sebastjan Cizel

Avtomorfizmi kompleksnih mnogoterosti

Delo diplomskega seminarja

Mentor: akad. prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2016

Kazalo

1. Uvod 4
2. Holomorfne funkcije na $\mathbb{C}^n$ 5
2.1. Funkcije več kompleksnih spremenljivk 5
2.2. Holomorfne preslikave 8
3. Kompleksne podmnogoterosti 12
3.1. Tangentni prostor podmnogoterosti 15
3.2. Tangentni sveženj 19
4. Holomorfna vektorska polja 19
4.1. Vektorska polja na podmnogoterostih 20
4.2. Tok vektorskega polja in grupa avtomorfizmov 22
4.3. Lokalno nilpotentne derivacije 26
5. Lastnost gostote 27
6. Lastnost gostote za $x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})$ 32
6.1. Tranzitivnost delovanja grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ 32
6.2. Dokaz lastnosti gostote za $X = \{x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})\}$ 35
Slovar strokovnih izrazov 37
Literatura 37

Avtomorfizmi kompleksnih mnogoterosti

Povzetek

V delu diplomskega seminarja se seznanimo z osnovami teorije kompleksnih mnogoterosti in si podrobneje ogledamo lastnost nekaterih kompleksnih mnogoterosti, imenovano lastnost gostote ter predstavimo nekatere posledice, ki jih ima lastnost gostote za grupo holomorfnih avtomorfizmov mnogoterosti. V nadaljevanju si ogledamo družino mnogoterosti, podano z enačbo $x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})$, kjer je $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n)$, in dokažemo zadostne pogoje za a in b, da je delovanje grupe holomorfnih avtomorfizmov tranzitivno, kar implicira lastnost gostote. Iz teh rezultatov neposredno sledi, da ima tudi Koras-Russellova kubika $\{x^2y + x + z_0^2 + z_1^3 = 0\}$ to lastnost.

Automorphisms of Complex Manifolds

Abstract

In this thesis, we develop a basic familiarity with the theory of complex manifolds and examine a property of certain complex manifolds, called the density property and its implications pertaining to the group of holomorphic automorphisms of the manifold. We then focus on a special class of complex manifolds, given by $x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})$, with $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n)$ and provide sufficient conditions for the transitivity of the action of holomorphic automorphisms. We prove that this implies the density property. In particular, we show that the Koras-Russell cubic threefold $\{x^2y + x + z_0^2 + z_1^3 = 0\}$ has the density property.

Math. Subj. Class. (2010): 32M05, 32M25, 14R10

Ključne besede: kompleksne mnogoterosti, lastnost gostote, holomorfni avtomorfizmi, Koras-Russelova kubična mnogoterost

Keywords: complex manifolds, density property, holomorphic automorphisms, Koras-Russel cubic threefold

1. Uvod

Ena izmed karakterističnih lastnosti holomorfnih funkcij ene spremenljivke je njihova precejšnja rigidnost v primerjavi z gladkimi funkcijami. Klasični izreki kot so Liouvillov izrek, Picardova izreka in podobni izkazujejo, da je zahteva po holomorfnosti precej močnejša kot po gladkosti. Holomorfna rigidnost se odraža tudi v konformni geometriji domen v $\mathbb{C}$, ki je skoraj v celoti določena z njihovo topologijo. Klasičen primer tega dejstva je Riemannov upodobitveni izrek, ki pravi, da je vsaka enostavno povezana prava poddomena v $\mathbb{C}$ biholomorfno ekvivalentna disku. Zaradi tega je analitična (holomorfna) geometrija v eni dimenziji razmeroma manj zanimiva.

V višjih dimenzijah se situacija hitro spremeni. Že leta 1907 je Poincaré dokazal, da Riemannov upodobitveni izrek ne velja v dimenzijah večjih od ena. Pokazal je namreč, da dve izmed najbolj preprostih enostavno povezanih domen v $\mathbb{C}^n$, enotska krogla in enotski polidisk (kartezični produkt enotskih diskov), nista biholomorfno ekvivalentni. Precej manj trivialna postane tudi grupa holomorfnih avtomorfizmov kompleksnega evklidskega prostora. V eni dimenziji so elementi grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C})$ zgolj afino linearne preslikave oblike $az + b$ za $a \neq 0$, v višjih dimenzijah pa postane $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$ neskončno dimenzionalna. Zaradi zapletenosti $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$ je naravno analizirati določene bolj enostavne podgrupe. Rosay in Rudin sta v [16] opazovala podgrupo avtomorfizmov oblike $\phi(z', z) = (z', z + f(z'))$, kjer je f holomorfna funkcija, in avtomorfizmov, ki jih dobimo iz njih s konjugiranjem z elementi $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Postavila sta vprašanje, ali je vsak avtomorfizem, ki ohranja volumen (determinanta Jacobijeve matrike je konstantno enaka 1) limita zaporedja omenjenih avtomorfizmov. Na to je pozitivno odgovoril Andersén v [1], kasneje pa je skupaj z Lempertom pokazal, da v kolikor dodamo zraven še avtomorfizme oblike $\psi(z', z) = (z', ze^{f(z')})$ in njihove konjugirane avtomorfizme z elementi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ti dve družini tvorita gosto podmnožico v $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$ [2]. S tem sta postavila temelje teorije avtomorfizmov kompleksnih prostorov, ki jo zdaj imenujemo Andersén-Lempertova teorija. Varolin [17] je z uporabo povezave med avtomorfizmi in kompletnimi vektorskimi polji formuliral analogno lastnost za poljubno kompleksno mnogoterost, imenovano lastnost gostote (definicija 5.1).

Namen tega diplomskega dela je obravnavati omenjeno lastnost gostote. Za to bomo vzpostavili nekaj osnovnih dejstev iz teorije kompleksnih podmnogoterosti in holomorfnih vektorskih polj. Na kompleksne podmnogoterosti smo se omejili, saj so nekatere konstrukcije nekoliko krajše in bolj jasne na kompleksnih podmnogoterostih kot pa bolj splošno na mnogoterostih. Hkrati pa je lastnost gostote najbolj relevantna na posebnem razredu mnogoterosti imenovanih *Steinove* mnogoterosti, ki so natanko tiste mnogoterosti, ki jih lahko vložimo v $\mathbb{C}^n$ za dovolj velik n.

V zaključnem delu se bomo osredotočili na posebno družino podmnogoterosti, podanih z enačbo $X = \{x^2 y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})\}$, kjer so $x, y \in \mathbb{C}$ in $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. V glavnem izreku te diplomske naloge bomo dokazali zadostne pogoje na a in b, da grupa $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ deluje tranzitivno na X. Ob koncu bomo pokazali še, da iz teh pogojev sledi tudi, da ima X lastnost gostote. Razlog za obravnavo te družine podmnogoterosti je v tem, da ta družina vsebuje tridimenzionalno podmnogoterost v $\mathbb{C}^4$, definirano z enačbo

$$C = \{x^2 y + x + z_0^2 + z_1^3 = 0\},$$

ki jo imenujemo *Koras-Russellova kubika.* Zanimanje zanjo izhaja iz teorije algebraičnih grup in njihovih delovanj. Posebej zanimivo dejstvo je, da je Koras-Russellova kubika difeomorfna prostoru $\mathbb{R}^6$ [10], hkrati ni algebraično izomorfna $\mathbb{C}^3$. Natančneje to pomeni, da ne obstaja obrnljiva polinomska preslikava $f : C \to \mathbb{C}^3$ s polinomskim inverzom [14]. Vprašanje, ki je do zdaj še nerazrešeno, je, ali je Koras-Russellova kubika biholomorfno ekvivalentna $\mathbb{C}^3$. Za oba možna odgovora pa je Koras-Russellova kubika zaradi svoje eksotične algebraične strukture protiprimer za nekatere obstoječe domneve iz področja kompleksne geometrije. V primeru, da C ni biholomorfno ekvivalentna $\mathbb{C}^3$, je Koras-Russellova kubika protiprimer *Toth-Varolinovi domnevi* [19], ki predvideva, da je vsaka zaprta kompleksna podmnogoterost z lastostjo gostote, ki je difeomorfna $\mathbb{R}^{2n}$, avtomatično biholomorfna $\mathbb{C}^n$. Kot bomo pokazali v tem delu, ima C res lastnost gostote. V kolikor pa C je biholomorfno ekvivalentna $\mathbb{C}^3$, je protiprimer več domnevam iz teorije linearnih delovanj algebraičnih grup, seznam teh lahko bralec najde v [20].

2. Holomorfne funkcije na $\mathbb{C}^n$

V tem poglavju bomo predstavili nekaj najosnovnejših lastnosti holomorfnih funkcij in preslikav v več spremenljivkah. Z obravnavo izbranih elementov teorije želimo postaviti temelje za obravnavo funkcij in vektorskih polj na kompleksnih podmnogoterostih prostora $\mathbb{C}^n$. Seveda se na tej poti ne moremo izogniti osnovam, zato bomo v prvem razdelku začeli z elementarno diskusijo holomorfnih funkcij več spremenljivk in njihovih lastnosti, ki so v veliko primerih posplošitve analognih lastnosti funkcij ene spremenljivke. Nadaljevali bomo z obravnavo holomorfnih preslikav, z namenom, da dokažemo kompleksno različico izreka o implicitni funkciji, s katerim bomo lahko v naslednjem poglavju pričeli z definicijo kompleksnih podmnogoterosti in nam bo hkrati dal kriterij, kdaj je ničelna množica holomorfnih funkcij zares podmnogoterost. Pri formulacijah izrekov in dokazih bomo v tem poglavju večinoma sledili prvemu poglavju v knjigi [15], razen mestoma, kjer bo to eksplicitno navedeno.

2.1. **Funkcije več kompleksnih spremenljivk.** Eden izmed najpomembnejših izrekov v teoriji funkcij ene kompleksne spremenljivke, iz katerega izhaja večina pomembnih lastnosti holomorfnih funkcij, je Cauchyjeva integralska formula. Ker se Cauchyjeva formula neposredno posploši tudi na višje dimenzionalni primer, si holomorfne funkcije več spremenljivk delijo veliko osnovnih lastnosti s holomorfnimi funkcijami ene spremenljivke. Namen tega poglavja je dokazati večdimenzionalno Cauchyjevo formulo in njeno ključno posledico – analitičnost holomorfnih funkcij.

Začnimo najprej z osnovnimi definicijami. Naj bo $U \subset \mathbb{C}^n$ odprta podmnožica in $f \in \mathscr{C}^1(U)$ funkcija s kompleksnimi vrednostmi. Z identifikacijo $z_j = x_j + \mathrm{i} y_j$ lahko na f gledamo tudi kot na funkcijo realnih spremenljivk. Diferencial f je po definiciji $\mathbb{R}$-linearna preslikava, ki jo lahko razcepimo na $\mathbb{C}$-linearen del ∂f in $\mathbb{C}$-antilinearen del $\bar{\partial} f$

$$\mathrm{d}f = \partial f + \bar{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \mathrm{d}z_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \mathrm{d}\bar{z}_j,$$

kjer velja $\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + \mathrm{i}\mathrm{d}y_j$ in $\mathrm{d}\bar{z}_j = \mathrm{d}x_j - \mathrm{i}\mathrm{d}y_j$ ter

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

V tem kontekstu $\mathbb{C}$-antilinearnost pomeni, da poleg aditivnosti za vsak $c \in \mathbb{C}$ velja, da je $(\bar{\partial} f)(cv) = \bar{c}(\bar{\partial} f)(v)$ za vse $v \in \mathbb{C}^n$. S pomočjo tega lahko definiramo holomorfnost funkcije več kompleksnih spremenljvk.

Definicija 2.1. Naj bo f kot zgoraj. Pravimo, da je f *holomorfna*, če velja, da je $\mathrm{d}f = \partial f$. Ekvivalentno, f je holomorfna natanko tedaj, ko je $\bar{\partial} f = 0$, kar je ekvivalentno sistemu enačb

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Za holomorfnost funkcije f torej zahtevamo, da je $\lambda_j \to f(z_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, z_n)$, tj. f zožena na vsako koordinatno smer, holomorfna funkcija ene kompleksne spremenljivke. Podobno kot v eni dimenziji se tudi v več dimenzijah izkaže, da obstaja več ekvivalentnih karakterizacij holomorfnosti in tudi, da je predpostavka o zvezni parcialni odvedljivosti funkcije f nepotrebna. Toda pri temah, ki jih bomo obravnavali v tej diplomski nalogi, bodo te predpostavke vselej izpolnjene, dokazi izrekov v največji splošnosti pa so precej daljši in zahtevnejši.

Funkcijo f lahko razstavimo na vsoto realnega in imaginarnega dela in torej pišemo $f = u + \mathrm{i}v$, kjer sta $u, v : U \to \mathbb{R}$ realni funkciji. Če v tej notaciji zapišemo pogoj za holomorfnost, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u + \mathrm{i}v)}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial(u + \mathrm{i}v)}{\partial y_j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Funkciji u in v torej morata zadoščati sistemu realnih parcialnih diferencialnih enačb $\partial u/\partial x_j = \partial v/\partial y_j$ in $\partial u/\partial y_j = -\partial v/\partial x_j$, ki mu rečemo *Cauchy-Riemannov* sistem. Če u in v zadoščata Cauchy-Riemannovemu sistemu, potem lahko z direktnim izračunom vidimo, da je $\partial f/\partial z_j = \partial f/\partial x_j$. Iz teorije funkcij ene kompleksne spremenljivke vemo tudi, da je operator $\partial/\partial \bar{z}$ aditiven in da zanj velja Leibnizeva formula za odvod produkta. Ker je konstantna funkcija očitno holomorfna, to pomeni, da je množica holomorfnih funkcij na odprti množici U kompleksna algebra, ki jo označujemo z $\mathcal{O}(U)$. Osnovna domena, ki bo ključnega pomena pri naši obravnavi holomorfnih funkcij, je *polidisk*.

Definicija 2.2. Označimo z $\mathbb{D}(a, r) = \{z | \, |z - a| < r\} \subset \mathbb{C}$. *Polidisk* $\Delta(a, r) \subset \mathbb{C}^n$ s središčem v $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ in *multiradijem* $r = (r_1, \ldots, r_n)$, kjer je $r_i > 0$ za vsak i, je kartezični produkt diskov

$$\Delta(a, r) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{D}(a_i, r_i) = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | \, |z_i - a_i| < r_i \text{ za } i = 1, \ldots, n\}.$$

Odlikovani rob polidiska je množica $b\Delta(a, r) = \prod_{i=1}^{n} \partial\mathbb{D}(a_i, r_i)$.

Pomembno je opaziti, da je topološki rob polidiska precej večja množica kot zgoraj definirani odlikovan rob. Odlikovan rob potrebujemo predvsem za namene naslednjega izreka, ki je neposredna posplošitev Cauchyjeve integralske formule.

Izrek 2.3 (Cauchyjeva integralska formula)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta(a, r))$ in zvezna na zaprtju $\overline{\Delta(a, r)}$. Potem je*

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n} \int_{b\Delta(a,r)} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}, \tag{1}$$

kjer je $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo. Za $n = 1$ je to ravno Cauchyjeva integralska formula v eni spremenljivki. Denimo, da velja za vse funkcije v $n-1$ spremenljivkah. Če fiksiramo z_1 in uporabimo indukcijsko predpostavko na spremenljivkah $(z_2, \ldots, z_n)$, dobimo

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^{n-1}} \int_{b\Delta(a',r')} \frac{f(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \mathrm{d}\zeta_2 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)},$$

kjer uporabljamo oznake $a' = (a_2, \ldots, a_n)$ in $r' = (r_2, \ldots, r_n)$. Hkrati pa za vsak $z_1 \in \mathbb{D}(a_1, r_1)$ velja

$$f(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \mathbb{D}(a_1, r_1)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}.$$

To prav tako sledi iz lastnosti funkcij ene kompleksne spremenljivke. Ko drugo enačbo vstavimo v prvo dobimo gnezden integral, ki ga lahko po Fubinijevem izreku izračunamo kot integral po produktni meri. S tem dobimo ravno enačbo (1). □

Za dokaz naslednje trditve bomo potrebovali tudi dejstvo, da je integral v (1) neodvisen od integracijskega območja v naslednjem smislu. Za vsak multiradij ρ, za katerega velja $0 < \rho_i \leq r_i$ za vse $i = 1, \ldots, n$, je

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{b\Delta(a,\rho)} \frac{f(\zeta) \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

To sledi iz lastnosti holomorfnih funkcij ene kompleksne spremenljivke. Vemo namreč, da je, za fiksne $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$, funkcija $z_1 \mapsto f(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ holomorfna funkcija na $\mathbb{D}(a_1, r_1)$. Iz Greenove formule potem sledi, da je

$$\int_{\partial \mathbb{D}(a_1, r_1)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} = \int_{\partial \mathbb{D}(a_1, \rho_1)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_1 - z_1},$$

za vsak $0 < \rho_1 \leq r_1$. S povsem analognimi indukcijskimi koraki kot zgoraj pridemo do zaključka, da je

$$\int_{b\Delta(a,r)} \frac{f(\zeta) \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \int_{b\Delta(a,\rho)} \frac{f(\zeta) \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

Tudi v več dimenzijah je ključna posledica Cauchyjeve integralske formule dejstvo, da so holomorfne funkcije analitične, kar nam pove naslednji izrek.

Opomba 2.4. V formulaciji in dokazu naslednje trditve bomo potrebovali *multiindeksno* notacijo. Multiindeks ν dolžine n je nabor naravnih števil $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Če je $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, potem definiramo $z^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$. Z oznako $\nu + 1$ označujemo multiindeks $(\nu_1 + 1, \ldots, \nu_n + 1)$, če pa napišemo z^{-1} oziroma $1/z$, s tem mislimo $z_1^{-1} \cdots z_n^{-1}$.

Trditev 2.5. *Naj bo* $f \in \mathcal{O}(\Delta(a, r))$ *in zvezna na zaprtju* $\overline{\Delta(a, r)}$. *Potem je Taylorjeva vrsta za* f *enaka*

$$f(z) = \sum_{\nu \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n} \left(\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{b\Delta(a,r)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta - a)^{\nu+1}} \right) (z - a)^\nu$$

in konvergira za vse $z \in \Delta(a, r)$.

