UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Rebeka Merhar

Dinamika družine preslikav

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, 2014

Kazalo

Dinamika družine preslikav

POVZETEK

V nalogi preučujemo dinamiko družine funkcij v odvisnosti od dveh parametrov, ki določata družino funkcij. Dinamiko družine funkcij obravnavamo za različne vrednosti parametrov. Ugotovimo, da pri različnih vrednostih parametrov dobimo zelo različno dinamiko funkcije. Izkaže se, da je funkcija kaotična pri določenih vrednostih parametrov, če pa te malo spremenimo, ima funkcija privlačen cikel in ni kaotična.

The Dynamics of a Family of One-Dimensional Maps

ABSTRACT

In this work we study the dynamics of a family of one-dimensional functions. The family of one-dimensional functions is determined by two parameters. We analyze the dependence of dynamics of this family of functions on these two parameters. We find that different parameter values give very different dynamics. It turns out that the functon is chaotic under certain conditions on the parameters. If these conditions are slightly changed, the function will have an attractive cycle and will not be chaotic.

Math. Subj. Class. (2010): 37D45, 344C28

Ključne besede: dinamika funkcije, kaos, negibna točka, periodična točka, orbita točke

Keywords: dynamics of a function, chaos, fixed point, periodic point, orbit of a point

1. Uvod

V diplomski nalogi preučujem dinamiko točno določene družine funkcij v odvisnosti od dveh parametrov, ki določata funkcijo. Izkaže se, da ima funkcija za različne vrednosti parametrov različno dinamiko. Predvsem nas zanima, za katere vrednosti parametrov je funkcija kaotična in za katere vrednosti parametrov funkcija ni kaotična. V prvem razdelku se posvetimo definiciji kaosa in njegovemu zgodovinskemu razvoju. Naslednji razdelek je posvečen osnovam dinamike in njenim osnovnim definicijam. Razdelek 4 opisuje družino funkcij, povemo predpis funkcije in opišemo nekaj lastnosti te družine funkcij. Glede na lastnosti parametrov, od katerih je odvisna funkcija, določimo območja, na katerih analiziramo dinamiko družine funkcij. V podrazdelkih razdelka 4 obravnavamo vsako območje posebej. Ugotovimo, da lahko vsako območje obravnavamo s podobno strategijo in izkaže se, da lahko s preprosto analizo določimo dinamiko funkcije. Glavni razlog za obravnavo ravno te družine funkcij je, da je njena analiza preprosta in je zaradi tega dober pedagoški primer za predstavitev kaosa in učenja, kako določati dinamiko funkcij.

2. Definicija kaosa

Teorija kaosa opisuje obnašanje dinamičnih sistemov, ki so občutljivi na začetne pogoje. To pomeni, da majhna napaka v začetnih pogojih, npr. napaka zaokroževanja ali napaka v meritvi, lahko povzroči veliko odstopanje med rezultatom z napako in rezultatom brez napake po določenem času. Zaradi te lastnosti pri takih dinamičnih sistemih ne moremo podati dolgoročnih napovedi. Občutljivost na začetne pogoje se pogosto poimenuje učinek metulja.

Poznamo več različnih definicij kaosa. Naša je povzeta po članku [2] in je tako imenovana Devaneyjeva definicija kaosa.

Definicija 2.1. Funkcija f iz neskončne podmnožice $S \subseteq [0, 1]$ v S je *kaotična*, če je funkcija f topološko tranzitivna in če so periodične točke funkcije f goste v S.

Definicija 2.2. Zvezna funkcija f iz neskončne podmnožice $S \subseteq [0, 1]$ v S je *topološko tranzitivna*, če za vsaka neprazna odprta intervala U, V, ki sekata S, obstaja $n \in \mathbb{N}$, da velja $f^n(U \cap S) \cap (V \cap S) \neq \varnothing$.

Topološka tranzitivnost z drugimi besedami pomeni, da po dovolj velikem številu iteracij funkcije f elementa iz intervala U pridemo poljubno blizu katerikoli točki iz intervala V. Nematematičen primer topološke tranzitivnosti bi bilo mešanje barv ali mešanje tekočin.

Definicija 2.3. Naj bo f zvezna funkcija, ki slika iz $S \subset \mathbb{R}$ nazaj v S. Točka $x \in S$ je *periodična točka* funkcije f, če obstaja tak $n > 0$, da velja $f^n(x) = x$.

Definicija 2.4. Naj bo $S \subseteq [0, 1]$. *Periodične točke so goste v* S, če odprt neprazen interval U, ki vsebuje točko iz S, vsebuje tudi periodično točko.

Tradicionalna definicija kaosa vsebuje še en dodaten pogoj. Spodnji dve definiciji sta vzeti iz [5].

Definicija 2.5. Naj bo $S \subset \mathbb{R}$ množica. Zvezna funkcija $f \colon S \to S$ je *kaotična* na S, če je topološko tranzitivna, periodične točke funkcije f so goste v množici S in če je funkcija občutljiva na začetne pogoje.

Definicija 2.6. Naj bo $S \subset \mathbb{R}$ množica. Funkcija $f\colon S \to S$ je *občutljiva na začetne pogoje*, če obstaja tak $d > 0$, da za katerokoli točko $x \in S$ in katerokoli okolico N točke x obstajata taka $y \in N$ in $n \geq 0$, da velja $|f^n(x) - f^n(y)| > d$.

Z drugimi besedami, če je funkcija občutljiva na začetne podatke, lahko dve točki, ki sta poljubno blizu skupaj, slika tako, da se razdalja med njima povečuje. Torej se majhna napaka pri začetnih podatkih lahko pri iteraciji funkcije povečuje.

Opomba 2.7. V [1] je dokazano, da je funkcija občutljiva na začetne pogoje, če je funkcija topološko tranzitivna in če ima goste periodične točke. Ker občutljivost na začetne pogoje sledi iz topološke tranzitivnosti in gostih periodičnih točk, je v definiciji, ki je povzeta po viru [2], spuščena.

2.1. **Zgodovina razvoja teorije kaosa.** Ta razdelek je povzet po virih [6] in [7]. Teorija kaosa se uporablja na različnih področjih, med drugim tudi v meteorologiji, fiziki, inženirstvu, ekonomiji, biologiji in filozofiji. Veliko sistemov, ki opisujejo naravo, je kaotičnih. Eden izmed takšnih primerov je vreme in ker je vreme kaotično, ga ne moremo dolgoročno napovedati. Z današnjo tehnologijo ga lahko točno napovemo samo za teden dni vnaprej. To je odkril tudi ameriški matematik in meteorolog Edward Lorenz leta 1961. Želel je narediti matematično simulacijo vremena. Poenostavil je fizikalne enačbe, ki so opisovale vremenske pojave in jih pognal v računalniku. Odkril je, da zaradi napake pri zaokroževanju pride do velike razlike med napovedjo vremena, ki jo je naredil računalnik, in dejanskim vremenom. S pomočjo računalniškega modela je odkril, da že majhna sprememba v gibanju zraka povzroči bistveno razliko v napovedi vremena čez nekaj tednov. To ugotovitev je strnil z vprašanjem: "Ali lahko utrip metuljevih kril v Braziliji sproži tornado v Teksasu?". Ta pojav je poimenoval učinek metulja.

Edward Lorenz pa ni bil prvi, ki je opazil kaos. Henri Poincaré je leta 1880 med preučevanjem sistema treh teles odkril, da obstajajo orbite, ki niso periodične in ki se ne približujejo nobeni negibni točki. Jacques Hadamard je leta 1898 objavil študijo o kaotičnem gibanju prostega delca, ki brez trenja drsi po površini s konstantno negativno ukrivljenostjo. Sistem, ki ga je preučeval, se imenuje Hadamardov biljard.

Kasnejše študije teorije kaosa so razvijali George David Birkhoff, Andrej Nikolajevič Kolmogorov, Mary Lucy Cartwright in John Edensor Littlewood ter Stephen Smale. Vse študije, razen pri Smalu, so imele fizikalno motivacijo. Birkhoff je preučeval sistem treh teles, Kolmogorov turbulenco in astronomske probleme, Cartwright in Littlewood pa sta raziskovala radio-inženirstvo. Pri poskusih so odkrili turbulenco pri gibanju tekočin ter neperiodično oscilacijo v radijskih krogih. Takratna teorija teh pojavov ni znala pojasniti.

Teorija kaosa se je razvila v drugi polovici 20. stoletja. Takrat je postalo razvidno, da takratna prevladujoča linearna teorija ne more razložiti nekaterih opažanj pri poskusih.

K razvoju teorije kaosa je pripomogel tudi razvoj računalnikov. Računalniki so namreč omogočili hitrejšo ponavljajočo iteracijo preprostih matematičnih funkcij, ki so potrebne pri računanju za določitev kaosa. Te iteracije so prej morali računati na roko, kar je bilo počasno in nepraktično. Razvoj računalnikov je izkoristil že prej omenjeni Edward Lorenz, ki je na preprostem digitalnem računalniku pognal simulacijo vremena.

Kaos so opazili pri velikem številu poskusov, preden so ga prepoznali in definirali. Na primer, leta 1927 je pri svojih poskusih z oscilatorjem Balthasar van der Pol opazil, da pri nekaterih frekvencah dobi nereden šum. Leta 1961 je študent univerze

Kyoto University, Yoshisuke Ueda, pri eksperimentiranju z analognim računalnikom opazil kaos in ga poimenoval naključno prehoden fenomen. Vendar mu njegov mentor ni dovolil objave rezultatov. Objavljeni so bili šele leta 1970.

Decembra leta 1977 je New York Academy of Science organizirala prvi simpozij na temo kaosa. Simpozija se je udeležil tudi James Alan Yorke, ki je vpeljal izraz kaos v matematiko. Leta 1987 so Pierre Coullet, Charles Tresser in Mitchelle Feigenbaum odkrili splošnost v kaosu. S tem so omogočili uporabo teorije kaosa na različnih področjih.

James Gleick je leta 1987 izdal knjigo z naslovom Chaos: Making a new Science, v kateri je predstavil teorijo kaosa in njegovo zgodovino širši javnosti.

Teorija kaosa je vedno bolj uporabna tudi zaradi cenejših in močnejših računalnikov. Trenutno se uporablja na veliko različnih področjih, med drugim tudi v topologiji, fiziki, biologiji, meteorologiji, astrofiziki, informacijski teoriji in računalniški nevroznanosti.

3. Osnove dinamike

Razdelek je povzet po [8]. Z matematičnim modeliranjem želimo opisati naravne in družbene procese. Te procese pretvorimo v dinamične sisteme. Dinamični sistemi so skupine predmetov ali bitij v medsebojnem odnosu oz. medsebojni odvisnosti. Bolj natančno, dinamični sistem je matematični opis nekega fiksnega pravila, ki opisuje položaj točke v odvisnosti od časa. Ob katerem koli času je dinamični sistem v nekem stanju, ki ga podaja neki vektor. Sisteme delimo na deterministične in stohastične. Obnašanje pri stohastičnih sistemih je naključno. Prihodnja stanja stohastičnega sistema niso določena s predhodnimi stanji tega istega sistema. Primer stohastičnega sistema je zaporedje grbov in cifer, če bi metali pošten kovanec. Nasprotno od stohastičnega sistema so prihodnja stanja determinističnega sistema določena s predhodnimi stanji. Pri determinističnih sistemih lahko vsaj v nekaterih primerih napovemo, v kakšnem stanju bodo dinamični sistemi v prihodnosti. Kaotični sistemi so tudi deterministični sistemi, saj so odvisni od začetnih pogojev.

Pravilo evolucije dinamičnega sistema je fiksno pravilo, ki opisuje, kako bodo prihodnja stanja izvirala iz trenutnega stanja. Pravilo je deterministično, če za dani časovni interval iz trenutnega stanja sledi samo eno prihodnje stanje.

Sisteme delimo po njihovi dinamiki. Z dinamiko si pomagamo, da lahko iz nekih začetnih podatkov, ki jih imamo o sistemu, napovemo, kako se bo ta sistem obnašal v prihodnosti. Določitev dinamike funkcije f pomeni, da opišemo orbite vseh točk v definicijskem območju funkcije f. Definicija je vzeta iz dela [2].

Definicija 3.1. Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ množica in naj bo $f\colon A \to A$ funkcija. *Orbita točke x* je množica točk $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x))), \ldots$ Točka x je *periodična*, če obstaja tak $n > 0$, da velja $f^n(x) = x$. Najmanjši tak n, za katerega to velja, se imenuje *perioda x* in orbito te točke poimenujemo *cikel z dolžino n.*

Definicija je vzeta iz vira [3, poglavje 1.3] in v tem delu ima oznako 3.2.

Definicija 3.2. Točka x je *negibna* točka funkcije f, če velja $f(x) = x$.

Naslednji definiciji sta povzeti po [4].

Definicija 3.3. Naj bo množica $A \subset \mathbb{R}$ in naj bo $f\colon A \to A$ funkcija. Naj bo p negibna točka funkcije f. Potem je točka p *odbojna točka*, če za neki $\delta > 0$

in za vsak $x \in A \cap (p-\delta, p+\delta)$, $x \neq p$, obstaja vsaj eno število n, da velja $f^n(x) \notin (p-\delta, p+\delta)$. Z drugimi besedami, p je odbojna točka, ko za neki $\delta > 0$ orbita vsake točke $x \in A \cap (p-\delta, p+\delta)$ ne ostane v $(p-\delta, p+\delta)$.

