UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Rok Havlas

Prstni odtisi polinomskih lemniskat

Delo diplomskega seminarja

Mentor: akad. prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2016

Kazalo

Prstni odtisi polinomskih lemniskat

Povzetek

Predstavimo Kirillovo metodo, ki temelji na ideji, da lahko vsaki dvodimenzionalni obliki priredimo enolično določen prstni odtis, in obratno. Obravnavamo osnove teorij Riemannovih ploskev in krovnih prostorov. S pomočjo tega dokažemo izrek Ebenfelta, Khavinsona in Shapira, ki pravi, da je prstni odtis polinomske lemniskate enolično podan z Blaschkejevim produktom in obratno, da Blaschkejev produkt enolično določa polinomsko lemniskato.

Fingerprints of polynomial lemniscates

Abstract

We present a method introduced by Kirillov, which is based on the idea that every two-dimensional shape can be uniquely represented by its fingerprint and vice-versa. We study the basics of the theories of Riemann surfaces and covering spaces. This newly acquired knowledge is than used to prove a theorem by Ebenfelt, Khavinson and Shapiro, which states that the fingerprint of a polynomial lemniscate is uniquely given by a Blaschke product and that every Blaschke products uniquely determines a polynomial lemniscate.

Math. Subj. Class. (2010): 30F10, 30C35, 37E10

Ključne besede: kompleksna mnogoterost, prstni odtis, polinomska lemniskata, prava preslikava, Riemannova ploskev, dvodimenzionalna oblika

Keywords: complex manifold, fingerprint, polynomial lemniscate, proper map, Riemann surface, two-dimensional shape

1. Uvod

V zadnjih letih se vedno bolj razvija področje računalniške grafike in prepoznavanja vzorcev, katerega centralni objekti obravnave so t. i. dvodimenzionalne oblike, to so vložitve krožnice v evklidsko ravnino.

Eden izmed boljših pristopov k opisu in analizi teh oblik, ki ga je uvedel Kirilov [10], temelji na ideji, da vsaki obliki priredimo njen prstni odtis, tj. difeomorfizem enotskega diska $\mathbb{D}$, ki ohranja orientacijo. Tak difeomorfizem je do predkomponiranja z Möbiusovo preslikavo natančno določen. Pri tem seveda želimo, da prstni odtis ostane enak, če obliko transliramo ali skrčimo oziroma raztegnemo.

Že Kirillov je v svojem članku dokazal, da obstaja bijekcija med množico oblik in množico prstnih odtisov. Teoretično torej lahko iz prstnega odtisa rekonstruiramo obliko in obratno, v praksi pa se to izkaže za zelo težek problem. Velik korak naprej je uspel šele Mumfordu in Sharonu [12] leta 2004, ko sta razvila dokaj dober programski paket za take vrste rekonstrukcij.

Problem rekonstrukcije pa se lahko zelo poenostavi, če se omejimo samo na neko posebno družino krivulj. Tako so Ebenfelt, Khavinson in Shapiro v članku [3] dokazali, da je prstni odtis polinomskih lemniskat ravno n-ti koren Blaschkejevega produkta, kjer je n stopnja polinoma, ki določa polinomsko lemniskato. Ta dokaz je bistveno poenostavil in izrek še razširil najprej Younsi sam v [22], potem pa še v sodelovanju z Richardsom v [16]. Glavni cilj naloge bo, da bomo v duhu Younsijeve ideje dokazali prej omenjeni izrek o rekonstrukciji za polinomske lemniskate. Po poti pa si bomo pogledali še nekaj osnov teorije Riemannovih ploskev in teorije krovnih prostorov, ki sta glavni orodji v dokazu.

V kompleksni analizi na $\mathbb{C}$ smo se v glavnem ukvarjali s holomorfnimi funkcijami, v teoriji Riemannovih ploskev pa se ukvarjamo s preslikavami med objekti, ki dajejo področju ime, torej Riemannovimi ploskvami. Te premorejo ogromno lepih geometrijskih lastnosti, kar nam zelo pomaga pri izgradnji intuicije.

V teoriji krovnih prostorov pa se v glavnem ukvarjamo s proučevanjem lokalnih homeomorfizmov med prostori.

V 2. poglavju se bomo spomnili nekaterih rezultatov, ki so bili obravnavani pri predavanjih. Tako opremljeni bomo v 3. poglavju lahko pogledali osnovno idejo Kirillovega pristopa. V 4. poglavju bomo zajadrali v teorijo Riemannovih ploskev in se spoznali z njenimi osnovami. Večina primerov, ki jih bomo podali, bo uporabna tudi v nadaljevanju. Poglavje 5 se čisto na hitro dotakne teorije krovnih prostorov, v poglavju 6 pa končno dokažemo naš glavni izrek.

2. Ponovitev nekaterih osnovnih rezultatov

V tem poglavju bomo ponovili nekaj rezultatov, ki so bili obravnavani na predavanjih pri predmetih Uvod v geometrijsko topologijo, Analiza 2b in Kompleksna analiza. Glavni vir so zato zapiski iz predavanj, uporabljeni pa so tudi [1, 4, 7, 14, 19].

Opomba 2.1. Najprej se dogovorimo za nekaj oznak in definicij, ki jih bomo uporabljali skozi celotno nalogo:

- enotski disk $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ bomo označevali z $\mathbb{D}$,
- kompaktifikacijo kompleksne ravnine s točko ∞ (oz. *Riemannovo sfero*) bomo označevali s $\widehat{\mathbb{C}}$,
- $\mathbb{D}_+ := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}; |z| > 1\}$,

- mejo množice D bomo označevali z ∂D,
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- domeno definiramo kot povezano odprto množico.

