UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Miha Zupančič

Matrike predznakov, ki dopuščajo diagonalizacijo

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Gregor Cigler

Ljubljana, 2016

Kazalo

Matrike predznakov, ki dopuščajo diagonalizacijo

Povzetek

Tema diplomske naloge so matrike predznakov, ki dopuščajo diagonalizacijo. V prvem delu bomo navedli nekaj zadostnih pogojev, da matrika predznakov dopušča diagonalizacijo. V nadaljevanju si bomo pogledali, kdaj matrika predznakov zahteva večkratno ničelno lastno vrednost. Tako bomo prišli do še enega zadostnega pogoja, pri katerem matrika predznakov dopušča diagonalizacijo. Med njimi bo tudi nekaj primerov, ki ne dopuščajo diagonalizacije, kar pomeni, da je vprašanje diagonalizacije matrik predznakov še vedno nerešeno.

Sign patterns that allow diagonalizability

Abstract

In this thesis we study sign matrices which allow diagonalizability. In first part we'll look at some sufficient conditions for matrix to allow diagonalizability. Then we'll examine when a sign matrix requires multiple zero eigenvalues. This way we'll get another sufficient condition for a sign matrix to allow diagonalizability. Through the work many examples of sign matrices will be presented for better understanding. We will also exibit some examples which won't allow diagonalizability. This means that the question of diagonalizability of sign matrices is still unsolved.

Math. Subj. Class. (2010): 15A18

Ključne besede: matrika predznakov, cikel, diagonalizabilna matrika, lastna vrednost, prirejanje, kombinatorično simetrična matrika

Keywords: sign patterns, cycle, diagonalizable matrix, eigenvalue, matching, combinatorially symmetric matrix

1. Uvod

V uvodu bo večina iz [4]. *Matrika predznakov* je matrika, katere elementi so iz množice $\{0, +, -\}$. Množico vseh $n \times n$ matrik predznakov bomo označili z Q_n. S $Q(A)$ bomo označili množico realnih $n \times n$ matrik, ki je definirana kot

$$Q(A) = \{B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) |\, \mathrm{sgn}(b_{ij}) = a_{ij} \text{ za vse } i \text{ in } j\}.$$

Matrike predznakov bomo obravnavali na naslednja dva načina.

Naj bo P lastnost, ki jo lahko ima realna matrika. Če za matriko predznakov A obstaja realna matrika $B \in Q(A)$, ki ima lastnost P, potem rečemo, da A *dopušča* P.

Če za matriko A velja, da ima vsak $B \in Q(A)$ lastnost P, rečemo, da A *zahteva* P.

Poglejmo si primera za zgornji lastnosti.

Primer 1.1. Naj bo

$$A_1 = \begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & + \\ + & - \end{bmatrix}.$$

Obstaja $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in Q(A_1)$, ki ima neničelno determinanto. Torej A_1 dopušča neničelno determinanto. Matrika predznakov A_1 ne zahteva neničelne determinante, saj ima $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in Q(A_1)$ ničelno determinanto. Za vsak $B_2 \in Q(A_2)$ velja $\det B_2 \neq 0$. Torej A_2 zahteva neničeno determinanto, posledično A_2 dopušča neničelno determinanto. ♢

Za nadaljevanje bomo potrebovali nekaj novih pojmov in definicij. Naj bo $A = (a_{ij})$ matrika predznakov. Neničeln produkt oblike

$$P = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_{k+1}},$$

kjer je množica $\{i_1, i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ sestavljena iz različnih indeksov, se imenuje *pot dolžine k* (ali *k-pot*). Neničeln produkt oblike

$$\gamma = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1},$$

kjer je množica $\{i_1, i_1, \ldots i_k\}$ sestavljena iz različnih indeksov, pa imenujemo *enostaven cikel dolžine k* (ali *k-cikel*). *Sestavljen k-cikel* je produkt enostavnih ciklov, katerih skupna dolžina je k in katerih množice indeksov so medsebojno disjunktne. Neničeln element a_{ij} je *tetiva* (enostavnega ali sestavljenega) cikla γ, če sta i in j dve točki iz indeksne množice γ in a_{ij} ni v γ. Cikel γ je *breztetivni*, če nima tetiv. Za lažjo predstavo navedimo dva primera. Najprej si poglejmo matriko predznakov, katere cikel ima tetivo.

Primer 1.2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Element a_{24} je tetiva cikla $\gamma = a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$. ♢

Sedaj pa si poglejmo še matriko predznakov, ki vsebuje breztetivni cikel.

Primer 1.3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobimo cikel $\gamma = a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$, ki pa je očitno breztetivni, ker so že vsi neničelni elementi v ciklu γ. $\diamondsuit$

Poglejmo si še primer sestavljenega cikla.

Primer 1.4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz matrike dobimo dva cikla $\gamma_1 = a_{14}a_{41}$ in $\gamma_2 = a_{23}a_{35}a_{52}$. Torej je cikel $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ sestavljen, ker sta množici indeksov med seboj disjunktni. $\diamondsuit$

S $c(A)$ bomo označili najdaljšo dolžino cikla (enostavnega ali sestavljenega), ki se pojavi v A. Vemo, da velja $c(A) = c(B)$ za vse $B \in Q(A)$

Primer 1.5. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix}$$

Cikla iz A sta $\gamma_1 = a_{12}a_{21}$ in $\gamma_2 = a_{35}a_{54}a_{43}$. Ker sta njuni množici indeksov medsebojno disjunktni, je $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ sestavljen cikel, katerega najdaljša dolžina je $c(A) = 5$. $\diamondsuit$

Potrebovali bomo tudi definiciji minimalnega in maksimalnega ranga matrike predznakov.

Definicija 1.6. Naj bo $A \in Q_n$. *Maksimalni rang* matrike A je največji rang, ki ga lahko zavzame matrika iz $Q(A)$, torej

$$\mathrm{MR(A)} := \max\{\operatorname{rang} B \mid B \in Q(A)\}.$$

Definicija 1.7. Naj bo $A \in Q_n$. *Minimalni rang* matrike A je najmanjši rang, ki ga lahko zavzame matrika iz $Q(A)$, torej

$$\mathrm{mr(A)} := \min\{\operatorname{rang} B \mid B \in Q(A)\}.$$

Sedaj si poglejmo Königov izrek [2, poglavje 1.2 na strani 6], ki ga bomo potrebovali pozneje.

Definicija 1.8. $(0,1)$-*matrika* je realna matrika, katere elementi so iz množice $\{0,1\}$.

Izrek 1.9. *Naj bo A $(0,1)$-matrika velikosti $m \times n$. Minimalno število linij (tj. vrstic in stolpcev) v A, ki pokrijejo vse enice, je enako maksimalnemu številu enic v A, tako da nobeni dve enici nista na isti liniji.*

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na število linij v A. V primeru, da je $m = 1$ ali $n = 1$, izrek velja. Naj bo $m > 1$ in $n > 1$ in ρ' enako minimalnemu številu linij v A, ki pokrivajo vse enice v A. Naj bo še ρ enako maksimalnemu številu enic v A, pri čemer nobeni dve enici nista v isti liniji. Iz definicije ρ in ρ' sledi $\rho \leq \rho'$. Zadostuje da dokažemo $\rho \geq \rho'$. Minimalno pokrivanje enic v matriki A se imenuje glavno pod pogojem, da ne vključuje vseh m vrstic A ali vseh n stolpcev A. Dokaz izreka razdelimo na dva dela.

V prvem primeru predpostavimo, da A nima glavnega pokrivanja. Sledi $\rho' = \min\{m, n\}$. Z zamenjavo vrstic in stolpcev naredimo matriko, ki bo imela na mestu $(1, 1)$ enico. Sedaj izbrišemo prvo vrstico in prvi stolpec v permutirani matriki. Dobimo matriko A' velikosti $(m-1)\times(n-1)$. Matrika A' ne more imeti pokrivanja sestavljenega iz manj kot $\rho' - 1 = \min\{m-1, n-1\}$ linij. V nasprotnem primeru bi pokrivanje A' skupaj z izbrisanima vrstico in stolpcem tvorilo pokrivanje A z manj kot ρ' linijami. Sedaj uporabimo indukcijsko predpostavko za A'. Lahko sklepamo, da ima A' $\rho' - 1$ enic, tako da nobeni dve nista na isti liniji. Če tem enicam dodamo enico na mestu $(1, 1)$, vidimo da ima A ρ' enic, tako da nobeni dve nista na isti liniji. Sledi $\rho \geq \rho'$.