Dokaz. Dokaz tega izreka je ponovno naravna posplošitev dokaza analognega izreka iz teorije funkcij ene kompleksne spremenljivke. Naj bo ρ tak multiradij, da je $\overline{\Delta(A,\rho)} \subset \Delta(a,r)$ in naj bo $z \in \Delta(a,\rho)$. Po izreku 2.3 imamo v točki $z = (z_1, \dots, z_n)$ enakost

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi\mathtt{i})^n} \int_{b\Delta(a,\rho)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

Če prištejemo in odštejemo a, lahko z uporabo uvedene notacije zapišemo

$$(\zeta - z)^{-1} = (\zeta - a + a - z)^{-1} = (\zeta - a)^{-1} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{z_i - a_i}{\zeta_i - a_i}\right)^{-1}.$$

Ker je $|z_i - a_i| < |\zeta_i - a_i|$ za vsak $i = 1, \dots, n$, lahko imenovalec v zgornji Cauchyevi formuli razvijemo kot

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_i - a_i}{\zeta_i - a_i}\right)^k.$$

Zaradi absolutne konvergence vseh zgornjih vrst lahko zamenjamo vrstni red vsote in produkta in dobimo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{(z-a)^\nu}{(\zeta - a)^{\nu+1}},$$

kjer uporabljamo multiindeksno notacijo. Če to na koncu vstavimo v Cauchyjevo integralsko formulo, dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2\pi\mathtt{i})^n} \int_{b\Delta(a,\rho)} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{(z-a)^\nu}{(\zeta - a)^{\nu+1}} \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{(2\pi\mathtt{i})^n} \int_{b\Delta(a,\rho)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta - a)^{\nu+1}} \right) (z-a)^\nu. \end{aligned}$$

Ker vse geometrijske vrste konvergirajo enakomerno, je zamenjava integrala in vsote upravičena. Rezultat, ki smo ga dobili, pa je ravno Taylorjeva vrsta za f, ki konvergira na polidisku $\Delta(a,\rho)$. Ker vemo, da je integral v Cauchyjevi formuli (1) neodvisen od ρ, lahko pošljemo ρ proti r in s tem dobimo trditev. □

2.2. **Holomorfne preslikave.** Naj bo $U \subset \mathbb{C}^n$ odprta podmnožica in $F : U \to \mathbb{C}^m$ preslikava, ki jo po komponentah zapišemo $F = (f_1, \dots, f_m)$, kjer so f_k funkcije s kompleksnimi vrednostmi. Holomorfnost preslikave definiramo kot holomorfnost njenih koordinatnih funkcij.

Definicija 2.6. Preslikava $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$ je *holomorfna*, če so holomorfne vse njene koordinatne funkcije. Preslikava je *biholomorfna*, če je holomorfna in injektivna.

Opomba 2.7. Iz definicije biholomorfne preslikave sledi, da je $F : U \to F(U)$ bijektivna holomorfna preslikava. V nasprotju z gladkimi je pri holomorfnih preslikavah bijektivnost zadosten pogoj za obstoj holomorfnega inverza. Torej, če je holomorfna preslikava bijektivna, obstaja inverz, ki je holomorfen. Dokaz te trditve lahko bralec najde v [8, Proposition 1.1.13, str. 13].

Koordinatne funkcije lahko pišemo kot $f_k = u_k + \mathtt{i}v_k$, kjer sta $u_k, v_k : U \to \mathbb{R}$. S pomočjo tega zapisa lahko $F = (u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)$ gledamo kot realno funkcijo iz U v $\mathbb{R}^{2m}$. Če je preslikava diferenciabilna v točki $z \in U$, je njen diferencial v točki

z linearna preslikava $\mathrm{d}F_z : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2m}$, ki je podana z realno Jacobijevo matriko v točki z

$$\mathrm{J}_{\mathbb{R}} F(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial v_m}{\partial y_n} \end{bmatrix}_z .$$

Pri holomorfnih preslikavah pa je diferencial v točki z $\mathbb{C}$-linearna preslikava $\mathrm{d}_{\mathbb{C}} F_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, podana s kompleksno Jacobijevo matriko, prav tako ovrednoteno v točki z

$$\mathrm{J}_{\mathbb{C}} F(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{bmatrix}_z .$$

Naj bo $F : U \to \mathbb{C}^m$, kjer je $U \subset \mathbb{C}^n$ odprta podmnožica, $\mathscr{C}^1$ preslikava s $\mathbb{C}$-linearnim diferencialom. Ker je kompozicija $\mathbb{C}$-linearnih preslikav spet $\mathbb{C}$-linearna preslikava, je $\mathrm{pr}_k \circ \mathrm{d}F_z$, kjer s pr_k označujemo projekcijo na k-to komponento, torej $\mathbb{C}$-linearna. Toda $(\mathrm{d}f_k)_z = \mathrm{pr}_k \circ \mathrm{d}_{\mathbb{C}} F_z$, kar pomeni, da je $\mathrm{d}f_k$ $\mathbb{C}$-linearna preslikava. Po definiciji 2.1 je torej holomorfna. Posledično je $\mathscr{C}^1$ preslikava $F : U \to \mathbb{C}^m$ holomorfna v točki z natanko tedaj, ko je $\mathrm{d}F_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ $\mathbb{C}$-linearna preslikava.

Denimo, da je F holomorfna preslikava. Vprašanje, ki se naravno postavlja je, kakšna je zveza med realno in kompleksno Jacobijevo matriko. Smiselno bi bilo pričakovati, da neizrojenost kompleksne Jacobijeve matrike implicira neizrojenost realne. To domnevo potrdi naslednja lema.

Lema 2.8. *Naj bo $U \subset \mathbb{C}^n$ in $F : U \to \mathbb{C}^n$ holomorfna preslikava. Potem je $\det \mathrm{J}_{\mathbb{R}} F(z) = |\det \mathrm{J}_{\mathbb{C}} F(z)|^2 \geq 0$ za vsak $z \in U$.*

Dokaz. Najprej permutiramo stolpce in vrstice matrike $\mathrm{J}_{\mathbb{R}} F$, dokler je ne preoblikujemo v bločno obliko

$$\widetilde{\mathrm{J}_{\mathbb{R}} F} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right] & \left[\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right] \\ \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] & \left[\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right] \end{bmatrix}.$$

Vsak blok v tem primeru je realna $n \times n$ matrika. Da dosežemo tako bločno obliko, moramo zamenjati n stolpcev in n vrstic. Vseh zamenjav je torej $2n$, kar pomeni, da je $\det \mathrm{J}_{\mathbb{R}} F = \det \widetilde{\mathrm{J}_{\mathbb{R}} F}$. Če od zgornjih blokov odštejemo spodnja bloka pomnožena z $\mathfrak{i}$, dobimo

$$\det \mathrm{J}_{\mathbb{R}} F = \det \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mathfrak{i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] & \left[\frac{\partial u_k}{\partial y_j} + \mathfrak{i}\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right] \\ \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] & \left[\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right] \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mathfrak{i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] & \left[\mathfrak{i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] \\ \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] & \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right] \end{bmatrix},$$

kjer smo v drugi enakosti upoštevali, da funkcije u_k, v_k rešijo Cauchy-Riemannov sistem. V zadnjem koraku od desnih blokov odštejemo leva bloka pomnožena z $\mathfrak{i}$.

$$\det \mathrm{J}_{\mathbb{R}} F = \det \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right] & 0 \\ \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] & \left[\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial x_j}\right] \end{bmatrix} = \det \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right] \det \left[\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial x_j}\right] = (\det \mathrm{J}_{\mathbb{C}} F) \left(\overline{\det \mathrm{J}_{\mathbb{C}} F}\right).$$

V zgornjem izračunu smo uporabili enakost $\partial f / \partial z_j = \partial f / \partial x_j$, ki velja za holomorfne funkcije. ☐

Lema 2.8 nam bo omogočala, da dokaz kompleksne različice izreka o implicitni funkciji reduciramo na realen izrek o implicitni funkciji. Preden pa lahko izrek zares dokažemo, si oglejmo še, kako se z operatorji $\partial/\partial z_k$ izraža verižno pravilo za odvod kompozicij holomorfnih preslikav.

Lema 2.9. *Naj bosta $U_1 \subset \mathbb{C}^n$ in $U_2 \subset \mathbb{C}^m$ odprti množici ter $F : U_1 \to U_2$ in $g : U_2 \to \mathbb{C}$ holomorfni preslikavi. Potem je $g \circ F \in \mathcal{O}(U_1)$. Prav tako za vsak $z \in U_1$ in za vse $k = 1, \ldots, n$ velja*

$$\frac{\partial(g \circ F)}{\partial z_k}(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial f_j}(F(z)) \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z).$$

Dokaz. Pišimo $z_k = x_k + \mathrm{i} y_k$ in $f_j = \widetilde{x}_j + \mathrm{i}\widetilde{y}_j$, kjer je $k = 1, \ldots, n$ in $j = 1, \ldots, m$. Preslikava F je torej kot realna preslikava odvisna od spremenljivk x_k, y_k, medtem ko je g odvisna od $\widetilde{x}_j$ in $\widetilde{y}_j$. Z uporabo verižnega pravila za realne preslikave sledi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g \circ F)}{\partial \bar{z}_k} &= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial \widetilde{x}_j} \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial g}{\partial \widetilde{y}_j} \frac{\partial \widetilde{y}_j}{\partial \bar{z}_k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial \widetilde{x}_j} - \mathrm{i} \frac{\partial g}{\partial \widetilde{y}_j} \right) \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial \widetilde{x}_j} + \mathrm{i} \frac{\partial g}{\partial \widetilde{y}_j} \right) \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial \bar{z}_k} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial g}{\partial \bar{f}_j} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial \bar{z}_k} \right).
\end{aligned}$$

Ker je g holomorfna, je $\partial g/\partial \bar{f}_j = 0$ za vse j, hkrati pa iz holomorfmosti F sledi, da je $\partial f_j/\partial \bar{z}_k = 0$ za vse j in k. Torej je $g \circ F$ res holomorfna funkcija. Če enak račun ponovimo za operator $\partial/\partial z_k$, dobimo

$$\frac{\partial(g \circ F)}{\partial z_k} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial z_k} + \frac{\partial g}{\partial \bar{f}_j} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial z_k} \right).$$

Ker so funkcije f_j holomorfne, je

$$\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_k} - \mathrm{i} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial y_k} \right) = \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \mathrm{i} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)} = \overline{\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k}} = 0.$$

Torej so drugi členi v zgornji vsoti vedno enaki nič in za $z \in U_1$ velja

$$\frac{\partial(g \circ F)}{\partial z_k}(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial f_j}(F(z)) \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z),$$

kar je točno formula iz leme. □

Denimo, da je $G = (g_1, \ldots, g_l) : U_2 \to \mathbb{C}^l$ prav tako holomorfna preslikava. Potem z uporabo leme 2.9 na vseh komponentnih funkcijah g_j dobimo naslednjo posledico.

Posledica 2.10. *Če sta $F : U_1 \to U_2$ in $G : U_2 \to \mathbb{C}^l$ holomorfni preslikavi, je tudi $G \circ F : U_1 \to \mathbb{C}^l$ holomorfna preslikava in velja*

$$\mathrm{J}_{\mathbb{C}}(G \circ F)(z) = \mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, G(F(z)) \cdot \mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, F(z).$$

Z do zdaj razvitimi orodji lahko dokažemo centralni izrek tega razdelka, izrek o implicitni funkciji; naš dokaz bo sledil [8, Proposition 1.1.11, str. 11].

Izrek 2.11 (Izrek o implicitni funkciji)**.** *Naj bo $U \subset \mathbb{C}^n$ in $F : U \to \mathbb{C}^m$ holomorfna preslikava, kjer je $m \leq n$. Denimo, da za neki $z_0 \in U$ velja*

$$\det \left[\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(z_0)\right]_{1\leq k,j\leq m} \neq 0$$

Potem obstajata odprti množici $U_1 \subset \mathbb{C}^{n-m}$ in $U_2 \subset \mathbb{C}^m$ ter holomorfna preslikava $G : U_1 \to U_2$, da veljata naslednji lastnosti:

(i) $U_1 \times U_2 \subset U$

(ii) za vsak $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U_1 \times U_2$ je $F(z) = F(z_0)$ natanko tedaj, ko je $G(z_{m+1}, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_m)$.

Dokaz. Če opazujemo F kot realno preslikavo, za uporabo realne različice izreka o implicitni funkciji potrebujemo neizrojenost podmatrike, ki je podana z bloki

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} & \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j} & \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \end{bmatrix}$$

za $1 \leq k, j \leq m$ v točki $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$. Če to podmatriko označimo z A, je po lemi 2.8 determinanta te podmatrike enaka

$$\det A = \left|\det \left[\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(z_0)\right]_{1\leq k,j\leq m}\right|^2 \neq 0.$$

Podmatrika A je torej neizrojena. Realna različica izreka o implicitni funkciji nam zagotavlja obstoj gladke preslikave G, ki zadošča zgornjima pogojema. Preostane nam še preveriti, da je G holomorfna preslikava. Iz realnega izreka o implicitni funkciji vemo, da je

$$\mathrm{d}G_z = -\left[\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(z)\right]^{-1}_{1\leq k,j\leq m} \cdot \left[\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(z)\right]_{\substack{1\leq k\leq m \\ m+1\leq j\leq n}}.$$

Preslikava podana z

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(z)\right]_{1\leq k,j\leq m}$$

kot tudi drugi člen v zgornjem produktu sta $\mathbb{C}$-linearni preslikavi. Ker je po predpostavki neizrojena v točki z_0, obstaja odprta okolica točke z_0, na kateri je zgornja preslikava obrnljiva. Po potrebi domeno preslikave G zožimo, da bo vsebovana v tej odprti okolici. Ker je inverz $\mathbb{C}$-linearne preslikave spet $\mathbb{C}$-linearen, je torej $\mathrm{d}G_z$ $\mathbb{C}$-linearna preslikava, saj je produkt dveh $\mathbb{C}$-linearnih preslikav. Posledično je G holomorfna preslikava. □

Izrek o implicitni funkciji nam torej pove, da če ima kompleksna Jacobijeva matrika holomorfne preslikave maksimalen možen rang (v situaciji izreka, kjer je $m \leq n$, to pomeni, da ima rang enak m) v neki točki, potem je nivojnica $F^{-1}(\{F(z_0)\})$ lokalno graf neke holomorfne preslikave. To motivira naslednjo definicijo.

Definicija 2.12. Naj bo $F : U \to \mathbb{C}^m$ holomorfna preslikava in $z \in U$. Če ima diferencial $\mathrm{d}F_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ maksimalen rang, torej je rang enak $\min(m, n)$, rečemo, da je diferencial $\mathrm{d}F_z$ v točki z *neizrojen*. Denimo, da je $m \leq n$. Točka z je *regularna*, če je diferencial $\mathrm{d}F_z$ neizrojen, torej je surjektiven. V nasprotnem primeru je točka z *singularna*. Preslikava F je *nesingularna*, če nima singularnih točk.

3. Kompleksne podmnogoterosti

V tem razdelku bomo definirali kompleksne podmnogoterosti v $\mathbb{C}^n$, ki bodo osrednji objekt, ki ga bomo obravnavali v diplomski nalogi. Osnovna motivacija za študij kompleksnih podmnogoterosti (in, bolj splošno, mnogoterosti) je želja po uporabi metod kompleksne analize za študij prostorov z nelinearno geometrijo.

Definicija 3.1. Podmnožica $X \subset \mathbb{C}^n$ je *kompleksna podmnogoterost kompleksne dimenzije* m v $\mathbb{C}^n$, če za vsak $p \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{C}^n$ in biholomorfna preslikava $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{C}^n$, da je

$$\phi(X \cap U) = \mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m} \cap \phi(U).$$

Kompleksna podmnogoterost je *zaprta kompleksna podmnogoterost*, če je zaprta kot podmnožica $\mathbb{C}^n$.

Če je X kompleksna podmnogoterost, številu $n - m$ iz zgornje definicije rečemo *kodimenzija* X. Osnovni primeri podmnogoterosti so odprte podmnožice v $\mathbb{C}^n$, ki imajo kodimenzijo 0, in pa linearni podprostori poljubne dimenzije $m \leq n$, kjer za ϕ izberemo ustrezno rotacijo, ki podprostor preslika v $\mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m}$. Prav tako je vsaka odprta podmnožica V podmnogoterosti spet podmnogoterost, saj lahko v točki p zožimo preslikavo ϕ na $U \cap V$, kjer je U kot v definiciji. Splošne podmnogoterosti pa so prostori, ki so lokalno podobni linearnim podprostorom $\mathbb{C}^n$, hkrati pa je njihova globalna geometrija lahko precej drugačna. Iz same definicije ni povsem očitno, kako najti netrivialne primere kompleksnih podmnogoterosti, z uporabo izreka o implicitni funkciji pa bomo dokazali, da so nivojnice nesingularnih holomorfnih preslikav kompleksne podmnogoterosti. Preden lahko to dokažemo, moramo uvesti še koncept *lokalne parametrizacije*.