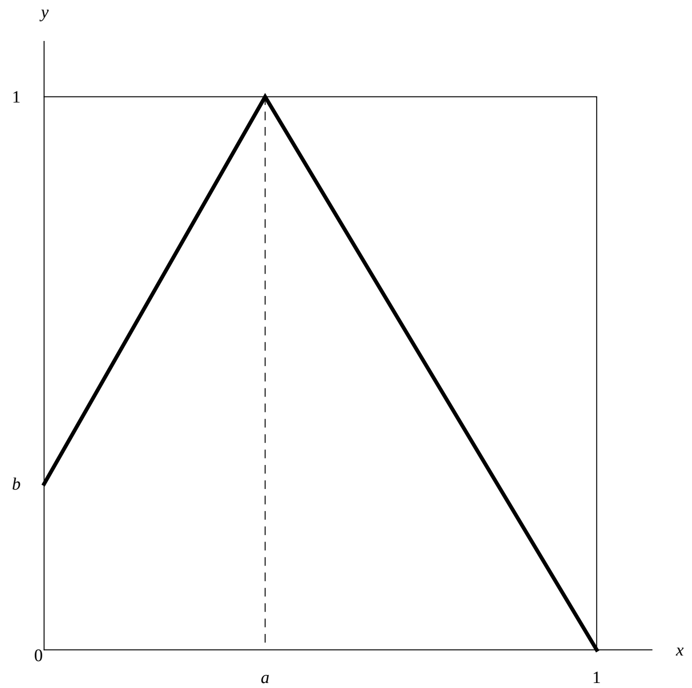
Definicija 3.4. Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ množica, $f \colon A \to A$ funkcija in naj bo p negibna točka funkcije f. Točka p *privlači* točko $x \in A$, če velja $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$.

4. Dinamika družine funkcij

Celoten razdelek je povzet po [2], ki je tudi osrednji vir naloge. V diplomski nalogi bom obravnavala dinamiko dvoparametrične družine funkcij. Parameter a zavzema vrednosti iz intervala $(0,1)$, parameter b pa iz intervala $[0,1]$. Predpis te družine funkcij je

$$f(x) = \begin{cases} b + \frac{1-b}{a}x & \text{za } 0 \leq x < a, \\ \frac{1-x}{1-a} & \text{za } a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

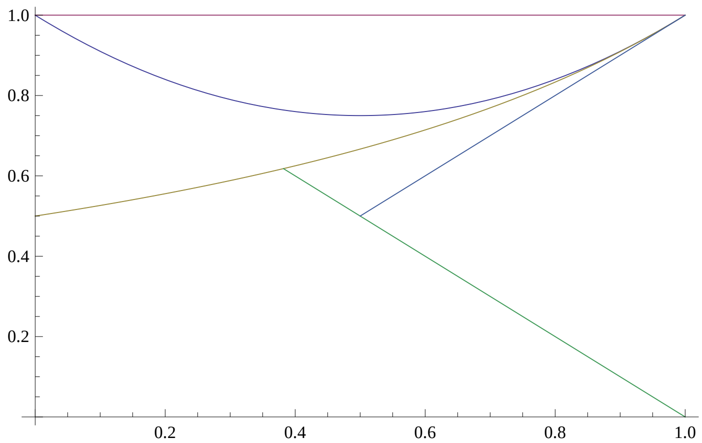
Funkcije te družine slikajo iz enotskega intervala spet nazaj v enotski interval za podana parametra a in b. Grafi, ki jih bom obravnavala, so sestavljeni iz dveh daljic, ene naraščajoče in druge padajoče. Daljici se stikata v točki $(a,1)$. Naraščajoča daljica seka ordinatno os v točki $(0,b)$, padajoča daljica pa seka abscisno os v točki $(1,0)$.



Slika 1. Primer funkcije $f(x)$ za vrednosti $a = 0.4$ in $b = 0.3$.

Ta družina funkcij ima natanko eno negibno točko in sicer $f(1/(2-a)) = 1/(2-a)$. Negibno točko bomo označili s $c = 1/(2-a)$. Negibna točka je odbojna, ker je absolutna vrednost naklona funkcije f v bližini negibne točke večja od 1. Ker je negibna točka odbojna, se točke v njeni bližini slikajo s funkcijo f stran od negibne točke.

Razlog za analiziranje ravno te družine funkcij je, da za različne vrednosti parametrov a in b dobimo zelo različne dinamike. Funkcija je tudi dober pedagoški primer, saj lahko že s preprosto analizo določimo njeno dinamiko. Dinamiko funkcij bomo obravnavali glede na različne vrednosti parametrov a in b. Parametra a in b interpretiramo kot koordinati točke v enotskem kvadratu v ravnini. Kvadrat razdelimo na različna območja, kot prikazuje slika 2. Vsako območje določa neko poddružino funkcij, ki ima podobno dinamiko. Ker imajo podobno dinamiko, lahko dinamiko funkcije f na vsakem območju posebej analiziramo s podobno strategijo.



SLIKA 2. Slika prikazuje posamezna področja, ki jih preučujemo.

Določitev dinamike funkcije f pomeni, da opišemo orbite vseh točk iz definicijskega območja funkcije f. Orbito točke x določimo tako, da poiščemo vrednosti $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$ ... Najprej točko x iz definicijskega območja funkcije f slikamo s f, da dobimo $f(x)$. Točko $(x, f(x))$ dobimo tako, da potegnemo navpično premico iz točke $(x, 0)$. Presečišče grafa in navpične premice nam da točko $(x, f(x))$. Od točke $(x, f(x))$ potegnemo vodoravno premico do simetrale lihih kvadrantov, da dobimo točko $(f(x), f(x))$. Če to točko preslikamo na x-os, dobimo $f(x)$, ki je v orbiti točke x. Sedaj želimo $f(x)$ slikati s f, da dobimo $f^2(x)$. Iz točke $(f(x), f(x))$ potegnemo navpično premico do grafa. Tam, kjer se navpičnica in graf sekata, dobimo $(f(x), f^2(x))$. Od te točke spet potegnemo vodoravno premico do simetrale lihih kvadrantov, da dobimo točko $(f^2(x), f^2(x))$. Spet to točko slikamo na absciso, da dobimo $f^2(x)$, ki je v orbiti točke. In spet od točke $(f^2(x), f^2(x))$ potegnemo navpično premico, da dobimo točko $(f^2(x), f^3(x))$. Postopek ponavljamo in tako opišemo dinamiko funkcije f, kar prikazuje slika 3.

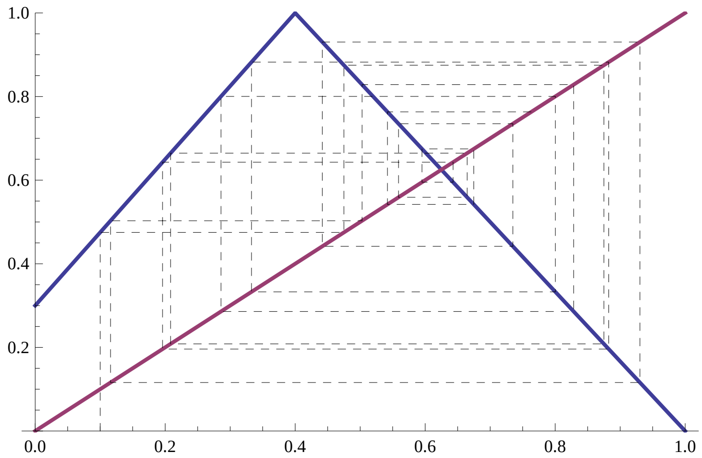
Pri analizi dinamike funkcije f bomo potrebovali naslednje neenakosti: $1-a+a^2 > a$, $a < c = 1/(2-a)$ ter $c < 1-a+a^2$.

Lema 4.1. *Za $a \in (0,1)$ in $c = 1/(2-a)$ veljajo naslednje neenakosti: $1-a+a^2 > a$, $a < c$ ter $c < 1-a+a^2$.*

Dokaz. Najprej dokažimo, da velja $1 - a + a^2 > a$. Z operacijami, ki ohranjajo množico rešitev, dobimo:

$$\begin{aligned} 1 - a + a^2 &> a \\ 1 - 2a + a^2 &> 0 \\ (1-a)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Ker je $(1-a)^2 > 0$ za vse $a \in (0,1)$, neenakost $1 - a + a^2 > a$ velja.



SLIKA 3. Dinamika funkcije f za vrednosti $a = 0.4$ in $b = 0.3$.

Nadalje pokažimo, da velja $a < c = 1/(2-a)$. Z operacijami, ki ohranjajo množico rešitev, dobimo:

$$\begin{aligned} a &< 1/(2-a) \\ a(2-a) &< 1 \\ 2a - a^2 - 1 &< 0 \\ 0 &< (a-1)^2. \end{aligned}$$

Neenakost $(1-a)^2 > 0$ velja in zato velja tudi neenakost $a < c$.

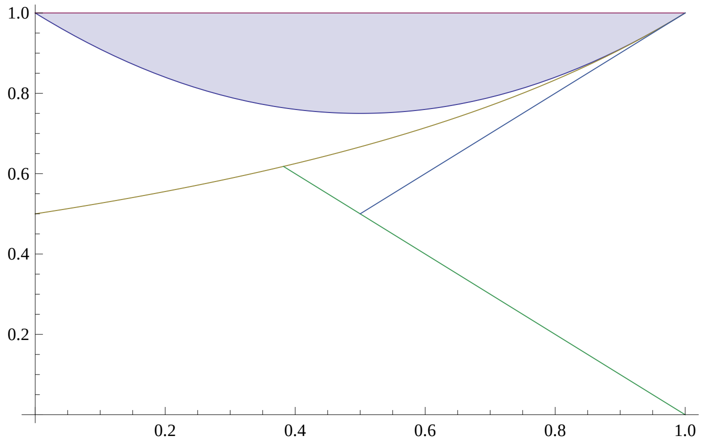
Pokažimo še, da velja $c < 1 - a + a^2$. Spet z operacijami, ki ohranjajo množico rešitev, dobimo:

$$\begin{aligned} 1/(2-a) &< 1 - a + a^2 \\ 1 &< (1-a+a^2)(2-a) \\ 0 &< 1 - 3a + 3a^2 - a^3 \\ 0 &< (1-a)^3. \end{aligned}$$

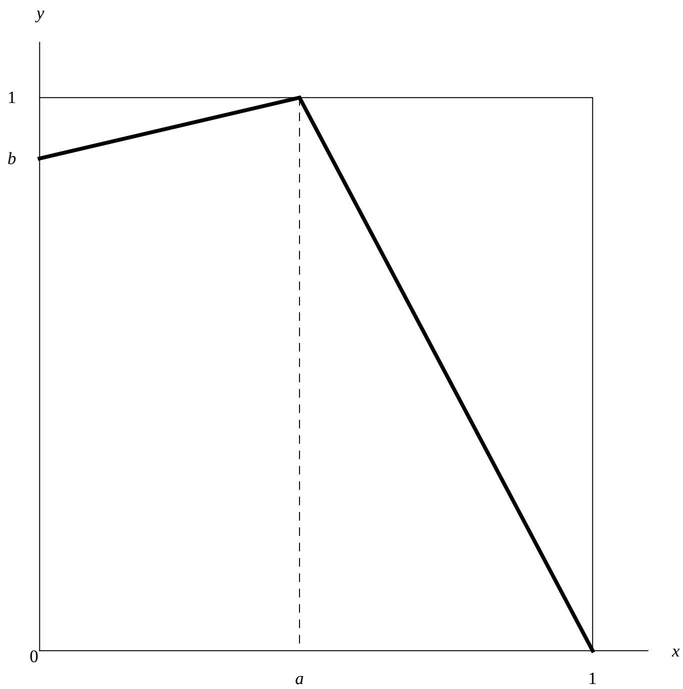
Neenakost $(1-a)^3 > 0$ velja za vse $a \in (0,1)$ in posledično velja tudi neenakost $c < 1 - a + a^2$. $\square$

Intervala I in J, ki se pojavljata v nalogi, naj bosta zaprta in naj vsebujeta več kot samo eno točko.

4.1. **Nekaotična dinamika čnimi cikli in brez privlačnih ciklov.** V tem razdelku določamo dinamiko funkcij, za katere velja pogoj $b \geq 1 - a + a^2$. Najprej bomo obravnavali območje, za katero velja $b > 1 - a + a^2$. Iz predpisa funkcije f izračunamo, da je $f(0) = b$ in $f(a) = 1$, kar nam da $f([0,a]) \subset [b,1]$. Smo na območju, kjer velja $b > 1 - a + a^2$ in iz tega sledi $[b,1] \subseteq [1-a+a^2, 1]$. Torej smo dobili, da velja $f([0,a]) \subset [b,1] \subseteq [1-a+a^2,1]$. Ko na neenakosti $b > 1 - a + a^2$ uporabimo funkcijo f, ki je na območju $b > 1 - a + a^2 > a$ padajoča, dobimo $f(b) < f(1-a+a^2) = a$. Iz česar vidimo, da je $f(b) < a$. Sklepamo lahko, da je $f^2([0,a]) = f([b,1]) = [0, f(b)] \subset [0,a]$. Dolžino intervala I označujemo z $|I|$. Vemo, da je velikost naklona linearne funkcije g na intervalu I enaka $|g(I)|/|I|$. Funkcija f je linearna tako na intervalu $[0,a]$, kot tudi na intervalu $[a,1]$, zato je f^2 linearna na celem $[0,a]$. Če je I neki interval in velja $I \subset [0,a]$, potem lahko izračunamo



SLIKA 4. Slika prikazuje območje, kjer je $b > 1 - a + a^2$.