Definicija 2.2. Injektivna zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ med topološkima prostoroma X in Y je *topološka vložitev*, če je homeomorfna na svojo sliko. Označimo jo z $X \hookrightarrow Y$. *Enostavna sklenjena krivulja* oz. *Jordanova krivulja* v topološkem prostoru X je topološka vložitev $S^1 \hookrightarrow X$. Krivulja je *gladka*, če ima regularno parametrizacijo, tj. gladko parametrizacijo z neizrojenim diferencialom.

Izrek 2.3 (Jordan-Brouwerjev izrek o separaciji)**.** *Naj bo $n \geq 2$.*
(i) Za vsako vložitev $f\colon S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ ima $S^n \setminus f(S^{n-1})$ natanko dve komponenti za povezanost, meja vsake od teh v S^n je $f(S^{n-1})$.
(ii) Za vsako vložitev $g\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ima $\mathbb{R}^n \setminus g(S^{n-1})$ natanko dve komponenti za povezanost, ena je omejena, druga je neomejena, meja vsake od teh v $\mathbb{R}^n$ pa je $g(S^{n-1})$.

Dokaz. Dokaz najdemo v [4, Theorem 4.2.5.] □

Izrek 2.4 (Schönfliesov izrek)**.** *Naj bo J Jordanova krivulja v R^2. Naj bo $C \subset R^2 \setminus J$ omejena komponenta ravnine. Potem je zaprtje komponente C v R^2 homeomorfno zaprtemu enotskemu disku $\overline{\mathbb{D}}$.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [15]. □

Definicija 2.5. Topološki prostor X je *enostavno povezan*, če je povezan s potmi in če lahko vsako zvezno preslikavo $f\colon S^1 \to X$ razširimo do zvezne preslikave $g\colon \overline{\mathbb{D}} \to X$.

Izrek 2.6 (Schwarzeva lema)**.** *Naj bo $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfna funkcija, ki zadošča pogoju $f(0) = 0$. Potem velja*
(i) $|f(z)| \leq |z|$ za vsak $z \in \mathbb{D}$,
(ii) $|f'(0)| \leq 1$.
Če velja enakost v (i) za neki $z \neq 0$ ali če velja enakost v (ii), potem je

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

rotacija za neki kot $\theta \in \mathbb{R}$.

Izrek 2.7 (Riemannov upodobitveni izrek)**.** *Naj bo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ enostavno povezana domena. Potem je Ω biholomorfno ekvivalentna disku $\mathbb{D}$. Natančneje, za vsako točko $a \in \Omega$ obstaja natanko ena biholomorfna funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{D}$, da je $f(a) = 0$ in $f'(a) > 0$.*

Dokaz je povzet po zapiskih iz predavanj predmeta Kompleksna analiza.

Dokaz. Dokažimo najprej enoličnost, torej da je taka funkcija, če obstaja, ena sama. Predpostavimo, da obstajata dve biholomorfni funkciji $f, g\colon \Omega \to \mathbb{D}$, za kateri velja $f(a) = g(a) = 0$ in $f'(a) > 0$, $g'(a) > 0$ za neki $a \in \mathbb{D}$. Ker je g biholomorfna, je tudi g^{-1} biholomorfna. Definirajmo preslikavo $\phi = f \circ g^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Ta preslikava je kot kompozitum biholomorfnih preslikav tudi sama biholomorfna, torej je biholomorfen avtomorfizem $\mathbb{D}$. Zato jo lahko zapišemo v obliki

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z-b}{1-\bar{b}z} = c\frac{z-b}{1-\bar{b}z},$$

kjer je $b \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$ in $c = e^{i\theta}$ neka konstanta z $|c| = 1$. Vidimo, da je

$$\phi(0) = f(g^{-1}(0)) = f(a) = 0,$$

torej $\phi(0) = c(-b) = 0$ in posledično $b = 0$, kar pomeni, da je $\phi(z) = cz$ (do tega sklepa bi lahko prišli tudi z uporabo Schwarzeve leme). Če upoštevamo še pogoje za odvode, dobimo

$$c = \phi'(0) = f'(g^{-1}(0))\frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = f'(a)\frac{1}{g'(a)} > 0,$$

torej je $c = 1$ in velja

$$f \circ g^{-1} = \phi = Id,$$

iz tega pa sledi $f \equiv g$ in imamo enoličnost.

Sedaj fiksirajmo točko $a \in \Omega$. Definirajmo družino funkcij

$$\mathcal{F} = \{f \colon \Omega \to \mathbb{D};\ f \text{ je holomorfna in injektivna},\ f(a) = 0,\ f'(a) > 0\}.$$

Preostanek dokaza bomo razdelili na tri dele.

(i) Najprej bomo pokazali, da $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Dovolj bo poiskati funkcijo g, ki je na Ω holomorfna, injektivna in omejena. Če tako funkcijo imamo, lahko konstruiramo funkcijo

$$h(z) = re^{i\theta}(g(z) - g(a)).$$

Zaradi injektivnosti in holomorfnosti g je tudi h injektivna in holomorfna. Ker je g omejena, bo tudi $g(z) - g(a)$ omejena in z dovolj majhnim $r > 0$ bomo lahko dosegli, da bo h slikala Ω v $\mathbb{D}$. Vidimo tudi, da je

$$h(a) = re^{i\theta}(g(a) - g(a)) = 0$$

in

$$h'(z) = re^{i\theta}g'(z),$$

zato lahko s primerno izbiro konstante $e^{i\theta}$ dosežemo, da je $h'(a) > 0$. Torej bo $h \in \mathcal{F}$. Zato res zadošča najti tako funkcijo g. Obravnavajmo dva primera:

1) Najprej obravnavajmo posebni primer, ko $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$. To pomeni, da obstaja neka točka b in njena odprta okolica v komplementu Ω glede na $\mathbb{C}$, tj.

$$\mathbb{D}(b, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - b| < r\} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$$

za neki $r > 0$. Za točke $z \in \Omega$ potem velja neenakost

$$|z - b| \geq r \Longleftrightarrow \frac{1}{|z - b|} \leq \frac{1}{r}.$$

Torej za holomorfno injektivno funkcijo

$$g(z) = \frac{1}{z - b}$$

velja tudi

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r},$$

kar pomeni, da je tudi omejena in tako ima vse želene lastnosti.