Lema 3.2. *Denimo, da za vsak $p \in X$ obstaja okolica $U \subset \mathbb{C}^n$, m-dimenzionalna odprta krogla $B_m(a, r) \subset \mathbb{C}^m$ in preslikava $\psi : B_m(a, r) \to \mathbb{C}^n$ z neizrojenim diferencialom v točki a, da velja $\psi(B_m(a, r)) = X \cap U$. Potem je X kompleksna podmnogoterost dimenzije m. Preslikavi ψ rečemo lokalna parametrizacija X v točki p.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $\psi(a) = p$. Iz neizrojenosti diferenciala preslikave v točki a sledi, da so vektorji

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_1}(a), \frac{\partial \psi}{\partial z_2}(a), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial z_m}(a)$$

linearno neodvisni. Dopolnimo jih do baze prostora $\mathbb{C}^n$ z vektorji $u_{m+1}, \ldots, u_n$ in z njimi definirajmo preslikavo $\widetilde{\psi} : B_n(a', r) \to \mathbb{C}^n$, kjer je $a' = (a, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$ s predpisom

$$\widetilde{\psi}(z_1, \ldots, z_n) = \psi(z_1, \ldots, z_m) + z_{m+1}u_{m+1} + \cdots + z_n u_n.$$

Tako definirana preslikava je holomorfna, kar lahko takoj vidimo z odvajanjem po $\partial/\partial \bar{z}_j$. Ker smo diferencial v točki a dopolnili z $n - m$ linearno neodvisnimi vektorji, je Jacobijeva matrika obrnljiva. Posledično nam izrek o inverzni preslikavi zagotovi lokalno injektivnost $\widetilde{\psi}$, torej lahko po potrebi zmanjšamo r in U, da bo $\widetilde{\psi}$ injektivna in da bo pogoj $\psi(B_m(a, r)) = X \cap U$ še vedno izpolnjen. Preslikava $\widetilde{\psi}$ je potem biholomorfna na svojo sliko. Če definiramo $\phi = \widetilde{\psi}^{-1}$, potem velja $\phi(X \cap U) = B_m(a, r) = \mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m} \cap \phi(U)$. $\square$

Opomba 3.3. Od zdaj naprej bo X vedno označeval podmnogoterost dimenzije m v $\mathbb{C}^n$, razen če bo eksplicitno navedeno drugače. Lokalno parametrizacijo X bomo od zdaj naprej pisali kot $\psi : B_m(a,r) \to X$, torej s kodomeno X, saj je $\psi(B_m(a,r)) \subset X$. Zahtevamo tudi, da je r dovolj majhen, da je ψ injektivna.

Z uporabo leme 3.2 in izreka 2.11 lahko brez težav dokažemo naslednjo trditev.

Trditev 3.4. *Naj bo $U \subset \mathbb{C}^n$ odprta podmnožica in $F : U \to \mathbb{C}^m$, kjer je $m < n$, nesingularna holomorfna preslikava. Potem je za vsak $z_0 \in U$ nivojnica $N_{z_0}(F) = \{z \in U | F(z) = F(z_0)\}$ zaprta kompleksna podmnogoterost dimenzije $n - m$.*

Dokaz. Naj bo $p \in N_{z_0}(F)$. Po predpostavki je diferencial v točki p maksimalnega ranga, torej lahko uporabimo izrek 2.11. Posledično obstaja U, odprta okolica p, da so v tej okolici točke na nivojnici $N_{z_0}(F)$ graf holomorfne preslikave $G : B_{n-m}(a,r) \to \mathbb{C}^m$. Preslikava $\psi(z) = (z, G(z))$ nam podaja lokalno parametrizacijo $N_{z_0}(F)$ v točki p. Diferencial je res neizrojen, saj je levi blok v Jacobijevi matriki enak identiteti dimenzije $n - m$. Iz izreka 2.11 pa sledi, da je $\psi(B_{n-m}(a,r)) = N_{z_0}(F) \cap U$. Po lemi 3.2 je torej $N_{z_0}(F)$ res kompleksna podmnogoterost dimenzije $n - m$. □

Oglejmo si sedaj konkretno družino hiperploskev, s katero se bomo ukvarjali v zadnjem razdelku diplomske naloge.

Primer 3.5. Uvedimo oznako $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ in naj $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ označuje kompleksno algebro polinomov v spremenljivkah $z_0, \ldots, z_n$. Naj bosta $a, b \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ poljubna polinoma. Želimo poiskati zadostne pogoje za a in b, da bo nivojnica $f^{-1}(0)$ funkcije $f : \mathbb{C}^{n+3} \to \mathbb{C}$, definirane z enačbo

$$f(x, y, \mathbf{z}) = x^2 y - a(\mathbf{z}) - x b(\mathbf{z}),$$

kompleksna podmnogoterost v $\mathbb{C}^{n+3}$. Po trditvi 3.4 je dovolj ugotoviti, kdaj bo f nesingularna. Zato si oglejmo, kdaj ima f lahko singularne točke. Maksimalni možen rang $\mathrm{J}_{\mathbb{C}} f$ je 1, zato morajo biti v singularni točki vsi parcialni odvodi enaki 0. Dobimo enačbe

$$2xy - b(\mathbf{z}) = 0, \qquad x^2 = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial z_j}(\mathbf{z}) + x \frac{\partial b}{\partial z_j}(\mathbf{z}) = 0,$$

kjer je $j = 0, \ldots, n$. Takoj vidimo, da je točka lahko singularna zgolj, če je $x = 0$. V tem primeru se enačbe reducirajo na pogoja $b(\mathbf{z}) = 0$ in $\partial a / \partial z_j(\mathbf{z}) = 0$ za vse $j = 0, \ldots, n$. Za nesingularnost zadošča, da je

$$\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} | b(\mathbf{z}) = 0,\ \partial a / \partial z_j(\mathbf{z}) = 0 \text{ za vsak } j\right\} = \emptyset.$$

Če torej polinomi b in $\partial a / \partial z_j$ nimajo skupnih ničel, je ničelna množica funkcije f kompleksna podmnogoterost. ♢

Posledica 3.6. *Podmnožica v $\mathbb{C}^4$, definirana z enačbo*

$$x^2 y + x + z_0^2 + z_1^3 = 0, \tag{2}$$

je kompleksna podmnogoterost kodimenzije 1. *Hiperploskev definirano z enačbo* (2) *imenujemo Koras-Russellova kubika.*

Dokaz. V tem primeru je $b(\mathbf{z}) \equiv -1$, torej nima ničel. Množica, definirana v primeru 3.5, je torej očitno prazna. □

Na koncu tega razdelka si oglejmo še, kako definiramo holomorfne funkcije na kompleksnih podmnogoterostih. Ključna funkcija uvedbe strukture kompleksne podmnogoterosti je, da lahko govorimo o holomorfnih funkcijah in preslikavah med kompleksnimi podmnogoterostmi.

Definicija 3.7. Funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ je *holomorfna* v točki p, če je $f \circ \psi$ holomorfna v točki $\psi^{-1}(p)$ za neko lokalno parametrizacijo ψ v točki p. Funkcija je holomorfna na X, če je holomorfna v vsaki točki $p \in X$.

Dokažimo, da je zgornja definicija neodvisna od izbire lokalne parametrizacije. Če je $\psi : B_m(a, r) \to X$ lokalna parametrizacija X v točki p, po konstrukciji iz leme 3.2 vemo, da je ψ bijektivna na svojo sliko. Torej obstaja inverzna preslikava ψ^{-1}, da je $\psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{id}_{B_m(a,r)}$. Po definiciji holomorfnih preslikav je torej lokalna parametrizacija biholomorfizem na $X \cap U$ (ki je odprta podmnožica X v inducirani topologiji). Inverzu lokalne parametrizacije rečemo *lokalna karta* na podmnogoterosti X. Denimo, da je p vsebovana v sliki dveh lokalnih parametrizacij $\psi : B_m(a, r) \to X$ in $\vartheta : B_m(a', r') \to X$ in uvedimo oznaki $V = \psi(B_m(a, r)) \cap \vartheta(B_m(a', r'))$ ter $W = \vartheta^{-1}(V)$. Potem je preslikava

$$\psi^{-1}|_V \circ \vartheta|_W : W \to B_m(a, r)$$

holomorfna, ker je kompozicija holomorfnih preslikav. Če je f kot v zgornji definiciji, lahko zapišemo

$$f \circ \vartheta = (f \circ \psi) \circ \left(\psi^{-1} \circ \vartheta\right),$$

kjer implicitno domene preslikav tudi ustrezno zožimo. Če je $f \circ \psi$ holomorfna, je potem tudi $f \circ \vartheta$ holomorfna, če pa zamenjamo vlogi ψ in ϑ, dobimo še obraten sklep. S tem vidimo, da je holomorfnost funkcije neodvisna od lokalne parametrizacije, ki jo izberemo v definiciji. Holomorfne funkcije iz odprte podmnožice U v podmnogoterosti X (torej take, ki so holomorfne v vseh točkah podmnožice U) bomo označevali z $\mathcal{O}_X(U)$. Oglejmo si še trditev, ki karakterizira holomorfne funkcije na podmnogoterostih kot lokalne zožitve holomorfnih funkcij iz ambientnega prostora.

Trditev 3.8. *Funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ je holomorfna v točki p natanko tedaj, ko obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{C}^n$ in takšna holomorfna funkcija $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$, da velja $f|_{X\cap U} = \tilde{f}|_{X\cap U}$.*

Dokaz. Dokaz implikacije v levo je enostaven. Če obstaja $\tilde{f}$ iz ambientnega prostora, je njena zožitev na $\tilde{f}|_{X\cap U}$ holomorfna. Po predpostavki imamo enakost $f|_{X\cap U} = \tilde{f}|_{X\cap U}$, torej je tudi f holomorfna kot preslikava iz podprostora v $\mathbb{C}^n$ in je posledično tudi kompozicija $f \circ \psi$ holomorfna. Za dokaz druge implikacije pa si pomagamo z dokazom leme 3.2. Tam smo konstruirali preslikavo $\phi : U \to \phi(U)$ kot inverz razširitve lokalne parametrizacije ψ tako, da je veljalo $\phi(X \cap U) = B_m(a, r)$, kjer je $B_m(a, r)$ domena ψ. Označimo s $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ projekcijo na prvih m komponent in definirajmo preslikavo $\eta : U \to B_m(a, r)$ kot $\eta = \mathrm{pr}_1 \circ \phi$. Iz konstrukcije v lemi 3.2 sledi, da je $\psi \circ \eta|_{X\cap U} = \mathrm{id}_{X\cap U}$, prav tako pa sta obe preslikavi holomorfni. Če torej definiramo $\tilde{f} = f \circ \psi \circ \eta : U \to \mathbb{C}$, potem je tako definirana funkcija holomorfna, ker je kompozicija holomorfnih preslikav, in velja $\tilde{f}|_{X\cap U} = f|_{X\cap U}$. □

Po analogiji s holomorfnimi preslikavami med evklidskimi prostori lahko definiramo tudi preslikave $X \to \mathbb{C}^n$ in preslikave med dvema podmnogoterostma.

Definicija 3.9. Naj bosta X in Y podmnogoterosti dimenzij m in n. Preslikava $F : X \to \mathbb{C}^k$ je *holomorfna*, če so holomorfne vse njene koordinatne funkcije. Preslikava $F : X \to Y$ je *holomorfna*, če je holomorfna kot preslikava iz $X \to \mathbb{C}^n$ in velja $F(X) \subset Y$. Če je F injektivna in velja $F(X) = Y$, je preslikava *biholomorfna*.

Preslikave, ki jih bomo opazovali v naslednjih poglavjih, bodo *avtomorfizmi kompleksnih podmnogoterosti*, ki so biholomorfne preslikave $\phi : X \to X$. Množica vseh avtomorfizmov podmnogoterosti X je grupa, ki jo označujemo z $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$.

3.1. **Tangentni prostor podmnogoterosti.** Ko smo ponovili osnovne lastnosti podmnogoterosti in funkcij na podmnogoterostih, se lahko osredotočimo na pomembno konstrukcijo, ki nam bo omogočala, da govorimo o vektorskih poljih na poljubni podmnogoterosti kompleksnega evklidskega prostora, in sicer tangentni prostor podmnogoterosti X. Tangentni prostor bomo konstruirali s pomočjo derivacij na zarodkih holomorfnih funkcij na kompleksni podmnogoterosti, kar je sicer abstraktna definicija in ni nujno potrebna v primeru podmnogoterosti, toda v razdelku o vektorskih poljih bomo s to definicijo pridobili interpretacijo vektorskih polj kot diferencialnih operatorjev, ki delujejo na holomorfnih funkcijah. Pri konstrukciji bomo v osnovi sledili [7, str. 103–105] in [6, str. 85–89].

Začnimo z definicijo zarodka holomorfne funkcije na podmnogoterostih. Izberimo točko $p \in X$ in opazujmo vse holomorfne funkcije, ki so definirane na poljubni odprti okolici točke p. Za te funkcije uvedimo notacijo (U, f), ki pomeni, da je f funkcija definirana na odprti množici $U \subset X$. Želimo opazovati lokalne lastnosti funkcij v točki $p \in U$, zato uvedimo relacijo na naslednji način. Rečemo, da sta (U, f) in (V, g) ekvivalentni v točki p, če obstaja odprta okolica $W \subset U \cap V$, $p \in W$, da je $f|_W = g|_W$. Ta relacija je očitno ekvivalenčna.

Definicija 3.10. Ekvivalenčni razred zgoraj opisane relacije imenujemo *zarodek funkcije* v točki p. Množico vseh zarodkov holomorfnih funkcij v p na podmnogoterosti X bomo označevali z $\mathcal{O}_{p,X}$. Ekvivalenčne razrede bomo označevali z oznako $[f]_p$.

Ker imajo holomorfne funkcije na odprtih podmnožicah strukturo kompleksne algebre, lahko tudi na $\mathcal{O}_{p,X}$ uvedemo operacije $[f]_p + [g]_p = [f + g]_p$, kjer sta predstavnika (U, f) in (V, g), vsota pa je definirana na $U \cap V$. Podobno lahko za produkt definiramo $[f]_p[g]_p = [fg]_p$. S temi operacijami postane $\mathcal{O}_{p,X}$ kompleksna algebra. Zdaj lahko definiramo še derivacije in tangentni prostor.

Definicija 3.11. *Derivacija* na $\mathcal{O}_{p,X}$ je $\mathbb{C}$-linearna preslikava $v_p : \mathcal{O}_{p,X} \to \mathbb{C}$, ki zadošča Leibnizevemu pravilu

$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g).$$

Tangentni prostor v točki p, označen s T_pX, definiramo kot množico vseh derivacij na $\mathcal{O}_{p,X}$.

Opomba 3.12. Ker bomo v tem razdelku delali izključno z derivacijami v točkah in bo vedno jasno, za katero točko gre, bomo podpisano točko opuščali in pisali $v_p = v$. Kasneje bomo podpisano točko spet uporabljali v razdelku o holomorfnih vektorskih poljih.

V zgornji definiciji smo označili ekvivalenčne razrede kar s poljubnim predstavnikom. Očitno je množica derivacij vektorski prostor. Neposredna posledica definicij je tudi, da je $v(c) = 0$, kjer je c konstantna funkcija. Velja namreč

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1) = 2v(1).$$

Torej je $v(1) = 0$ in po linearnosti enako velja za vse konstantne funkcije. Toda zaenkrat še ne vemo niti, ali je ta prostor končno dimenzionalen. Da dokažemo, da je prostor derivacij res končno dimenzionalen in da se njegova dimenzija ujema z dimenzijo X, si najprej oglejmo lastnosti derivacij na poljubni odprti podmnožici $U \subset \mathbb{C}^m$. Po trditvi 2.5 je vsaka holomorfna funkcija lokalno vsota Taylorjeve vrste. Torej lahko zarodek $[f]_a \in \mathcal{O}_{a,U}$ na nekem polidisku s središčem v a, ki je vsebovan v U, predstavimo kot

$$f(z) = f(a) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)(z_j - a_j) + \sum_{j=1}^{m} h_j(z)(z_j - a_j),$$

kjer funkcije h_j dobimo tako, da iz členov reda večjega od 1 izpostavimo en faktor $z_j - a_j$ in potem razdelimo preostale člene v h_j. Torej so funkcije h_j holomorfne in za njih velja $h_j(a) = 0$, saj smo iz členov vrste, ki imajo red večji kot dva izpostavili člen reda 1. Če na f uporabimo derivacijo in upoštevamo definicijo, dobimo

$$\begin{aligned}
v(f) &= v\left(f(a) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)(z_j - a_j) + \sum_{j=1}^{m} h_j(z)(z_j - a_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)(v(z_j) - v(a_j)) + \sum_{j=1}^{m} v(h_j(z)(z_j - a_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{m} v(z_j) \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) + \sum_{j=1}^{m} (v(h_j(z)) \cdot 0 + 0 \cdot v(z_j)) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} v(z_j) \left.\frac{\partial}{\partial z_j}\right|_a\right)(f).
\end{aligned}$$

Če izberemo skalarje $v(z_j) = v_j \in \mathbb{C}$ za vse $j = 1, \ldots, m$, je derivacija enolično določena. Povedano drugače, vsaka derivacija v v točki a je smerni odvod v smeri vektorja $v = (v_1, \ldots, v_m)$ s komponentami $v_j = v(z_j)$, saj iz definicije smernega odvoda in verižnega pravila za holomorfne funkcije iz leme 2.9 sledi

$$\partial_v f(a) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} f(a + tv) = \sum_{j=1}^{m} v_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(a).$$

Prav tako lahko z uporabo Leibnizevega pravila za $\partial/\partial t|_{t=0}$ hitro preverimo, da so smerni odvodi derivacije. Seveda je v našem primeru $t \in \mathbb{C}$ in $a + tv$ kompleksna premica. Dokažemo lahko torej naslednjo trditev.