SLIKA 5. Primer funkcije f za vrednosti $a = 0.47$ in $b = 0.89$, ki zadošča pogoju $b > 1 - a + a^2$.

dolžino intervala $f^2(I)$. Funkcija f^2 je linearna na $[0, a]$, torej bo dolžina slike intervala I enaka dolžini intervala I, pomnoženi z velikostjo naklona funkcije f^2. Že prej smo izračunali, da je $f^2([0, a]) = [0, f(b)]$, torej je $|f^2([0, a])| = f(b) = f(f(0))$. Torej $|f^2(I)| = (f^2(0)/a)|I|$. Ker je $f(b) < a$, je faktor $f^2(0)/a < 1$ in sledi, da je $|f^2(I)| = f^2(0)/a|I| < |I|$. Uporabimo Banachovo skrčitveno načelo, ki pravi, da ima vsaka skrčitev na polnem metričnem prostoru natanko eno negibno točko. V našem primeru je metričen prostor $[0, a]$ z običajno metriko, ki je poln, skrčitev pa je funkcija f^2. Torej obstaja točka $x \in [0, a]$, da velja $f^2(x) = x$ in za vsak $y \in [0, a]$, $y \neq x$ velja

$$|f^2(y) - f^2(x)| = \frac{f^2(0)}{a}|y - x| < |y - x|.$$

Iz te neenakost sledi, da je cikel $\{x, f(x)\}$ dolžine 2 za funkcijo f privlačen na intervalu $[0, a]$. Sedaj pokažimo, da je cikel z dolžino 2 privlačen na intervalu $[0, 1]$. Pokazati še moramo, da orbita katerekoli točke iz $[0, 1]$ enkrat vstopi v interval $[0, a]$. Če to pokažemo, potem lahko zaključimo, da se vsaka točka iz $[0, 1]$ na tem območju približuje ciklu $\{x, f(x)\}$. Predpostavimo, da je $y \in (a, 1]$. Recimo, da je $f^i(y) > a$ za vsak $0 \leq i < k$. Zanima nas, kaj mora veljati za k, da bo veljalo $f^k(y) < a$. Po definiciji funkcije f lahko izračunamo, da je

$$\begin{aligned}
f(y) &= \frac{1-y}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{y}{1-a}, \\
f^2(y) &= \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-a} - \frac{y}{1-a}\right) = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{y}{(1-a)^2}, \\
&\vdots \\
f^k(y) &= \frac{1}{1-a}\left(1 - \frac{1}{1-a} + \frac{1}{(1-a)^2} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(1-a)^{k-1}} + (-1)^k \frac{y}{(1-a)^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$

Torej sledi, da je $f^k(y) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1-(-\frac{1}{1-a})^k}{1+\frac{1}{1-a}} + (-1)^k \frac{y}{(1-a)^{k-1}}\right)$ in zanima nas, kdaj je $f^k(y) < a$. Sledi, da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-a}\left(\frac{1-(-\frac{1}{1-a})^k}{1+\frac{1}{1-a}} + (-1)^k \frac{y}{(1-a)^{k-1}}\right) &< a \\
\frac{1-(-1)^k(\frac{1}{1-a})^k}{2-a} + (-1)^k \frac{y}{(1-a)^k} &< a \\
(-1)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^k \left(y - \frac{1}{2-a}\right) &< a - \frac{1}{2-a}.
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je $1/(2-a) = c$ in zapišemo

$$\begin{aligned}
(-1)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^k (y-c) &< -\frac{(1-a)^2}{2-a} \\
(-1)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^k (c-y) &> \frac{(1-a)^2}{2-a}.
\end{aligned}$$

Obravnavamo dva primera in sicer, če je $y > c$ ter če je $y < c$. V primeru, ko je $y < c$, je $c - y$ pozitivno število. Ker je $(1-a)^2/(2-a)$ tudi pozitivno število, sledi, da mora biti k sod, da bo neenakost držala. Torej sledi, da je

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-a}\right)^k (c-y) &> \frac{(1-a)^2}{2-a} \\
\left(\frac{1}{1-a}\right)^k &> \frac{(1-a)^2}{(2-a)(c-y)}.
\end{aligned}$$

Ker je $a \in (0, 1)$, je število $1 - a < 1$ in je posledično ulomek $1/(1-a) > 1$. Torej, če število k povečujemo, se tudi število $(1/(1-a))^k$ povečuje. Izraz $(1-a)^2/((2-a)(c-y))$ je fiksno število in torej lahko najdemo dovolj veliko število k, da bo neenakost $(\frac{1}{1-a})^k > \frac{(1-a)^2}{(2-a)(c-y)}$ veljala.

Če je $y > c$, potem je $c - y$ negativno število in po enakem razmisleku kot v prejšnjem primeru mora biti k liho število, da bo neenakost držala. Če je k lih, sledi, da je

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{1-a}\right)^k (c-y) &> \frac{(1-a)^2}{2-a} \\ \left(\frac{1}{1-a}\right)^k (y-c) &> \frac{(1-a)^2}{2-a} \\ \left(\frac{1}{1-a}\right)^k &> \frac{(1-a)^2}{(2-a)(y-c)}. \end{aligned}$$

Spet naredimo enak razmislek kot prej in spet lahko najdemo dovolj veliko število k, da bo neenakost veljala. Tako v primeru, ko je $c < y$, kot tudi v primeru $c > y$, smo našli tako število k, za katero velja $f^k(y) < a$. Od tod sledi, da orbita katerekoli točke iz intervala $[0, 1]$, razen negibne točke c, enkrat vstopi v interval $[0, a]$. Torej funkcija f na tem območju ni kaotična. Vidimo, da se orbita vsake točke iz intervala $[0, 1]$, razen negibne točke, približuje ciklu dolžine 2.

Posebej obravnavamo enakost $b = 1 - a + a^2$, ki določa spodnjo mejo našega območja. Če enakost drži, potem je $f(b) = f(1-a+a^2) = (1-1+a-a^2)/(1-a) = a$ in nadalje je $f^2([0, a]) = f([b, 1]) = [f(1), f(b)] = [0, a]$.

Za vsak $x \in [0, a]$ bomo izračunali $f^2(x)$, pri čemer bomo uporabili enakost $b = 1 - a + a^2$. Upoštevali bomo, da velja $1 - a + a^2 > a$ in $(1 - a)x > 0$, iz česar bo sledilo, da je $1 - a + a^2 + (1 - a)x > a$. Nato bomo po definiciji funkcije f izračunali vrednost$f(1 - a + a^2 + (1 - a)x)$.

Za vsak $x \in [0, a]$ lahko torej izračunamo

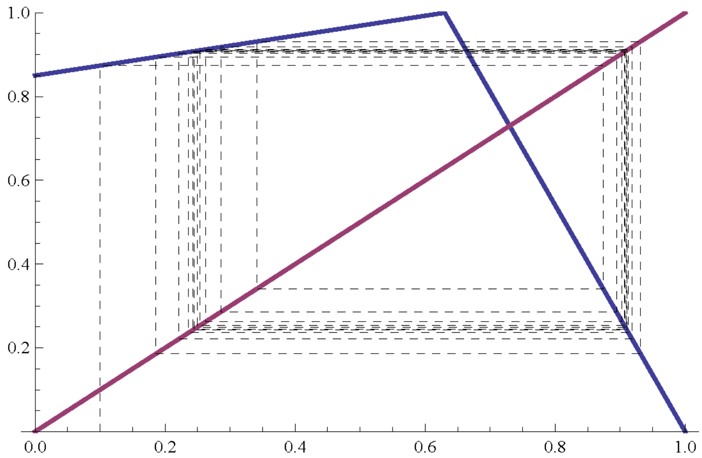
$$\begin{aligned} f^2(x) = f(f(x)) &= f\left(b + \frac{1-b}{a}x\right) \\ &= f(1 - a + a^2 + (1 - a)x) \\ &= \frac{1 - (1 - a + a^2 + (1 - a)x)}{1 - a} \\ &= a - x, \end{aligned}$$

Če $a - x$ še enkrat slikamo s funkcijo f^2 in upoštevamo, da je $a - x$ manjše od a, da je izraz $1 - a + a^2 > a$ in da je $(1 - a)(a - x) > 0$, vidimo, da je izraz $1 - a + a^2 + (1 - a)(1 - x) > a$. Torej, če $a - x$ še enkrat slikamo s f^2 dobimo

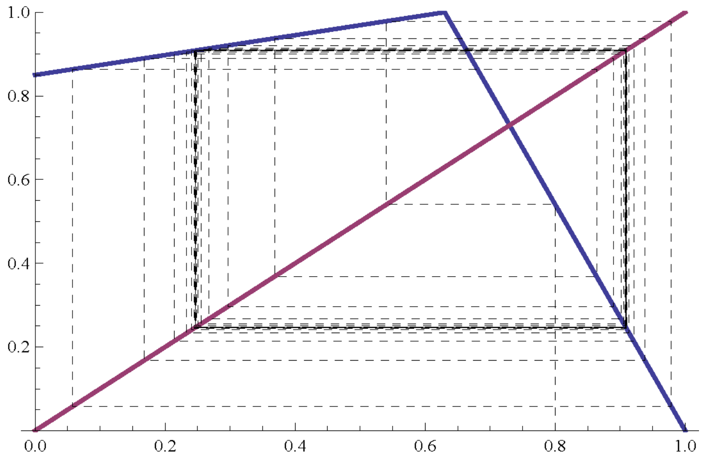
$$\begin{aligned} f^2(a-x) = f(f(a-x)) &= f(1 - a + a^2 + \frac{1-1+a+a^2}{a}(a-x)) \\ &= f(1 - a + a^2 + (1 - a)(a - x)) \\ &= \frac{1 - (1 - a + a^2 + (1 - a)(a - x))}{1 - a} \\ &= x. \end{aligned}$$

Dobili smo, da je $f^4(x) = x$ in tako pokazali, da ima vsak $x \in [0, a]$ periodo 4.

4.2. **Območja, kjer je $b < c$.** Območje $b < c$ razdelimo, kot je razvidno iz slike 8, še na dve podpodročji. Vsako od teh podpodročij obravnavamo posebej. V tem

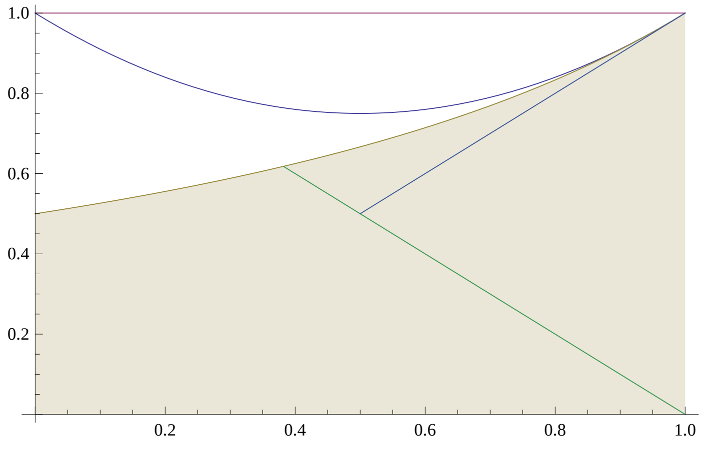


Slika 6. Slika prikazuje primer funkcije s privlačnim ciklom dolžine 2.

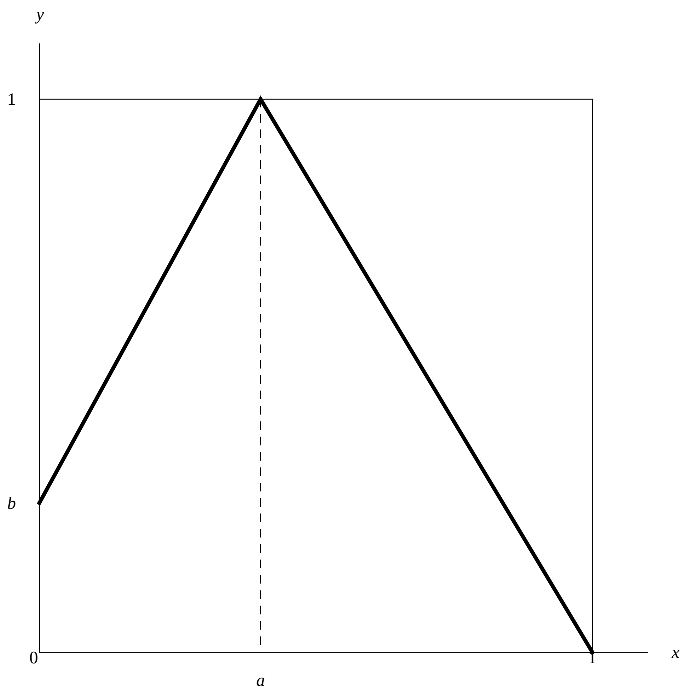


Slika 7. Primer funkcije s privlačnim ciklom dolžine 2 za $x_0 > a$.

razdelku bomo določili nekaj posledic pogoja $b < c$. V vsakem območju, ki zadošča temu pogoju, obstaja interval, na katerem je funkcija f kaotična.



Slika 8. Slika prikazuje območje, kjer velja pogoj $b < c$.



SLIKA 9. Primer funkcije f za vrednosti $a = 0.4$ in $b = 0.27$, ki zadošča pogoju $b < c$.

Trditev 4.2. *Naj bo $b < c$. Če je c element intervala $I \subset [0,1]$, potem obstaja tak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da velja $f^n(I) = [0,1]$.*

Dokaz. Najprej bomo dokazali, da obstaja $m \geq 0$, za katerega velja $1 \in f^m(I)$. Torej, da velja $[c,1] \subset f^m(I)$. Obstoj takega števila m bomo dokazali tako, da bomo obravnavali tri različne možnosti: če je $1 \in I$, če je $a \in I$ ter če je $I \subset (a,1)$. Če je $1 \in I$, potem je $m = 0$ in smo dokazali obstoj takega m. Če je $a \in I$, potem velja $f(a) = (1-a)/(1-a) = 1$. Torej $1 \in f(I)$, $m = 1$ in smo končali. Drugače velja, da je $I \subset (a,1)$. V tem primeru je $|f(I)| = 1/(1-a)|I|$, saj je naklon funkcije f na intervalu $(a,1)$ enak $1/(1-a)$. Ker je $1 - a < 1$, je koeficient $1/(1-a)$ večji od 1. Torej je $|f(I)| = 1/(1-a)|I| > |I|$. Slike intervala I se pri iteraciji funkcije f širijo s konstantnim faktorjem, dokler za neki $k \in \mathbb{N}$ ne velja $1 \in f^k(I)$ ali $a \in f^k(I)$. Če je $a \in f^k(I)$, potem po drugi možnosti sledi, da je $1 \in f^{k+1}(I)$.