V drugem primeru predpostavimo, da ima A glavno pokrivanje sestavljeno iz e vrstic in f stolpcev, kjer je $\rho' = e + f$. Zamenjajmo linije A da zgoraj levo dobimo $e \times f$ podmatriko sestavljeno iz preseka teh e vrstic in f stolpcev. Dobljena matrika ima obliko

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f & n-f \end{array} \\ \begin{array}{c} e \\ m-e \end{array} & \begin{bmatrix} * & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Matrika A_1 ima e vrstic,njenih enic pa ni mogoče pokriti z manj kot e linijami, saj bi v nasprotnem primeru našli manjše pokrivanje za matriko A. Matrika A_2 ima f stolpcev in je ni mogoče pokriti z manj kot f linijami. Sedaj uporabimo indukcijsko predpostavko za A_1 in A_2 in najdemo $e + f$ enic, tako da nobeni dve ne ležita na skupni liniji. Od tod sledi $\rho \geq \rho'$. □

$(0, 1)$-matriko si lahko predstavljamo kot matriko predznakov. V matriki $(0, 1)$ zamenjamo 1 z $\{+, -\}$. Poglejmo si to teorijo na preprostem primeru.

Primer 1.10.

$$A = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix}$$

Najmanjše število stolpcev in vrstic, s katerimi lahko pokrijemo vse neničelne elemente, je 4. To so prva, četrta in peta vrstica ter tretji stolpec. Maksimalni rang matrike predznakov pa je očitno 4, saj sta druga in tretja vrstica linearno odvisni. ♢

2. Zadostni pogoji za diagonalizacijo matrike predznakov

V tem poglavju [4] bomo navedli nekaj zadostnih pogojev, da matrika predznakov dopušča diagonalizacijo. Poglejmo si definicijo diagonalizacije za realno matriko B.

Definicija 2.1. Naj bo α lastna vrednost za matiko B. Večkratnost α kot ničle karakterističnega polinoma $p_B(\lambda)$ imenujemo *algebraična večkratnost* lastne vrednosti

α. Označimo jo z $a(\alpha)$. Dimenzijo lastnega podprostora $\ker(A-\alpha I)$ imenujemo *geometrična vekratnost* lastne vrednosti α. Označimo jo z $g(\alpha)$.

Definicija 2.2. Množico vseh lastnih vrednosti matrike $B \in M_n(\mathbb{R})$ imenujemo spekter matrike B. Označimo ga s $\sigma(B)$.

Definicija 2.3. Naj bo dana matrika $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Matrika B se da diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja taka obrnljiva matrika P, da je

$$D = P^{-1}BP$$

diagonalna matrika. Pri tem je P prehodna matrika med bazo $\mathcal{B}$ iz lastnih vektorjev in standardno bazo $\mathcal{C}$ za $\mathbb{C}^n$.

Poglejmo si še izrek za diagonalizacijo realne matrike.

Izrek 2.4. *Matriko B se da diagonalizirati natanko tedaj, ko je $a(\alpha) = g(\alpha)$ za vse lastne vrednosti $\alpha \in \sigma(A)$.*

Dokaz izreka 2.4 najdemo v [3, poglavje VIII na strani 139]. Pri naših dokazih izrekov bo enakost algebraične in geometrične večkratnosti glavno orodje, da bo matrika predznakov dopuščala diagonalizacijo. Za nadaljnje dokazovanje izrekov bomo potrebovali dve lemi.

Lema 2.5. *Naj bo $A \in Q_n$. Potem velja $c(A) \leq \mathrm{MR(A)}$.*

Dokaz. Lotimo se dokaza s protislovjem. Denimo, da je $c(A) = k > \mathrm{MR(A)}$ in naj bo γ cikel dolžine k, z indeksno množico $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Sedaj člene v matriki $B \in Q(A)$, ki so v ciklu γ , fiksiramo na ± 1, odvisno od predznaka v ciklu γ. Ostale neničelne elemente matrike B, ki niso v ciklu γ pa pošljemo proti 0. Sedaj vzamemo podmatriko velikosti $k \times k$, izberemo samo vrstice in stolpce iz indeksne množice cikla γ. Dobljena podmatrika ima k enic, te pa so vsaka v svoji vrstici in vsaka v svojem stolpcu. Determinanta te podmatrike je torej neničelna. Rang matrike B je tako vsaj k. Sledi, da je $\mathrm{MR(A)} \geq k$, kar pa je v nasprotju s predpostavko. Torej lema drži. $\square$

Zdaj vemo, da velja $c(A) \leq \mathrm{MR(A)}$, zato bi se lahko vprašali ali velja tudi neenakost $\mathrm{mr(A)} \leq c(A)$. Če najdemo primer, kjer naša domneva ne drži, potem neenakost ne velja.

Primer 2.6. Naj bo A matrika predznakov.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Torej $\mathrm{mr(A)} = 1$, $\mathrm{MR(A)} = 2$ in $c(A) = 0$, saj ne moremo narediti cikla v tej matriki predznakov. Torej $c(A) \geq \mathrm{mr(A)}$ ne drži. Velja pa neenakost $c(A) \leq \mathrm{MR(A)}$. $\diamondsuit$

Lema 2.7. *Naj bo $A \in Q_n$. Potem za vsako naravno število k, za katerega velja $\mathrm{mr(A)} \leq k \leq \mathrm{MR(A)}$, obstaja takšna realna matrika $B \in Q(A)$, da velja $\operatorname{rang} B = k$.*

Poglejmo si primer, ki ilustrira lemo 2.7.

Primer 2.8.

$$A = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

Dobimo mr(A) = 1 in MR(A) = 3. Za $k = 1, 2, 3$ dobimo matrike

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Vidimo, da obstajajo take realne matrike B_1, B_2, B_3, ki imajo range po vrsti enake 1, 2 in 3. Torej za ta primer lema drži. ♢

Dokaz leme 2.7. Če sta matriki $X \in Q(A)$ in $Y \in Q(A)$ taki, da lahko Y dobimo iz X samo s spremembo vrednosti enega neničelnega elementa X, potem sledi $|\operatorname{rang} X - \operatorname{rang} Y| \leq 1$. S spremembo enega neničelnega elementa se spremeni ena vrstica. Torej se lahko rang matrike poveča ali zmanjša za ena. Sedaj vzamemo taki matriki $B_1 \in Q(A)$ in $B_2 \in Q(A)$, da je $\operatorname{rang} B_1 = \text{mr(A)}$ in $\operatorname{rang} B_2 = \text{MR(A)}$. Tedaj za vsako naravno število k, za katerega velja $\text{mr(A)} \leq k \leq \text{MR(A)}$, obstaja realna matrika C ($\operatorname{rang} C = k$), pridobljena iz B_1. Matriko C dobimo z menjavo elementov B_1 z elementi iz B_2 po vrsti, npr. takole $(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)$ (gremo po prvi vrstici do konca, nato po drugi vrstici do konca, ..., po zadnji vrstici do konca). Pri vsaki menjavi se rang poveča ali zmanjša za 1. Ker menjamo elemente matrike B_1 z elementi matrike B_2, bomo z menjavami elementov dosegli ravno vse vmesne range in ranga obeh matrik. Tako naredimo toliko menjav, da dobimo želeno matriko C ranga k. □

Primer 2.9.

$$A = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix}$$

Dobimo mr(A) = 1 in MR(A) = 4. Izberemo matriki B_1 in B_2, tako da sta njuna ranga po vrsti enaka 1 in 4.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zdaj pa želimo najti matriko C ranga 3. Matriko C dobimo z zamenjavo elementa $b_{22}^{(1)}$ z $b_{22}^{(2)}$ in $b_{33}^{(1)}$ z $b_{33}^{(2)}$. Dobimo matriko

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

katere rang je enak 3. ♢

Definirajmo še dva nova pojma.

Definicija 2.10. Naj bo $A \in Q_n$. Označimo minimalno algebraično večkratnost lastne vrednosti 0 med vsemi matrikami $B \in Q(A)$ z $z(A)$ in maksimalno algebraično večkratnost z $Z(A)$. Če je B realna matrika, uporabimo oznako $z(B)$ za algebraično večkratnost lastne vrednosti 0. Torej za vsak B iz množice $Q(A)$ velja $z(A) \leq z(B) \leq Z(A)$. Minimalno geometrično večkratnost lastne vrednosti 0 med vsemi matrikami $B \in Q(A)$ označimo z $g(A)$. Če je B običajna matrika, uporabimo oznako $g(B)$ za geometrično večkratnost lastne vrednosti 0.

Sedaj imamo vse potrebne definicije in lahko obravnavamo prvi izrek.

Izrek 2.11. *Naj bo $A \in Q_n$. Če je $c(A) = \mathrm{MR(A)}$, potem A dopušča diagonalizacijo.*

Za boljšo predstavo si oglejmo primer.