Trditev 3.13. *Predpis $\vartheta(v) = \partial_v$ je izomorfizem vektorskih prostorov $\mathbb{C}^m$ in T_aU za poljubno odprto podmnožico $U \subset \mathbb{C}^n$ in poljubno točko $a \in U$.*

Dokaz. Za linearnost uporabimo verižno pravilo in dobimo

$$\vartheta(\alpha v + \beta w) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha v_j + \beta w_j) \frac{\partial f}{\partial z_j} = \alpha \sum_{j=1}^{m} v_j \frac{\partial f}{\partial z_j} + \beta \sum_{j=1}^{m} w_j \frac{\partial f}{\partial z_j} = \alpha\vartheta(v) + \beta\vartheta(w).$$

Iz zgoraj povedanega sledi, da je ϑ surjektivna. Če je $v \in \ker \vartheta$, mora veljati, da je $\partial_v f(a) = 0$ za vse predstavnike f iz $\mathcal{O}_{a,U}$. Če za f izberemo koordinatne funkcije z_j, dobimo, da je $v_j = 0$ za vse $j = 1, \ldots, m$. Torej je $v = 0$. $\square$

Ker so $\partial/\partial z_j|_a$ linearno neodvisne derivacije, so namreč slike standardne baze v $\mathbb{C}^m$, tvorijo bazo prostora $\mathrm{T}_a U$. Oglejmo si zdaj, kako se naša definicija prenese na funkcije na kompleksnih podmnogoterostih. Naj bosta X in Y kompleksni podmnogoterosti in naj bo $F : X \to Y$ holomorfna preslikava. Potem za vse $p \in X$ preslikava F inducira homomorfizem algeber zarodkov

$$F^* : \mathcal{O}_{F(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X},$$

podan s $F^*(g) = g \circ F$. V kolikor je F biholomorfna, je $(F^{-1})^*$ inverz homomorfizma F^* in torej dobimo izomorfizem algeber $\mathcal{O}_{F(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$. Če je $v : \mathcal{O}_{p,X} \to \mathbb{C}$ derivacija, je potem preslikava, definirana z $\tilde{v}(g) = v(g \circ F)$, derivacija na $\mathcal{O}_{F(p),Y}$, saj velja

$$\tilde{v}(gg') = v(gg' \circ F) = v((g \circ F)(g' \circ F)) = v(g \circ F)g'(F(p)) + g(F(p))v(g' \circ F).$$

Naj bo $\psi : B_m(a, r) \to X$ lokalna parametrizacija X v točki p. Z uporabo zgornjih argumentov lahko derivacije iz evklidskega prostora prenesemo na podmnogoterost. Označimo s $\psi^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ lokalno karto (funkcijam x_j rečemo tudi *lokalne koordinate*) v okolici p in definirajmo naslednje derivacije na $\mathcal{O}_{p,X}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial z_j}(\psi^{-1}(p)), \tag{3}$$

za $j = 1, \ldots, m$. Po zgornjem računu, s to definicijo res dobimo derivacije na $\mathcal{O}_{p,X}$. Definirali smo torej kam se preslikajo elementi baze prostora $\mathrm{T}_{\psi^{-1}(p)} B_m(a, r)$. Predpis lahko razširimo do linearne preslikave $\psi_* : \mathrm{T}_{\psi^{-1}(p)} B_m(a, r) \to \mathrm{T}_p X$, s predpisom $\psi_*(v) = v(\ \cdot\ \circ \psi)$. Trdimo, da je preslikava ψ_* izomorfizem vektorskih prostorov. Naj bo $v \in \mathrm{T}_p X$ derivacija. Potem je po zgornjih argumentih $v(\ \cdot \circ \psi^{-1}) \in \mathrm{T}_{\psi^{-1}(p)} B_m(a, r)$ in očitno velja, da je $\psi_*(v(\ \cdot \circ \psi^{-1})) = v$. Torej je preslikava surjektivna. Da dokažemo injektivnost, predpostavimo, da velja $\psi_*(v) = 0$. Torej je $v(f \circ \psi) = 0$ za vse $f \in \mathcal{O}_{p,X}$. Izberimo $f = x_j$, kjer je x_j j-ta lokalna koordinata. Potem je $x_j \circ \psi = z_j|_{B_m(a,r)}$. Vemo, da lahko derivacijo iz $\mathrm{T}_{\psi^{-1}(p)} B_m(a, r)$ razvijemo po bazi kot $v = \sum_{j=1}^m v_j \partial/\partial z_j$, kjer je $v_j = v(z_j)$. Ker pa je $\psi_*(v) = 0$, sledi

$$v(x_j \circ \psi) = v(z_j) = 0.$$

Ker enak sklep velja za vse j, je torej $v = 0$ in s tem dobimo injektivnost preslikave ψ_*. Dokazali smo, da je ψ_* izomorfizem vektorskih prostorov. Posebej to pomeni, da je $\mathrm{T}_p X$ m-dimenzionalen, z bazo definirano v enačbi (3). S podobnimi argumenti lahko vsaki holomorfni preslikavi $F : X \to Y$ priredimo linearno preslikavo med tangentnima prostoroma v ustreznih točkah, s predpisom $v \mapsto v(\ \cdot\ \circ F)$. Tako definirano preslikavo označimo z $\mathrm{d}F_p : \mathrm{T}_p X \to \mathrm{T}_{F(p)} Y$ in ji rečemo *diferencial* preslikave F v točki p. Izkaže se, da smo s tem prispeli do brezkoordinatne definicije diferenciala.

Trditev 3.14. *Če je $F : X \to Y$ holomorfna preslikava, je preslikava $\mathrm{d}F_p : \mathrm{T}_p X \to \mathrm{T}_{F(p)} Y$ definirana kot $\mathrm{d}F_p(v)(f) = v(f \circ F)$ $\mathbb{C}$-linearna. Če je F biholomorfna, je zgornja preslikava izomorfizem.*

Dokaz. Da je to res linearna preslikava je očitno, saj so operacije definirane po točkah. Naj bo $G : Y \to Z$ še ena holomorfna preslikava. Trdimo, da velja verižno pravilo

$$\mathrm{d}(G \circ F)_p = \mathrm{d}G_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p.$$

Po definiciji je $\mathrm{d}(G \circ F)_p(v)(f) = v(f \circ G \circ F)$. Če razpišemo še desno stran, pa dobimo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p(v)(f) &= \mathrm{d}G_{F(p)}(\mathrm{d}F_p(v))(f)\\ &= \mathrm{d}G_{F(p)}(v(\,\cdot\, \circ F))(f)\\ &= v(f \circ G \circ F).\end{aligned}$$

V posebnem primeru, če je F biholomorfna, velja $\mathrm{d}(\mathrm{id}_X)_p = \mathrm{d}F^{-1}_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p$. Toda, ker velja $v(f \circ \mathrm{id}_X) = v(f)$, je $\mathrm{d}(\mathrm{id}_X)_p = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_pX}$. Torej je kompozicija dveh linearnih preslikav enaka identiteti. Ker je $F : X \to Y$ biholomorfna preslikava, je $\dim X = \dim Y$. To sledi iz dejstva, da je F homeomorfizem, dimenzija pa je topološka invarianta [12, Theorem 17.26]. Posledično je tudi $\dim \mathrm{T}_pX = \dim \mathrm{T}_{F(p)}Y$. Ker velja $\mathrm{d}F^{-1}_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_pX}$ sta obe preslikavi obrnljivi in velja $\mathrm{d}F^{-1}_{F(p)} = (\mathrm{d}F_p)^{-1}$. □

Primer 3.15. Oglejmo si primer računa v koordinatah. Naj bo $U \subset \mathbb{C}^n$ in F holomorfna preslikava $F = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$. Potem že od prej vemo, da je njen diferencial podan s kompleksno Jacobijevo matriko. Lahko pa diferencial izračunamo z uporabo novih definicij. Slika baznega vektorja (kjer na obeh straneh vzamemo standardne koordinate) je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial z_j}\right|_p\right)(f) &= \frac{\partial (f \circ F)}{\partial z_j}(p)\\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_k}(F(p)) \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(p)\\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial z_k}\right|_{F(p)}(f)\end{aligned}$$

Tudi v tem primeru se koordinate transformirajo z Jacobijevo preslikavo, torej se abstraktna definicija ujema s klasično. ♢

Primer 3.16. Seveda obstaja tudi precej enostavnejša definicija tangentnega prostora na kompleksnih podmnogoterostih. Iz definicije sledi, da lahko X lokalno zapišemo kot ničelno množico $n - m$ holomorfnih funkcij $(\phi_{m+1}, \dots, \phi_n)$, kjer je $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ kot v definiciji 3.1. Ker je ϕ biholomorfna na neki odprti okolici U točke p, ima diferencial preslikave $(\phi_{m+1}, \dots, \phi_n)$ maksimalen rang $n - m$ na tej okolici. Tangentni prostor v točki p torej lahko definiramo kot

$$\mathrm{T}_pX = \ker \mathrm{J}_{\mathbb{C}}(\phi_{m+1}, \dots, \phi_n)_p \subset \mathrm{T}_pU \cong \mathbb{C}^m.$$

Zaradi maksimalnosti ranga je to vedno m dimenzionalen kompleksen vektorski prostor, torej izomorfen $\mathbb{C}^m$. Če vektor w zapišemo po bazi T_pU in uporabimo izomorfizem iz trditve 3.13 ter račun iz primera 3.15, vidimo, da je $w \in \ker \mathrm{J}_{\mathbb{C}}(\phi_{m+1}, \dots, \phi_n)_p$ natanko tedaj, ko je derivacija $\partial_w \in \ker \mathrm{d}(\phi_{m+1}, \dots, \phi_n)_p$. S tem smo tudi klasično konstrukcijo tangentnega prostora na podmnogoterostih izenačili z derivacijami. ♢

3.2. **Tangentni sveženj.** Po konstrukciji tangentnega prostora v dani točki na podmnogoterosti X si bomo ogledali še globalno konstrukcijo, tangentni sveženj. Medtem ko je bila naša konstrukcija tangentnega prostora čisto splošna in jo je mogoče uporabiti na poljubni kompleksni mnogoterosti, se bomo v tem razdelku spet bolj osredotočili na specifike podmnogoterosti, ki nam bodo v nadaljevanju najbolj koristile.

Definicija 3.17. Naj bo X podmnogoterost. *Tangentni sveženj* $\mathrm{T}X$ podmnogoterosti X je disjunktna unija tangentnih prostorov po vseh $p \in X$,

$$\mathrm{T}X = \coprod_{p\in X} \mathrm{T}_p X.$$

Oglejmo si kako lahko bolj natančno opišemo tangentni sveženj na podmnogoterostih. Po primeru 3.16 je tangentni prostor v vsaki točki $p \in X$ podprostor v $\mathbb{C}^n$. Tangentni sveženj je torej podmnožica v $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ in jo lahko opremimo z inducirano topologijo. Na tangentnem svežnju imamo tudi naravno projekcijo $\pi : \mathrm{T}X \to X$, podano s predpisom $\pi(p, v) = p$.

Denimo, da je $U \subset \mathbb{C}^n$ odprta podmnožica. Če na U izberemo standardne koordinate, derivacije $\partial/\partial z_1|_p, \dots, \partial/\partial z_n|_p$ razpenjajo T_pU za vsak $p \in U$. Potem je inkluzija $\iota : U \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ biholomorfna preslikava $\iota : U \times \mathbb{C}^n \to \mathrm{T}U$. O holomorfnosti lahko govorimo, saj je preslikava definirana na odprti podmnožici kompleksnega evklidskega prostora. Torej lahko identificiramo $\mathrm{T}U = U \times \mathbb{C}^n$. V tem primeru rečemo, da je sveženj trivialen.

Naj bo X podmnogoterost, $U \subset \mathbb{C}^n$ odprta podmnožica in $\phi : U \to \phi(U)$ biholomorfna preslikava kot v definiciji 3.1. Velja torej

$$\phi(X \cap U) = \mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m} \cap \phi(U).$$

Pišimo $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ in označimo $\tilde{\phi} = (\phi_{m+1}, \dots, \phi_m)$. Zožitev tangentnega svežnja na $X \cap U$ lahko izrazimo kot

$$\mathrm{T}X|_U = \left\{(p, v) \in U \times \mathbb{C}^n \;\middle|\; \tilde{\phi}(p) = 0,\ \mathrm{d}\tilde{\phi}_p(v) = 0\right\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n.$$

Oglejmo si preslikavo $\mathrm{T}\phi : \mathrm{T}U \to \mathrm{T}\phi(U)$, definirano s predpisom

$$\mathrm{T}\phi(p, v) = (\phi(p), \mathrm{d}\phi_p(v)).$$

Preslikava $\mathrm{T}\phi$ je holomorfna (v standardnem smislu, saj je preslikava iz podprostora v $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$), ker je ϕ holomorfna, videli pa smo, da se v koordinatah $\mathrm{d}\phi$ izraža z Jacobijevo preslikavo in je posledično holomorfno odvisen od p in linearen v v. Je tudi bijektivna, saj je ϕ biholomorfna na U. Hkrati pa preslika $\mathrm{T}X|_U$ v množico

$$\phi(X \cap U) \times \left(\mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m}\right) = \left(\phi(U) \cap \left(\mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m}\right)\right) \times \left(\mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m}\right).$$

Ker imamo za vsako točko $p \in X$ ustrezen ϕ, smo s tem pokazali, da je $\mathrm{T}X$ kompleksna podmnogoterost dimenzije $2m$ v $\mathrm{T}\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Torej lahko govorimo o holomorfnih preslikavah iz X v $\mathrm{T}X$ v smislu definicije 3.9.

4. Holomorfna vektorska polja

V tem poglavju se bomo osredotočili na holomorfna vektorska polja na podmnogoterostih v $\mathbb{C}^n$. V splošnem je definicija holomorfnega vektorskega polja na kompleksni podmnogoterosti naslednja.

Definicija 4.1. *Holomorfno vektorsko polje* na kompleksni podmnogoterosti X je holomorfen prerez tangentnega svežnja, torej holomorfna preslikava $v : X \to \mathrm{T}X$, za katero velja, da je $\pi \circ v = \mathrm{id}_X$.

Na začetku bomo predstavili nekaj osnovnih rezultatov o holomorfnih vektorskih poljih in diferencialnih enačbah v $\mathbb{C}^n$ in nato te rezultate prenesli še na podmnogoterosti. V nadaljevanju se bomo osredotočili na kompletna oziroma popolnoma integrabilna vektorska polja in dokazali korespondenco med kompletnimi vektorskimi polji in enoparametričnimi podgrupami v grupi holomorfnih avtomorfizmov. Vseskozi bomo uprabljali tudi interpretacijo vektorskih polj kot derivacij (diferencialnih operatorjev) na funkcijah, ki nam jo omogoči konstrukcija v razdelku 3.1. Glavni referenci za sledeče poglavje bosta [5, str. 30–39] in [4].

4.1. **Vektorska polja na podmnogoterostih.** Oglejmo si najprej vektorska polja na podmnožicah $\mathbb{C}^n$. Če je $U \subset \mathbb{C}^n$ odprta podmnožica, je tangentni sveženj enak produktu $\mathrm{T}U = U \times \mathbb{C}^n$ in iz pogojev sledi, da je vsak holomorfen prerez $v = (v_1, v_2) : U \to \mathrm{T}U = U \times \mathbb{C}^n$ potem oblike $v = (\mathrm{id}_U, v_2)$, kjer je v_2 holomorfna preslikava. Da mora biti v_2 holomorfna preslikava, sledi iz holomorfnosti v, ki je definirana kot holomorfnost vseh koordinatnih funkcij. Vektorska polja na U torej lahko identificiramo s holomorfnimi preslikavami $v = (v_1, \ldots, v_n) : U \to \mathbb{C}^n$. Po izomorfizmu iz trditve 3.13 lahko na vektorska polja gledamo tudi kot na diferencialne operatorje oblike

$$v(f)(z) = \sum_{j=1}^{n} v_j(z) \left.\frac{\partial}{\partial z_j}\right|_z (f). \tag{4}$$

Iz lastnosti operatorjev $\partial/\partial z_j$ sledi, da je tako definiran v $\mathbb{C}$-linearen operator, ki zadošča Leibnizevemu pravilu v obliki

$$v(fg)(z) = f(z)v(g) + v(f)g(z).$$

Rečemo, da je v v tem primeru *derivacija na algebri holomorfnih funkcij* $\mathcal{O}(U)$. Razlika med temi derivacijami in derivacijami definiranimi v 3.11 je v tem, da te delujejo na globalnih funkcijah nad U. *Integralna krivulja* ali *tokovnica* je kompleksna krivulja $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : V \to \mathbb{C}^n$, kjer je $V \subset \mathbb{C}$ odprta podmnožica, za katero velja

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = v_{\gamma(t)}$$

za vsak $t \in V$. Od zdaj naprej bomo označevali $d\gamma/dt$ z $\dot{\gamma}$. Iz verižnega pravila sledi

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\gamma}_j(t) \frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_{j=1}^{n} v_j(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Torej γ zadošča sistemu holomorfnih navadnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(t) &= v_1(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) &= v_1(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)). \end{aligned} \tag{5}$$

Tako lahko formuliramo holomorfni Cauchyjev problem, ki sprašuje po tokovnici polja z danim začetnim pogojem, torej

$$\dot{\gamma}(t) = v_{\gamma(t)} \qquad \gamma(t_0) = z_0, \tag{6}$$

za $t_0 \in \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$. Lokalni obstoj in enoličnost rešitev nam da naslednji izrek.

Izrek 4.2. *Za vsako holomorfno diferencialno enačbo* (6) *in vsako točko* $z_0 \in U$ *obstaja tak polidisk* $\Delta(z_0, \varepsilon) \subset U$ *in takšna odprta okolica* $U' \subset \mathbb{C}$ *točke* t_0*, da rešitev začetnega problema obstaja in je enolična na* $U' \times \Delta(z_0, \varepsilon)$. *Rešitev je holomorfno odvisna od začetne točke* $z_0 \in U$ *in* $t_0 \in U'$.

Dokaz je enak dokazu (realnega) Picardovega izreka z uporabo Banachovega skrčitvenega načela z nekaterimi prilagoditvami za holomorfni primer, ki pa dokaz celo nekoliko poenostavijo. Bralec lahko celoten dokaz z ustreznimi modifikacijami najde v [9, Theorem 1.1, str. 2–5].

Vse te konstrukcije lahko direktno prenesemo tudi na podmnogoterosti z uporabo lokalne parametrizacije. Potem so vektorska polja na X derivacije na algebri holomorfnih funkcij $\mathcal{O}_X(X)$, ki imajo, z uporabo zapisa (3), v sliki lokalne parametrizacije obliko

$$v(f)(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Z uporabo izomorfizma iz trditve 3.13 vidimo, da bo vektorsko polje holomorfno natanko tedaj, ko bodo komponentne funkcije v_j holomorfne. Od tod je očitno, da sta vsota holomorfnih vektorskih polj in produkt polja s holomorfno funkcijo $g \in \mathcal{O}_X(X)$ spet holomorfni vektorski polji. Torej ima množica holomorfnih vektorskih polj, ki jo bomo označili z $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(X)$, strukturo $\mathcal{O}_X(X)$-modula, posebej torej tudi kompleksnega vektorskega prostora. Na njej pa lahko definiramo še eno naravno operacijo, ki je eden izmed poglavitnih razlogov, da na vektorska polja gledamo kot derivacije, imenovano Liejev oklepaj oziroma komutator.

Definicija 4.3. Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor. Operacijo $[\,\cdot,\cdot\,] : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ imenujemo *Liejev oklepaj*, če je bilinearna, antikomutativna, torej velja $[v, w] = -[w, v]$, in zadošča *Jacobijevi identiteti*

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$$

za vse $u, v, w \in \mathcal{V}$. Vektorskemu prostoru opremljenemu z Liejevim oklepajem rečemo *Liejeva algebra*.