Dokazali smo torej obstoj takega $m \geq 0$, da velja $1 \in f^m(I)$ in $[c,1] \subset f^m(I)$. Iz $[c,1] \subset f^m(I)$ sledi, da je $[0,c] \subset f^{m+1}(I)$. Namreč, c je negibna točka in velja $f(c) = c$, $f(1) = 0$. Na intervalu $[0,c]$ je tudi a. Sledi, da je $[b,1] \subset f^{m+2}(I)$. Ločimo dva primera, ko je $b \leq a$ in $b > a$. Če je $b \leq a$, potem je $[a,1] \subset f^{m+2}(I)$. Na tej neenakosti uporabimo funkcijo f, ki je na intervalu $[a,1]$ padajoča. Sledi, da je $[0,1] \subset f^{m+3}(I)$. Če je $b > a$, potem razdelimo interval $[b,1]$ v unijo dveh intervalov. Zapišemo $[b,1] = [b,c] \cup [c,1]$. Ker je $b > a$, velja $[b,c] \subset [a,c]$. Velja $f([a,c]) = [c,1]$ in smo na območju, ki je desno od a, kjer je naklon funkcije f enak $1/(1-a)$. Torej je $|f([b,c])| = (1/(1-a))|[b,c]|$. Ko interval $f([b,c])$ slikamo s funkcijo f, je možno dvoje: ali je $a \in f^2([b,c])$ ali pa je $|f^2([b,c])| = (1/(1-a))^2|[b,c]|$. Vemo, da je $1/(1-a) > 1$, torej se slike intervala $[b,c]$ širijo pri iteraciji s f^2, dokler interval ne vsebuje $[a,c]$. Če interval $[c,1]$ slikamo s funkcijo f, dobimo interval $[0,c]$, ki vsebuje točko a. Interval $[0,c]$ slikamo s funkcijo f in dobimo, da slika $f([0,c])$ vsebuje interval $[c,1]$. Obravnavamo primer, ko smo interval $[b,1]$ razdelili na unijo intervalov $[b, c]$ ter $[c, 1]$. Ugotovili smo, da se interval $[b, c]$ širi pri iteraciji s f^2 dokler ne vsebuje $[a, c]$, za interval $[c, 1]$ pa velja $[c, 1] \subset f^2([c, 1])$. Sledi, da obstaja neko število p, da slika interval $[b, 1]$ pri iteraciji s f^p vsebuje $[a, 1]$. Torej je $[a, 1] \subset f^p(I)$ in posledično je $[0, 1] \subset f^{p+1}(I)$. In smo našli tako iteracijo f^{p+1}, da se inteval $[b, 1]$ preslika na celoten $[0, 1]$. □

Pri dokazu trditve 4.4 bomo potrebovali sledečo lemo.

Lema 4.3. *Naj bosta I in J zaprta intervala in naj bo $g\colon I \to J$ zvezna surjektivna funkcija in naj velja $I \subset J$. Potem velja, da ima funkcija g na intervalu I negibno točko.*

Dokaz. Naj velja $g\colon I \to J$ in naj bo g surjektivna. Funkcija g zavzame svoj globalni minimum in maksimum na intervalu I. Recimo, da g zavzame svoj minimum v točki $u \in I$ ter svoj maksimum v točki $v \in I$. Iščemo tak $x \in I$, da velja $g(x) = x$. To enačbo preoblikujemo v $g(x) - x = 0$. Torej lahko iskanje negibne točke funkcije g prevedemo na iskanje ničle funkcije $h(x) = g(x) - x$. Če s funkcijo h slikamo točko u, dobimo $g(u) - u \leq 0$. Če pa s funkcijo h slikamo točko v, dobimo $g(v) - v \geq 0$. Ker je h zvezna funkcija, sledi, da ima funkcija h na intervalu med u in v ničlo. Torej obstaja $y \in [u, v] \subset I$, da velja $h(y) = g(y) - y = 0$. Torej je $g(y) = y$ in smo našli negibno točko funkcije g. □

Trditev 4.4. *Če za vsak interval $I \subset [0, 1]$ obstaja tak n, da velja $f^n(I) = [0, 1]$, potem je f kaotična na $[0, 1]$ in nima privlačnih periodičnih orbit.*

Dokaz. Da je funkcija f kaotična, bomo preverili po definiciji. Preslikava je topološko tranzitivna, ker se vsak interval I z neko iteracijo preslika na celoten interval $[0, 1]$. Pokažimo, da so periodične točke goste. Ker za vsak I obstaja tak n, da je $f^n(I) = [0, 1] \supset I$ in ker je f^n zvezna funkcija, po prejšnji lemi 4.3 sledi, da obstaja neki $x \in I$, da velja $f^n(x) = x$. Torej so periodične točke goste. Dokazali bomo še, da je funkcija občutljiva na začetne pogoje. Po predpostavki za vsak interval I obstaja $n > 0$, da je $f^n(I) = [0, 1]$. Potem za vsak $x \in I$ obstaja $y \in I$, da velja $|f^n(x) - f^n(y)| \geq 1/2$. Neobstoj privlačnih periodičnih orbit bomo dokazali s protislovjem. Recimo, da privlačna periodična orbita obstaja. Potem bi bila vsaka od točk, ki so vsebovane v tej orbiti, vsebovana v intervalu, ki se približuje proti privlačni periodični orbiti. To pa je v nasprotju s predpostavko, da za vsak interval $I \subset [0, 1]$ obstaja tak n, da velja $f^n(I) = [0, 1]$. Dokazali smo, da privlačne periodične orbite ne obstajajo. □

Trditev 4.5. *Predpostavimo, da velja $b < c$. Definirajmo množico*

$$S_0 = \{x; \textit{obstaja } n > 0, \textit{ da velja } f^n(x) = c\}.$$

Naj bo S zaprtje S_0. Potem je f kaotična na S.

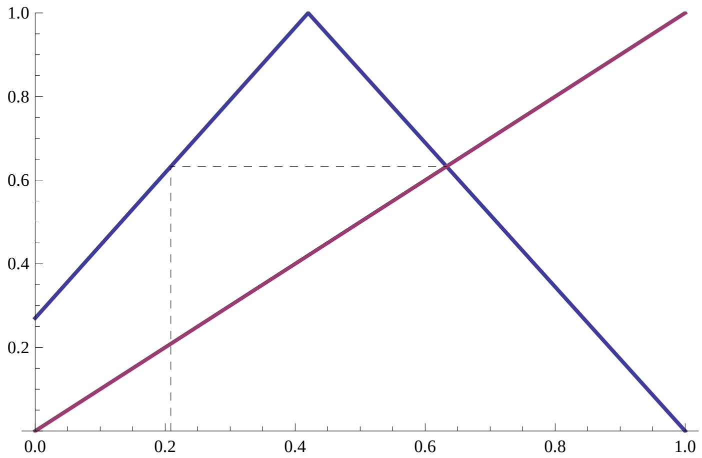
Dokaz. Ker je funkcija f zvezna in $f(S_0) \subseteq S_0$, velja $f(S) \subseteq S$. Na grafu lahko od točke c sledimo orbiti nazaj v S_0, da pokažemo, da je S_0 in posledično S neskončna. Začnemo s $c_0 = c$ in konstruiramo zaporedje $c_1, c_2, c_3, \ldots$, ki zadošča pogoju $f(c_{k+1}) = c_k$. To naredimo tako, da obrnemo postopek, kako določiti orbito točke, ki je opisan v poglavju 4 na strani 8 in ga prikazuje slika 3. Naj bo $d \in [0, a)$ in naj velja $f(d) = c$, kot je prikazano na sliki 10. Definiramo, da je $c_1 = d$. Potem najdemo $c_2 \in (c, 1]$, za katero velja $f(c_2) = c_1$. To naredimo tako, da potegnemo vodoravno premico od točke (d, d) na desno, dokler s to premico ne sekamo grafa. Presečišče grafa in te vodoravne premice da točko $(c_2, f(c_2))$, za katero velja, da je $f(c_2) = c_1 = d$. Nadalje poiščemo tako točko $c_3 \in [a, c)$, da velja $f(c_3) = c_2$. Spet točko c_3 na grafu poiščemo tako, da narišemo vodoravno črto od točke (c_2, c_2) na levo dokler ne srečamo grafa. Ker je $c_2 \in (c, 1]$ in ker je $c > a$, vodoravna premica zagotovo seka graf na območju $(c, 1]$. Ker je absolutna vrednost naklona na desni strani grafa od točke $x = a$ večja kot 1, s ponavljanjem tega postopka ustvarimo neskončno zaporedje točk. Te točke so del cikla, ki se nikoli ne konča, in ležijo na spirali, ki kroži proti točki (c, c).

Sedaj pokažimo, da je funkcija f kaotična na množici S. Najprej bomo pokazali, da je f topološko tranzitivna. Naj bo $x \in U \cap S$ in $y \in V \cap S$, kjer sta U in V neprazna intervala. Ker je S zaprtje množice S_0, obstajata $x_0 \in U \cap S_0$ in $y_0 \in V \cap S_0$. Želimo pokazati obstoj števila p, da bo veljalo $y_0 \in f^p(U \cap S)$. Če tako število p obstaja, potem je funkcija f topološko tranzitivna po definiciji. Po definiciji S_0 obstajata taki števili $k > 0$ in $m > 0$, da velja $f^k(x_0) = c$ in $f^m(y_0) = c$. Naj bo $I \subset U$ interval, ki vsebuje x_0. Pod temi pogoji sledi, da je $c \in f^k(I)$ in po trditvi 4.2 obstaja tako število n, da je $f^{n+k}(I) = [0, 1]$. Sledi, da obstaja $z \in I$, ki zadošča $f^{n+k}(z) = y_0$ in po definiciji y_0 velja $f^{k+n+m}(z) = c$. Torej je z element množice S. Sledi, da je $z \in I \cap S$ in velja $y_0 = f^{k+n}(z) \in f^{k+n}(I \cap S)$. Ker smo izbrali tak I, da je $I \subset U$ sledi, da je tudi $I \cap S \subset U \cap S$ in dobimo, da je $y_0 \in f^{k+n}(I \cap S) \subset f^{k+n}(U \cap S)$. Torej je funkcija f topološko tranzitivna na množici S. Dokažimo, da so periodične točke funkcije f goste v množici S. Dokazati moramo, da odprt interval U, ki vsebuje točko iz množice S, vsebuje tudi periodično točko iz S. Če U vsebuje točko iz S, potem U vsebuje tudi točko $x_0 \in S_0$. Spet naj bo $x_0 \in I \subset U$ in po trditvi 4.2 obstaja $n > 0$, da je $f^n(I) = [0, 1]$. Torej obstaja interval $I_1 \subset I$, da velja $f^n(I_1) = I$. Posledično obstaja $x_1 \in I_1$, za katerega velja $f^n(x_1) = x_0$. Torej $x_1 \in S_0$. Na enak način, z istim n kot prej, obstaja interval $I_2 \subset I_1$, da velja $f^n(I_2) = I_1$ in obstaja $x_2 \in I_2 \cap S_0$, tako da je $f^n(x_2) = x_1$ itn. Naj bo I_∞ presek teh intervalov I_k. Presek intervalov I_k je neprazen. Vemo, da ima padajoče zaporedje nepraznih zaprtih podmnožic kompaktnega prostora neprazen presek. V našem primeru so intervali I_k zaprti in neprazni, saj je v vsakem intervalu točka x_k, za katero velja $f^n(x_k) = x_{k-1}$. Vemo, da je prostor $[0, 1]$ kompakten. Torej je res presek intervalov I_k, ki ga označimo z I_∞, neprazen. Če je x v vsakem I_{k+1}, potem je $f^n(x)$ v vsakem I_k. Zaradi tega velja, da je $f^n(I_\infty) \subset I_\infty$. Ker je $\{x_k\} \subset I \cap S$, ima stekališče $x_\infty \in I \cap S$. Stekališče x_∞ mora biti v vseh $I_k \cap S$, torej je $x_\infty \in I_\infty \cap S$. Če namreč x_∞ ne bi bil v nekem I_k, potem bi bili členi zaporedja od tu dalje na pozitivni oddaljenosti od stekališča, kar pa ni mogoče in x_∞ ne bi bilo stekališče. Zato je x_∞ v vsakem I_k in posledično tudi v I_∞. Če I_∞ vsebuje več kot x_∞, potem vsebuje točko v S_0 in se posledično preslika na cel interval $[0, 1]$, kar je v nasprotju s $f^n(I_\infty) \subset I_\infty \subset I$. Torej je $f^n(x_\infty) = x_\infty$ in je x_∞ periodična točka. □

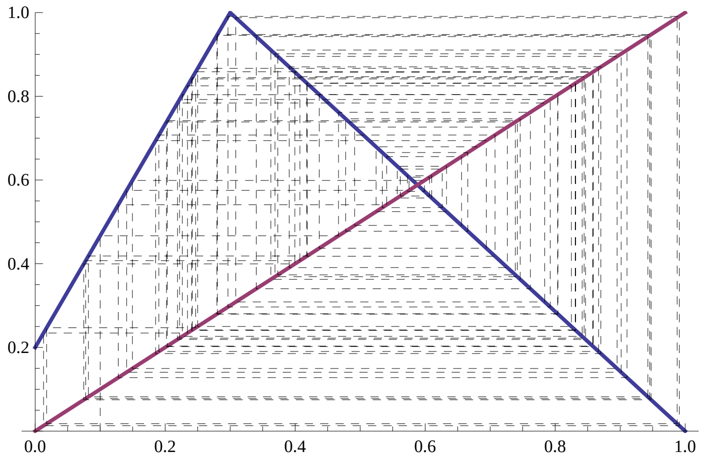
S temi tremi trditvami si pomagamo pri določitvi dinamike funkcije f na posameznih območjih.

4.3. **Kaos na celotnem intervalu.** V tem razdelku določamo dinamiko funkcij, ki so definirane z $b < c$, kjer je c negibna točka, in velja ali pogoj $b < 1 - a$ ali pa veljata pogoja $b \geq 1 - a$ in $b > a$.

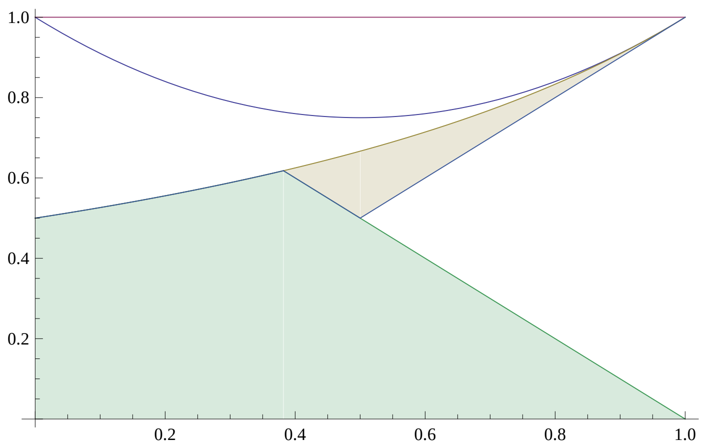
Iz pogoja $b < 1 - a$ sledi, da je naklon $(1 - b)/a$ na levi strani od točke $x = a$ večji kot 1. Iz pogoja $b > a$ za $x < a$ sledi $f(x) > a$. To preverimo tako, da upoštevamo predpis funkcije f in pogoj $b > a$. Če je $x < a$, potem je $f(x) = b + ((1 - b)/a)x > a + ((1 - b)/a)x > a$. Dokazali bomo trditev 4.7, ki pravi, da če velja $b < c$ ter $b < 1 - a$ ali $b \geq 1 - a$ in $b > a$, potem je funkcija f kaotična



SLIKA 10. Na sliki je označena $f(d) = c$.