2) Sedaj pa poglejmo še splošno. Ker $\Omega \neq \mathbb{C}$, bomo v komplementu Ω v $\mathbb{C}$ lahko našli vsaj eno točko b. Če potem definiramo preslikavo h na Ω s predpisom

$$h(z) = z - b,$$

vidimo, da je ta preslikava injektivna in brez ničel na enostavno povezani domeni Ω (pogoji za obstoj holomorfnega kvadratnega korena), zato obstajata holomorfni injektivni preslikavi

$$h_1(z) = \sqrt{z-b}$$

in

$$h_2(z) = -\sqrt{z-b}.$$

Recimo, da presek zalog vrednosti h_1 in h_2 ni prazen, tj. da obstajata točki $z_1, z_2 \in \Omega$, da je

$$h_1(z_1) = h_2(z_2)$$

oziroma

$$\sqrt{z_1 - b} = -\sqrt{z_2 - b}.$$

Če enačbo kvadriramo, dobimo

$$z_1 - b = z_2 - b \Longleftrightarrow z_1 = z_2$$

in posledično tudi

$$\sqrt{z_1 - b} = -\sqrt{z_1 - b} \Longleftrightarrow \sqrt{z_1 - b} = 0,$$

kar pa je protislovje, saj $b \notin \Omega$. Torej je

$$h_1(\Omega) \cap h_2(\Omega) = \emptyset.$$

Ker je h_2 odprta preslikava, je $h_2(\Omega)$ odprta množica. Zato lahko vzamemo neko točko $c \in h_2(\Omega)$ in tak $r > 0$, da je $\mathbb{D}(c, r) \subset h_2(\Omega)$. Vidimo, da smo prišli v podobno situacijo kot v primeru 1). Če sedaj definiramo holomorfno injektivno funkcijo

$$g(z) = \frac{1}{h_1(z) - c},$$

po analognih sklepih kot prej sledi, da je ta funkcija tudi omejena. Torej smo v vsakem primeru našli funkcijo g, ki je na Ω holomorfna, injektivna in omejena, zato je res $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(ii) V tej točki si bomo pomagali z izreki iz poglavja 7. Definirajmo $c := \sup\{f'(a); f'(a) > 0, f \in \mathcal{F}\}$. Cauchyjeva ocena nam pove:

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{r} \sup_{|z-a|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r},$$

kjer zadnja neenakost velja, ker f slika v $\mathbb{D}$, torej $|f| \leq 1$. Torej so odvodi v a omejeni in zato res imajo supremum.

Sedaj bomo pokazali, da v družini $\mathcal{F}$ obstaja taka funkcija f, da velja $f'(a) = c$. Po definiciji c lahko najdemo zaporedje funkcij $f_n \in \mathcal{F}$, za katere velja

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(a) = c.$$

Družina funkcij $\mathcal{F}$ je enako omejena s konstanto 1, saj vse funkcije iz $\mathcal{F}$ slikajo v enotski disk $\mathbb{D}$. Zato je po izreku 7.5 to normalna družina. Torej ima zaporedje $\{f_n\}$ konvergentno podzaporedje $\{f_{n_k}\}$, za katerega velja

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f.$$

Za to funkcijo f velja

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(a) = 0,$$

$$f'(a) = \lim_{k\to\infty} f'_{n_k}(a) = c > 0.$$

Ker je $f' \neq 0$, sledi, da f ni konstantna. Iz dejstva, da je nekonstantna funkcija f ravno limita injektivnih holomorfnih funkcij f_{n_k} po izreku 7.6 sledi, da je tudi f injektivna. Preveriti moramo še samo to, da f res slika v $\mathbb{D}$.

Za funkcije f_{n_k} velja $|f_{n_k}| < 1$, zato je $|f| \leq 1$. Ker pa je f nekonstantna holomorfna funkcija, velja zanjo izrek o odprti preslikavi, torej je množica $f(\Omega)$ odprta. Zato ne more vsebovati nobene točke iz $\partial\mathbb{D}$ in res velja $|f| < 1$, torej f slika v $\mathbb{D}$. Zato je $f \in \mathcal{F}$.

(iii) V tem delu bomo pokazali, da je funkcija f iz dela (ii) surjektivna, tj. $f(\Omega) = \mathbb{D}$. Dokazujemo s protislovjem. Recimo, da f ni surjektivna, torej obstaja vsaj ena točka $b \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$. Ker je $f(a) = 0$, je $b \neq 0$. Vzemimo avtomorfizem $\mathbb{D}$, ki zamenja točki 0 in b:

$$\phi(z) = \frac{b - z}{1 - \bar{b}z}.$$

Račun pokaže

$$\phi'(z) = \frac{\bar{b}(b - z) - (1 - \bar{b}z)}{(1 - \bar{b}z)^2} = \frac{|b|^2 - 1}{(1 - \bar{b}z)^2}.$$