Osnovni primer Liejeve algebre je vektorski prostor $n \times n$ matrik nad poljubnim obsegom z matričnim komutatorjem $[A, B] = AB - BA$. Analogen komutator lahko definiramo tudi na $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(X)$ s predpisom

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)). \tag{7}$$

Da je to spet derivacija, nemudoma sledi iz

$$\begin{aligned}
[v, w](fg) &= v(fw(g) + w(f)g) - w(fv(g) + v(f)g) \\
&= f\,[v(w(g)) - w(v(g))] + [v(w(f)) - w(v(f))]\,g \\
&= f[v, w](g) + [v, w](f)g.
\end{aligned}$$

V lokalnih koordinatah se komutator izraža kot

$$[v, w]\,(f) = \sum_{j=1}^{m} (v(w_j) - w(v_j))(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),$$

kjer so v_j in w_j koordinatne funkcije derivacij v in w. Od tod sledi, da je za $v, w \in \mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(X)$ njun komutator $[v, w]$ spet holomorfno vektorsko polje, saj so funkcije

$v(w_j) - w(v_j)$ v tem primeru holomorfne. Torej je $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(X)$ Liejeva algebra. Za konec uvoda v holomorfna vektorska polja si oglejmo še primer, v katerem se srečamo z vektorskimi polji, ki jih bomo kasneje uporabljali v poglavju 6.

Primer 4.4. Naj bo zdaj $X = \{x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})\}$, kot je definirana v primeru 3.5. Oglejmo si vektorska polja, ki jih bomo potrebovali v poglavju 6. Definirajmo

$$v_i = \left(\frac{\partial a}{\partial z_i} + x\frac{\partial b}{\partial z_i}\right)\frac{\partial}{\partial y} + x^2\frac{\partial}{\partial z_i}, \quad w_i = \left(\frac{\partial a}{\partial z_i} + x\frac{\partial b}{\partial z_i}\right)\frac{\partial}{\partial x} + (2xy - b(\mathbf{z}))\frac{\partial}{\partial z_i},$$

za $i = 0, \ldots, n$. Da se bomo izognili notacijskim zmedam, bomo vrednost vektorskega polja v_i v točki p pisali kot $(v_i)_p$. Preverimo, da so to res vektorska polja na X. Očitno so koordinatne funkcije res holomorfne, toda potrebno je preveriti, da so za dano točko $p = (x, y, \mathbf{z})$ vektorska polja res tangentna na podmnogoterost X. Po primeru 3.16 je dovolj videti, da je v vseh točkah $p \in X$, $\mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, f(p) \cdot (v_i)_p = 0$ in $\mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, f(p) \cdot (w_i)_p = 0$, kjer je $f(x, y, \mathbf{z}) = x^2y - a(\mathbf{z}) - xb(\mathbf{z})$. Po izračunu iz primera 3.5 je Jacobijeva matrika enaka

$$\mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, f(x, y, \mathbf{z}) = \left[2xy - b(\mathbf{z}), x^2, -\frac{\partial a}{\partial z_0}(\mathbf{z}) - x\frac{\partial b}{\partial z_0}(\mathbf{z}), \ldots, -\frac{\partial a}{\partial z_n}(\mathbf{z}) - x\frac{\partial b}{\partial z_n}(\mathbf{z})\right].$$

Vektorje $(v_i)_p$ in $(w_i)_p$ lahko (po izomorfizmu iz trditve 3.13) zapišemo kot

$$\begin{aligned}(v_i)_p &= \left(\frac{\partial a}{\partial z_i} + x\frac{\partial b}{\partial z_i}\right)e_2 + x^2e_{i+3}\\ (w_i)_p &= \left(\frac{\partial a}{\partial z_i} + x\frac{\partial b}{\partial z_i}\right)e_1 + (2xy - b(\mathbf{z}))e_{i+3},\end{aligned}$$

kjer so e_i standardna baza za $\mathbb{C}^{n+3}$. Če izračunamo ustrezne produkte, dobimo

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, f(p) \cdot (v_i)_p &= x^2\left(\frac{\partial a}{\partial z_i} + x\frac{\partial b}{\partial z_i}\right) + \left(-\frac{\partial a}{\partial z_0} - x\frac{\partial b}{\partial z_0}\right)x^2 = 0,\\ \mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, f(p) \cdot (w_i)_p &= (2xy - b(\mathbf{z}))\left(\frac{\partial a}{\partial z_i} + x\frac{\partial b}{\partial z_i}\right) + \left(-\frac{\partial a}{\partial z_0} - x\frac{\partial b}{\partial z_0}\right)(2xy - b(\mathbf{z})) = 0.\end{aligned}$$

Ponovimo račune še za vektorsko polje

$$u = a(\mathbf{z})x\frac{\partial}{\partial x} - \left(2a(\mathbf{z})y - xyb(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})^2\right)\frac{\partial}{\partial y},$$

ki ga bomo prav tako srečali v zadnjem poglavju. Z enakimi koraki dobimo

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{\mathbb{C}}\, f(p) \cdot u_p &= (2xy - b(\mathbf{z}))xa(\mathbf{z}) - \left(2a(\mathbf{z})y - xyb(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})^2\right)x^2\\ &= xb(\mathbf{z})\left(x^2y - a(\mathbf{z}) - xb(\mathbf{z})\right) = 0.\end{aligned}$$

Vsa zgornja vektorska polja so torej tangentna na X. $\diamondsuit$

4.2. **Tok vektorskega polja in grupa avtomorfizmov.** Naj bo v holomorfno vektorsko polje na X. Oglejmo si začetni problem

$$\dot\gamma(t) = v_{\gamma(t)},\ \gamma(0) = x$$

za $\gamma : V \to X$ in $x \in X$, kjer je X podmnogoterost in $V \subset \mathbb{C}$ odprta podmnožica. Če enakost prepišemo v lokalnih koordinatah, dobimo

$$\dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^{m}\dot\gamma_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}v_j(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x_j},$$

torej spet rešujemo enak sistem kot je (5) in imamo zagotovljen lokalni obstoj in enoličnost rešitve po izreku 4.2. Označimo rešitev zgornjega začetnega problema s $\phi_t(x)$. Tej preslikavi rečemo *tok vektorskega polja*. Krivulja $t \mapsto \phi_t(x)$ za fiksen $x \in X$ je torej tokovnica, za katero velja $\phi_0(x) = x$. Po eksistenčnem izreku za vsako točko $x_0 \in X$ obstaja okolica $U_1 \subset \mathbb{C}$ točke 0 ter okolica $U_2 \subset X$ točke x_0, da je tok definiran za vse $t \in U_1$ in vse $x \in U_2$, ter je na množici $U_1 \times U_2$ holomorfno odvisen od spremenljivk t in x. Oglejmo si nekaj osnovnih lastnosti tokov.

Trditev 4.5. *Za tok $\phi_t(x)$ velja*

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_s(\phi_t(x)),$$

kjer so t, s in x takšni, da so vsi zgornji izrazi definirani.

Dokaz. Fiksirajmo x in tak $s \in \mathbb{C}$, da $\phi_s(x)$ obstaja. Definirajmo $\gamma(t) = \phi_{t+s}(x)$ in $\sigma(t) = \phi_t(\phi_s(x))$. Posledično je $\gamma(0) = \sigma(0) = \phi_s(x)$. Izračunajmo še odvod v točki $t = 0$. Po definiciji tokov je $\dot{\sigma}(t) = v_{\phi_t(\phi_s(x))} = v_{\sigma(t)}$, za izračun $\dot{\gamma}$ pa uvedimo spremenljivo $u = t + s$ in uporabimo verižno pravilo

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\phi_u}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d\phi_u}{du} = v_{\phi_u(x)} = v_{\gamma(t)}.$$

Torej sta γ in σ tokovnici polja v, ki gresta ob času $t = 0$ skozi isto točko. Iz enoličnosti tokovnic sledi zgornja enakost. □

Ker je $\phi_0(x) = x$, iz trditve neposredno sledi, da je ϕ_t lokalni biholomorfizem, z inverzom ϕ_{-t}. Smiselno vprašanje je, v katerih primerih lahko izpustimo pridevnik lokalni, kar nas vodi v naslednjo definicijo.

Definicija 4.6. Vektorsko polje v je *kompletno*, če tok $\phi_t(x)$ obstaja za vse $x \in X$ in za vse $t \in \mathbb{C}$. Za množico kompletnih vektorskih polj na X bomo uporabljali oznako $\mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$.

Opomba 4.7. Obstajata dve vrsti kompletnih vektorskih polj. To, kar smo definirali zgoraj, natančneje imenujemo $\mathbb{C}$-kompletno vektorsko polje, saj predpostavljamo obstoj za vse kompleksne čase. Lahko bi predpostavko omejili na realne t in bi s tem dobili definicijo $\mathbb{R}$-kompletnega vektorskega polja. Za vektorska polja na $\mathbb{C}^n$ in tudi na širšem razredu mnogoterosti imenovanih *Liouvilleove mnogoterosti* sta presenetljivo obe zahtevi ekvivalentni [3, Corollary 2.2].

Če je ϕ_t tok kompletnega vektorskega polja, je podmnožica

$$\{\phi_t \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$$

enoparametrična podgrupa grupe holomorfnih avtomorfizmov X, kjer s holomorfnimi avtomorfizmi mislimo biholomorfne preslikave $X \to X$. Velja pa tudi obratno. Vsaka enoparametrična grupa holomorfnih avtomorfizmov je tok holomorfnega vektorskega polja, kar nam pove naslednja trditev.

Trditev 4.8. *Naj bo $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{C}\}$ enoparametrična podgrupa grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$. Potem je ϕ_t tok vektorskega polja podanega z*

$$v_x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t(x)$$

za vse $x \in X$.

Dokaz. Ker je $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{C}\}$ enoparametrična podgrupa, imamo enakost

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$$

za vse $t, s \in \mathbb{C}$ ter $x \in X$. Kot prej fiksiramo $s \in \mathbb{C}$ in $x \in X$, uvedemo $u = t + s$ in odvajamo zgornjo enakost v točki $t = 0$

$$\frac{d}{du}\bigg|_{u=s} \phi_u(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_{t+s}(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_t(\phi_s(x)) = v_{\phi_s(x)}.$$

Zadnja enakost izhaja iz zgornje definicije vektorskega polja v. Torej je $u \mapsto \phi_u(x)$ tokovnica vekorskega polja, kar smo želeli pokazati. □

Primer 4.9. Naj bo $v_x = Ax$, kjer je A $n \times n$ matrika. To je vektorsko polje na $\mathbb{C}^n$, ki mu rečemo *linearno vektorsko polje.* Tok je podan z matričnim eksponentom

$$\phi_t(x) = \exp(tA)x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) x.$$

Iz teorije navadnih diferencialnih enačb vemo, da zgornja matrična vrsta konvergira za vse $t \in \mathbb{C}$. Tok torej obstaja za vse $t \in \mathbb{C}$ in tudi za vse $x \in X$. Linearna vektorska polja so torej kompletna. ♢

V povezavi z grupo avtomorfizmov definirajmo še koncept, ki bo kasneje uporaben. Rečemo, da $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ deluje *tranzitivno* na X, če za vsak par točk $x, y \in X$ obstaja tak avtomorfizem $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, da velja $\phi(x) = y$. Če je ϕ_t tok kompletnega vektorskega polja, potem grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno po vsaki tokovnici. Če sta namreč x in y na isti tokovnici, je potem $y = \phi_s(x)$ za neki s in je $\phi_s : X \to X$ avtomorfizem, ki preslika x v y.

Denimo, da je v kompletno vektorsko polje. Zanimajo nas načini, kako iz v konstruiramo druga kompletna vektorska polja. Ker so vektorska polja kot derivacije linearne preslikave, lahko definiramo tudi jedro vektorskega polja kot $\ker v = \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid v(f) = 0\}$. Potem je jedro podalgebra v $\mathcal{O}_X(X)$, saj iz Leibnizevega pravila sledi, da je produkt elementov iz jedra spet v jedru. Eno izmed pomembnih lastnosti elementov jedra vektorskega polja nam da naslednja lema.

Lema 4.10. *Naj bo $v \in \mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$ in $f \in \ker v$. Potem je vektorsko polje w, definirano kot produkt $w_x = f(x)v_x$, kompletno.*

Dokaz. Najprej izračunajmo odvod poljubne $f \in \mathcal{O}_X(X)$ vzdolž tokovnice $\phi_t(x)$ polja v

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(x)) = \mathrm{d}f_{\phi_t(x)} \frac{d}{dt}\phi_t(x) = \mathrm{d}f_{\phi_t(x)} v_{\phi_t(x)} = v(f)(\phi_t(x)). \tag{8}$$

Naj bo zdaj $f \in \ker v$. Iz zgornjega računa sledi, da je odvod f vzdolž tokovnice enak 0, torej je f na tokovnicah konstantna. Posledično to pomeni, da je $f(x) = f(\phi_t(x))$ za vse t. Oglejmo si krivuljo $\phi_{f(x)t}(x)$, za katero trdimo, da je tokovnica polja w. Z uvedbo spremenljivke $u = f(x)t$ in uporabo verižnega pravila izračunamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi_{f(x)t}(x) &= \frac{d}{du}\phi_u(x) \cdot \frac{d}{dt}\,(f(x)t) \\
&= v_{\phi_u(x)} \cdot f(x) \\
&= v_{\phi_u(x)} f(\phi_u(x)) = w_{\phi_u(x)}.
\end{aligned}$$

Torej je $t \mapsto \phi_{f(x)t}(x)$ res tokovnica polja w, ki zaradi kompletnosti v obstaja za vse $t \in \mathbb{C}$ in vse $x \in X$. $\square$

Oglejmo si posledico enakosti (8). Za poljubno funkcijo $f \in \mathcal{O}_X(X)$ lahko preslikavo $t \mapsto f(\phi_t(x))$ razvijemo v Taylorjevo vrsto kot

$$f(\phi_t(x)) = f(x) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\phi_t(x)) \cdot t + \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} f(\phi_t(x)) \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots .$$

Iz (8) sledi, da je drugi člen v zgornji vrsti enak $v(f)(x)$. Če f nadomestimo z $v(f)$, lahko z induktivno uporabo (8) dobimo

$$\frac{d^k}{dt^k} f(\phi_t(x)) = v^k(f)(\phi_t(x)),$$

kjer je $v^k(f) = v(v^{k-1}(f))$. Če to vstavimo v Taylorjevo vrsto, dobimo *Liejevo vrsto* za f vzdolž $\phi_t(x)$

$$f(\phi_t(x)) = f(x) + v(f)(x) \cdot t + v^2(f)(x) \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots + v^k(f)(x)\frac{t^k}{k!} + \cdots . \tag{9}$$

Za gladke funkcije in vektorska polja je zgornji razvoj zgolj formalen, saj nimamo zagotovljene konvergence Taylorjeve vrste. V holomorfnem primeru pa zaradi trditve 2.5 teh problemov nimamo. Iz zgornjega računa sledi še ena posledica. Če izberemo $p \in X$ in tak $f \in \ker v$, da velja $f(p) = 0$, potem bo polje w v točki p enako 0. Tokovnica skozi p bo potem zgolj točka p, torej bo za vsak t avtomorfizem ϕ_t fiksiral točko p. V kolikor f ni identično enaka 0, dobimo netrivialen avtomorfizem $\vartheta \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, za katerega velja $\vartheta(p) = p$. Vsi avtomorfizmi s to lastnostjo tvorijo podgrupo v $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, ki jo označimo z $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)_p$ in ji rečemo *stabilizator* točke p.

Primer 4.11. Če je $\vartheta \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)_p$, je diferencial $\mathrm{d}\vartheta_p : \mathrm{T}_pX \to \mathrm{T}_{\vartheta(p)}X = \mathrm{T}_pX$ avtomorfizem vektorskega prostora T_pX. Imamo torej naravno delovanje grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)_p$ na T_pX, podano z $v_p \mapsto \mathrm{d}\vartheta(v_p)$. Oglejmo si poseben primer tega delovanja, ko je $w \in \mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$ in $f \in \ker w$ takšen, da je $f(p) = 0$. Naj bo ϕ_1 tok polja $\tilde{w} = fw$ ob času 1. Spomimo se, da je $(\mathrm{d}\phi_1)_p(v_p)(g) = v_p(g \circ \phi_1)$. Iz razvoja (9) dobimo

$$g(\phi_1(x)) = g(x) + \tilde{w}(g)(x) + 1/2 \cdot \tilde{w}^2(g)(x) + \cdots .$$

Hiter račun z Leibnizevim pravilom pokaže, da je $\tilde{w}^2(g) = fw(fw(g)) = f^2w^2(g)$, saj je $f \in \ker w$. Naj bo zdaj $v_p \in \mathrm{T}_pX$. Z uporabo Liejeve vrste lahko izračunamo delovanje

$$\begin{aligned} v_p(g \circ \phi_1) &= v_p(g + \tilde{w}(g) + 1/2 \cdot \tilde{w}^2(g) + \cdots) \\ &= v_p(g) + v_p(fw(g)) + 1/2 v_p(f^2w^2(g)) + \cdots \end{aligned}$$

Če izračunamo tretji člen po pravilu produkta za funkciji f in $fw^2(g)$, dobimo

$$v_p(f^2w^2(g)) = f(p) \cdot v_p(fw^2(g)) + v_p(f) \cdot f(p) \cdot w_p(w(g)) = 0,$$

saj je $f(p) = 0$. Enako velja tudi za vse člene višjega reda. Drugi člen v vrsti pa je enak

$$v_p(fw(g)) = f(p) \cdot v_p(w(g)) + v_p(f) \cdot w_p(g) = (v_p(f) \cdot w_p)(g).$$

Zaključimo lahko torej, da $(\mathrm{d}\phi_1)_p$ deluje s predpisom $v_p \mapsto v_p + v_p(f)w_p$. $\diamondsuit$

V razdelku 6 se bomo ukvarjali z vektorskimi polji, ki bodo definirana in kompletna na $\mathbb{C}^n$, mi pa bomo gledali njihove zožitve na podmnogoterost. V tem primeru potrebujemo zagotovilo, da bo zožitev toka na X slikala spet nazaj v X. To nam da naslednja trditev.