SLIKA 11. Primer funkcije, ki je kaotična na celem intervalu $[0, 1]$.



SLIKA 12. Območje, kjer je $b < c$ in velja $b < 1 - a$ ali $b \geq 1 - a$ ter $b > a$.

na katerem koli intervalu $I \subset [0, 1]$. Pri dokazu trditve 4.7 bomo potrebovali, da ponavljajoča iteracija funkcije f nekatere intervale razširi. Naslednja lema pravi, da pri pogoju $b < c$, potem se majhen interval, ki vsebuje a, razširi, ko ga slikamo s funkcijo f^2.

Lema 4.6. *Predpostavimo, da velja $b < c$. Naj bo $d \in [0, a)$, za katerega velja $f(d) = c$. Če je $a \in I \subset [d, c]$, potem velja $|f^2(I)| \geq (c/(c-d))|I|$.*

Dokaz. Iz slike 10 vidimo, da je $f^2([d, c]) = [0, c]$. To lahko tudi računsko preverimo. Po predpostavki je $a \in [d, c]$ in $f(d) = c$. Torej, ko s funkcijo f slikamo interval $[d, c]$, se točki d in c preslikata v c, točka a pa se po definiciji funkcije f preslika v 1. Sledi, da je $f([d, c]) = [c, 1]$. Ker velja $a < c = 1/(2-a)$, točka a ni vsebovana v intervalu $[c, 1]$. Upoštevamo še, da je $f(1) = 0$, in ko interval $[c, 1]$ slikamo s funkcijo f, dobimo interval $[0, c]$. Torej je res $f^2([d, c]) = [0, c]$. Ker je f linearna na intervalih $[d, a]$ in $[a, c]$, sledi, da če je interval $I = [d, c]$, je dolžina intervala $|f^2(I)| = (c/(c-d))|I|$. Sedaj predpostavimo, da je $a \in I = [p, q] \subset [d, c]$. Ločimo dve možnosti, ko je $f(p) = f(q)$ in $f(p) \neq f(q)$. Če velja $f(p) = f(q)$, potem s pomočjo podobnih trikotnikov dobimo, da velja $|f^2(I)| = (c/(c-d))|I|$. Če pa velja $f(p) \neq f(q)$, potem je I vsebovan v večjem intervalu $J = [p', q']$, za katerega velja $f(p') = f(q')$ ter velja ali $p' = p$ ali $q' = q$. Iz tega sledi, da je $f(J) = f(I)$ (izberemo si, da velja ali $p' = p$ ali $q' = q$ in dodamo tisto točko, ki manjka). Izračunamo $|f^2(I)| = |f^2(J)| = (c/(c-d))|J| > (c/(c-d))|I|$. V obeh primerih smo dokazali, da velja $|f^2(I)| \geq (c/(c-d))|I|$ in smo končali. $\square$

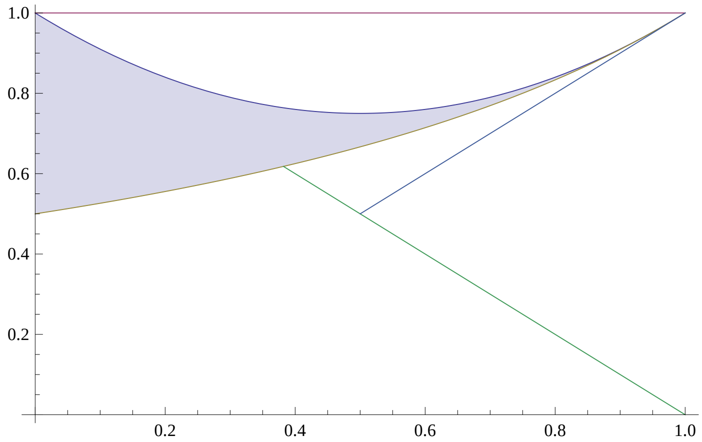
Trditev 4.7. *Če velja $b < c$ in velja eden izmed pogojev $b < 1 - a$ ali $b > a$, potem za vsak interval $I \subset [0, 1]$ obstaja n, da velja $f^n(I) = [0, 1]$.*

Dokaz. Pri dokazu te trditve bomo obravnavali štiri možnosti.

Naj bo $d \in [0, a)$ in naj bo $f(d) = c$. Če velja $c \in I$ ali $d \in I$, smo po trditvi 4.2 končali.

Drugače velja ena izmed treh možnost $I \subset [0, d)$, $I \subset (d, c)$ ali $I \subset (c, 1]$. Če velja $I \subset (d, c)$, po prejšnji lemi sledi, da je $|f^2(I)| \geq (c/(c-d))|I|$. Če velja $I \subset (c, 1]$, potem smo desno od $x = a$. Naklon funkcije f na tej strani je $1/(1-a)$, torej je $|f(I)| = (1/(1-a))|I|$. V primeru $I \subset [0, d]$ obravnavamo dva ločena primera, če je $b < 1 - a$ ali če je $b > a$. Ker je $I \subset [0, d)$ in je $d \in [0, a)$, smo levo od točke $x = a$ in naklon funkcije f je $(1-b)/a$. Torej je dolžina intervala $|f(I)| = ((1-b)/a)|I|$. Če velja $b < 1 - a$, potem je $(1-b)/a > 1$. Če je $b > a$, potem je $f(I) \subset [a, 1]$. Funkcija f slika interval na desno stran točke $x = a$, kar pomeni, da je $|f^2(I)| = \frac{1-b}{a}\frac{1}{1-a}|I|$. Faktor, s katerim pomnožimo $|I|$, je večji kot 1, ker velja zveza $b < c = 1/(2-a) < 1 - a + a^2$, pri čemer smo pri zadnji neenakosti uporabili lemo 4.1. Pokazali smo, da se v vseh treh primerih intervali pri iteraciji funkcije f ali f^2 širijo. Širijo se, dokler niso preveliki, da bi zadostili enemu od pogojev $I \subset [0, d)$, $I \subset (d, c)$ ali $I \subset (c, 1]$ in tako morajo enkrat vsebovati ali točko c ali točko d. Če pa vsebujejo c ali d, smo po trditvi 4.2 končali. $\square$

4.4. **Kaos na podintervalu brez privlačnih periodičnih orbit.** V tem razdelku določamo dinamiko funkcij, ki zadoščajo pogoju $c \leq b < 1 - a + a^2$. Na tem območju so nekatere iteracije funkcije f kaotične na podintervalu $[0, f(b)]$ in nimajo privlačnih periodičnih orbit. Iz grafa tipične funkcije, prikazanega na sliki 15, ki zadošča pogoju $c \leq b < 1 - a + a^2$, opazimo, da je $f(b) > a$ in da je $f^2([0, f(b)]) \subset [0, f(b)]$. To lahko tudi računsko preverimo. Velja namreč $c = 1/(2-a) > a$, torej je $b > a$ in $f(b) = (1-b)/(1-a)$. Na enakosti uporabimo oceno, da je $b < 1 - a + a^2$ in tako dobimo $f(b) = (1-b)/(1-a) > (1 - 1 + a - a^2)/(1-a) = a$. Torej je res $f(b) > a$.



SLIKA 13. Območje, za katero velja $c \leq b < 1 - a + a^2$.

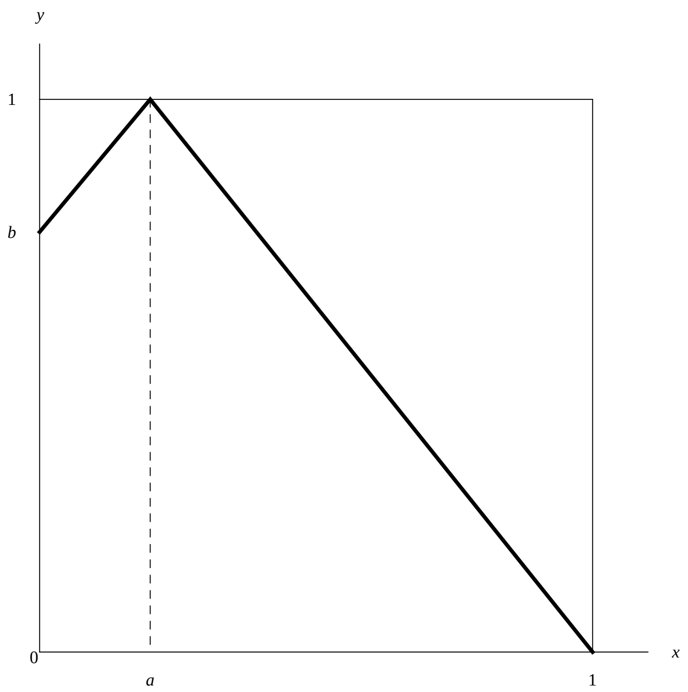
Preverimo še, da je $f^2([0, f(b)]) \subset [0, f(b)]$. Potrebujemo še, da je $f^2(b) > b$. Vemo, da je $f(b) = (1-b)/(1-a) > a$ in zato je $f^2(b) = (1 - (1-b)/(1-a))/(1-a) = (b-a)/(1-a)^2$. Želimo pokazati, da velja $(b-a)/(1-a)^2 > b$. Z operacijami, ki ohranjajo množico rešitev, dobimo:

$$
\begin{aligned}
\frac{b-a}{(1-a)^2} &> b \\
b - a &> (1-a)^2 b \\
b - a &> b - 2ab + a^2 b \\
a(2b - ab - 1) &> 0 \\
2b - ab - 1 &> 0 \\
b(2-a) &> 1 \\
b &> \frac{1}{2-a} \\
b &> c.
\end{aligned}
$$

Ker smo na območju, na katerem velja $b > c$, neenakost $f^2(b) > b$ drži. Ker velja $f(b) > a$, je a vsebovan v intervalu $[0, f(b)]$ in zaradi tega je $f([0, f(b)]) \subset [b, 1]$. Interval $[b, 1]$ ne vsebuje točke a, torej velja $f([b, 1]) \subset [0, f(b)]$ in res je $f^2([0, f(b)]) \subset [0, f(b)]$. Opazimo tudi, da orbita vsake točke, razen negibne točke c, pri neki iteraciji funkcije f vstopi v interval $[0, f(b)]$. Ker velja $f(b) > a$, lahko to preverimo na podoben način, kot smo preverili na območju $b > 1 - a + a^2$. Na tem intervalu tudi ostane, ko jo slikamo s funkcijo f^2, saj velja $f^2([0, f(b)]) \subset [0, f(b)]$.

Pokazali bomo, da f^2 slika interval $[0, f(b)]$ nazaj v $[0, f(b)]$ na enak način, kot bi neka druga funkcija družine, ki jo preučujemo, z različnima parametroma a in b, slikala interval $[0, 1]$ spet nazaj v $[0, 1]$.

Del grafa funkcije f v pravokotniku $0 \leq x \leq f(b)$ in $b \leq y \leq 1$ je enak neki drugi funkciji iz naše družine, ki slika iz intervala $[0, f(b)]$ v interval $[b, 1]$, če to funkcijo zrcalimo čez navpično premico. Graf funkcije f^2 na $[0, f(b)]$ izgleda podobno kot del grafa funkcije f v pravokotniku $0 \leq x \leq f(b)$, $b \leq y \leq 1$, s to razliko, da je funkcija f^2 padajoča na območju, kamor f^2 slika interval $[0, f(b)]$. Funkcija f narašča do $x = a$ in ima v točki a vrednost 1. Ker ima funkcija f negativen naklon na $[b, 1]$, postane,



SLIKA 14. Primer funkcije f za vrednosti $a = 0.2$ in $b = 0.76$, ki zadošča pogoju $c \geq b < 1 - a - a^2$.

ko s funkcijo f slikamo del grafa funkcije f v pravokotniku $0 \leq x \leq f(b)$, $b \leq y \leq 1$, graf funkcije f^2 padajoč. Funkcija f^2 v točki $x = f(a) = 1$ zavzame vrednost 0. Funkcijo f^2, ki slika iz intervala $[0, f(b)]$, zrcalimo preko navpične premice in razširimo z dvema faktorjema, enim v navpični smeri in enim v vodoravni smeri. Ta postopek bomo imenovali *renormalizacija*. Torej funkcijo f^2 iz intervala $[0, f(b)]$ renormaliziramo na f_1, ki slika iz intervala $[0, 1]$ v $[0, 1]$. Preslikavo f_1 pridobimo iz dela grafa f, ki je v pravokotniku $0 \leq x \leq f(b)$, $b \leq y \leq 1$, z zrcaljenjem grafa funkcije f preko navpične premice. Nato graf funkcije f še raztegnemo s faktorjem $1/f(b) = (1 - a)/(1 - b)$ v vodoravni smeri, da funkcija f_1 res slika s celotnega intervala $[0, 1]$, in funkcijo f pomnožimo še s faktorjem $1/(1 - b)$ v navpični smeri. Ker dobimo funkcijo f_1 iz dela funkcije f, ki je na pravokotniku $0 \leq x \leq f(b)$ in $b \leq y \leq 1$, moramo intervala $0 \leq x \leq f(b)$ in $b \leq y \leq 1$ razširiti na interval $[0, 1]$, da bo funkcija f_1 res slikala iz intervala $[0, 1]$ v interval $[0, 1]$. To naredimo tako, da intervala $0 \leq x \leq f(b)$ in $b \leq y \leq 1$ pomnožimo z inverzno vrednostjo dolžine intervalov. Dolžina intervala $0 \leq x \leq f(b)$ je $f(b)$, torej pomnožimo z $1/f(b) = (1 - a)/(1 - b)$ v vodoravni smeri. Dolžina intervala $b \leq y \leq 1$ je $1 - b$, torej funkcijo f pomnožimo z $1/(1 - b)$ v navpični smeri.