Potem je $\phi'(0) = |b|^2 - 1$. Ker velja $\phi \circ \phi = Id$, je

$$\phi'(\phi(z)) = \frac{1}{\phi'(z)}$$

in zato tudi

$$\phi'(\phi(0)) = \phi'(b) = \frac{1}{\phi'(0)} = \frac{1}{|b|^2 - 1}.$$

Oglejmo si kompozitum $\phi \circ f \colon \Omega \to \mathbb{D}$. Zanj velja $(\phi \circ f)(a) = b$ in $(\phi \circ f)(z) \neq 0$, saj f izpusti b, edina točka ki jo ϕ slika v 0, pa je prav b. Torej je $\phi \circ f$ neničelna na enostavno povezani domeni, zato obstaja njen kvadratni koren $\sqrt{\phi \circ f}$. Vzamemo še tak avtomorfizem ψ diska $\mathbb{D}$, da bo za funkcijo $g := \psi \circ \sqrt{\phi \circ f} \colon \Omega \to \mathbb{D}$ veljalo $g(a) = 0$ in $g'(a) > 0$. Torej bo

$$\psi(z) = \lambda \frac{\sqrt{b} - z}{1 - \overline{\sqrt{b}}z},$$

kjer je λ primerno izbrana konstanta, za katero velja $|\lambda| = 1$. Poračunamo še odvod

$$|g'(a)| = \left|\psi'(\sqrt{(\phi \circ f)(a)})\right| \frac{1}{2\sqrt{|(\phi \circ f)(a)|}} |\phi'(f(a)) f'(a)| = \frac{|b| + 1}{2\sqrt{|b|}} c > c,$$

kjer zadnja neenakost velja po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino. Očitno je tudi g injektivna in holomorfna in je zato $g \in \mathcal{F}$. Ampak iz $|g'(a)| > c = \sup\{f'(a); f \in \mathcal{F}\}$ sledi, da smo našli funkcijo, ki ima večji odvod od funkcije z največjim odvodom v $\mathcal{F}$, tako da smo prišli v protislovje in zato je f res surjektivna. $\square$

Definicija 2.8. Množica D ima *Jordanov rob*, če velja $\partial D = \bigcup_{j=1}^{m} C_j$, kjer je vsaka C_j Jordanova krivulja in so te krivulje paroma disjunktne.

Definicija 2.9. *Prava preslikava* je taka zvezna preslikava $f \colon X \to Y$, da je za vsak kompakt $K \subset Y$ tudi njegova praslika $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt.

Izrek 2.10 (Carathéodoryjev izrek, [7, Theorem 13.2.3]). *Če sta $D, D' \subset \mathbb{C}$ omejeni domeni z Jordanovim robom in je $f\colon D \to D'$ prava holomorfna preslikava, potem se f razširi do zvezne preslikave, ki preslika $\overline{D}$ v $\overline{D'}$ in ∂D v $\partial D'$.*

Naslednji izrek sicer ni bil obravnavan pri nobenem od prej navedenih predmetov, vendar se vsebinsko navezuje na ostale rezultate iz tega poglavja. V bistvu gre za izrek, ki je skoraj enak kot Schwarzev princip zrcaljenja, le da velja za gladke in ne za realno-analitične krivulje.

Izrek 2.11 ([9]). *Naj bosta C in C' gladki krivulji v $\mathbb{C}$ in naj bo f holomorfna funkcija na neki domeni $D \subset \mathbb{C}$, ki vsebuje C v robu, torej $C \subset \partial D$. Predpostavimo, da se f zvezno razširi na C, torej da je zvezna na $D \cup C$ in da velja $f(C) \subset C'$. Potem se f holomorfno razširi preko krivulje C. Natančneje povedano, obstaja takšna večja domena $D_1 \supset D \cup C$ in holomorfna funkcija $F\colon D_1 \to \mathbb{C}$, tako da je $F|_{D\cup C} = f$.*

3. Metoda prstnih odtisov

V tem poglavju si bomo ogledali osnovno idejo metode prstnih odtisov. Glavni viri, po katerih bomo povzemali, so [3, 16, 22].

Kot smo že omenili v uvodu, so glavni objekti obravnave dvodimenzionalne oblike.

Definicija 3.1. *Dvodimenzionalna oblika* je Jordanova krivulja v ravnini. Dve obliki razumemo za enaki, če lahko eno dobimo s translacijo in raztegom druge.

Naj bo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ gladka Jordanova krivulja. Po Jordan-Brouwerjevem izreku Γ razdeli $\mathbb{C}$ na omejeno in neomejeno komponento. Označimo z Ω_- omejeno komponento in definirajmo še $\Omega_+ := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega_-}$.

Vzemimo konformni preslikavi $\Phi_- : \mathbb{D} \to \Omega_-$ in $\Phi_+ : \mathbb{D}_+ \to \Omega_+$, kjer je $\mathbb{D}_+ := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Obstoj takih preslikav nam zagotavlja Riemannov upodobitveni izrek. Predpostavimo, da je preslikava Φ_+ normalizirana s pogojema $\Phi_+(\infty) = \infty$ in $\Phi_+'(\infty) > 0$, kar pomeni, da ima Φ_+ v okolici ∞ Laurentov razvoj oblike

$$\Phi(z) = az + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k},$$

kjer je $a > 0$.

Ker je Γ gladka krivulja, se Φ_- in Φ_+ razširita najprej (po Carathéodoryjevem izreku 2.10) zvezno do roba enotskega diska $\partial\mathbb{D}$, potem pa (po izreku 2.11) še holomorfno čez rob.

Oglejmo si preslikavo $k := \Phi_+^{-1} \circ \Phi_- : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$. Vidimo, da je k gladek difeomorfizem krožnice, ki ohranja orientacijo. Prstni odtis k je do predkomponiranja z Möbiusovo preslikavo enolično določen z Γ. To je res, saj Möbiusova preslikava slika $\partial\mathbb{D}$ nazaj v $\partial\mathbb{D}$, enak učinek pa bi lahko dosegli z ustrezno izbiro konformne preslikave Φ_-. Omenimo še, da parametrizacija krivulje Γ ne igra vloge, saj imamo na koncu preslikavo iz $\partial\mathbb{D}$ v $\partial\mathbb{D}$.