Trditev 4.12. *Naj bo $X \subset \mathbb{C}^n$ podmnogoterost in v vektorsko polje na $\mathbb{C}^n$, za katero velja, da je v vsaki točki $x \in X$ vektor $v_x \in \mathrm{T}_x X \subset \mathrm{T}_x \mathbb{C}^n$. Potem za vsak x velja, da je $\phi_t(x) \in X$ za vsak t.*

Dokaz. Označimo s $f : X \to \mathbb{C}^n$ vložitev, ki je holomorfna preslikava. Ker je v tangentno na X, določa na X vektorsko polje w s predpisom $w_x = v_x$, iz česar sledi, da je $\mathrm{d}f_x w_x = v_{f(x)} = v_x$ (ker je diferencial identiteta na podprostoru $\mathrm{T}_x X \subset \mathrm{T}_x \mathbb{C}^n$ za vsak x). Trdimo, da f preslika tokovnice polja w v tokovnice polja v. To sledi iz verižnega pravila, saj je

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(x)) = \mathrm{d}f_{\phi_t(x)} w_{\phi_t(x)} = v_{f(\phi_t(x))},$$

kjer je ϕ_t tok polja w. Posledično je tokovnica polja w hkrati tokovnica polja v, ki je torej enaka $t \mapsto \phi_t(x)$. Zaključimo lahko, da je $\phi_t(x) \in X$. □

Ključna posledica, ki jo velja posebej omeniti, saj bo za nas zelo uporabna, je naslednja. Denimo, da je $v \in \mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$ in je v tangentno na podmnogoterost X v smislu zgornje trditve. Kot vemo je za fiksen $t \in \mathbb{C}$ preslikava $\phi_t \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$. Iz trditve pa sledi, da je ista preslikava zožena na X avtomorfizem podmnogoterosti X, saj je za vsak $x \in X$ tudi $\phi_t(x) \in X$, zožitev bijektivne holomorfne preslikave pa je prav tako bijektivna holomorfna preslikava.

4.3. **Lokalno nilpotentne derivacije.** Oglejmo si še eno družino kompletnih vektorskih polj, ki jo dobimo s povsem algebraičnim kriterijem. V tem razdelku bomo opazovali vektorska polja na $\mathbb{C}^n$, saj bomo lokalno nilpotentne derivacije potrebovali zgolj v tem kontekstu. Sledeče konstrukcije se da seveda posplošiti (na kompleksne afine raznoterosti), toda razvoj potrebne teorije za nas nima neposredne uporabe. V nadaljevanju bomo zaradi krajšega zapisa na vektorska polja vedno gledali kot na derivacije.

Definirajmo najprej nekaj osnovnih konceptov. Rečemo, da je derivacija na $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ *polinomska*, če so koordinatne funkcije polinomi. Eksplicitno je polinomska derivacija oblike $v = \sum_{j=1}^n v_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$, kjer so $v_j \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. To pomeni, da zožitev derivacije na $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ slika spet nazaj v polinome. Torej je v tem primeru v derivacija tudi na algebri polinomov.

Definicija 4.13. Naj bo v polinomska derivacija na $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Rečemo, da je v *lokalno nilpotentna*, če za vsak $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ obstaja tak $n \geq 0$, da velja $v^n(p) = 0$.

Osnovni primeri lokalno nilpotentnih derivacij so kar koordinatne derivacije $\partial/\partial z_j$. Oglejmo si primer, ki bo kasneje pomemben.

Primer 4.14. Naj bodo

$$v_i = \left(\frac{\partial a}{\partial z_i} + x \frac{\partial b}{\partial z_i} \right) \frac{\partial}{\partial y} + x^2 \frac{\partial}{\partial z_i},$$

za $i = 0, \ldots, n$, derivacije na $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+3})$ (definirane v primeru 4.4), kjer sta a in b polinoma. Trdimo, da je za vsak i derivacija v_i lokalno nilpotentna. Za poljuben polinom $f \in \mathbb{C}[x, y, \mathbf{z}]$ je $v_i(f)$ spet polinom in velja $\deg_y v_i(f) = \deg_y(f) - 1$. Stopnja

y v polinomih $f, v_i(f), (v_i)^2(f), \dots$ torej monotono pada. Posledično za vsak $f \in \mathbb{C}[x, y, \mathbf{z}]$ obstaja tak m', da je $g = (v_i)^{m'}(f)$ polinom, neodvisen od spremenljivke y. Torej velja, da je $g \in \mathbb{C}[x, \mathbf{z}]$. Če derivacijo v_i induktivno uporabljamo na g, z enakim razmislekom kot zgoraj ugotovimo, da tokrat stopnja v spremenljivki z_i monotono pada, saj je parcialni odvod po y vedno enak 0. Torej obstaja tak m'', da je $(v_i)^{m''}(g)$ neodvisen od z_i. Posledično je $(v_i)^{m'+m''}(f)$ polinom, neodvisen od y in z_i, torej je očitno element jedra derivacije v_i. Če definiramo $m(f) = m' + m'' + 1$, je $(v_i)^m(f) = 0$. Derivacija v_i je torej res lokalno nilpotentna za vsak $i = 0, \dots, n$. $\diamondsuit$

Za nas ključna lastnost lokalno nilpotentnih derivacij pa je sledeča.

Trditev 4.15. *Naj bo v lokalno nilpotentna derivacija na $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Potem je v kompletna (kot vektorsko polje). Tok lokalno nilpotentne derivacije je enoparametrična podgrupa polinomskih avtomorfizmov.*

Dokaz. Označimo $\phi_{t,j}(z) = z_j \circ \phi_t(z)$, kjer je $\phi_t(z)$ tok derivacije v, ki vsaj lokalno obstaja za vse z. Iz razvoja v Liejevo vrsto (9) dobimo

$$\phi_{t,j}(z) = z_j + v_j(z) \cdot t + v(v_j)(z) \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots,$$

kjer uporabljamo, da je $v(z_j) = v_j(z)$. Če zdaj zapišemo $\phi_t(z) = (\phi_{t,1}(z), \dots, \phi_{t,n}(z))$ in delovanje derivacije na vektorju funkcij definiramo kot delovanje na vsaki komponenti, dobimo Liejevo vrsto toka

$$\phi_t(z) = z + v(z) \cdot t + v^2(z) \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots.$$

Toda $z \mapsto z_j$ je polinom in, ker je v lokalno nilpotentna, obstaja tak n_j, da je $v^{n_j}(z_j) = 0$. Naj bo $m = \max\{n_j | j = 1, \dots, n\}$. Potem lahko tok zapišemo kot

$$\phi_t(z) = z + v(z) \cdot t + v^2(z) \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots + v^{m-1}(z) \frac{t^{m-1}}{(m-1)!},$$

saj so vsi členi višjega reda enaki 0. Posebej to pomeni, da je za fiksen z vsaka komponenta tokovnice polinom v t, torej obstaja za vse $t \in \mathbb{C}$. Če pa fiksiramo $t \in \mathbb{C}$, je $\phi_t(z)$ polinom v spremenljivki z, saj so $v_i(z) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ za vsak $i = 1, \dots, n$. Torej je v tem primeru ϕ_t polinomski avtomorfizem, kar dokaže tudi zadnji del trditve. $\square$

5. Lastnost gostote

V prejšnjem poglavju smo se dotaknili povezave med tokovi vektorskih polj in avtomorfizmi ter opazili, da obstoj veliko kompletnih vektorskih polj na podmnogoterosti X implicira obstoj veliko enoparametričnih podgroup avtomorfizmov. Naravno vprašanje je, kako formalizirati dejstvo, da na kompleksni podmnogoterosti obstaja veliko kompletnih vektorskih polj.

Definicija 5.1. Kompleksna (pod)mnogoterost X ima *lastnost gostote*, če je Liejeva algebra generirana s kompletnimi vektorskimi polji na X gosta v $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(X)$ v topologiji enakomerne konvergence po kompaktih.

Povedano drugače, lastnost gostote pove, da lahko poljubno vektorsko polje enakomerno po kompaktih aproksimiramo s končnimi vsotami in Liejevimi oklepaji kompletnih vektorskih polj. Prostor $\mathbb{C}$ nima lastnosti gostote, saj so vsa kompletna vektorska polja afino linearna, s katerimi ne moremo enakomerno aproksimirati poljubne holomorfne funkcije [5, str. 133]. Za vse $n \geq 2$ pa $\mathbb{C}^n$ ima lastnost gostote, kar je eden izmed ključnih razlogov, zakaj je kompleksna geometrija v več spremenljivkah tako drugačna od geometrije v eni spremenljivki. Na primer, v vsaki zaprti kompleksni podmnogoterosti z lastnostjo gostote obstajajo *Fatou-Bieberbachove* domene. To so prave podmnožice $U \subset X$, na katerih obstaja biholomorfna preslikava $f : U \to X$. Po Riemannovem upodobitvenem izreku take domene ne obstajajo v eni dimenziji, na podmnogoterostih z lastnostjo gostote pa jih lahko konstruiramo s pomočjo iteracije avtomorfizmov s privlačno negibno točko, ki ni globalno privlačna [18, Corollary 4.1]. Takšni avtomorfizmi na podmnogoterostih z dano lastnostjo vedno obstajajo [18, Theorem 0.1]. Dokaz obstoja Fatou-Bieberbachovih domen v $\mathbb{C}^n$ (skupaj z veliko drugimi lastnostmi preslikav na $\mathbb{C}^n$) lahko bralec najde v [16, Theorem 9.1], obsežnejšo diskusijo posledic lastnosti gostote pa v [11] in [5]. V tem poglavju se bomo osredotočili na $\mathbb{C}^n$ in dokazali, da ima lastnost gostote za vsak $n \geq 2$. Pri tem bo naša glavna referenca [5, str. 100–128].

Oglejmo si dve družini vektorskih polj na $\mathbb{C}^n$. Naj bo $\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ linearna preslikava, kjer je $m < n$, in naj bo $v \in \ker \lambda$ enotski vektor. Za poljubno funkcijo $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ definirajmo vektorski polji

$$V_z = f(\lambda z)v, \qquad W_z = f(\lambda z)\langle z, v\rangle v, \tag{10}$$

kjer smo vektor v identificirali s konstantnim vektorskim poljem $\sum_{j=1}^n v_j \partial/\partial z_j$, kar bomo delali tudi v nadaljevanju, $\langle z, v\rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{v}_i$ pa je hermitski skalarni produkt. Tako definirani polji sta kompletni, saj sta njuna tokova enaka

$$\phi_t(z) = z + tf(\lambda z)v, \qquad \psi_t(z) = z + (e^{tf(\lambda z)} - 1)\langle z, v\rangle v,$$

kjer je ϕ_t tok polja V in ψ_t tok polja W. Da sta to res tokova lahko preverimo tako, da ju odvajamo po t in dobljena odvoda ovrednotimo v točki $t = 0$. Preverimo, da je $\psi_t(z)$ tok polja W_z,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_t(z) = \left(f(\lambda z)e^{tf(\lambda z)}\langle z, v\rangle v\right)\Big|_{t=0} = f(\lambda z)\langle z, v\rangle v.$$

Ker je $\psi_0(z) = z$, je torej $\psi_t(z)$ res tok polja W. Za fiksen t je ϕ_t avtomorfizem $\mathbb{C}^n$, ki mu rečemo *aditivni strig*, medtem ko ψ_t rečemo *multiplikativni strig*. Iz tega razloga poljem V in W pravimo tudi *strižna polja*. Če si za λ izberemo projekcijo $\pi(z) = (z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, kjer s streho označimo izpuščeno komponento, ter izberemo $v = e_j$, dobimo vektorski polji

$$V_z = f(\pi(z))\frac{\partial}{\partial z_j}, \qquad W_z = z_j f(\pi(z))\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Strižna vektorska polja bodo ključnega pomena pri dokazu lastnosti gostote. Dokazali bomo namreč, da lahko poljubno polinomsko vektorsko polje zapišemo kot končno vsoto strižnih vektorskih polj. Pred tem pa potrebujemo še nekaj priprave.

Lema 5.2. *Naj bo $\mathbb{C}_k[z_1, \ldots, z_n] \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ vektorski prostor homogenih polinomov stopnje k. Potem obstaja baza prostora $\mathbb{C}_k[z_1, \ldots, z_n]$ sestavljena iz elementov oblike $\lambda_j(z)^k$, kjer so $\lambda_j \in (\mathbb{C}^n)^*$ linearne forme. Povedano drugače, za vsak $p \in \mathbb{C}_k[z_1, \ldots, z_n]$ lahko najdemo take konstante $c_j \in \mathbb{C}$, da lahko p zapišemo kot*

$$p(z) = \sum_{j=0}^{m} c_j \lambda_j (z)^k, \tag{11}$$

kjer je $m = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_k[z_1, \ldots, z_n] - 1$. Elemente λ_j lahko izberemo iz poljubne odprte podmnožice v $(\mathbb{C}^n)^*$.

V dokazu bomo spet uporabljali multiindeksno notacijo, ki smo jo srečali že prej. Za multiindeks $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ definiramo $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$ in $\binom{m}{\nu}$ za vse $|\nu| = m$, ki je multinomski simbol

$$\binom{m}{\nu} = \binom{m}{\nu_1, \ldots, \nu_n} = \frac{m!}{\nu_1! \cdots \nu_n!}.$$

Prav tako bomo uporabljali notacijo z^k za $z \in \mathbb{C}^n$ in $k \in \mathbb{N}$, ki je zgolj potenciranje po komponentah

$$z^k = (z_1, \ldots, z_n)^k = (z_1^k, \ldots, z_n^k).$$

Dokaz. Vsaka linearna forma $\lambda \in (\mathbb{C}^n)^*$ je enolično določena z vektorjem slik baznih vektorjev. Če označimo $v = (\lambda(e_1), \ldots, \lambda(e_n)) = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$, ima λ obliko

$$\lambda(z) = \sum_{i=1}^n v_i z_i.$$

Označimo z $v \cdot z = \sum_{i=1}^n v_i z_i$. Naj bo $v = (v_1, \ldots, v_n)$, kjer so $v_1, \ldots, v_{n-1}$ različna praštevila in $v_n = 1$ in naj bo $m + 1$ število vseh multiindeksov ν, za katere je $|\nu| = k$ (torej je $m + 1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_k[z_1, \ldots, z_n]$). Za dokaz prvega dela leme zadošča, če najdemo takšne konstante $c_j \in \mathbb{C}$, da velja

$$\sum_{j=0}^m c_j (v^j \cdot z)^k = p(z) = \sum_{|\nu|=k} p_\nu z^\nu,$$

kjer smo na desni polinom razvili po standardni bazi homogenih polinomov. Če izračunamo levo stran po multinomskem izreku, dobimo

$$\sum_{j=0}^m c_j \sum_{|\nu|=k} \binom{k}{\nu} v^{j\nu} z^\nu = \sum_{|\nu|=k} \binom{k}{\nu} z^\nu \sum_{j=0}^m c_j (v^\nu)^j = \sum_{|\nu|=k} p_\nu z^\nu.$$

Na koncu dobimo sistem enačb

$$\sum_{j=0}^m c_j (v^\nu)^j = \binom{k}{\nu}^{-1} p_\nu$$

za vse ν, za katere je $|\nu| = k$. Potem je matrika sistema Vandermondova matrika, ki ima neničelno determinanto, če velja $v^\nu \neq v^\mu$ za $\nu \neq \mu$. Denimo, da velja $v^\nu = v^\mu$. Iz definicije v sledi, da sta $v^\nu, v^\mu \in \mathbb{N}$, torej enoličnost praštevilske faktorizacije implicira, da je $\nu_i = \mu_i$ za $i = 1, \ldots, n-1$, ker pa velja $|\nu| = |\mu|$, je tudi $\nu_n = \mu_n$. Determinanta je torej neničelna in torej lahko najdemo ustrezne c_j. Preostane nam še dokaz, da lahko forme res vzamemo iz poljubne odprte podmnožice $(\mathbb{C}^n)^*$. V ta namen naj bo m kot zgoraj in si izberimo $v_1, \ldots, v_{m+1} \in \mathbb{C}^n$. Po istem postopku kot zgoraj lahko vektorjem priredimo matriko M za sistem enačb za c_j. Potem definiramo preslikavo $f : (\mathbb{C}^n)^{m+1} \to \mathbb{C}$ s predpisom $(v_1, \ldots, v_{m+1}) \mapsto \det M$. To je polinomska preslikava, ki po zgornjem sklepu ni konstantno enaka 0 (konstruirali smo točko, v kateri je neničelna). Posledično je komplement nivojnice $f^{-1}(0)$ gosta podmnožica v $(\mathbb{C}^n)^{m+1}$. Če je torej U odprta v $\mathbb{C}^n$, je U^{m+1} prav tako odprta in bo vsebovala točko, v kateri je determinanta sistema neničelna in je sistem posledično rešljiv. Torej iz U lahko izberemo $m + 1$ ustreznih vektorjev. $\square$

Preden dokažemo še zadnji korak na poti k lastnosti gostote, definirajmo še divergenco holomorfnega vektorskega polja.