Naj bosta a_1 in b_1 parametra funkcije f_1 ter naj ustrezata enakim zahtevam kot parametra a in b funkcije f. Naklon funkcije f_1 levo od točke $x = a$ je po predpisu funkcije enak $(1 - b_1)/a_1$. Ker f_1 dobimo z zrcaljenem čez navpično premico in z raztegom s faktorjem $(1 - a)/(1 - b)$ v vodoravni smeri ter faktorjem $1/(1 - b)$ v navpični smeri, je naklon f_1 levo od točke $x = a$ enak naklonu f desno od točke $x = a$, pomnoženemu z $((1 - a)/(1 - b))^{-1}$ in $1/(1 - b)$. Torej je

$$\frac{1 - b_1}{a_1} = \frac{1}{1 - a} \frac{1 - b}{1 - a} \frac{1}{1 - b} = \frac{1}{(1 - a)^2}.$$

Ker je $1-a<1$, je $1/(1-a)^2>1$. Od tod vidimo, da je $b_1<1-a_1$. Naklon levo od točke $x=a$ definira območje, kamor slika funkcija f_1. Iz neenakosti $b_1<a_1-1$ sledi, da preslikava $(a,b)\to(a_1,b_1)$ slika iz območja $c\le b<1-a+a^2$, ki je v (a,b) prostoru, v območje $0\le b_1<1-a_1$, ki je v (a_1,b_1) prostoru. V razdelku 4.3 pri trditvi 4.7 smo pokazali, da je f_1 kaotična na celem intervalu $[0,1]$ in nima privlačnih periodičnih orbit, če velja $b_1<c_1=1/(2-a_1)$. Sledi, da enako velja za f^2 na intervalu $[0,f(b)]$, če parametra a in b ustrezata določenim pogojem.

Če velja $b_1\ge c_1$, potem ponovna renormalizacija pokaže, da so dinamike f^4 s parametroma a_2 in b_2 na majhnem intervalu ekvivalentne dinamikam preslikave f_2 na $[0,1]$. Parametra a_2 in b_2 zadoščata pogoju $b_2<c_2=1/(2-a_2)$ ali pa spet renormaliziramo.

Trdimo, da vsaka točka, za katero velja $c\le b<1-a+a^2$, pristane po končnem številu renormalizacij v delu $b<c$ in velja $b<1-a$ ali $b>a$. V tem primeru je dinamika kaotična. Potrebujemo formuli za a_{k+1} in b_{k+1}, izraženima s parametroma a_k ter b_k. Za parametra a_k ter b_k lahko predpostavimo, da še nista v kaotičnem delu, torej da velja $1/(2-a_k)=c_k<b_k<1-a_k$. Da je $b_k<1-a_k$, smo že pokazali, ko smo izračunali naklon funkcije f_k levo od točke $x=a_k$. Formulo za a_{k+1} dobimo iz opisa postopka, kako dobimo graf f_{k+1}. Točka a_{k+1} je $f_k(b_k)-a_k$ oddaljena od osi zrcaljenja, nato pa na tej razdalji naredimo še razteg za $1/(f_k(b_k))=(1-a_k)/(1-b_k)$. Torej imamo formulo

$$a_{k+1}=\frac{1-a_k}{1-b_k}\left(f_k(b_k)-a_k\right)=\frac{1-a_k}{1-b_k}\left(\frac{1-b_k}{1-a_k}-a_k\right)=1-\frac{a_k(1-a_k)}{1-b_k}.$$

Z upoštevanjem $b_k<1-a_k$ dobimo $a_{k+1}=1-\frac{a_k(1-a_k)}{1-b_k}>1-(1-a_k)=a_k$. Torej je $a_{k+1}>a_k$.

Iz naklona funkcije f_{k+1} levo od točke $x=a_{k+1}$, ki je $(1-b_{k+1})/a_{k+1}=1/(1-a_k)^2$, z upoštevanjem zveze $a_{k+1}=1-a_k(1-a_k)/(1-b_k)$, dobimo

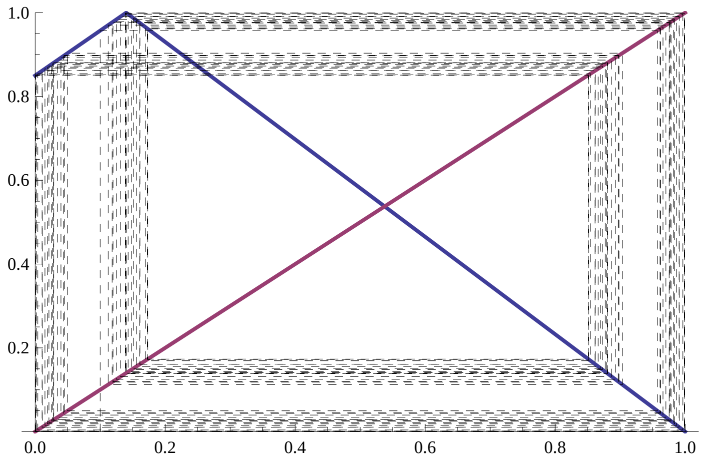
$$\begin{aligned}b_{k+1}&=1-\frac{a_{k+1}}{(1-a_k)^2}\\&=1-\frac{1-\frac{a_k(1-a_k)}{1-b_k}}{(1-a_k)^2}\\&=1-\frac{1}{(1-a_k)^2}+\frac{a_k}{(1-b_k)(1-a_k)}.\end{aligned}$$

Če pokažemo, da velja $b_{k+1}/b_k<1-(a_1/(1-a_1))^2<1$, potem sledi, da je zaporedje $b_2,b_3,\ldots$ padajoče, dokler ne velja $b_n<1/(2-a_n)$ za neko število n. Ocena $b_n<1/(2-a_n)$ sledi iz tega, da b_n padajo proti 0 in ker je a_n med 0 in 1, je posledično $1/(2-a_n)$ med $1/2$ in 1. Torej za dovolj velike n sledi ocena $b_n<1/(2-a_n)$. Da dobimo željeno oceno za b_{k+1}/b_k, gledamo b_{k+1} kot funkcijo b_k za vrednosti $1/(2-a_k)\le b_k\le 1-a_k$. Torej $b_{k+1}(x)=1-1/(1-a_k)^2+a_k/((1-a_k)(1-x))$ za vrednosti $1/(2-a_k)\le x\le 1-a_k$. Graf b_{k+1} je za vrednosti, ki jih preučujemo, hiperbola, ki gre skozi točki $(1/(2-a_k),0)$ in $(1-a_k,1-a_k/(1-a_k)^2)$. Na tem delu b_{k+1} narašča. Torej je

$$
\begin{aligned}
\frac{b_{k+1}}{b_k} &= \frac{1 - \frac{1}{(1-a_k)^2} + \frac{a_k}{(1-a_k)(1-b_k)}}{b_k} \\
&\leq \frac{1 - \frac{a_k}{(1-a_k)^2}}{1-a_k} = \\
&= \left(1 - \frac{a_k}{(1-a_k)^2}\right)\left(1 + \frac{a_k}{1-a_k}\right).
\end{aligned}
$$

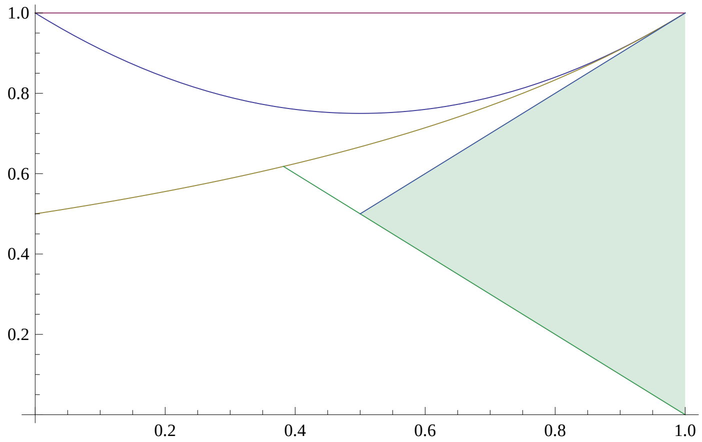
Pri oceni b_{k+1}/b_k smo upoštevali rekurzivno zvezo za b_{k+1} in dejstvo, da je $b_k \leq 1-a_k$. Definiramo funkcijo $g(x) = (1 - 1/(1-a_k)^2 + a_k/((1-a_k)(1-x)))/x$, za katero velja $g(b_k) = b_{k+1}/b_k$. Če v funkcijo g vstavimo vrednost $1-a_k$, dobimo $g(1-a_k) = (1 - 1/(1-a_k)^2 + 1/(1-a_k))/(1-a_k)$. Če dokažemo, da je funkcija g naraščajoča, bo funkcija g zavzela maksimum v $x = 1-a_k$ na intervalu $1/(2-a_k) \leq x \leq 1-a_k$. Funkcijo $g(x)$ odvajamo in dobimo, da je $g'(x) = (a_k(\frac{1-a_k}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2}))/(a_k-1)^2$. Vidimo, da je $g'(x) > 0$, torej je funkcija g naraščajoča in njena največja vrednost je $(1 - \frac{1}{(1-a_k)^2} + \frac{1}{1-a_k})/(1-a_k)$. Zaradi tega lahko naredimo oceno $b_{k+1}/b_k \leq (1 - \frac{1}{(1-a_k)^2} + \frac{1}{1-a_k})(1-a_k)$.

Pridobimo oceno za desno stran neenačbe $1 - a_k/(1-a_k)^2 < 1 - a_k/(1-a_k)$. Torej je $b_{k+1}/b_k < 1 - a_k^2/(1-a_k)^2$. Že prej smo izračunali, da je $a_{k+1} > a_k$, torej vrednosti $1 - a_k^2/(1-a_k)^2$ padajo z večanjem k. Zato res velja $b_{k+1}/b_k < 1 - (a_1/(1-a_1))^2$.



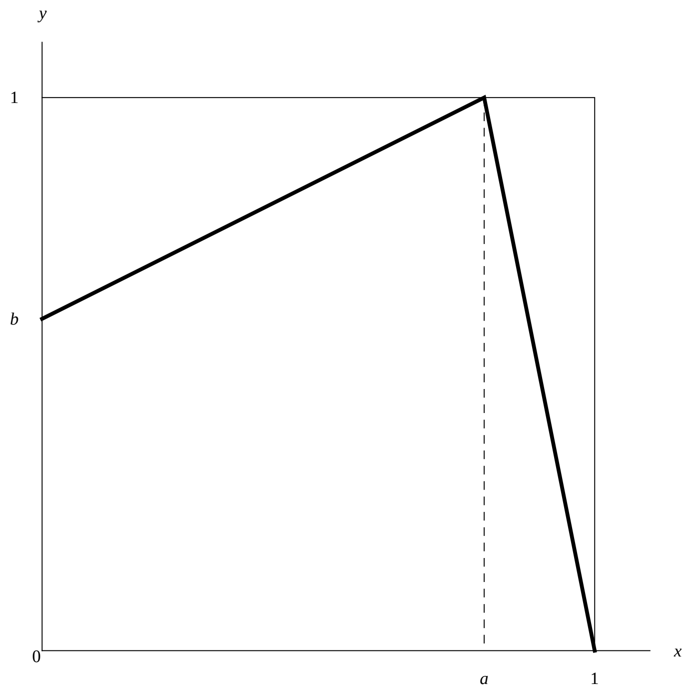
SLIKA 15. Primer funkcije f, ki je kaotična na podintervalu $[0, f(b)]$.

4.5. **Kaos s privlačnimi periodičnimi točkami in brez privlačnih periodičnih točk.** Določamo dinamiko funkcij, za katere velja $1 - a \leq b \leq a$. Iz trditve 4.5 vemo, da je funkcija f kaotična na nekaterih podmnožicah $[0, 1]$, ko parametra a in b zadoščata zahtevi $b < c$. Pokazali bomo, da če sta parametra v enem od neskončno mnogo cvetnih listkov, ki so obarvani na sliki 18, potem ima funkcija f privlačen n cikel, ki ga obkroža kaos. Dolžina cikla je v vsakem lističu konstantna, v največjem lističu je dolžina cikla $n = 3$. V naslednjem lističu je dolžina cikla 4, v naslednjem je dolžina 5 in dolžine ciklov se z vsakim naslednjim listom povečajo za 1. Pokazali bomo, da se lističi širijo navzdol od točke $(1, 1)$ do krivulje, ki je definirana z $b = 1/(1 + a)$. Če sta parametra a in b izven teh lističev, potem bomo dokazali,



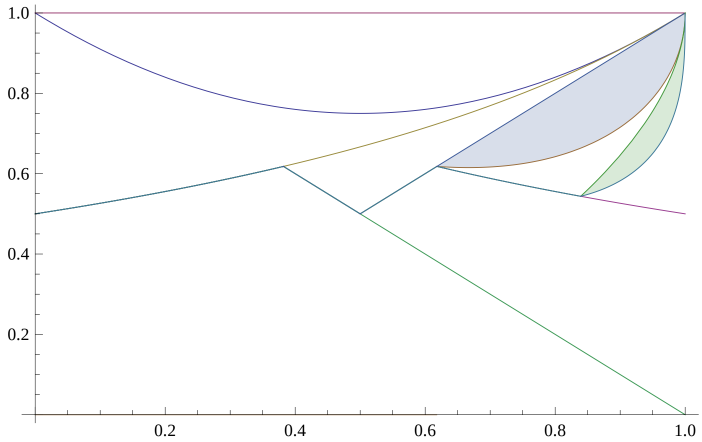
SLIKA 16. Območje, kjer je $1 - a \leq b \leq a$.

da funkcija f nima privlačnega cikla in je bodisi kaotična na celem intervalu $[0, 1]$ bodisi je neka njena iteracija kaotična na nekem podintervalu.



SLIKA 17. Primer funkcije f za vrednosti $a = 0.8$ in $b = 0.6$, ki zadošča pogoju $1 - a \leq b \leq a$.