Ekvivalenčni razred gladkega difeomorfizma k glede na delovanje grupe Möbiusovih preslikav imenujemo *prstni odtis* krivulje Γ. Želimo si, da se prstni odtis ne spremeni, če krivuljo Γ transliramo ali raztegujemo/krčimo, torej če jo afino transformiramo.

Afina transformacija je preslikava oblike

$$A(z) = az + b,$$

kjer je $a \neq 0$ in $b \in \mathbb{C}$. Zaradi normalizacijskih pogojev za Φ_+ mora veljati še $a > 0$. Takšna preslikava seveda tudi ohranja orientacijo. Ker torej preslikava A res samo translira in razteguje točke in ker je k kompozitum konformnih preslikav iz $\partial\mathbb{D}$ v $\partial\mathbb{D}$ (torej takih preslikav, ki ohranjajo usmerjene kote med poljubnima dvema točkama na krivulji), bosta imela $A(\Gamma)$ in Γ enak prstni odtis.

Tako dobimo preslikavo $\mathcal{F}$ med množico vseh gladkih Jordanovih krivulj modulo afine transformacije (tj. oblikami) in množico vseh gladkih difeomorfizmov k, ki ohranjajo orientacijo, modulo Möbiusovi avtomorfizmi (tj. prstnimi odtisi)

$$\mathcal{F}\colon \{\text{oblike}\} \to \{\text{prstni odtisi}\}.$$

Cilj naše metode je, da lahko vsaki obliki enolično priredimo prstni odtis in obratno, da lahko za vsak prstni odtis rekonstruiramo obliko, ki jo predstavlja. Torej bo metoda delovala le ob predpostavki, da je preslikava $\mathcal{F}$ bijekcija. Resničnost te predpostavke je dokazal Kirillov leta 1987 in s tem postavil to metodo na trdne temelje.

Izrek 3.2 ([10])**.** *Preslikava $\mathcal{F}$ je bijekcija.*

Čeprav ta rezultat zagotavlja, da v teoriji lahko rekonstruiramo krivulje iz prstnih odtisov in obratno, pa je bilo v praksi to težko izvedljivo. Velik preboj je ta metoda doživela komaj leta 2004, ko sta Mumford in Sharon v [12] dokaj uspešno razvila programski paket za to rekonstrukcijo, ki temelji na aproksimaciji krivulj s poligoni in uporabi Schwarz-Christoffelove formule.

Drug pristop, ki so ga predlagali Ebenfelt, Khavinson in Shapiro v [3], pa temelji na aproksimaciji oblik s posebnim razredom krivulj – t. i. polinomskimi lemniskatami, ki so goste v množici gladkih Jordanovih krivulj glede na Hausdorffovo metriko ([21, poglavje 4], v bistvu gre za preprosto posledico Weierstrassovega izreka o aproksimaciji gladkih funkcij s polinomi). Pokazali so, da so prstni odtisi polinomskih lemniskat ravno n-ti koreni Blaschkejevega produkta, kjer je n stopnja polinoma, ki definira polinomsko lemniskato in obratno, da n-ti koren Blaschkejevega produkta enolično določa polinomsko lemniskato stopnje n. Dokaz tega izreka o korespondenci sta Younsi in Richards v [22] in [16] bistveno poenostavila in ga celo razširila na razred racionalnih lemniskat. Njun dokaz za polinomske lemniskate si bomo podrobneje ogledali v poglavju 6, prej pa moramo še razviti nekaj orodji.

4. Riemannove ploskve

V tem poglavju bomo pogledali nekaj osnov teorije Riemannovih ploskev, tako da bomo lahko pozneje razumeli poglavje 6. Od virov se bomo v glavnem oprli na [6], sicer pa tudi na [11, 5, 2] in [17].

Definicija 4.1. Topološki prostor X je *lokalno evklidski* dimenzije $n \geq 0$, če za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica U, $x \in U \subset X$, ki je homeomorfna neki odprti množici $U' \subset \mathbb{R}^n$.

Definicija 4.2. *Topološka mnogoterost* realne dimenzije n je 2-števen, Hausdorffov topološki prostor X, ki je lokalno evklidski dimenzije n.

Naj bo X topološka mnogoterost dimenzije n. Vsak par oblike (U, ϕ), kjer je $U \subset X$ odprta množica, $U' \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $\phi\colon U \to U'$ homeomorfizem, imenujemo *lokalna karta* na X. *Topološki atlas* na X je družina lokalnih kart $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A\}$, za katero velja $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = X$. Za vsaki dve lokalni karti $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$, za kateri velja $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, obstaja homeomorfizem

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}\colon \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}).$$

Tak homeomorfizem $\phi_{\alpha\beta}$ imenujemo *prehodna preslikava* med ϕ_β in ϕ_α.

Naj bo X topološka mnogoterost realne dimenzije $2k$. *Kompleksni atlas* na X je topološki atlas $\{(U_j, \phi_j)\}$ s kartami $\phi_j\colon U_j \to U_j' \subset \mathbb{R}^{2k} = \mathbb{C}^k$, za katerega so vse prehodne preslikave biholomorfne. Denimo, da imamo na X dva kompleksna atlasa $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha); \alpha \in A\}$ in $\mathcal{W} = \{(W_\beta, \psi_\beta); \beta \in B\}$. Atlasa sta *ekvivalentna*, če je za vsak $U_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ preslikava

$$\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}\colon \phi_\alpha(U_\alpha \cap W_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap W_\beta)$$

biholomorfna. To je ekvivalenčna relacija na množici kompleksnih atlasov. Ekvivalenčni razred kompleksnih atlasov na X imenujemo *kompleksna struktura* na X.