Definicija 5.3. *Divergenca* holomorfnega polja $v(z) = (v_1(z), \ldots, v_n(z))$ je definirana kot

$$(\operatorname{div} v)(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k(z)}{\partial z_k}.$$

Izračunajmo divergenci zgoraj definiranih strižnih vektorskih polj. Naj bo $\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ linearna preslikava, kjer je $m < n$, in $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \ker \lambda$ normiran vektor. Naj bo $[\lambda_{ij}]$ matrika preslikave λ glede na standardno bazo v obeh prostorih, kjer je $1 \leq i \leq m$ in $1 \leq j \leq n$. Ker sta f in λ holomorfni preslikavi, po lemi 2.9 velja

$$\frac{\partial (f \circ \lambda)}{\partial z_k}(z) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_{lk} \frac{\partial f}{\partial z_l}(\lambda z).$$

Z uporabo te formule lahko izračunamo divergenco strižnega polja V

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} V)(z) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (v_k f(\lambda z))}{\partial z_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(v_k \sum_{l=1}^{m} \lambda_{lk} \frac{\partial f}{\partial z_l}(\lambda z) \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial z_l}(\lambda z) \sum_{k=1}^{n} \lambda_{lk} v_k \right) = 0,
\end{aligned}$$

saj je $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{lk} v_k = 0$ (to je produkt l-te vrstice v matriki $[\lambda_{ij}]$ z vektorjem v) za vsak l, ker je $v \in \ker \lambda$. Torej je $(\operatorname{div} V)(z) = 0$. Za divergenco polja W pa najprej izračunajmo

$$\frac{\partial (f(\lambda z)\langle z, v\rangle)}{\partial z_k} = \frac{\partial f(\lambda z)}{\partial z_k} \cdot \langle z, v\rangle + f(\lambda z) \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{v}_i \right) = \frac{\partial f(\lambda z)}{\partial z_k} \cdot \langle z, v\rangle + f(\lambda z) \bar{v}_k.$$

Zdaj lahko izračunamo divergenco W

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} W)(z) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (v_k f(\lambda z)\langle z, v\rangle)}{\partial z_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} v_k \left(\frac{\partial f(\lambda z)}{\partial z_k} \cdot \langle z, v\rangle + f(\lambda z) \bar{v}_k \right) \\
&= \langle z, v\rangle \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f(\lambda z)}{\partial z_k} + f(\lambda z) \sum_{k=1}^{n} v_k \bar{v}_k = f(\lambda z) \|v\|.
\end{aligned}$$

Da je leva vsota v zadnji vrstici enaka 0, vemo že iz izračuna divergence V. Ker je vektor v normiran, od tod sledi, da je $(\operatorname{div} W)(z) = f(\lambda z)$. Zaradi neodvisnosti $(\operatorname{div} V)(z)$ norme izbranega vektorja v, lahko v definiciji polja V dopustimo tudi, da v ni enotski. Za polje W pa je zahteva po normiranosti ključnega pomena.

Enostavno je videti, da je divergenca linearen operator, kar sledi iz lastnosti parcialnih odvodov. Naslednji računi bodo z uporabo divergence nekoliko elegantnejši.

Trditev 5.4. *Naj bo $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ homogeno polinomsko vektorsko polje stopnje k. Potem obstaja končno mnogo linearnih form $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ na $\mathbb{C}^n$ in končno mnogo* *vektorjev $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}^n$ za katere velja $\lambda_i(v_i) = 0$ in $|v_i| = 1$ za vsak $i \in \{1, \dots, r\}$, da ima P obliko*

$$P(z) = \sum_{i=1}^{r} c_i \lambda_i(z)^k v_i + d_i \lambda_i(z)^{k-1} \langle z, v_i \rangle v_i, \quad c_i, d_i \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ takšne linearne forme, ki zadoščajo (11) za homogene polinome stopnje k in $k-1$. Ker jih po lemi 5.2 lahko izberemo iz poljubne odprte podmnožice $U \subset (\mathbb{C}^n)^*$, lahko predpostavimo, da je $\lambda_i(e_n) = 1$ za vse $i = 1, \dots, m$. To dosežemo tako, da najprej zagotovimo, da $\lambda_i(e_n) \neq 0$ in potem pomnožimo z ustreznim skalarjem. Uporabimo zdaj lemo 5.2 na $\operatorname{div} P$, ki je homogen polinom stopnje $k-1$. Torej za neke $d_i \in \mathbb{C}$ lahko zapišemo $(\operatorname{div} P)(z) = \sum_{i=1}^{m} d_i \lambda_i(z)^{k-1}$. Izberimo normirane $v_i \in \ker \lambda_i$ in definirajmo

$$W_i(z) = d_i \lambda_i(z)^{k-1} \langle z, v_i \rangle v_i.$$

To so ravno strižna polja iz (10), kjer je

$$f(\lambda(z)) = d_i \lambda_i(z)^{k-1}.$$

Za ta polja vemo, da je $(\operatorname{div} W_i)(z) = d_i \lambda_i(z)^{k-1}$. Ker je divergenca linearna, je potem $P - \sum_{i=1}^{m} W_i$ homogen polinom stopnje k z ničelno divergenco. Stopnje k je zato, ker člen $\langle z, v_i \rangle$ zviša stopnjo za 1. Problem smo torej reducirali na to da pokažemo, da lahko vsako homogeno polinomsko vektorsko polje Q z ničelno divergenco zapišemo kot

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{r} c_i \lambda_i(z)^k v_i, \tag{12}$$

kjer so $c_i \in \mathbb{C}$ ter $v_i \in \ker \lambda_i$ kot zgoraj. Pišimo $Q = (q_1, \dots, q_n)$ in uporabimo lemo 5.2 na vsaki komponenti q_j za $j = 1, \dots, n-1$. Dobimo torej $q_j(z) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,j} \lambda_i(z)^k$. Definirajmo nova vektorska polja

$$V_{i,j}(z) = c_{i,j} \lambda_i(z)^k (e_j - \lambda_i(e_j) e_n).$$

Za vsak par i, j je to strižno vektorsko polje z ničelno divergenco, saj je

$$\lambda_i(e_j - \lambda_i(e_j) e_n) = \lambda_i(e_j) - \lambda_i(e_j) \cdot 1 = 0.$$

Torej je $e_j - \lambda_i(e_j) e_n \in \ker \lambda_i$, kot zahtevamo v definiciji strižnih polj. Definirajmo $V = \sum V_{i,j} = (v_1, \dots, v_n)$, kjer seštevamo po $i = 1, \dots, m$ in $j = 1, \dots, n-1$. S tem smo dobili polje V, ki se na prvih $n-1$ komponentah ujema s Q po konstrukciji. Velja torej, da je $Q = V + (q_n - v_n) e_n$, saj smo z zgornjim postopkom vse razlike premaknili v zadnjo komponento. Po predpostavki je $\operatorname{div} Q = 0$, ker pa je V vsota strižnih polj brez divergence, velja tudi $\operatorname{div} V = 0$ Posledično je $\operatorname{div}((q_n - v_n) e_n) = \partial(q_n - v_n)/\partial z_n = 0$. Torej je homogen polinom $q_n - v_n$, stopnje k, neodvisen od z_n. Torej si lahko izberemo dodatne forme λ'_j, ki so odvisne samo od spremenljivke $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ in lahko zapišemo $q_n - v_n = \sum c'_j \lambda'_j(z')^k$. Ko k polju V prištejemo vektorska polja $c'_j \lambda'_j(z')^k e_n$, dobimo obliko (12). □

Vsako polinomsko vektorsko polje P lahko razcepimo kot vsoto homogenih vektorskih polj. Dokazali smo torej, da je vsako polinomsko vektorsko polje na $\mathbb{C}^n$ vsota (kompletnih) strižnih polj oblike $c\lambda(z)^k v$ in $d\lambda(z)^{k-1} \langle z, v \rangle v$. Ker lahko vsako holomorfno vektorsko polje na $\mathbb{C}^n$ enakomerno po kompakih aproksimiramo s polinomskimi vektorskimi polji (vsako koordinatno funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto), smo s tem pokazali, da je zaprtje $\operatorname{Lin}(\mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n))$ enako $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$. Torej je posebej tudi zaprtje $\mathrm{Lie}(\mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n))$ enako $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$, saj je $\mathrm{Lin}(\mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)) \subset \mathrm{Lie}(\mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n))$, $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^n)$ pa je zaprt podprostor prostora zveznih vektorskih polj na $\mathbb{C}^n$ v topologiji enakomerne konvergence po kompaktih [15, Theorem 1.9]. S tem dobimo naslednjo posledico.

Posledica 5.5. *Za vsak $n \geq 2$ ima prostor $\mathbb{C}^n$ lastnost gostote.*

Dokazali smo dejansko nekoliko več. Po trditvi 5.4 je vsako polinomsko vektorsko polje končna vsota kompletnih vektorskih polj. Na podmnogoterostih, kjer lahko smiselno definiramo polinomske preslikave (na primer na ničelnih množicah nesingularnih polinomskih preslikav), je to posebna vrsta lastnosti gostote, imenovana *algebraična lastnost gostote.* Prostor $\mathbb{C}^n$ ima torej algebraično lastnost gostote, če je $n \geq 2$.

6. Lastnost gostote za $x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})$

V tem poglavju bomo obravnavali lastnost gostote za poseben razred mnogoterosti, podan z

$$X = \left\{x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})\right\}, \tag{13}$$

kjer uporabljamo oznako $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ za nek $n \geq 0$, a in b pa sta polinoma v spremenljivki $\mathbf{z}$, ki zadoščata pogojema $\deg_{z_0}(a) \leq 2$ in $\deg_{z_0}(b) \leq 1$. V tem poglavju bo X vedno označeval družino podano z enačbo (13). Kot smo omenili že v uvodu, je razlog za obravnavo tega specifičnega razreda podmnogoterosti v tem, da ta razred vsebuje Koras-Russellovo kubiko

$$C = \left\{x^2y + x + z_0^2 + z_1^3 = 0\right\}.$$

Ključen rezultat, ki ga bomo pokazali v tem poglavju, je, da ima X ob določenih pogojih na a in b lastnost gostote, iz česar bo sledila lastnost gostote za Koras-Russellovo kubiko.

V glavnem razdelku tega poglavja bomo poiskali zadostne pogoje za tranzitivnost delovanja grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ in pokazali, da Koras-Russellova kubika tem pogojem zadostuje. V nadaljevanju bomo dokazali še nekaj trditev, iz katerih bo sledila lastnost gostote za hiperploskev X. V tem poglavju bomo sledili članku [13].

6.1. Tranzitivnost delovanja grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$.

Najprej se bomo osredotočili na vzpostavitev zadostnih pogojev za tranzitivnost delovanja grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, ki bo ključnega pomena za lastnost gostote. Dokazali bomo naslednji izrek.

Izrek 6.1 (Pogoji za tranzitivnost)**.** *Denimo da obstaja tak $k \geq 0$, da (po možni preureditvi spremenljivk z_i) velja:*

(i) $\deg_{z_i}(a) \leq 2$ *in* $\deg_{z_i}(b) \leq 1$ *za vse* $i \leq k$,
(ii) za vse skupne ničle $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_n)$ *polinomov* $a, \frac{\partial a}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial z_k}$ *velja* $b(\mathbf{q}) \neq 0$,
(iii) za vse skupne ničle $\mathbf{q}$ *iz prejšnje točke obstaja tak* $j \leq k$, *da* $\frac{\partial a}{\partial z_j}$ *ni identično enaka* 0 *na množici*

$$\{z_i = q_i | i = 0, \ldots, n, i \neq j\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Potem $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ *deluje tranzitivno na* X.

Oglejmo si najprej nekaj neposrednih posledic pogojev iz izreka. Pogoj (iii) implicira, da je a nekonstanten polinom, posebej ni identično enak 0. Iz primera 3.5 vemo, da so možne singularne točke funkcije $f(x, y, \mathbf{z}) = x^2y - a(\mathbf{z}) - xb(\mathbf{z})$ oblike

$(0,y,\mathbf{q})$, kjer je $\mathbf{q}$ skupna ničla polinomov $\frac{\partial a}{\partial z_0},\dots,\frac{\partial a}{\partial z_k}$ in b. Iz pogoja (ii) sledi, da v točki $\mathbf{q}$, ki je skupna ničla omenjenih polinomov, velja $a(\mathbf{q})\neq 0$. Zaradi enakosti $x^2y=a(\mathbf{q})\neq 0$ potem tudi $x\neq 0$, torej točka $(0,y,\mathbf{q})$ ne leži na hiperploskvi. To pomeni, da je $X=\{x^2y=a(\mathbf{z})+xb(\mathbf{z})\}$, ki zadošča zgornjim pogojem, res kompleksna podmnogoterost, ki je seveda zaprta, saj je praslika točke z zvezno funkcijo.

Od zdaj naprej predpostavimo, da pogoji izreka držijo in naj bo k tak kot je definiran v izreku. Oglejmo si sledeča vektorska polja na X

$$(14)\quad v_i=\left(\frac{\partial a}{\partial z_i}+x\frac{\partial b}{\partial z_i}\right)\frac{\partial}{\partial y}+x^2\frac{\partial}{\partial z_i},\quad w_j=\left(\frac{\partial a}{\partial z_j}+x\frac{\partial b}{\partial z_j}\right)\frac{\partial}{\partial x}+(2xy-b(\mathbf{z}))\frac{\partial}{\partial z_j}$$

za $0\leq i\leq n$ in $0\leq j\leq k$. Definirajmo še

$$u=a(\mathbf{z})x\frac{\partial}{\partial x}-\left(2a(\mathbf{z})y-xyb(\mathbf{z})+b(\mathbf{z})^2\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Kot pove naslednja lema, so ta vektorska polja kompletna.

Lema 6.2. *Za poljubno holomorfno funkcijo $f:\mathbb{C}^{n+1}\to\mathbb{C}$ velja*

(i) $f(\mathbf{z})u\in \mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$,
(ii) $f(x,\widehat{y},z_0,\dots,\widehat{z_i},\dots,z_n)v_i\in \mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$ *in*
(iii) $f(\widehat{x},y,z_0,\dots,\widehat{z_j},\dots,z_n)w_j\in \mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$,

kjer sta $0\leq i\leq n$ in $0\leq j\leq k$. Strešica nad spremenljivko označuje, da tisto spremenljivko izpustimo.

Dokaz. Dokazali bomo da so kompletna kot vektorska polja na $\mathbb{C}^n$. Ker smo v primeru 4.4 videli, da so tangentna na X, so potem tudi v $\mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$. Iz primera 4.14 vidimo, da so vektorska polja v_i lokalno nilpotentna, torej so po trditvi 4.15 kompletna. Koeficienti polja w_i so linearni v x in z_j za vse $0\leq j\leq k$. Komponente v smeri ostalih spremenljivk so namreč enake 0, torej je komponenta toka v tistih smereh samo konstantna. Na primer, y, ki nastopa v komponenti v smeri $\partial/\partial z_j$ je torej samo konstanta. Posledično je enačba toka linearna diferencialna enačba in ima globalno rešitev. Vektorsko polje u je kompletno, ker lahko najprej rešimo linearno enačbo za x in potem enačba za y postane linearna iz česar spet sledi, da imamo globalno rešitev. Da dokončamo dokaz točke (i), si oglejmo še polje $f(\mathbf{z})u$. Vektorsko polje u deluje le v smeri $\partial/\partial x$ in $\partial/\partial y$, zato je $f(\mathbf{z})\in\ker u$. Torej je po lemi 4.10 polje $f(\mathbf{z})u$ kompletno. Z enakim premislekom dokažemo tudi točki (ii) in (iii). □

S temi vektorskimi polji in njihovimi tokovi bomo zdaj konstruirali tranzitivno delovanje grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$. Dokaz bo potekal v treh korakih.

Lema 6.3. *Kompozicije tokov vektorskih polj v_i inducirajo tranzitivno delovanje $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ na vlaknih $\{x=c\neq 0\}\cap X$.*

Dokaz. Oglejmo si podmnogoterost definirano z enačbama $x^2y-a(\mathbf{z})-xb(\mathbf{z})=0$ in $x-c=0$, kjer $c\neq 0$. Jacobijeva matrika ustrezne preslikave je

(15)
$$\mathrm{J}_{\mathbb{C}}\,F(x,y,\mathbf{z})=\begin{bmatrix}2xy-b(\mathbf{z}) & x^2 & -\frac{\partial a}{\partial z_0}(\mathbf{z})-x\frac{\partial b}{\partial z_0}(\mathbf{z}) & \cdots & -\frac{\partial a}{\partial z_n}(\mathbf{z})-x\frac{\partial b}{\partial z_n}(\mathbf{z})\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

Za vsak $c\neq 0$ je ta matrika neizrojena, saj je prva 2×2 poddeterminanta enaka

$$\det\begin{bmatrix}2xy-b(\mathbf{z}) & x^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-x^2\neq 0.$$

Posledično je nivojnica $F^{-1}(0)$, ki je ravno vlakno $Y = X \cap \{x = c\}$, kompleksna podmnogoterost v $\mathbb{C}^n$. Vemo že, da so vektorska polja v_i tangentna na X, hkrati pa nimajo komponente v smeri $\partial/\partial x$, torej so prav tako tangentna na hiperravnine $x = c$. Eksplicitno to pomeni, da je za $p = (c, y, \mathbf{z})$ vektor $(v_i)_p \in \mathrm{T}_pY$. Po lemi 6.2 so vektorska polja kompletna (na $\mathbb{C}^n$), torej z uporabo trditve 4.12 vidimo, da so tokovnice $t \mapsto \phi_t(y)$, za $y \in Y$ vsebovane v Y. Posebej to pomeni, da je za fiksen t avtomorfizem $\phi_t|_Y \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(Y)$. Dokažimo, da lahko s tokovi induciramo tranzitivno delovanje na Y. Poiskati moramo torej avtomorfizem, ki točko p preslika v poljubno drugo točko $q = (c, y', \mathbf{z}') = (c, y', z_0', \ldots, z_n') \in Y$. Za to uporabimo naslednjo ključno opazko. Dovolj je poiskati avtomorfizem ϑ, ki $\mathbf{z}$ preslika v $\mathbf{z}'$, saj bo potem zaradi zgornjih argumentov točka $\vartheta(p) = (c, \widetilde{y}, \mathbf{z}') \in Y$. Toda q in $\vartheta(p)$ se ujemata na prvi in zadnjih $n + 1$ komponentah. Iz enačbe za ploskev pa sledi, da se y' izraža kot

$$y' = \frac{a(\mathbf{z}') + cb(\mathbf{z}')}{c^2}, \tag{16}$$

torej je s parametroma $\mathbf{z}'$ in $c \neq 0$ druga koordinata enolično določena in zato velja $y' = \widetilde{y}$ ter $\vartheta(p) = q$. Da dobimo željen avtomorfizem pa si oglejmo tok polja v_0. Ker vektorsko polje deluje samo v smeri vektorjev $\partial/\partial y$ in $\partial/\partial z_0$ (v vseh ostalih smereh bo tok konstantno enak začetni točki), bo imel tok obliko

$$\phi_t^0(x, y, \mathbf{z}) = (x, \phi_t'(x, y, \mathbf{z}), \phi_t''(x, z_0), z_1, \ldots, z_n).$$

Spreminjali se bosta zgolj druga in tretja koordinata ($i + 3$ koordinata v splošnem primeru). Komponento ϕ_t'' pa lahko eksplicitno izračunamo in je enaka

$$\phi_t''(x, z_0) = z_0 + x^2 t.$$

Če želimo preslikati $z_0 \mapsto z_0'$, si lahko izberemo $\tau_0 = (z_0' - z_0)/x^2$ (gledamo nivojnice skozi točke vstran od $\{x = 0\}$). Potem je $\phi_{\tau_0}|_X \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, ki na tretji komponenti naredi ustrezno zamenjavo. Enake sklepe ponovimo za $i = 1, \ldots, n$. Potem je

$$\vartheta(x, y, \mathbf{z}) = (\phi_{\tau_n}|_X \circ \cdots \circ \phi_{\tau_0}|_X)\,(x, y, \mathbf{z})$$

avtomorfizem iz $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, ki $p \in Y$ preslika v poljuben $q \in Y$. □

Trditev 6.4. *Grupa* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ *deluje tranzitivno na* $X \setminus \{x = 0\}$.