Primer 2.12.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & - \\ + & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Predpostavka izreka je izpolnjena, saj je $\mathrm{MR(A)} = c(A) = 3$. Sedaj moramo najti realno matriko $B \in Q(A)$, ki bo diagonalizabilna. Naj bo matrika B enaka

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Izračunamo karakteristični polinom, ki je enak $-\lambda^3 + 2\lambda - 1$. Lastne vrednosti so enake $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{-2}$ in $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2}$. Ker ima same enostavne lastne vrednosti, je matrika B diagonalizabilna. ♢

Dokaz izreka 2.11. Naj bo $A = (a_{ij}) \in Q_n$ s $c(A) = \mathrm{MR(A)}$ in vzemimo cikel $\Gamma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_t$ dolžine $c(A)$, kjer je vsak γ_i enostaven cikel dolžine l_i, tako da velja $\sum_{i=1}^{t} l_i = c(A)$. Naj bodo množice indeksov γ_i med seboj disjunktne. Če je $t = 1$, potem je Γ enostaven cikel dolžine $c(A)$. Za $\varepsilon > 0$ definirajmo matriko $B(\varepsilon) = (b_{ij}(\varepsilon)) \in Q(A)$

$$|b_{ij}(\varepsilon)| = \begin{cases} 1, & \text{če je } a_{ij} \text{ v } \gamma_1 \\ 2, & \text{če je } a_{ij} \text{ v } \gamma_2 \\ \vdots & \\ t, & \text{če je } a_{ij} \text{ v } \gamma_t \\ \varepsilon, & \text{če } a_{ij} \neq 0 \text{ in ni v } \Gamma \end{cases}$$

Pokazali bomo, da je karakteristični polinom $B(0)$ enak

$$p(\lambda) = \det(B(0) - \lambda I) = (-1)^n \lambda^{n-c(A)} \prod_{i=1}^{t} (\lambda^{l_i} - (-1)^{a_i} i^{l_i}), \tag{1}$$

kjer je parameter a_i odvisen od predpisanih predznakov v posameznem ciklu γ_i. Število a_i je število minusov v danem ciklu γ_i.

Primer 2.13. Poglejmo si enostaven urejen cikel dolžine l_i. Karakteristični polinom je oblike

$$\det(B(0)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & i & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & i \\ i & & & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{l_i}(\lambda^{l_i} - i^{l_i}) \qquad \diamondsuit$$

Primer 2.14. Na primeru si poglejmo, kako pridemo do formule 1. Naj bo $\Gamma = (134)(25)$ sestavljen cikel, kateremu pripada sledeča matrika $B(0)$.

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Njen karakteristični polinom je enak

$$\det(B(0)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Vemo, da determinanta spremeni predznak, če zamenjamo vrstici ali stolpca. Zamenjali bomo tako vrstici kot stolpca, zato elementi $-\lambda$ ostajajo na diagonali. Z menjavami želimo doseči, da dobimo cikel, urejen po blokih. Drugo determinanto dobimo z zamenjavo drugega in tretjega stolpca, ter druge in tretje vrstice. Predznak se ohrani, ker opravimo dve zamenjavi.

$$\det(B(0)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^5(\lambda^3-1)(\lambda^2-2^2)$$

To determinanto dobimo z zamenjavo tretjega in četrtega stolpca ter z zamenjavo tretje in četrte vrstice. Sedaj smo dobili prvi cikel urejen v zgornjem levem 3×3 bloku, drugi cikel pa urejen v spodnjem desnem 2×2 bloku. S pomočjo prejšnjega primera dobimo karakteristični polinom. $\diamondsuit$

Matrika $B(0)$ ima očitno $c(A)$ različnih neničelnih lastnih vrednosti kompleksni koreni števila i (iz cikla γ_i) in $z(B(0)) = n-c(A)$. Jedro matrike $B(0)$ je enako $n-c(A)$, torej sledi da je $g(B(0)) = n-c(A) = z(B(0))$. Ker so lastne vrednosti zvezno odvisne od elementov matrike [5], ni težko preveriti, da ima za dovolj majhen $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon)$ najmanj $c(A)$ različnih neničelnih lastnih vrednosti. Za dovolj majhen $\varepsilon > 0$ velja $c(A) \leq \operatorname{rang} B(\varepsilon) \leq \mathrm{MR(A)}$, po predpostavki pa velja $c(A) = \mathrm{MR(A)}$. Velja $n-c(A) = n-\operatorname{rang} B(\varepsilon) = g(B(\varepsilon)) \leq z(B(\varepsilon)) \leq n-c(A)$. Algebraična večkratnost je vedno večja od geometrijske, zato velja predzadnja neenakost. Matrika $B(\varepsilon)$ ima vsaj $c(A)$ različnih neničelnih lastnih vrednosti, zato velja zadnja neenakost. Torej je $g(B(\varepsilon)) = z(B(\varepsilon)) = n-c(A)$. Ker ima vsaka lastna vrednost matrike $B(\varepsilon)$ enaki algebraično in geometrično večkratnost, je matrika $B(\epsilon)$ diagonalizabilna in izrek drži. $\square$

Izrek 2.15. *Naj bo $A \in Q_n$. Če je $c(A) \geq n-1$, potem A dopušča diagonalizacijo.*

Temu izreku zadošča primer 2.12. Sedaj pa si poglejmo primer, ko je dolžina najdaljšega cikla za ena manjša od velikosti matrike.

Primer 2.16.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix}$$

Cikel $\gamma = a_{12}a_{23}a_{31}$ je dolžine 3 in je hkrati najdaljši cikel, torej je $c(A) = 3$. Maksimalni rang je $\mathrm{MR(A)} = 3$, torej smo dobili primer, ko velja predpostavka prejšnjega izreka 2.11. Očitno obstaja diagonalizabilna matrika

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \in Q(A),$$

ki ima karakteristični polinom $p(\lambda) = \lambda(\lambda^3 - 2\lambda - 1)$. Lastne vrednosti so tako enake $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ ter $\lambda_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $\diamondsuit$

Dokaz izreka 2.15. Vemo, da velja neenakost $n - 1 \leq c(A) \leq \mathrm{MR(A)}$. Prvi del enakosti je predpostavka izreka, drugi del pa sledi iz leme 2.5. Dokaz razdelimo na dva dela.

1 Če je $c(A) = n$, potem sledi $c(A) = \mathrm{MR(A)}$, kar pa je ravno predpostavka izreka 2.11.

2 Sedaj pa si oglejmo še primer, ko je $c(A) = n - 1$. Vemo, da ima matrika $B(0)$, ki smo jo definirali pri dokazu izreka 2.11, $n-1$ različnih neničelnih lastnih vrednosti ter eno ničelno lastno vrednost. Zaradi zveznosti spektra in ker gre ε proti 0 ima matrika $B(\varepsilon)$ n različnih lastnih vrednosti. Torej je matrika $B(\varepsilon)$ diagonalizabilna.

$\square$

Izrek 2.17. *Naj bo $A \in Q_n$. Če v A obstaja neki breztetivni k-cikel Γ z $\mathrm{mr(A)} \leq k \leq \mathrm{MR(A)}$, potem A dopušča diagonalizacijo.*

Primer 2.18.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Breztetivni cikel matrike A je $\Gamma = a_{13}a_{32}a_{24}a_{41}$ in je dolžine 4. Velja $\mathrm{mr(A)} = 4 \leq k = 4 \leq \mathrm{MR(A)} = 5$. Torej je izpolnjen pogoj izreka. Definiramo matriko B

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Njen karakteristični polinom je enak $p(B-\lambda I) = \lambda^2(\lambda^4-1) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i)$. Lastne vrednosti so torej $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=1$, $\lambda_4=-1$, $\lambda_5=i$ in $\lambda_6=-i$. Algebraične večkratnosti so enake 1, razen za lastno vrednost 0 je $a(0)=2$. Geometrične večkratnosti pa so ravno tako enake 1, razen za lastno vrednost 0 je $g(0)=2$, ker je jedro matrike B dvorazsežno. Torej je B diagonalizabilna. $\diamondsuit$