Da analiziramo to območje za dana parametra a in b, vpeljemo število m, ki naj bo najmanjše število, za katerega velja $f^m(0) > a$. Vemo, da je $m \geq 2$, saj velja $f(0) = b \leq a$. Po definiciji števila m sledi, da za vsako točko, ki je desno od a in jo orbita točke vsebuje, imamo največ m točk v $[0, a]$. Torej, če orbita vsebuje k točk desno od a velja, da ima orbita največ mk točk v intervalu $[0, a]$. Nadalje lahko skonstruiramo cikel dolžine $m + 1$ z m točkami v intervalu $[0, a]$. Najprej poiščemo $x \in [0, a]$, da velja $f^{m-1}(x) = a$. Če je $f^{m-1}(0) = a$, potem je $x = 0$. Če pa je $f^{m-1}(x) < a$, se spomnimo, da je $f(0) = b$. Zaradi tega velja $f^{m-1}(b) = f^m(0) > a$ in iskani x leži med 0 in b. Po definiciji funkcije f velja, da



SLIKA 18. Slika prikazuje cvetne lističe.

je $f^2(a) = f(f(a)) = f(1) = 0$. Torej $f^{m+1}(x) = 0$. Če je $x = 0$, smo končali. V nasprotnem primeru je $x > 0 = f^{m+1}(x)$. Takrat se z zmanjševanjem x povečuje $f^{m+1}(x)$. Torej enkrat dosežemo, da je $x = f^{m+1}(x)$, kot smo zahtevali. Cikel dolžine $m + 1$, ki ga tako konstruiramo, imenujemo *fundamentalni cikel* z dolžino $m + 1$.

Želimo določiti neenakost, ki bi določala m iz parametrov a in b. Po definiciji m velja, da za vsak $1 \leq k \leq m$ velja $f^k(0) < a$. Torej

$$
\begin{aligned}
f(0) &= b, \\
f(b) = f^2(0) &= b + \frac{1-b}{a}b, \\
f^3(0) &= b + \frac{1-b}{a}\left(b + \frac{1-b}{a}b\right) = b + \frac{1-b}{a}b + \left(\frac{1-b}{a}\right)^2 b, \\
&\vdots \\
f^k(0) &= b + \frac{1-b}{a}b + \left(\frac{1-b}{a}\right)^2 b + \cdots + \left(\frac{1-b}{a}\right)^{k-1} b = \frac{1-(\frac{1-b}{a})^k}{1-\frac{1-b}{a}}b.
\end{aligned}
$$

Zanima nas, kdaj je $f^k(0) = \frac{1-(\frac{1-b}{a})^k}{1-\frac{1-b}{a}}b$ večje od a, da bomo pridobili oceno za m. Število m je po definiciji najmanjše število, za katerega velja $f^m(0) > a$. S premetavanjem členov dobimo, da velja

$$\frac{1-(\frac{1-b}{a})^k}{1-\frac{1-b}{a}}b > a$$

natanko tedaj, ko velja

$$\left(\frac{1-b}{a}\right)^k < \frac{1-a}{b}.$$

Torej mora po definiciji m veljati $(\frac{1-b}{a})^{m-1} \geq \frac{1-a}{b}$, da je $f^{m-1}(0) < a$, in $(\frac{1-b}{a})^m < \frac{1-a}{b}$, da velja $f^m(0) > a$. Iz tega zaključimo

$$(1) \qquad \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m-1} \geq \frac{1-a}{b} > \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m}.$$

Sedaj lahko določimo, pri katerih pogojih obstajajo privlačni cikli. Najprej pokažimo, da če obstaja privlačen cikel dolžine n, potem je fundamentalni cikel z dolžino $m+1$ privlačen. Naj bo k število točk v ciklu dolžine n, ki so tudi v intervalu $[0,a]$. Če cikel vsebuje a, naj bo I interval z a kot desno končno točko in tako majhen, da nobena druga slika intervala I s funkcijo f ne vsebuje a. V nasprotnem primeru, če cikel ne vsebuje a, naj bo I interval, ki vsebuje točko v ciklu in je tako majhen, da nobena slika I s funkcijo f ne vsebuje točke a. Cikel tako vsebuje k točk, ki so manjše od a, in se, ko jih slikamo s funkcijo f, pomnožijo z $(1-b)/a$. Ker ima cikel dolžino n, imamo $n-k$ točk, ki so večje od a, in jih, ko jih slikamo s funkcijo f, pomnožimo z vrednostjo naklona desno od točke $x=a$, kar je $1/(1-a)$. Potem je

$$|f^n(I)| = \left(\frac{1-b}{a}\right)^{k}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{n-k}|I|.$$

Cikel bo privlačen, če bo faktor pri $|I|$ manjši kot 1. Torej bo cikel privlačen, če in samo če je $(\frac{1-b}{a})^k(\frac{1}{1-a})^{n-k} < 1$. Že prej smo omenili, da orbita ne vsebuje več kot m točk, ki so manjše od a, za vsako točko, ki jo orbita vsebuje in je večja od a. Cikel z dolžino n vsebuje k točk, ki so manjše od a, in $n-k$ točk, ki so večje od a. Po definiciji števila m lahko cikel z dolžino n vsebuje največ $m(n-k)$ točk v intervalu $[0,a]$. Torej velja $k \leq m(n-k)$. Iz te neenakosti lahko izrazimo, da je $k/(n-k) \leq m$ in to oceno uporabimo na pogoju $(\frac{1-b}{a})^k(\frac{1}{1-a})^{n-k} < 1$. Tako je cikel privlačen, če je

$$(2) \qquad \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m}\frac{1}{1-a} < 1.$$

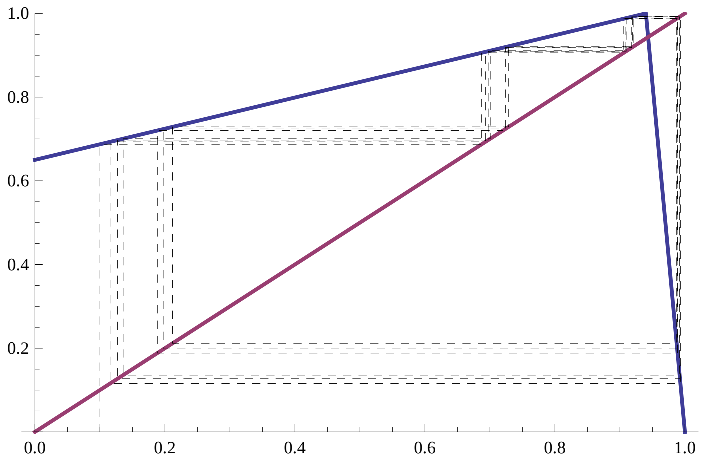
Če ta neenakost drži, potem je fundamentalni cikel z dolžino $m+1$ tudi privlačen. Sedaj neenakost (1) pomnožimo z $(1-b)/a$, da dobimo $(1-a)(1-b)/(ab) \leq ((1-b)/a)^m$. Ko neenakost (2) pomnožimo z $(1-a)$, dobimo $((1-b)/a)^m < 1-a$. Združimo oceni, pridobljeni iz (1) in (2), da dobimo, da za vsak $m = 2,3,\ldots$ obstaja privlačen cikel za dana parametra a in b, če velja

$$(3) \qquad \frac{(1-a)(1-b)}{ab} \leq \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m} < 1-a.$$

Neenakost $\frac{(1-a)(1-b)}{ab} \leq (\frac{1-b}{a})^m$ definira lističe. Izračunamo, kdaj velja neenakost $(1-a)(1-b)/(ab) < 1-a$. Sledi, da je

$$\begin{aligned}
\frac{(1-a)(1-b)}{ab} &< 1-a \\
(1-b)(1-a) &< ab(1-a) \\
b &> 1-ab \\
b &> \frac{1}{1+a}.
\end{aligned}$$

Torej neenakost $(1-a)(1-b)/(ab) < 1-a$ velja, kadar je $b > 1/(1+a)$, kar določa, kje je spodnja konica lističa.



Slika 19. Slika prikazuje primer dinamike funkcije za parametra a in b, ki sta v cvetnih lističih.

Sedaj bomo obravnavali primer, ko parametra a in b ležita izven lističev. Zahtevali bomo, da je $(\frac{1-b}{a})^k(\frac{1}{1-a})^{n-k} > 1$. Zato ni privlačnih ciklov. Najprej bomo obravnavali primer, v katerem je a v fundamentalnem ciklu z dolžino $m+1$. Pokazali bomo, da se slike kateregakoli intervala I razširijo na $[0,1]$. Torej, da je funkcija f kaotična na celem intervalu $[0,1]$ po trditvi 4.4. Če $a \notin f^k(I)$ za $0 \leq k \leq m$, potem je interval I pod ponavljajočo iteracijo vedno ali cel na intervalu $[0,a)$ ali pa cel na intervalu $(a,1]$. Preučujemo območje, kjer je $1-a \leq b \leq a$ in zaradi tega je $(1-b)/a \leq 1$. Vemo pa, da je $1/(1-a) > 1$, torej je $1/(1-a) \geq (1-b)/a$. V nadaljevanju bomo dokazali, da je najmanjša dolžina intervala $f^{m+1}(I)$ $|f^{m+1}(I)| \geq (\frac{1-b}{a})^m\frac{1}{1-a}|I|$. Vemo, da po definiciji števila m velja, da za vsako točko, ki je desno od $x=a$ in je vsebovana v orbiti točke, imamo največ m točk v orbiti točke, ki so manjše od a. Torej, če za vsako točko iz intervala I velja , da se m-krat preslika s funkcijo f v $[0,a)$, potem se mora cel interval I najmanj enkrat preslikati v interval $[a,1]$, da bomo imeli za vsako točko, ki je desno od $x=a$ največ m točk, ki so v intervalu $[0,a)$. Torej je res $|f^{m+1}(I)| \geq (\frac{1-b}{a})^m\frac{1}{1-a}|I|$. V prejšnem primeru, ko smo obravnavali, pri katerih pogojih obstajajo privlačni cikli, smo izpeljali, da privlačni cikli obstajajo, če je izpoljen pogoj $(\frac{1-b}{a})^m\frac{1}{1-a} < 1$. Sedaj pa zahtevamo, da privlačni cikli ne obstajajo. Torej velja $(\frac{1-b}{a})^m\frac{1}{1-a} > 1$ in tako je $|f^{m+1}(I)| \geq (((1-b)/a)^m(1/(1-a))|I| > |I|$. Primera, ko velja $(\frac{1-b}{a})^m\frac{1}{1-a} = 1$, ne bomo obravnavali. Torej se slike I širijo, dokler je $a \in f^p(I)$ za neki p. Naj bo $J = f^{p+2}(I)$. Ker je $a \in f^p(I)$ in ker je $f^2(a) = 0$, je $0 \in J$. Na enakosti $J = f^{p+2}(I)$ uporabimo funkcijo f^{m-1} in dobimo $f^{m-1}(J) = f^{m+1}(f^2(I))$. Ker je $a \in f^p(I)$ in ker je a v fundamentalnem $m+1$ ciklu, je $a \in f^{m+1}(f^p(I))$. Od tod in po definiciji m sledi, da je $a \in f^{m-1}(J) \subset [a,1]$. Torej je interval J, ko ga $(m-1)$-krat slikamo s funkcijo f, vedno levo od točke $x=a$ in ga pomnožimo z $(1-b)/a$. Pokazali smo, da je $f^{m-1}(J) \subset [a,1]$, torej se interval J po $m-1$ iteracijah preslika desno od točke $x=a$ in ga pomnožimo z $1/(1-a)$, ko ga slikamo s funkcijo f. Zaradi definicije števila m sledii, da je dolžina intervala J po $m+1$ iteracijah funkcije f enaka

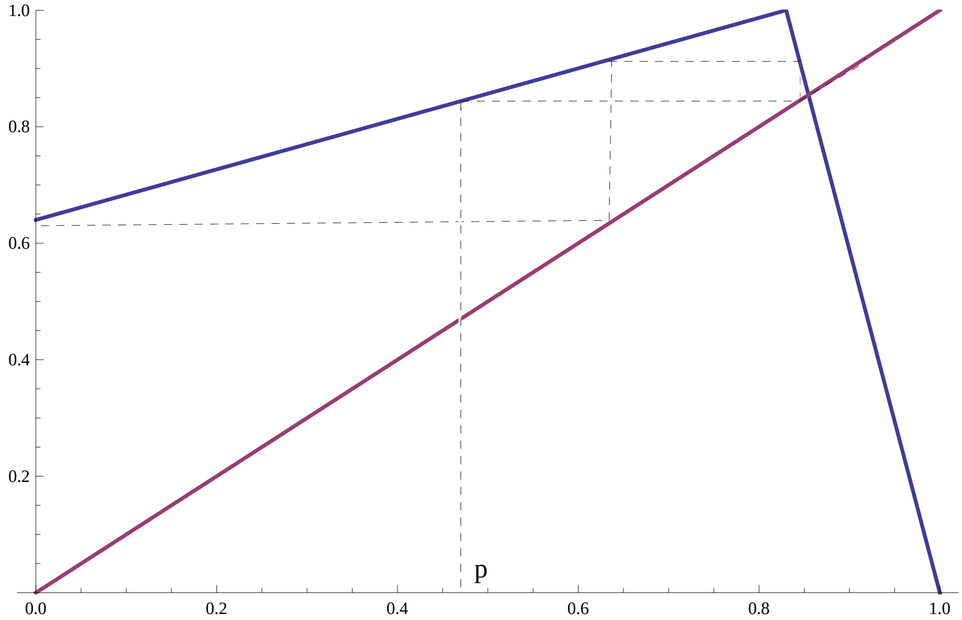
$$|f^{m+1}(J)| = \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{1-a}\right)^2 |J| > |J|.$$

Velja tudi, da je $0 \in f^{m+1}(J)$. Slike J se pri iteraciji s f^{m+1} širijo, dokler ne vsebujejo $[0,b]$. Ker smo na območju $1-a \leq b \leq a$, je dolžina intervala $[0,b]$, ko ga slikamo s funkcijo f, enaka $|f([0,b])| = |[0,b]|(1-b)/a$. Koeficient $(1-b)/a$ ocenimo, pri čemer upoštevamo, da je $1-a \leq b$. Dobimo, da je $(1-b)/a \geq 1$. Torej se interval $[0,b]$ pri iteraciji funkcije f širi, dokler za neki i iteracija $f^i([0,b])$ ne vsebuje točke a. Ker je $f(a) = 1$, sledi, da se iteracija $f^{i+1}([0,b])$ preslika na cel $[0,1]$. Interval $[0,b]$ se tako pri ponavljajoči iteraciji funkcije f razširi na celoten interval $[0,1]$ in tako neka slika intervala $[0,b]$ vsebuje tudi negibno točko c ter smo po trditvi 4.2 dokazali, da je f kaotična, če parametra a in b ležita izven lističev.