Definicija 4.3. Topološka mnogoterost realne dimenzije 2 skupaj z izborom kompleksne strukture se imenuje *Riemannova ploskev* ali *enodimenzionalna kompleksna mnogoterost*.

Definicija 4.4. *Kompleksna mnogoterost* dimenzije n je realna mnogoterost X dimenzije $2n$ skupaj z izborom kompleksne strukture.

Ilustrirajmo te definicije na konkretnem primeru, da dobimo malo občutka.

Primer 4.5. Vzemimo kompaktifikacijo kompleksne ravnine $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$. Topološko gledano je to ravno 2-sfera S^2, zato ima realno dimenzijo 2. Za odprti množici $U = \mathbb{C}$ in $V = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ velja $U \cup V = \widehat{\mathbb{C}}$, torej pokrivata $\widehat{\mathbb{C}}$. Sedaj vzemimo za preslikavo $\phi\colon U \to \mathbb{C}$ identiteto, za preslikavo $\psi\colon V \to \mathbb{C}$ pa naj velja

$$\psi(z) = \begin{cases} 1/z; & z \in \mathbb{C}^* \\ 0; & z = \infty. \end{cases}$$

Na $U \cap V = \mathbb{C}^*$ velja $\phi(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$ in $\psi(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$. Prav tako je za vse točke $z \in \mathbb{C}^*$ $(\psi \circ \psi)(z) = \psi(\frac{1}{z}) = z$, torej $\psi^{-1}(z) = \psi(z)$ za $\mathbb{C}^*$. Prehodna preslikava $\phi \circ \psi^{-1}$ torej slika $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ in zanjo velja $(\phi \circ \psi^{-1})(z) = \frac{1}{z}$, zato je biholomorfna. Ker imamo samo dve karti (U, ϕ) in (V, ψ), je edina druga možna prehodna preslikava $\psi \circ \phi^{-1} = (\phi \circ \psi^{-1})^{-1}$, torej ravno inverz prve in zato je tudi sama biholomorfna. Torej so vse prehodne preslikave biholomorfne. Zato je $\widehat{\mathbb{C}}$, opremljena s to kompleksno strukturo, res Riemannova ploskev, ki ima posebno ime – *Riemannova sfera*. $\diamondsuit$

4.1. **Holomorfne funkcije in preslikave Riemannovih ploskev.** Imejmo Riemannovo ploskev X, točko $p \in X$ in funkcijo f, ki je definirana na neki okolici p. Kako lahko ugotovimo, ali ima funkcija f neko lastnost v točki p? Ideja je, da vzamemo tako karto (U, ϕ) iz atlasa, ki definira kompleksno strukturo na X, da velja $p \in U$. Potem s pomočjo homeomorfizma ϕ prenesemo okolico p na okolico točke $\phi(p) \in \mathbb{C}$ in preverimo, če ima kompozitum $f \circ \phi^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ želeno lastnost v točki $\phi(p)$. Tukaj moramo biti malo pozorni, saj lahko na tak način preverjamo le intrinzične lastnosti, tj. lastnosti, ki so neodvisne od izbire lokalne karte.

Naj bo X Riemannova ploskev, $\mathcal{U}$ neki atlas, ki določa kompleksno strukturo na X, in $f\colon X \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija na X.

Definicija 4.6. Funkcija f je holomorfna v točki $p \in X$, če obstaja taka lokalna karta $(U, \phi) \in \mathcal{U}$, da je $p \in X$ in je kompozitum $f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Funkcija f je holomorfna na X, če je holomorfna v vsaki točki $p \in X$.

$$\begin{tikzcd}
X \supset U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{C} \\
\mathbb{C} \supset \phi(U) \arrow[ur, "f\circ\phi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 4.7. *Funkcija f je holomorfna na X natanko tedaj, ko je za vsako karto (U, ϕ) iz maksimalnega atlasa $\mathcal{U}$ na X funkcija $f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) \to \mathbb{C}$ holomorfna.*

Dokaz. ($\Rightarrow$): Naj bo f holomorfna funkcija na X in (U, ϕ) neka karta iz maksimalnega atlasa $\mathcal{U}$. Vzemimo poljubno točko $p \in X$. Ker je f holomorfna, obstaja taka karta $(V, \psi) \in \mathcal{U}$, da je $p \in V$ in je $f \circ \psi^{-1}\colon \psi(V) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Razpišimo $f \circ \phi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1})$. Ker sta $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{U}$, je prehodna preslikava $\psi \circ \phi^{-1}$ biholomorfna funkcija, kompozicija $f \circ \psi^{-1}$ pa je holomorfna funkcija po definiciji 4.6. Funkcija $f \circ \phi^{-1}$ je torej kot kompozitum holomorfnih funkcij tudi sama holomorfna.

($\Leftarrow$): Naj bo $\mathcal{U}'$ neki atlas, ki definira kompleksno struktuo na X. Po definiciji je maksimalni atlas $\mathcal{U}$ unija vseh atlasov ki definirajo isto kompleksno strukturo na X, torej je $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Po predpostavki je za poljubno karto $(U, \phi) \in \mathcal{U}$ funkcija $f \circ \phi^{-1}$ holomorfna. Če izberemo ravno karte iz $\mathcal{U}'$, želena implikacija sledi. $\square$

Kaj pa naredimo v primeru preslikave $f\colon X \to Y$ med Riemannovima ploskvama X in Y? Ideja je spet prehod iz Riemannove ploskve na podmnožico v $\mathbb{C}$ s pomočjo homeomorfizmov. Edina razlika je, da moramo tukaj to storiti za X in za Y.