Dokaz izreka 2.17. Naj bo množica indeksov cikla Γ enaka $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Na matriki predznakov A izvedimo naslednje zamenjave vrstic in stolpcev. Najprej zamenjajmo prvo vrstico (in stolpec) z i_1-to vrstico (in stolpcem), nato zamenjajmo drugo vrstico (in stolpec) z i_2-to vrstico (in stolpcem). V tem vrstnem redu nadaljujemo vse do zamenjave k-te vrstice (in stolpca) z i_k-to vrstico (in stolpcem). Pri zamenjavah vrstic in stolpcev se rang matrike ne spreminja, torej se minimalni in maksimalni rang matrike predznakov ohranjata. Cikel Γ je v neki glavni podmatriki, katero želimo z zamenjavami vrstic in stolpcev spraviti v vodilno glavno podmatriko. Torej se dolžina cikla ne spremeni, ravno tako je ta permutiran cikel breztetivni, saj smo samo podmatriko prestavili. Z zamenjavo vrstic in stolpcev se determinanta matrike spremeni le v predznaku, tako da se algebraična večkratnost lastnih vrednosti ohranja. Ravno tako z zamenjavami vrstic in stolpcev ne vplivamo na jedro matrike, zato se ohranja tudi geometrijska večkratnost. Sedaj smo dobili cikel Γ_1 z indeksno množico $\{1, 2, \ldots, k\}$. Po lemi 2.7 obstaja takšna realna matrika $B \in Q(A)$, da je $\operatorname{rang} B = k$. Ker je cikel Γ_1 breztetivni, je vodilna $k \times k$ glavna podmatrika sestavljena s k elementov, ki so vsak v svoji vrstici in stolpcu. Torej je vodilni $k \times k$ glavni minor matrike B neničeln. Naj bo D $n \times n$ diagonalna matrika s pozitivno diagonalo. Potem je $DB \in Q(A)$, $\operatorname{rang} DB = k$ in vodilna $k \times k$ glavna podmatrika C (C ima k elementov, ki so vsak v svorji vrstici in stolpcu) od DB je nesingularna. Sedaj želimo dobiti $n \times n$ obrnljivo matriko P, da iz matrike $DB = \left[\begin{smallmatrix} C & E \\ F & G \end{smallmatrix}\right]$ dobimo podobno matriko

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = P^{-1}DBP.$$

Torej želimo iz matrike DB narediti matriko, ki bo imela v spodnjem delu $n-k$ ničelnih vrstic. Če množimo matriko, ki ima zadnjih $n-k$ vrstic ničelnih, z neko matriko z desne, velja naslednja enakost

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej določiti moramo matriko P^{-1}, da dobimo spodnjih $n-k$ vrstic ničelnih, saj množenje s P z desne ni problematčno za obliko matrike. Sedaj nastavimo matriko P^{-1} tako, da velja enakost

$$P^{-1}\begin{bmatrix} C & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če zapišemo

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_1 & I \end{bmatrix}, \text{ dobimo zahtevo } \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_1 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & E \\ P_1C+F & P_1E+G \end{bmatrix},$$

torej moramo določiti tako matriko P_1, da velja $P_1C = -F$ in $P_1E = -G$. Če zapišemo

$$P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-k,1} & \cdots & \lambda_{n-k,k} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C \mid E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -F \mid -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-k} \end{bmatrix},$$

dobimo zahtevo $v_i = \lambda_{i1}w_1 + \cdots + \lambda_{ik}w_k$ za vse $i \in 1, \ldots, n-k$. Matrika P_1 obstaja, saj so vrstice matrike $\begin{bmatrix} -F \mid -G \end{bmatrix}$ ravno linearne kombinacije vrstic matrike $\begin{bmatrix} C \mid E \end{bmatrix}$. To seveda velja, ker je podmatrika C ranga k, torej lahko zadnjih $n-k$ vrstic matrike DB izrazimo s prvimi k vrsticami te matrike. Sedaj dobimo

$$P^{-1}DBP = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & E \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_1 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C - EP_1 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B_1.$$

Matrika B_1 je tako podobna matriki DB. Za podobne matrike velja, da imajo enak rang in enake lastne vrednosti. Očitno ima matrika B_1 $n-k$ ničelnih lastnih vrednosti. Algebraična večkratnost lastne vrednosti nič je tako enaka $z(B_1) = z(DB) = n-k$. Geometrična večkratnost lastne vrednosti nič pa je enaka $g(B_1) = n - \text{rang}(B_1) = n-k = g(DB)$, zato je $z(DB) = g(DB)$. Ker je Γ_1 breztetivni cikel, lahko izberemo tako diagonalno matriko D, da bo imela matrika DB k različnih neničelnih lastnih vrednosti. Recimo da je $\Gamma_1 = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l$. Matriko D nastavimo tako,da imajo vsi elementi enostavnega cikla γ_i na mestih v ciklu število $\pm i$.

Primer 2.19. Naj bo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedaj izberemo tako diagonalno matriko D da velja naslednja enakost

$$DB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

To pomeni, da ima matrika DB k različnih neničelnih lastnih vrednosti. Matrika DB je diagonalizabilna in izrek sledi. $\square$

Pred naslednjim zadostnim pogojem bomo potrebovali še eno definicijo.

Definicija 2.20. Matrika predznakov A je *kombinatorično simetrična*, če velja $a_{ij} \neq 0$ natanko tedaj, ko je $a_{ji} \neq 0$.

Opomba 2.21. Če je A kombinatorično simetrična, ni nujno, da $Q(A)$ vsebuje simetrično matriko.

Primer 2.22. Za kombinatorično simetrično matriko predznakov

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + \\ - & 0 \end{bmatrix}$$

$Q(A)$ ne vsebuje simetrične matrike. $\diamondsuit$

Lema 2.23. *Če je A kombinatorično simetrična, potem velja* MR(A) $= c(A)$

Poglejmo si dokaz, ki je povsem kombinatoričen.

Dokaz. Naj bo $A = (a_{ij}) \in Q$ kombinatorično simetrična matrika predznakov z maksimalnim rangom MR(A) $= k$. Lotimo se dokaza leme s protislovjem. Predpostavimo, da je $c(A) < k$ in naj za $B = (b_{ij}) \in Q(A)$ velja $\operatorname{rang} B = k$. Potem obstaja neničelna poddeterminanta reda k v B, vse glavne poddeterminante reda k v B pa so ničelne. Če bi bila glavna poddeterminanta neničelna, bi obstajal cikel dolžine k. To pomeni, da obstaja k neničelnih elementov $b_{i_1j_1}, b_{i_2j_2}, \ldots, b_{i_kj_k}$ v različnih vrsticah in stolpcih B-ja, da velja $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\}$. Naj bo $T = \{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_k\}, X = \{i_1, \ldots, i_k\} \setminus T$ in $Y = \{j_1, \ldots, j_k\} \setminus T$. Obravnavajmo produkt $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2} \ldots a_{i_kj_k}$. Potem obstaja tak m-cikel (enostaven ali sestavljen) γ_0 in take poti $P_1, \ldots, P_t$ $(t \geq 1)$ v A, da so oglišča γ_0 in notranja oglišča poti P_i v T, začetna oglišča vsake poti P_i so v X, končna oglišča pa v Y in vsota dolžin vseh zgornjih poti je $k - m > 0$. Za vsako pot $P_i = a_{l_1l_2}a_{l_2l_3} \ldots a_{l_{s_i}l_{s_{i+1}}}$ dobimo, če je s_i liho, sestavljen $(s_i + 1)$-cikel $\gamma_i = a_{l_1l_2}a_{l_2l_1} \ldots a_{l_{s_i}l_{s_{i+1}}}a_{l_{s_{i+1}}l_{s_i}}$ v A, ki je disjunktna unija $\frac{1}{2}(s_i+1)$ ciklov dolžine 2, ki ustrezajo prvi, tretji,. . .,s_i-ti točki poti P_i. Podobno naredimo, če je s_i sodo. Vzamemo sestavljen s_i-cikel $\gamma_i = a_{l_1l_2}a_{l_2l_1} \ldots a_{l_{s_{i-1}}l_{s_i}}a_{l_{s_i}l_{s_{i-1}}}$ v A, ki je disjunktna unija $\frac{1}{2}s_i$ ciklov dolžine 2, ki ustreza prvi, tretji, ..., s_{i-1} točki poti P_i. Cikel $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_t$ je tedaj sestavljen cikel dolžine $\geq k$. Prišli smo v nasprotje s predpostavko, da je $c(A) < k$. Torej je MR(A) $= c(A)$. □

Primer 2.24. Poglejmo si dokaz leme 2.23 na primeru. Imamo kombinatorično simetrično matriko predznakov A z MR(A) $= 7$. Sedaj predpostavimo $c(A) <$ MR(A). Izberemo neničelne elemente b_{12}, b_{21}, b_{34}, b_{45}, b_{56}, b_{78} in b_{89} matrike $B \in Q(A)$. Sedaj si poglejmo produkt $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{56}a_{78}a_{89}$. Množica začetnih točk je $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, množica končnih pa $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$. Potem so $T = \{1, 2, 4, 5, 8\}$, $X = \{3, 7\}$ in $Y = \{6, 9\}$. Iz produkta zdaj dobimo cikel $\gamma_0 = a_{12}a_{21}$ ter dve poti $P_1 = a_{34}a_{45}a_{56}$ in $P_2 = a_{78}a_{89}$. Ker je matrika predznakov kombinatorično simetrična lahko obe poti preoblikujemo v sestavljena cikla. Iz poti P_1 dobimo cikel $\gamma_1 = a_{34}a_{43}a_{56}a_{65}$, iz poti P_2 pa cikel $\gamma_2 = a_{78}a_{87}$. Dobimo sestavljen cikel $\gamma = \gamma_0\gamma_1\gamma_2$, ki je dolžine 8. Prišli smo torej do protislovja. ♢

Iz leme 2.23 in izreka 2.11 dobimo posledico.