Dokaz. Po zgornji lemi vemo, da $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ deluje tranzitivno na vlaknih $X \cap \{x = c\}$. Preostane nam, da pokažemo, da lahko ta vlakna med sabo povežemo. Natančneje, dokazati moramo, da za poljubna $c, c' \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ obstajata točki $p = (c, y, \mathbf{z})$ in $q = (c', y', \mathbf{z}')$, $p, q \in X$ ter avtomorfizem $\vartheta \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, ki p preslika v q. Za dokaz bomo uporabili tok vektorskega polja u. Spet lahko razpišemo tok ϕ_t polja u po komponentah. V tem primeru je relevantna samo komponenta v smeri koordinate x. Ker prva komponenta polja ni odvisna od y, lahko x eksplicitno izračunamo in je enak $\phi_t'(x, \mathbf{z}) = xe^{a(\mathbf{z})t}$. Ker a ni konstantno enak 0, za poljuben c obstaja vsaj ena takšna točka $p \in X$, da je $a(\mathbf{z}) \neq 0$. Točko p dobimo tako, da izberemo poljuben $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in tak $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$, da velja $a(\mathbf{z}) \neq 0$, nato pa iz enačbe (16) izračunamo ustrezen y, za katerega bo $p = (c, y, \mathbf{z}) \in X$. Posledično lahko definiramo

$$\tau(\mathbf{z}) = \frac{1}{a(\mathbf{z})} \log\left(\frac{c'}{c}\right).$$

Za tako definiran τ je $\vartheta = \phi_\tau|_X \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ avtomorfizem, ki preslika p v q. □

S tem smo pokazali, da je delovanje $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ skoraj tranzitivno. Za preostanek dokaza moramo še povezati točke iz $X \cap \{x = 0\}$ z eno izmed ostalih točk v X.

Dokaz izreka 6.1. Trdimo, da za vsak $p \in \{x = 0\} \cap X$ obstaja tak $\vartheta \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$, da velja $\vartheta(p) \notin \{x = 0\}$. Skupaj s trditvijo 6.4 bomo s tem dobili dokaz izreka. Naj bo zdaj $p = (0, y_0, \mathbf{q}) \in X \cap \{x = 0\}$, kjer je $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_n)$. Iz predpostavk sledi, da vsaj eden izmed polinomov $\partial a/\partial z_0, \ldots, \partial a/\partial z_k$ in b ni enak 0 v točki $\mathbf{q}$, saj bi v nasprotnem primeru iz enačbe za X sledilo, da je tudi $a(\mathbf{q}) = 0$, kar je v nasprotju s predpostavko (ii). Denimo, da je za nek m, kjer je $1 \leq m \leq k$, polinom $\partial a/\partial z_m(\mathbf{q}) \neq 0$. Če množimo Jacobijevo matriko projekcije, ki definira $\{x = 0\}$ (podobno kot v dokazu leme 6.3), z vektorjem $(w_m)_p$, vidimo, da je produkt enak $\mathrm{J}_{\mathbb{C}} F(0, y_0, \mathbf{q}) \cdot (w_m)_p = \partial a/\partial z_m(\mathbf{q})$, kjer je $F(x, y, \mathbf{z}) = x$. Torej tokovnica polja w_m v točki p transverzalno seka vlakno $\{x = 0\}$. To pomeni, da tok polja premakne točko p vstran od $\{x = 0\}$, hkrati pa je tokovnica skozi p vsebovana v X, saj je polje w_m tangentno na X. Dobimo torej avtomorfizem ϑ, za katerega $\vartheta(p) \notin \{x = 0\}$, kar smo želeli pokazati.

Oglejmo si še primer, ko so vsi polinomi $\partial a/\partial z_0, \ldots, \partial a/\partial z_k$ enaki 0 v točki $\mathbf{q}$. Potem $b(\mathbf{z}) \neq 0$ in hkrati iz pogoja (iii) sledi, da obstaja tak j, da $\partial a/\partial z_j$ ni identično enak nič na množici $\{z_i = q_i | i \neq j\}$. Denimo, da je tokovnica polja w_j skozi p, $t \mapsto \phi_t(p)$ vsebovana v $\{x = 0\}$ za vse t. Iz pogoja $b(\mathbf{z}) \neq 0$ sledi, da je vektor $w_j(p)$ različen od nič, torej imamo netrivialno tokovnico skozi p. Hkrati pa vektorsko polje w_j deluje samo v smeri vektorjev $\partial/\partial x$ in $\partial/\partial z_j$, torej tok fiksira koordinate y_0 ter q_i za $i \neq j$ točke p. Potem je ob predpostavki, da je $t \mapsto \phi_t(p) \subset \{x = 0\}$, edina možnost, da je tokovnica enaka krivulji $C = \{x = 0, y = y_0, z_i = q_i | i \neq j\}$. Torej bi morala biti krivulja C v celoti vsebovana v X in hkrati v vsaki točki tangentna na polje w_j. Toda iz pogoja, da $\partial a/\partial z_j$ ni identično enak 0 vzdolž $\{z_i = q_i | i \neq j\}$, dobimo, da obstaja točka $c \in C$, kjer ima polje w_j neničelno komponento v smeri $\partial/\partial x$. To je protislovje, saj imajo tangentni vektorji na krivuljo C vedno ničelno komponento v smeri $\partial/\partial x$. Torej tokovnica $t \mapsto \phi_t(p)$ ni v celoti vsebovana v $\{x = 0\}$, hkrati pa je vsebovana v X. Torej s tokom spet dobimo avtomorfizem, ki točko p premakne iz $\{x = 0\}$. □

Posledica 6.5. *Holomorfni avtomorfizmi delujejo tranzitivno na Koras-Russellovo kubiko* $C = \{xy^2 + x + z_0^2 + z_1^3 = 0\}$.

Dokaz. V tem primeru je $a(z_0, z_1) = -z_0^2 - z_1^3$, torej za k iz pogoja (i) lahko izberemo $k = 0$. Prav tako je $b(z_0, z_1) = -1$, torej je pogoj (ii) trivialno izpolnjen. Velja tudi $\partial a/\partial z_0(z_0, z_1) = -2z_0$, ki ni identično enak nič na krivulji $\{z_1 = 0\}$, saj je na tej krivulji edina ničla zgornjega parcialnega odvoda enaka $(0, 0)$. Posledica torej iz izreka 6.1. □

6.2. **Dokaz lastnosti gostote za $X = \{x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})\}$.** Začnimo z dvema definicijama, ki ju bomo uporabljali v tem razdelku. Z oznako $\mathrm{Lin}\{\ker v \cdot \ker w\}$ bomo označevali linearno ogrinjačo produkta jeder vektorskih polj v in w. To je presek vseh vektorskih podprostorov prostora $\mathcal{O}_X(X)$, ki vsebujejo vse elemente oblike fg, kjer je $f \in \ker v$ in $g \in \ker w$.

Definicija 6.6.

(1) Par vektorskih polj (v, w) je *semikompatibilen par*, če je zaprtje vektorskega prostora $\mathrm{Lin}\{\ker v \cdot \ker w\}$ v topologiji enakomerne konvergence po kompaktih vsebuje kak netrivialen ideal $I \subset \mathcal{O}_X(X)$. Semikompatibilen par je *kompatibilen par*, če obstaja takšna funkcija $h \in \ker w$, da je $v(h) \in \ker v \setminus \{0\}$.

(2) Množica $U \subset \mathrm{T}_p X$, kjer je $p \in X$, je *generirajoča množica*, če orbita elementov iz U za inducirano delovanje $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)_p$ vsebuje kakšno bazo $\mathrm{T}_p X$.

Lemi, ki sledita, služita temu, da bomo lahko na koncu neposredno uporabili enega izmed kriterijev za lastnost gostote na kompleksnih podmnogoterostih. Preden lahko dokažemo še zadnja koraka pri dokazu glavnega izreka, potrebujemo še naslednji rezultat.

Izrek 6.7 (Cartanov razširitveni izrek)**.** *Vsaka globalna holomorfna funkcija na zaprti kompleksni podmnogoterosti v $\mathbb{C}^n$ se razširi do cele funkcije na $\mathbb{C}^n$.*

Dokaz izreka lahko bralec najde v [5, Corollary 2.4.3, str. 53–54], mi pa lahko z njim dokažemo naslednjo lemo.

Lema 6.8. *Naj bodo v_i in w_j, za $0 \leq i \leq n$ in $0 \leq j \leq k$, vektorska polja definirana z enačbo* (14)*. Potem so (v_i, w_j) kompatibilni pari za $i \neq j$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da so pari (v_i, w_j) semikompatibilni. Oglejmo si najprej (v_i, w_j) kot derivacije na $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Očitno $\ker v_i$ vsebuje vse funkcije, ki so neodvisne od spremenljivk y in z_i, ter podobno $\ker w_j$ vsebuje funkcije, ki so neodvisne od x in z_j. Posledično so polinomi $\mathbb{C}[x, y, \mathbf{z}]$ vsebovani v $\mathrm{Lin}\{\ker v_i \cdot \ker w_j\}$, saj lahko vsak polinom zapišemo kot vsoto produktov funkcij ene spremenljivke. Ker lahko vsako funkcijo iz $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ aproksimiramo enakomerno po kompaktih s (Taylorjevimi) polinomi, je zaprtje $\mathrm{Lin}\{\ker v_i \cdot \ker w_j\}$ enako $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Po trditvi 3.8 in izreku 6.7 je množica zožitev celih funkcij na X enaka $\mathcal{O}_X(X)$, torej če gledamo derivacije (v_i, w_j) zožene na $\mathcal{O}_X(X)$, je zaprtje $\mathrm{Lin}\{\ker v_i \cdot \ker w_j\}$ enako $\mathcal{O}_X(X)$ in očitno vsebuje ideal. Da dokažemo, da so pari (v_i, w_j) kompatibilni, moramo poiskati tako funkcijo $h \in \ker w_j$, da bo $v_i(h) \in \ker v_i \setminus 0$. Funkcija, ki ustreza tem pogojem, je $h = z_i$. □

Lema 6.9. *Obstaja točka $p \in X$, za katero je množica, ki vsebuje vektor $(w_0)_p$, generirajoča množica za $\mathrm{T}_p X$.*

Dokaz. Naj bo $p = (x_0, y_0, \mathbf{q})$, kjer je $x_0 \neq 0$ in $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tak, da za fiksen x_0 velja

$$c(\mathbf{q}) = \frac{\partial a}{\partial z_0}(\mathbf{q}) + x_0 \frac{\partial b}{\partial z_0}(\mathbf{q}) \neq 0.$$

Takšnih točk p je veliko, saj lahko izberemo poljuben $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in potem izberemo $\mathbf{q}$ iz komplementa ničelne množice polinoma c. Toda komplement $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{c^{-1}(0)\}$ je gosta podmožica v $\mathbb{C}^{n+1}$, torej v poljubni odprti podmnožici $\mathbb{C}^{n+1}$ lahko najdemo ustrezen $\mathbf{q}$. Za takšna x_0 in $\mathbf{q}$ lahko potem iz enačbe izrazimo še pripadajoč y_0. Oglejmo si delovanje stabilizatorja $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)_p$ na $\mathrm{T}_p X$. Kot smo videli v primeru 4.11, za $\tilde{w} \in \mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X)$ in $f \in \ker \tilde{w}$ dobimo inducirano delovanje $v_p \mapsto v_p + v_p(f)\tilde{w}_p$ na $\mathrm{T}_p X$. Izberimo $\tilde{w}_i = v_i$ in $f_i = x - x_0$ za $i = 0, \ldots, n$. Potem orbita delovanja grupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)_p$ vsebuje vektorje $V_i = (w_0)_p + c(\mathbf{q})(v_i)_p$, ki so očitno neodvisni, saj je komponenta pri z_j neničelna samo pri vektorju V_j. Potem imamo skupaj z vektorjem $(w_0)_p$ točno $n+2$ linearno neodvisnih vektorjev, kar je natanko dimenzija podmnogoterosti X, torej vektorji tvorijo bazo prostora $\mathrm{T}_p X$. □

S tem smo dokazali vse potrebno, da lahko uporabimo naslednji kriterij za lastnost gostote.

Trditev 6.10. *Naj bo X zaprta kompleksna podmnogoterost, na katero grupa avtomorfizmov $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(X)$ deluje tranzitivno. Če obstaja točka p in kompatibilni pari*

(v_i, w_i), *da vektorji* $(w_i)_p$ *tvorijo generirajočo množico za* T_pX, *potem ima* X *lastnost gostote.*

Pravi pomen predpostavk in s tem zgornjih lem se razkrije ob podrobnem pregledu dokaza zgornje trditve. Predpostavka o kompatibilnosti parov implicira, da zaprtje množice $\mathrm{Lie}(\mathrm{CVF}_{\mathrm{hol}}(X))$ vsebuje dovolj velik podmodul modula $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(X)$, predpostavka o generirajoči množici pa zagotavlja, da z omenjenim podmodulom lahko aproksimiramo res vsa vektorska polja iz $\mathrm{VF}_{\mathrm{hol}}(X)$. Toda za dokaz kriterija bi potrebovali obsežno ekspozicijo teorije Steinovih mnogoterosti in ga tukaj ne moremo izpeljati. Bralec ga lahko v celoti lahko najde v [13]. Z uporabo tega kriterija in vseh lastnosti dokazanih v tem poglavju na koncu dobimo centralni izrek tega poglavja.

Izrek 6.11. *Naj bo* $X = \{x^2y = a(\mathbf{z}) + xb(\mathbf{z})\}$, *kjer* a *in* b *zadoščata pogojem izreka 6.1. Potem ima* X *lastnost gostote. Posebej, Koras-Russellova kubika, podana z enačbo* $x^2y + x + z_0^2 + z_1^3 = 0$, *ima lastnost gostote.*

Slovar strokovnih izrazov

density property lastnost gostote
derivation derivacija
generating set generirajoča množica
germ of a function zarodek funkcije
manifold mnogoterost
polydisc polidisk
shear $\sim$ **automorphism** strig oziroma strižni avtomorfizem, posebna vrsta holomorfnih avtomorfizmov, $\sim$ **field** strižno vektorsko polje, glej (10)
submanifold podmnogoterost
tangent $\sim$ **bundle** tangentni sveženj, $\sim$ **space** tangentni prostor

Literatura

[1] E. Andersén, *Volume-preserving automorphisms of* $\mathbb{C}^n$, Complex Var. Elliptic Equations, **14** (1990) 223–235.

[2] E. Andersén in L. Lempert, *On the group of holomorphic automorphisms of* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. **388** (1992) 371–388.

[3] F. Forstnerič, *Actions of* $(\mathbb{R}, +)$ *and* $(\mathbb{C}, +)$ *on complex manifolds*, Math. Zeitschrift, **223** (1996) 123–153.

[4] F. Forstnerič, *Analiza na mnogoterostih*, [ogled 14.7.2016], dostopno na: `www.fmf.uni-lj.si/~forstneric/datoteke/Analiza_na_mnogoterostih.pdf`.

[5] F. Forstnerič, *Stein manifolds and holomorphic mappings: the homotopy principle in complex analysis*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **56**, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 2011.

[6] P. M. Gauthier, *Lectures on several complex variables*, Springer International Publishing, Cham, 2014.

[7] R. C. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables volume II: local theory*, **2**, Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, 1990.

[8] D. Huybrechts, *Complex geometry: an introduction*, Universitext, Springer, Leipzig, 2005.

[9] Y. Ilyashenko in S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate studies in mathematics **86**, American Mathematical Society, Providence, 2008.

[10] S. Kaliman, *Smooth contractible hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$ *and exotic algebraic structures on* $\mathbb{C}^3$, Math. Zeitschrift, **510** (1993) 499–509.

[11] S. Kaliman in F. Kutzschebauch, *On the present state of the Andersen-Lempert theory*, v: Affine Algebraic Geometry: The Russell Festschrift (ur. D. Daigle, R. Ganong in M. Koras), CRM Proc. & Lect. Notes **54**, Amer. Math. Soc., Providence, 2011, str. 85–122.
[12] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **218**, Springer-Verlag, New York, 2012.
[13] M. Leuenberger, *(Volume) Density property of a family of complex manifolds including the Koras-Russell cubic*, Proc. Am. Math. Soc. **144** (2016) 3887–3902.
[14] L. Makar-Limanov, *On the hypersurface $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ in $\mathbb{C}^4$ or a $\mathbb{C}^3$-like threefold which is not $\mathbb{C}^3$*, Isr. J. Math. **96** (1996) 419–429.
[15] R. M. Range, *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Graduate Texts in Mathematics **108**, Springer, New York, 1986.
[16] W. Rudin in J. P. Rosay, *Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$*, Trans. Am. Math. Soc. **310** (1988) 47–86.
[17] D. Varolin, *The density property for complex manifolds and geometric structures*, J. Geom. Anal. **11** (2001) 135–160.
[18] D. Varolin, *The density property for complex manifolds and geometric structures II*, Int. J. Math. **11** (2000) 837–847.
[19] D. Varolin in A. Toth, *Holomorphic diffeomorphisms of complex semisimple Lie groups*, Invent. Math. **139** (2000) 351–369.
[20] M. Zaidenberg, *Lectures on exotic algebraic structures on affine spaces*, [ogled 22.8.2016], dostopno na: `arxiv.org/pdf/math/9801075v2.pdf`.