Definicija 4.8. Naj bosta X Riemannova ploskev z atlasom $\mathcal{U}$ in Y Riemannova ploskev z atlasom $\mathcal{V}$. Preslikava $f\colon X \to Y$ je holomorfna v točki $p \in X$, če je zvezna v p, in če je za neki par kart $(U, \phi) \in \mathcal{U}$ ter $(V, \psi) \in \mathcal{V}$, za katerega velja $p \in U$ in $f(p) \in V$, funkcija $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ holomorfna na svoji domeni. Preslikava je holomorfna na X, če je holomorfna v vsaki točki $p \in X$.

$$\begin{tikzcd}
X \supset U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & V \subset Y \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{C} \supset \phi(U) \arrow[r, "\psi\circ f\circ\phi^{-1}"] & \psi(V) \subset \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Tudi v tem primeru želimo neodvisnost od izbire atlasov, ki določajo isto kompleksno strukturo. Res, imejmo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ in $\mathcal{U}' = \{(U'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$ atlasa iz istega ekvivalenčnega razreda na X ter $\mathcal{V} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ in $\mathcal{V}' = \{(V'_\beta, \psi'_\beta)\}$ atlasa iz istega ekvivalenčnega razreda na Y. Izberimo poljubno točko $x \in X$. Potem za poljubni karti $(U, \phi_\alpha) \in \mathcal{U}$ in $(U', \phi'_\gamma) \in \mathcal{U}'$ na okolici x, ter poljubni karti $(V, \psi_\beta) \in \mathcal{V}$ in $(V', \psi'_\delta) \in \mathcal{V}'$ na okolici $f(x)$ velja

$$\begin{aligned}
\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} &= \psi_\beta \circ \psi_\delta'^{-1} \circ \psi'_\delta \circ f \circ \phi_\gamma'^{-1} \circ \phi'_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1} \\
&= (\psi_\beta \circ \psi_\delta'^{-1}) \circ (\psi'_\delta \circ f \circ \phi_\gamma'^{-1}) \circ (\phi'_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1}).
\end{aligned}$$

Ker sta karti (U, ϕ_α) in (U', ϕ'_γ) iz ekvivalentnih atlasov, je kompozitum $\psi_\beta \circ \psi'^{-1}_\delta$ prehodna preslikava in posledično biholomorfizem. Podobno velja za $\phi'_\gamma \circ \phi_\alpha^{-1}$. Zato je $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ holomorfna natanko tedaj, ko je holomorfna $\psi'_\delta \circ f \circ \phi'^{-1}_\gamma$ in neodvisnost od izbire atlasov sledi. Še več, ker je bila edina stvar, ki smo jo zares potrebovali kompatibilnost kart, smo dokazali celo neodvisnost od izbire kart v istem atlasu.

Na podoben način lahko vidimo, da je kompozicija holomorfnih preslikav holomorfna.

Trditev 4.9. *Kompozicija holomorfnih preslikav je holomorfna.*

Dokaz. Naj bosta $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ holomorfni preslikavi Riemannovih ploskev X, Y in Z, opremljenih zaporedoma z maksimalnimi atlasi $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}, \mathcal{V} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ in $\mathcal{W} = \{(W_\gamma, \pi_\gamma)\}$. Vzemimo poljubni karti $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{U}$ in $(W_\gamma, \pi_\gamma) \in \mathcal{W}$ in preverimo po definiciji

$$\begin{aligned} \pi_\gamma \circ g \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} &= \pi_\gamma \circ g \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} \\ &= (\pi_\gamma \circ g \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}), \end{aligned}$$

kjer je $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{V}$ takšna karta, da je g definirana na V_β in je $V_\beta \subset \operatorname{im}(f)$. Zaradi holomorfnosti g je holomorfna tudi fukcija $\pi_\gamma \circ g \circ \psi_\beta^{-1}$, zaradi holomorfnosti f pa je $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ holomorfna funkcija. Ker je kompozitum holomorfnih funkcij na $\mathbb{C}$ spet holomorfna funkcija, sledi, da je $g \circ f$ holomorfna. $\square$

4.2. **Meromorfne funkcije in preslikave Riemannovih ploskev.** Za začetek se spomnimo definicije meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$.

Definicija 4.10. Funkcija f je *meromorfna* na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$, če je definirana in holomorfna na celotni Ω, razen na zaprti diskretni množici točk $\{a_j\} \subset \Omega$, v kateri ima pole.

V okolici polov lahko f razvijemo v Laurentovo vrsto s končnim glavnim delom. Če je torej a_j pol, lahko f zapišemo kot

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-m_j}^{\infty} c_k (z-a_j)^k \\ &= \frac{c_{-m_j}}{(z-a_j)^{m_j}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a_j} + c_0 + c_1(z-a_j) + \cdots, \end{aligned}$$

kjer je $c_{-m_k} \neq 0$ prvi neničelni koeficient v razvoju. Če v razvoju izpostavimo člen $\frac{1}{(z-a_j)^{m_j}}$, dobimo

$$f(z) = \frac{1}{(z-a_j)^{m_j}} (c_{-m_j} + c_{-m_j+1}(z-a_j) + \cdots) = \frac{g_j(z)}{(z-a_j)^{m_j}},$$

kjer je funkcija $g_j(z) = c_{-m_j} + c_{-m_j+1}(z-a_j) + \cdots$ zapisana kot vsota konvergentne potenčne vrste okoli a_j, zato je na neki okolici a_j holomorfna. Velja tudi $g_j(a_j) = c_{-m_j} \neq 0$. Torej smo lahko f lokalno zapisali kot kvocient dveh holomorfnih funkcij.

Funkcijo f lahko razširimo na naraven način tako, da ji v polih predpišemo vrednost ∞. Torej je razširitev funkcije f funkcija $F\colon \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$, ki je definirana kot

$$F(z) = \begin{cases} f(z); & z \in \Omega \setminus \{a_j\} \\ \infty; & z \in \{a_j\}. \end{cases}$$

F je torej preslikava med Riemannovima ploskvama Ω in $\widehat{\mathbb{C}}$. Pokažimo, da je F holomorfna.