Posledica 2.25. *Naj bo A matrika predznakov. Če je A kombinatorično simetrična, potem A dopušča diagonalizacijo.*

Posledica nam da zelo lep pogoj za diagonalizacijo, saj je zelo preprosto preveriti, ali je matrika predznakov kombinatorično simetrična. Sedaj si poglejmo primer, ki zadošča zgornji posledici.

Primer 2.26.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & + \\ - & + & - & 0 \\ 0 & + & 0 & + \\ + & 0 & + & 0 \end{bmatrix}$$

A je očitno kombinatorično simetrična. Opazimo da je $c(A) = 4 =$ MR(A), torej matrika predznakov dopušča diagonalizabilnost po izreku 2.11 ♢

Če matrika predznakov ne izpolnjuje niti enega od zadostnih pogojev (izrekov), še ne pomeni, da ne dopušča diagonalizabilnosti. Iz tega sledi, da je vprašanje diagonalizabilnosti matrik predznakov še vedno nerešeno. Zato si sedaj poglejmo primer, ki dopušča diagonalizabilnost, vendar ne izpolnjuje niti enega od sedaj navedenih pogojev (izrekov).

Primer 2.27.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MR(A) = 4, mr(A) = 3, $c(A) = 3$, A ni kombinatorično simetrična, obstaja samo en 3-cikel $\gamma = a_{12}a_{23}a_{31}$, ki pa je tetivni s tetivo a_{13}. Tako matrika A ne izpolnjuje niti enega izmed zadostnih pogojev. Vzemimo realno matriko

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iz $Q(A)$, ki ima karakteristični polinom $-\lambda^2(\lambda^3 - \lambda - 1)$. Karakteristični polinom ima tri različne neničelne lastne vrednosti. Algebraična večkratnost lastne vrednosti nič $a(0) = 2$ je enaka geometrični večkratnosti lastne vrednosti nič $g(0) = 2$ (jedro matrike B je dvorazsežno), za ostale lastne vrednosti pa so algebraične in geometrične večkratnosti enake 1. Sledi, da je B diagonalizabilna, torej A dopušča diagonalizacijo. $\diamondsuit$

Poglejmo si še primer matrike, ki ne dopušča diagonalizacije.

Primer 2.28. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobimo cikel $\gamma = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{67}a_{71}$, ki je maksimalne dolžine, saj ne najdemo neničelne 8×8 glavne poddeterminante, tj. $c(A) = 7$. Velja MR(A) = 8 in mr(A) = 7. Iz leme 3.2 v nadaljevanju sledi, da je $z(A) = n - c(A) = 2$. Minimalna geometrijska večkratnost lastne vrednosti nič je $g(A) = 9 - \text{MR(A)} = 1$. Če velja

$$\begin{vmatrix} b_{23} & b_{24} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} \neq 0$$

za $B \in Q(A)$, potem je rang $B = \mathrm{MR(A)} = 8$ in $z(B) = 2$. Sledi, da je $g(B) < z(B)$ in tako B ni diagonalizabilna. Če pa velja

$$\begin{vmatrix} b_{23} & b_{24} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

je rang $B = 7$. Sedaj dobimo $g(B) = 2$. Če pogledamo vse glavne poddeterminante velikosti 7×7, ugotovimo, da so ničelne. Ker so vse 7×7 glavne poddeterminante ničelne je v karakterističnem polinomu koeficient pri λ^2 ničelen. Od prej že vemo, da sta koeficienta pri λ in λ^0 ničelna. Tako ima ničelna lastna vrednost večkratnost 3. Sledi $z(B) = 3$ in tako pridemo do ugotovitve, da A ne dopušča diagonalizacije. $\diamondsuit$

3. Matrike predznakov, ki zahtevajo ponavljajoče lastne vrednosti

Večina naših opažanj v tem poglavju [1] se osredotoča na lastnosti, povezane s ponavljanjem lastnih vrednosti. V zadnjem delu bomo uporabili naše ugotovitve za ponovno raziskovanje, kdaj matrika predznakov dopušča diagonalizacijo.

Za lažje izražanje definirajmo še nekaj pojmov, povezanih z matrikami predznakov. Z $d(A) = n - MR(A)$ označimo *minimalni defekt matrike*, ki se pojavi v matrikah $B \in Q(A)$. Podobno z $D(A) = n - \mathrm{mr(A)}$ označimo *maksimalni defekt matrike*, ki se pojavi v $Q(A)$. Če želimo, da se oznake nanašajo na aktualni rang realne matrike B, uporabimo oznako $d(B)$. Torej $d(B)$ je defekt matrike B.

V matriki predznakov A neničelni element $a_{ij} \in \{+, -\}$ predstavlja *usmerjeno povezavo* $i \to j$ v *grafu.* V tem primeru je i začetna točka ter j končna točka. Tako dobimo iz matrike predznakov graf, ki pa je *usmerjen.* Sedaj si poglejmo še prirejanje s kardinalnostjo k v usmerjenem grafu. *Prirejanje* je množica k povezav, katerih začetne točke so različne, prav tako pa so različne vse končne točke. Prirejanju rečemo *glavno prirejanje*, če je množica začetnih točk enaka množici končnih točk. Glavno prirejanje tako natančno ustreza ciklu v matriki predznakov.

Primer 3.1. Naj bo A matrika predznakov

$$A = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & + & 0 & 0 \\ + & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

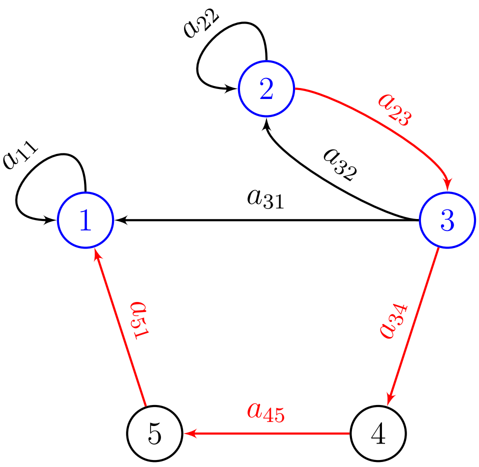
Na sliki 1 je usmerjen graf za matriko predznakov A. Maksimalno prirejanje v A je v usmerjenem grafu obarvano z rdečo in je kardinalnosti 4. Množica začetnih točk maksimalnega prirejanja je $\{1, 2, 3, 4\}$ množica končnih pa $\{2, 3, 4, 5\}$. Z modro so označena vozlišča glavnega prirejanja za A v usmerjenem grafu in ima množici začetnih in končnih točk enaki $\{1, 2, 3\}$, kar ustreza ciklu $\gamma = a_{11}a_{23}a_{32}$. $\diamondsuit$

Naš namen je obravnavati relacije med večimi algebrajskimi in kombinatoričnimi lastnostmi za matrike predznakov. Prvo opažanje vključuje nujnost ničelne lastne vrednosti in s tem motivira nadaljno razpravo. Poglejmo lemo, ki nam bo v nadaljevanju pomagala pri dokazih izrekov.

Lema 3.2. *Če je A $n \times n$ matrika predznakov, velja:*

(i) $z(A) = n - c(A)$,

(ii) obstaja matrika $B \in Q(A)$ z natančno $c(A)$ različnimi neničelnimi lastnimi vrednostmi.



SLIKA 1. Usmerjen graf za matriko predznakov A.

Oglejmo si primer, ki ilustrira veljavnost leme 3.2.

Primer 3.3. Naj bo A matrika predznakov. Preverimo, ali lema 3.2 velja.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Očitno je MR(A) $= 4$, $c(A) = 3$. Sedaj si poglejmo karakteristični polinom poljubne matrike $B \in Q(A)$:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & b_{12} & 0 & b_{14} & 0 \\ b_{21} & -\lambda & 0 & b_{24} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & b_{34} & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & b_{53} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda^3 + b_{12}b_{24}b_{41} + \lambda b_{41}b_{14} + \lambda b_{12}b_{21})$$

Očitno ima karakteristični polinom $c(A)$ neničelnih in $z(A)$ ničelnih lastnih vrednosti. Torej $z(A) = 5 - c(A) = 2$. Koeficienta $b_{12}b_{24}b_{41}$ in $b_{41}b_{14} + b_{12}b_{21}$ lahko nastavimo tako, da bo imel karakteristični polinom tri različne neničelne lastne vrednosti. Ugotovimo, da za ta primer res veljata trditvi leme. $\diamondsuit$

Sedaj si poglejmo dokaz leme, pri katerem si bomo pomagali z dokazom izreka 2.11.