Naslednji primer, ki ga obravnavamo, je, ko je $f^{m-1}(0) < a$, tako da a ni v fundamentalnem ciklu z dolžino $m+1$. Naj bo $0 < p < b$ tak, da velja $f^m(p) = f^m(0)$. Dokazali bomo, da opisan p obstaja. Po definiciji m velja, da je $f^m(0) > a$. Torej je točka $f^m(0)$ na intervalu $[a,1]$. Da dobimo vrednost $f^{m-1}(0)$, od točke $(f^{m-1}(0), f^m(0))$, potegnemo navpično premico do simetrale lihih kvadrantov. Presečišče navpične premice in simetrale lihih kvadrantov je točka $(f^{m-1}(0), f^{m-1}(0))$. Skozi to točko potegnemo vodoravno premico, dokler ne sekamo grafa funkcije f. Ker je vrednost $f^m(0)$ večja od a, graf funkcije f sekamo dvakrat, enkrat nad intervalom $[0,a]$ ter enkrat nad intervalom $[a,1]$. Točka, ki je nad intervalom $[0,a]$ je $(f^{m-2}(0), f^{m-1}(0))$, točka, ki je na intervalu $[a,1]$, pa je $(f^{m-2}(p), f^{m-1}(p))$. Torej tak p, da velja $f^m(p) = f^m(0)$ obstaja. Ker velja $f^m(p) = f^m(0)$, interval $f^{m-1}([0,p])$ predstavlja osnovnico trikotnika, ki ima vrh v točki $f(a)$, kot lahko vidimo na sliki 20. Izpeljali bomo, da je $|f^{m-1}([0,p])| = ((1-b)/a)^{m-1}p$. Naj bo $d \in [0,a)$ in $f(d) = c$. Potem velja $|f^{m+1}([0,p])| = (c/(c-d))((1-b)/a)^{m-1}p$. Da dobimo to enakost, uporabimo podoben razmislek, kot smo ga naredili pri dokazu leme 4.6. Pri lemi 4.6 smo pokazali, da če je $b < c$ ter $d \in [0,a)$ tak, da velja $f(d) = c$ ter $a \in I \subset [d,c]$, potem je $|f^2(I)| \geq (c/(c-d))|I|$. V dokazu te leme smo pokazali, da če velja $f(r) = f(q)$ in $a \in I = [r,q] \subset [d,c]$, potem je $|f^2(I)| = (c/(c-d))|I|$. Sedaj imamo $f^m(p) = f^m(0)$ in $|I| = |f^{m-1}([0,p])| = ((1-b)/a)^{m-1}p$. Vemo tudi, da je $a \in f^{m-1}([0,p])$, ker drugače ne bi veljala enakost $f^m(p) = f^m(0)$. Torej lahko zaključimo, da je

$$|f^{m+1}([0,p])| = |f^2(f^{m-1}([0,p]))| = \frac{c}{c-d}|f^{m-1}([0,p])| = \frac{c}{c-d}\left(\frac{1-b}{a}\right)^{m-1} p.$$

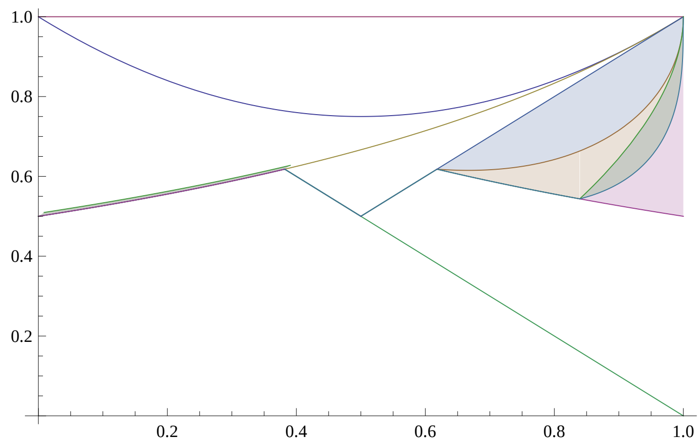
Če upoštevamo, da je $f(d) = c$ in $d < a$, potem lahko iz enačbe $c = b + ((1-b)/a)d$ izrazimo d. Poračunamo in dobimo, da je $d = (c-b)a/(1-b)$. Če v to enakost še vstavimo $c = 1/(2-a)$, dobimo, da je $d = (1/(2-a) - b)a/(1-b)$. To enakost vstavimo v izraz za dolžino $f^{m+1}([0,p])$ in dobimo



Slika 20. Slika prikazuje točko p.

$$
\begin{aligned}
|f^{m+1}([0,p])| &= \frac{\frac{1}{2-a}}{\frac{1}{2-a} - \frac{a}{1-b}(\frac{1}{2-a} - b)} \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m-1} p \\
&= \frac{a(1-b)}{a(1-b-a+2ab-a^2b)} \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m-1} p \\
&= \frac{a}{(1-b+ab)(1-a)} \left(\frac{1-b}{a}\right)^{m} p.
\end{aligned}
$$

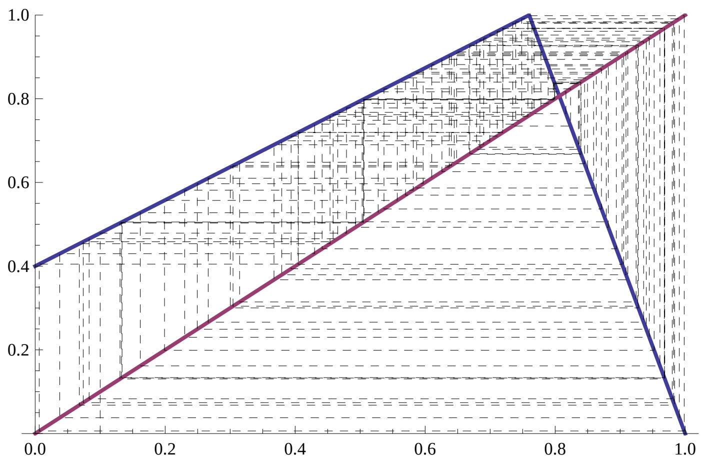
Torej je $|f^{m+1}([0,p])| = \frac{a}{(1-b+ab)(1-a)}(\frac{1-b}{a})^m p$.



Slika 21. Slika prikazuje lističe in območje med lističi.

Če velja, da je $((1-b)/a)^m \leq (1-b+ab)(1-a)/a$, kar je območje med lističi, na sliki 21 je obarvano z vijolično in rjavo barvo, potem je $f^{m+1}([0,p]) \subset [0,p]$ in lahko naredimo renormalizacijo kot v razdelku 4.4, kjer je bil $m = 1$. Naj bo

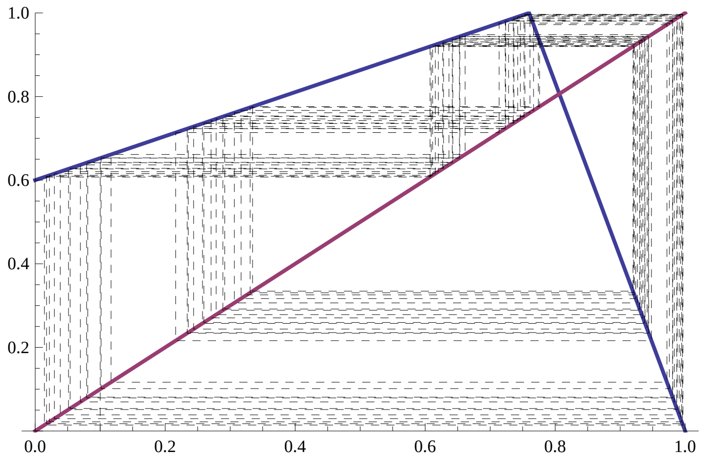
$I = f^{m-1}(f^{m+1}([0,p]))$. Vemo, da velja $f^{m+1}([0,p]) \subset [0,p]$. Na tej vsebovanosti uporabimo f^{m-1} in pri tem dobimo $f^{m-1}(f^{m+1}([0,p])) = I \subset f^{m-1}([0,p])$. Pokažimo še, da je $[f^{m-1}(0), a] \subset I$. Za to vsebovanost moramo videti, da sta $f^{m-1}(0)$ in a vsebovana v intervalu I. Vemo, da je $a \in f^{m-1}([0,p])$. Če na tem uporabimo funkcijo f, dobimo, da je $f(a) = 1 \in f^{m}([0,p])$ in na tej zvezi še enkrat uporabimo funkcijo f tako, da dobimo $f^2(a) = f(1) = 0 \in f^{m+1}([0,p])$. Torej je $0 \in f^{m+1}([0,p])$ in, ko to iteriramo s f^{m-1}, dobimo, da je $f^{m-1}(0) \in f^{m-1}(f^{m+1}([0,p])) = I$. Iz zveze $f^m(0) = f^m(p)$ sledi, da je $f^k(p) = f^k(0)$ za vsak $k \geq m$. Ker je $f^{k-1}(f(0)) = f^{k-1}(a)$, je $a \in f^{k-1}([0,p])$ za vsak $k \geq m$, torej tudi za $k = (m-1)+(m+1)$ in sledi, da je $a \in I$. Dobili smo $[f^{m-1}(0), a] \subset I \subset f^{m-1}([0,p])$. Pokažimo, da od tod sledi, da je $f^{m+1}(I) = I$. In sicer, če na $I \subset f^{m-1}([0,p])$ uporabimo f^{m+1} dobimo $f^{m+1}(I) \subset f^{m+1}(f^{m-1}([0,p])) = I$. Ker je $f^m(p) = f^m(0)$ in ker je $a \in f^{m-1}([0,p])$, velja $f([f^{m-1}(0), a]) = f(f^{m-1}([0,p]))$. Uporabimo, da je $[f^{m-1}(0), a] \subset I$ in dobimo $f(f^{m-1}([0,p])) = f([f^{m-1}(0), a]) \subset f(I)$. To zvezo slikamo s f^m in dobimo $f^{m+1}(f^{m-1}([0,p])) = I \subset f^{m+1}(I)$. Torej je res, da je $f^{m+1}(I) = I$. Del grafa, ki leži nad I, je zrcaljenje čez navpično premico kopije neke funkcije iz družine. Lahko torej renormaliziramo f^{m+1} na I na neko preslikavo f_1, ki slika iz $[0,1]$. Absolutna vrednost naklona funkcije f desno od točke $x = a$ je večja kot velikost naklona levo od točke $x = a$. Ker je f_1 zrcaljenje čez navpično premico, je torej absolutna vrednost naklona levo od točke $x = a$ večja kot velikost naklona desno od točke $x = a$. Zaradi tega parametra a_1 in b_1 funkcije f_1 zadoščata zvezi $(1 - b_1)/a_1 > 1$. Torej lahko po podobnem razmisleku, kot smo ga naredili v razdelku 4.4, zaključimo, da je f^{m+1} kaotična na nekem podintervalu $[0,1]$. Če pa je $((1-b)/a)^m > (1 - b + ab)(1-a)/a$, je $|f^{m+1}([0,p])| = k \cdot p$, pri čemer je $k > 1$. Torej se slike vsakega intervala razširijo na celoten $[0,1]$ in funkcija f je tako kaotična na celem $[0,1]$.



Slika 22. Slika prikazuje primer dinamike funkcije za parametra a in b, ki sta izven cvetnih lističev.

5. Zaključek

Po analizi vseh območij lahko torej zaključimo, kakšno dinamiko ima funkcij na posameznih območjih. Ugotovili smo, da ima funkcija f na območju $b > 1 - a + a^2$ privlačen cikel dolžine 2. Območje $b < c$ smo razdelili na tri podpodročja in obravnavali smo vsako podpodročje posebej. Če je za parametra a in b veljalo $b < c$



Slika 23. Slika prikazuje dinamiko funkcije za parametra a in b, ki sta v območju med cvetnimi lističi.

in je veljala ena izmed možnosti, ali $b < 1 - a$ ali pa sta veljala pogoja $b \geq 1 - a$ in $b > a$, smo dokazali, da je funkcija f kaotična na celem intervalu $[0, 1]$. Pri pogoju $c \leq b < 1 - a + a^2$ smo z renormalizacijo funkcije f^2 pokazali, da je funkcija f^2 kaotična na intervalu $[0, f(b)]$. Na območju, ki je definirano z $1 - a \leq b \leq a$ pa smo ugotovili, da je funkcija na nekaterih območjih kaotična, na nekaterih pa ima privlačen cikel dolžine n. Če sta bila parametra a in b v območju, ki smo ga poimenovali cvetni lističi, potem je funkcija f imela privlačen n cikel. Če sta bila parametra v območju pod temi lističi, smo ugotovili, da je neka iteracija funkcije f kaotična na podintervalu tega območja. Izkazalo se je, da če parametra a in b nista bila v lističih ali v območju pod lističi, potem je funkcija f kaotična na celem intervalu $[0, 1]$.

Torej smo res s preprosto analizo določili dinamiko družine preslikav. Razlog, da nam je to uspelo, je, da je graf funkcije sestavljen iz dveh daljic. Čim bi imeli bolj komplicirano družino funkcij, bi bila tudi analiza teh funkcij bolj zahtevna. Kar smo tudi videli, je, da ima naša družina funkcij res zelo različno dinamiko pri različnih vrednostih parametrov a in b ter da lahko že majhna razlika v vrednostih parametrov pomeni razliko v dinamiki funkcije.

Literatura

[1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis in P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (1992) 332–334.

[2] S. Bassein, *The dynamics of a family of one-dimensional maps*, Amer. Math. Monthly **105** (1998) 118–130.

[3] R. L. Devaney, *An Introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, 1989.

[4] M. Eisenberg, *Visualization of fractals, chaos, and iteration*, [ogled 27. 5. 2014], dostopno na `people.math.umass.edu/~murray/Math_397C/Notes/Attract_Repel.pdf`

[5] M. Vellekoop in R. Berglund, *On Intervals, Transitivity = Chaos*, Amer. Math. Monthly **101** (1994) 353–355.

[6] *Butterfly effect*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 10. 2. 2014], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect`.

[7] *Chaos theory*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 9. 2. 2014], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory`.

[8] *Dynamical systems*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 9. 2. 2014], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_system`.