Dokaz leme 3.2. Začnimo z dokazom točke (ii), saj bo potem lažje dokazati točko (i).

Naj bo $A = (a_{ij}) \in Q_n$ matrika predznakov in vzemimo cikel $\Gamma = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_t$ dolžine $c(A)$, kjer je vsak γ_i enostaven cikel dolžine l_i, tako da velja $\sum_{i=1}^{t} l_i = c(A)$, množice indeksov γ_i pa so med seboj disjunktne. Če je $t = 1$, potem je Γ enostaven cikel dolžine $c(A)$. Za $\varepsilon \geq 0$ definirajmo matriko $B(\varepsilon) = (b_{ij}(\varepsilon)) \in Q(A)$

$$|b_{ij}(\varepsilon)| = \begin{cases} 1, & \text{če je } a_{ij} \text{ v } \gamma_1 \\ 2, & \text{če je } a_{ij} \text{ v } \gamma_2 \\ \vdots & \\ t, & \text{če je } a_{ij} \text{ v } \gamma_t \\ \varepsilon, & \text{če } a_{ij} \neq 0 \text{ in ni v } \Gamma \end{cases}$$

Potem je karakteristični polinom $B(0)$ enak

$$p(\lambda) = \det(B(0) - \lambda I) = (-1)^n \lambda^{n-c(A)} \prod_{i=1}^{t} (\lambda^{l_i} - (-1)^{a_i} i^{l_i}), \quad \text{(glej izrek 2.11)}$$

kjer je parameter a_i odvisen od predpisanih predznakov v posameznem ciklu γ_i. Število a_i je število minusov v danem ciklu γ_i. Očitno ima $B(0)$ $c(A)$ različnih neničelnih lastnih vrednosti. Za dovolj majhen ε so lastne vrednosti matrike $B(\varepsilon) \in Q(A)$ blizu lastnih vrednosti matrike $B(0)$. Tako ima matrika $B(\epsilon)$ vsaj $c(A)$ različnih neničelnih lastnih vrednosti, torej velja neenakost $z(A) \leq n - c(A)$. Sedaj si poglejmo dokaz točke (i), ker si bomo pri dokončanju dokaza točke (ii) pomagali s točko (i)

Pri trditvi (i) opazimo, da je koeficient λ^{n-k} v karakterističnem polinomu matrike $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\pm$ vsota $k \times k$ glavnih poddeterminant B. Če je $k \times k$ glavna poddeterminanta neničelna, potem obstaja k-cikel v matriki predznakov. Tako za $k \geq c(A)$ sledi, da so vse glavne $k \times k$ poddeterminante matrike B ničelne. Sklepamo, da $\lambda^{n-c(A)}$ deli karakteristični polinom $B \in Q(A)$. Sledi $z(A) \geq n - c(A)$. Pri dokazu (ii) smo dobili neenakost $z(A) \leq n - c(A)$. Torej velja $z(A) = n - c(A)$.

Nadaljujmo z dokazom (ii). Po točki (i) vemo, da imamo $n - c(A)$ kratno ničelno lastno vrednost. Tako ima matrika B ravno $c(A)$ različnih neničelnih lastnih vrednosti. □

Pa si poglejmo naslednji izrek.

Izrek 3.4. *Za $n \times n$ matriko predznakov A so naslednje izjave ekvivalentne:*

(2) $\quad$ *med $p \times q$ ničelnimi podmatrikami A velja* $\max(p + q) \geq n + 1$

(3) $$d(A) \geq 1$$

(4) $$g(A) \geq 1$$

(5) $$z(A) \geq 1$$

(6) $$c(A) \leq n - 1$$

in

(7) $$B \in Q(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = 0$$

Izjave (2), (3) in (4) so še vedno ekvivalentne, če zamenjamo neenakosti z enakostmi. Preverimo zgornje ekvivalence na naslednjem primeru.

Primer 3.5. Naj bo A matrika predznakov velikosti 5×5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix}$$

V matriki predznakov A je največja ničelna podmatrika velikosti 4×2, katere elementi so v preseku prvih štirih vrstic z drugim in četrtim stolpcem. Torej $4+2 = 6 \geq 5+1$. Maksimalni rang je $\mathrm{MR(A)} = 4$, tako da je minimalni defekt $d(A) = 1$ in je večji od 1. Geometrična večkratnost $g(A) = 1 \geq 1$, ker velja neenakost $z(A) \geq g(A)$, velja tudi $z(A) \geq 1$. V A je $\gamma = a_{12}a_{23}a_{35}a_{51}$ najdaljši cikel dolžine $c(A) = 4 \leq 5-1$. Naj bo $B \in Q(A)$ poljubna matrika predznakov. Determinanta je

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & 0 & -b_{35} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 & 0 \\ b_{51} & 0 & 0 & b_{54} & 0 \end{vmatrix} = b_{51}b_{12}b_{23} \begin{vmatrix} 0 & -b_{35} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Očitno je $\forall B \in Q(A)\ \det(B) = 0$. Na tem primeru veljajo vse trditve izreka 3.4. $\diamondsuit$

Poglejmo si dokaz izreka, pri katerem si bomo pomagali z lemo 3.2.

Dokaz izreka 3.4. Če dokažemo naslednje implikacije, so si trditve ekvivalentne. Torej dokažimo, da velja (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Vemo, da v matriki predznakov A obstaja taka $p \times q$ podmatrika ničel, da velja $\max(p+q) \geq n+1$. Dokazujemo, da velja $d(A) = n - \mathrm{MR(A)} \geq 1$. Če dokažemo, da ima $\forall B \in Q(A)$ determinanto enako 0, potem sledi $\mathrm{MR(A)} \leq n-1$. Preoblikujemo neenakost in dobimo $d(A) = n - \mathrm{MR(A)} \geq 1$. Obravnavajmo determinanto matrike B. Predpostavimo, da je $q \geq p$, sicer je dokaz podoben.

$$\det(B) = (-1)^s \quad \det \left(\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad q \quad & \quad n-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ \\ n-p \end{array} & \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Iz determinante matrike B v zgornjo obliko pridemo z zamenjavo vrstic in stolpcev, tako da dobimo v zgornjem levem kotu $p \times q$ podmatriko ničel. Parameter s je število zamenjav vrstic in stolpcev. Zaradi predpostavk $q \geq p$ in $p+q \geq n+1$ sledi $n-q < p$. Ker je $p > n-q$, je prvih p vrstic linearno odvisnih, zato je $\det B = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Vemo, da velja $d(A) = n - \mathrm{MR(A)} \geq 1$. Geometrična večkratnost lastne vrednosti 0 je enaka $g(0) = n - \mathrm{rang}(B - 0 \cdot I)$ za neko matriko B. Iščemo minimalno večkratnost, ta pa je ravno $g(A) = n - \mathrm{MR(A)} \geq 1$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Predpostavimo da velja neenakost $g(A) \geq 1$. Neenakost $z(A) \geq g(A)$ vedno drži. Torej $z(A) \geq 1$.

(5) $\Rightarrow$ (6): Predpostavimo da velja neenakost $z(A) \geq 1$. Po lemi 3.2 velja $z(A) = n - c(A)$. Ko upoštevamo predpostavko, dobimo $n - c(A) \geq 1$. Sedaj neenakost preoblikujemo in dobimo $c(A) \leq n-1$.

(6) $\Rightarrow$ (7): Predpostavimo da velja neenakost $c(A) \leq n-1$. Dokazujemo, da za $\forall B \in Q(A)$ velja $\det(B) = 0$. Po lemi 3.2 vemo, da je $z(A) = n - c(A)$. Po predpostavki je $c(A) \leq n-1$. Sledi $z(A) \geq 1$. Sedaj vemo, da ima vsaka matrika $B \in Q(A)$ vsaj eno lastno vrednost enako 0. Karakteristični polinom poljubne matrike B je enak $p_B(\lambda) = \lambda^{z(A)}(\cdots)$. To pomeni, da ima matrika B netrivialno jedro, zato je $\det(B) = 0$.

(7) $\Rightarrow$ (2): Predpostavimo da za vsak$B$ iz množice $Q(A)$ velja $\det(B) = 0$. Dokazujemo obstoj take $p \times q$ ničelne podmatrike v A, da velja $p + q \geq n + 1$. Maksimalni rang matrike predzankov je očitno manjši od n. Naj bo MR(A) $= k$. Maksimalni rang je enak minimalnemu številu linij, ki pokrijejo vse neničelne elemente. Torej po Königovem izreku 1.9 velja MR(A) $= i + j$, kjer sta i in j ravno števili vrstic in stolpcev, ki pokrijejo vse neničelne elemente matrike predznakov. V preostali podmatriki dimenzije $(n-i) \times (n-j)$ so ničle. Ker velja $n-k \geq 1$, dobimo $n - i + n - j = n + n - k \geq n + 1$, torej velja trditev (2). □

Sedaj si poglejmo izrek o večkratni lastni vrednosti.

Izrek 3.6. *Za $n \times n$ matriko predznakov A so naslednje izjave ekvivalentne za vsa pozitivna števila k, le pri izjavi* (2) *je $k = 1$ izpuščen.*

$$z(A) = k \tag{8}$$

$$\text{\textit{Vse matrike } } B \text{\textit{ iz množice }} Q(A) \text{\textit{ zahtevajo lastno vrednost večkratnosti }} k \tag{9}$$

$$c(A) = n - k \tag{10}$$

$$\text{\textit{maksimalna kardinalnost glavnega prirejanja v }} A \text{\textit{ je }} n-k \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\text{\textit{Naj bo }} B \in Q(A) \text{\textit{ in }} B' \ m \times m \text{\textit{ glavna podmatrika }} B\text{\textit{, da velja }} m > n-k, \\ \text{\textit{potem sledi, da je }} \det B' = 0\end{gathered} \tag{12}$$

Dokaz. Po lemi 3.2 velja $z(A) = n - c(A)$ torej sta si ekvivalentni izjavi (8) in (10). Iz leme 3.2 tudi sledi, da matrika predznakov zahteva ponavljajočo lastno vrednost samo za 0. To je pomembno, ko želimo preveriti, da sta izjavi (8) in (9) ekvivalentni. Implikacija iz (8) v (9) je očitna. V obratno smer imamo lastno vrednost večkratnosti k, ki je po lemi 3.2 ničelna lastna vrednost. Torej je $z(A) = k$. Sedaj si poglejmo ekvivalenco med (10) in (11), ki je v celoti kombinatorična. Najprej poglejmo (11) $\Rightarrow$ (10). Imamo množico začetnih in končnih točk prirejana $I = \{i_1, \ldots, i_{n-k}\}$ in $J = \{j_1, \ldots, i_{n-k}\}$. Ker je prirejanje glavno, sledi $I = J$. Obstaja permutacija množice I $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-k} \\ \pi(i_1) & \pi(i_2) & \cdots & \pi(i_{n-k}) \end{pmatrix}$, ki ustreza ciklu matrike predznakov A, katerega dolžina je $c(A) = n - k$. Poglejmo implikacijo še v drugo smer. Maksimalna dolžina cikla v A je $c(A) = n - k$. Cikel $\gamma = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{n-k} i_1}$ ima indeksno množico $\{i_1, \ldots, i_{n-k}\}$. Torej obstaja glavno prirejanje kardinalnosti $n - k$ z začetno in končno množico enako indeksni množici. Poglejmo si še ekvivalenco med (12) in (11). Najprej poglejmo implikacijo iz (12) v (11). Ker vsak člen v razvoju determinante glavne podmatrike ustreza nekemu glavnemu prirejanju, tako iz izjave sledi, da v matriki B ne najdemo glavnega prirejanja kardinalnosti večje od $n - k$. Torej je maksimalna kardinalnost glavnega prirejanja $n - k$. V obratno smer pa predpostavimo, da je maksimalna kardinalnost glavnega prirejanja enaka $n - k$.

Vsak člen v razvoju determinante glavne podmatrike ustreza nekemu glavnemu prirejanju, torej so vse glavne poddeterminante matrike B z razsežnostjo večjo od $n-k$ ničelne. $\square$

Iz dokaza izreka 3.6 lahko pridemo do naslednje leme.

Lema 3.7. *Maksimalna kardinalnost prirejanja, ki ni glavno, je lahko največ $n-1$.*

Dokaz. Naj bo $(\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_k, i_{k+1})\})$ prirejanje s kardinalnostjo k. Sedaj si poglejmo poddeterminanto matrike predznakov, v katero vzamemo samo elemente preseka vrstic $(i_1, \ldots, i_k)$ in stolpcev $(i_2, \ldots, i_{k+1})$. Dobili smo poddeterminanto, ki pa ni glavna. V primeru, ko je $k = n$, dobimo glavno podeterminanto, kar pomeni, da je naše prirejanje glavno prirejanje. $\square$

Naslednja lema je nadaljevanje leme 3.7.

Lema 3.8. *Naj bo $A \in Q(A)$. Če je* $\mathrm{MR(A)} = n$*, sledi, da je $c(A) = n$.*

Dokaz. Po dokazu leme 3.7 opazimo da je lahko le glavno prirejanje kardinalnosti n. Ker imamo matriko predznakov polnega ranga, potem obstaja glavno prirejanje kardinalnosti n. Začetne in končne točke glavnega prirejanja so $\{1, 2, \ldots, n\}$. Torej obstaja permutacija

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

ki ustreza ciklu matrike predznakov A, katerega dolžina je $c(A) = n$. $\square$

Iz leme 3.7 in izreka 2.11 dobimo posledico.

Posledica 3.9. *Naj bo $A \in Q(A)$. Če je* $\mathrm{MR(A)} = n$*, potem matrika predznakov A dopušča diagonalizacijo.*

Dokaz. Po lemi 3.8 velja $\mathrm{MR(A)} = c(A) = n$, kar pa je ravno predpostavka izreka 2.11.

Izrek 3.10. *Za $n \times n$ matriko predznakov A so naslednje izjave ekvivalentne za vsa naravna števila $k \leq n$.*

(13) *med $p \times q$ ničelnimi podmatrikami A, da velja* $\max(p+q) = n+k$*;*

(14) $$d(A) = k;$$

(15) $$g(A) = k;$$

(16) *maksimalna kardinalnost prirejanja v A je $n-k$;*

(17) *$B \in Q(A)$ in B' $m \times m$ podmatrika v B, $m > n-k$, potem sledi , da je* $\det B' = 0$

Dokaz. Vemo da je $d(B) = g(B)$ za vse realne matrike B, zato sta izjavi (14) in (15) ekvivalentni. $\rho(A)$ je minimalno število linij (vrstic ali stolpcev) matrike, ki pokrivajo vse neničelne elemente matrike. Ker velja $\rho(A) = MR(A)$, potem je lahko maksimalna kardinalnost prirejanja največ $MR(A)$, saj bi v nasprotnem primeru obstajala neničelna poddeterminanta razsežnosti večje od $MR(A)$. Sledi, da je izjava

(18) $$\rho(A) \text{ matrike } A \text{ je } n-k$$

ekvivalentna izjavi (16). Dokažimo implikacijo (13) v (18). Iz predpostavke imamo pokritje z $n + k$ lini, ki pokrije vse ničelne elemente matrike. Torej pokritje z $2n - n - k$ linijami pokrije vse neničelne elemente. Torej dobimo $n - k$, kar pa je predpostavka izjave (18). Pri dokazu implikacije v obratno smer imamo pokritje z $n-k$ linijami, ki pokrije vse neničelne elemente matrike. Torej pokritje z $2n-n+k = n + k$ linijami pokrije vse ničelne elemente matrike. Izjavi (13) in (18) sta si tako ekvivalentni. Sedaj si poglejmo ekvivalenco med (16) in (14). Ob predpostavi (16) ima vsaka podmatrika z razsežnostjo večjo od $n - k$ ničelno poddeterminanto, zato ker vsak člen v razvoju determinante podmatrike ustreza nekemu prirejanju. Torej je $MR(A) = n - k$ in posledično $d(A) = n - MR(A) = k$. V obratno smer predpostavimo izjavo (14), iz katere sledi, da je $MR(A) = n - k$. Tako obstaja neničelna poddeterminanta z razsežnostjo $n - k$, katere vsak člen v razvoju ustreza nekemu prirejanju. Maksimalna kardinalnost prirejanja je $n - k$. Poglejmo si še ekvivalenco med (17) in (14). Iz predpostavke (17) sledi, da je rang B enak $n - k$. Posledično je $\mathrm{MR(A)} = n - k$. Torej $d(A) = n - \mathrm{MR(A)} = n - n + k = k$. Še implikacija (14) $\Rightarrow$ (17). Velja predpostavka $d(A) = n - \mathrm{MR(A)}$ torej je $\mathrm{MR(A)} = n - k$ in so vse poddeterminante razsežnosti večje od $n - k$ ničelne. □

Kot smo že omenili, če $n \times n$ matrika predznakov A ne zahteva ponavljajoče lastne vrednosti, potem dopušča diagonalizacijo. Po izreku 3.6 iz $c(A) \geq n - 1$ izhaja, da A dopušča diagonalizacijo. Če je $c(A) < n - 1$, A lahko dopušča diagonalizacijo ali pa tudi ne. Z uporabo izreka 3.10 skupaj z izrekom 3.6 lahko pridemo do šibkejše zahteve od $c(A) \geq n - 1$.

Posledica 3.11. *Če je A $n \times n$ matrika predznakov, ki premore glavno prirejanje največje kardinalnosti med vsemi prirejanji, potem A dopušča diagonalizacijo.*

Dokaz. Zaradi izjave (11) in (16), so izjave izreka 3.6 ekvivalentne tistim iz izreka 3.10. Izjavi (8) in (15) povesta, da ničelna lastna vrednost ne ovira diagonalizacije, medtem ko konstrukcija leme 3.2 zagotavlja največje število različnih neničelnih lastnih vrednosti hkrati. □

Posledica 3.12. *Za vse $n \times n$ matrike predznakov A, ki ne premorejo glavnega prirejanja največje kardinalnosti izmed vseh prirejan, obstaja taka permutaciska matrika P, da PA dopušča diagonalizacijo.*

Dokaz. Naj bo $MR(A) = k$ in posledično obstaja neničelna $k \times k$ poddeterminanta. Torej imamo prirejanje kardinalnosti k.Tako imamo množici začetnih in končnih točk prirejanj, ki sta različni, saj prirejanje ni glavno. Želimo dobiti množico začetnih točk, ki bo enaka množici končnih točk. To naredimo z menjavo vrstic. Tako se spremeni množica začetnih točk in postane enaka množici končnih. Množica končnih točk namreč ostane ista, saj se pri menjavi vrstic ne spreminja. Torej obstaja taka obrnljiva matrika P, da ima matrika predznakov PA glavno prirejanje, ki ima največjo dolžino izmed vseh prirejanj. Sedaj uporabimo posledico 3.11. □

Poglejmo si preprost primer za posledico 3.12, da bo dokaz jasnejši.

Primer 3.13. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix}$$

Imamo cikel $\gamma = a_{34}a_{43}$, ki je edini in je dolžine 2. Iz leme 3.2 sledi da je $z(A) = 2$. Poljubna matrika $B \in Q(A)$ ima rang enak 3. Torej je jedro matrike B vedno enorazsežno in tako je $g(A) = 1$. Torej A ne dopušča diagonalizacije. Sedaj poiščimo obrnljivo matriko P, da bo PA dopuščala diagonalizacijo.

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobili smo matriko PA, ki ima cikel $\gamma = a23a_{34}a_{42}$. Cikel γ je edini in dolžine 3. Vsaka realna matrika $B \in Q(A)$ ima rang enak 3. Torej je $MR(A) = 3 = c(A)$, kar pa je ravno predpostavka izreka 2.11. Matrika PA dopušča diagnalizabilnost. $\diamondsuit$

Primer 3.14. Zgornja izjava za realne matrike ne drži. Poglejmo si primer:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obe matriki imata $z(B_1) = z(B_2) = 2$ in $g(B_1) = g(B_2) = 1$ torej nista diagonalizabilni. $\diamondsuit$

Tudi ko matrika predznakov A nima glavnega prirejanja maksimalne kardinalnosti lahko A vseeno dopušča diagonalizacijo.

Primer 3.15. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & + \\ + & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V matriki predznakov imamo samo tricikle. Eden izmed njih je $\gamma = a_{13}a_{32}a_{21}$. Tako je $c(A) = 3$, po lemi 3.2 je $z(A) = 2$. A ima prirejanje kardinalnosti 4 $\{(1,3),(3,2),(2,4),\ (4,5)\}$ in maksimalni ničelni podmatriki razsežnosti 4×2 in 3×3. Iz izreka 3.10 sledi $g(A) = 1$. Seveda vse $B \in Q(A)$, za katere sta $z(B)$ in g(B) minimalni večkratnosti, ne dopuščajo diagonalizacije. Rang $B \in Q(A)$ je enak 3, če in samo če je

$$\det \begin{bmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{43} & a_{45} \end{bmatrix} = 0.$$

Za

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dobimo $g(B) = 2$ in $z(B) = 2$. Karakteristični polinom je $p_B(\lambda) = \lambda^2(-\lambda^3 + 4)$. Ničle so $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 2^{\frac{2}{3}}$ ter $\lambda_{4,5} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. Vse lastne vrednosti imajo enake geometrijske in algebraične večkratnosti, torej je matrika B diagonalizabilna. $\diamondsuit$

Trditev 3.16. *Naj bo A $n \times n$ matrika predznakov s k-ciklom. Naj bosta $s \in \mathbb{Z}$ in $m \in \mathbb{N}$. Potem lahko n zapišemo kot nekajkrat k plus nek ostanek. Torej $n = m \cdot k + s$, kjer je $0 \leq s < k$. Sledi* *(i)* $z(A) \geq s$,

(ii) *če je* $s \geq 1$ *, potem je* $d(A) \geq 1$,

(iii) *če je* $s = 0$ *in* $d(A) \geq 1$, *potem je* $z(A) \geq k$.

Dokaz. Ker matrika predznakov A vsebuje k-cikel, potem lahko n zapišemo na sledeč način $n = m \cdot k + s$, kjer je $s \in \mathbb{Z}$ in naj velja $0 \leq s < k$ ter $m \in \mathbb{N}$. Karakteristični polinom je po lemi 3.2 enak $p_B(\lambda) = \lambda^{n-k} \cdot q(\lambda) = \lambda^{(m-1)k+s} \cdot q(\lambda)$ za nek polinom q stopnje k. Ker je m naravno število, potem velja neenakost $(m-1)k + s \geq s$. Ker je $z(A) = (m-1)k + s$, potem velja prva točka izreka. Sedaj si poglejmo trditev (ii). Ker je s večje od 1, potem imamo vsaj eno ničelno lastno vrednost. Torej je $MR(A) < n$ in posledično $d(A) = n - MR(A) \geq 1$. Poglejmo si še dokaz trditve (iii). Po predpostavki velja, da je maksimalni rang matrike predznakov manjši od n. Torej imamo vsaj eno ničeln lastno vrednost. Sedaj velja naslednja neenakost $(m-1)k \geq 1$, saj je $s = 0$. Sledi, da je $m \geq 2$. Torej je $z(A) = (m-1)k \geq k$. $\square$

Poglejmo si primer za trditev 3.16.

Primer 3.17.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrika predznakov A_1 ima $c(A_1) = 2 = k$, $m = 3$. Ker velja $n = m \cdot k$, je $s = 0$ in $d(A) = 1 \geq 1$. Sledi $z(A) \geq 1$. Karakteristični polinom $B_1 \in Q(A_1)$ je enak $p_{B_1}(\lambda) = \lambda^4(\lambda^2 - b_{12}b_{21})$. Zato velja $z(A_1) = 4$. Za matriko predznakov A_1 velja tudi (i), saj je $z(A_1) \geq 0$. Za matriko predznakov A_2 velja $c(A) = 2 = k$, $m = 2$ in $s = 1$. Matrika $B_2 \in Q(A_2)$ ima karakteristični polinom $p_{B_2}(\lambda) = -\lambda^3(\lambda^2 - b_{12}b_{21})$. Torej A_2 zadošča (i) in (ii), ker je $s = 1$, $z(A) = 3$ in $d(A_2) = 1$. $\diamondsuit$

Slovar strokovnih izrazov

sign patterns matrika predznakov
diagonalizability diagonalizabilnost
chord tetiva – element, ki je tetiva cikla, vendar ne nastopa v ciklu
defekt dimenzija jedra
deficiency defekt matrike predznakov
matching of cardinality n prirejanje kardinalnosti n
$r \times r$ **minor** $r \times r$ poddeterminanta
path pot
cycle cikel
allowes dopušča
eigenvalue lastna vrednost
combinatorially symmetric kombinatorično simetrična
property lastnost

Literatura

[1] C. A. Echenbach in C. R. Johnson, *Sign patterns that require repeated eigenvalues*, Linear Algebra Appl. **190** (1993) 169–179.

[2] R. A. Brualdi in H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[3] T. Košir, *Linearna algebra za študente Praktične matematike*, Matematični rokopisi, Ljubljana, januar 2009; dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~kosir/poucevanje/0910/alg1-fm.html`.

[4] Y Shao in Y. Gao, *Sign patterns that allow diagonalizability*, Linear Algebra Appl. **359** (2003) 113–119.

[5] *Properties of polynomial roots*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 28. 8. 2016], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_polynomial_roots`.