F je zvezna po konstrukciji. Vzemimo atlas $\mathcal{U} = \{(\Omega, Id)\}$ na Ω in atlas $\mathcal{V} = \{(\mathbb{C}, Id), (\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \phi)\}$ na $\widehat{\mathbb{C}}$, kjer je $\phi(z) = \frac{1}{z}$. Za točko $z \in \Omega \setminus \{a_j\}$ tudi neka okolica točke z ne bo vsebovala točk iz $\{a_j\}$, torej lahko na $\widehat{\mathbb{C}}$ vzamemo karto $(\mathbb{C}, Id)$, v atlasu na Ω pa je tako ali tako samo ena karta. Na tej okolici potem velja $Id \circ F \circ Id^{-1} = F = f$, torej je F tu holomorfna. Za točko $z = a_j$ vzemimo tako okolico U, ki ne vsebuje nobene druge točke a_k za $k \neq j$. Na tej okolici lahko f lokalno zapišemo kot

$$f(z) = \frac{g_j(z)}{(z - a_j)^{m_j}}.$$

Ker je $g_j(a_j) \neq 0$, po zveznosti g_j obstaja taka okolica V, da je $g_j(z) \neq 0$ za $z \in V$. Zmanjšajmo torej okolico U na $U \cap V$. Ker je $F(a_j) = \infty$, bomo na $\widehat{\mathbb{C}}$ vzeli karto $(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \phi)$. Za $z \in U \cap V$ je

$$(\phi \circ F \circ Id^{-1})(z) = \begin{cases} \frac{(z-a_j)^{m_j}}{g_j(z)}; & z \in (U \cap V) \setminus \{a_j\} \\ \frac{1}{\infty} = 0; & z = a_j, \end{cases}$$

torej je F holomorfna tudi na $U \cap V$ in je zato res holomofna preslikava. Na tem primeru smo videli, da lahko vsako meromorfno fukcijo na Ω zapišemo kot holomorfno preslikavo v $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definicija 4.11. Naj bo X Riemannova ploskev. Funkcija f je *meromorfna* na X, če obstaja zaprta diskretna množica točk $\{a_j\} \subset X$, v kateri ima f pole, v ostalih točkah pa je holomorfna.

Lema 4.12. *Vsaka zaprta diskretna množica točk v kompaktu je končna.*

Dokaz. Dokažimo s kontrapozicijo. Vsaka neskončna množica ima v kompaktu stekališče, torej ne more biti diskretna. □

Ta lema nam torej pove, da ima meromorfna funkcija na kompaktni Riemannovi ploskvi končno množico polov. Zato lahko na podoben način, kot smo to naredili pred definicijo 4.11, razširimo vsako meromorfno funkcijo na poljubni Rimannovi ploskvi X do holomorfne preslikave v $\widehat{\mathbb{C}}$. Zapišimo to v izreku.

Izrek 4.13. *Vsako meromorfno funkcijo f na Riemannovi ploskvi X lahko razširimo do holomorfne preslikave $F\colon X \to \widehat{\mathbb{C}}$, če predpišemo $F(a_j) = \infty$ za vsak pol a_j funkcije f.*

Izrek nam pove, da imamo bijektivno korespondenco med množico meromorfnih funkcij f na X in množico holomorfnih preslikav $F\colon X \to \widehat{\mathbb{C}}$ (brez preslikave $F \equiv \infty$).

Izrek 4.14. *Vsaka meromorfna funkcija na $\widehat{\mathbb{C}}$ je racionalna funkcija.*

Dokaz. Naj bo f meromorfna funkcija na $\widehat{\mathbb{C}}$. Množici polov in ničel f sta obe zaprti in diskretni, zato ima f po lemi 4.12 končno ničel in polov. Naj bo $\{a_j\}$ množica ničel, $\{b_k\}$ pa množica polov funkcije f na $\mathbb{C}$. Označimo z m_j večkratnost ničle a_j in z n_k večkratnost pola b_k. Definirajmo racionalno funkcijo

$$r(z) = \frac{\prod_j (z - a_j)^{m_j}}{\prod_k (z - b_k)^{n_k}},$$

ki ima iste ničle in pole z istimi večkratnostmi, kot jih ima f na $\mathbb{C}$. Definirajmo še $g(z) = \frac{f(z)}{r(z)}$. Vidimo, da je g meromorfna funkcija na $\widehat{\mathbb{C}}$, ki nima niti ničel niti polov na $\mathbb{C}$. Zato je kot funkcija na $\mathbb{C}$ holomorfna in jo lahko zapišemo kot konvergentno potenčno vrsto

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Če naredimo spremembo koordinat $w = \frac{1}{z}$, imamo

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n}.$$

Ker je g v $z = \infty$ meromorfna, bo po spremembi koordinat meromorfna v $w = \frac{1}{\infty} = 0$. Ker ima lahko meromorfna funkcija samo odpravljivo singularnost ali pol, ne pa tudi bistvene singularnosti, je samo končno koeficientov c_n neničelnih. Posledično je g polinom v spremenljivki z. Če g ni konstanten, ima po osnovnem izreku algebre vsaj eno ničlo na $\mathbb{C}$, kar pa je protislovje. Torej je $g = c$ konstanten in $f(z) = c \cdot r(z)$ racionalna funkcija. $\square$

4.3. **Stopnja holomorfne preslikave.** Najprej ponovimo nekaj rezultatov iz teorije holomorfnih funkcij na $\mathbb{C}$, ki smo jih spoznali pri predmetu Analiza 2b. Vsako holomorfno funkcijo lahko na okolici poljubne točke $a \in \mathbb{C}$ zapišemo kot vsoto konvergentne potenčne vrste

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

Stopnjo f v točki a, ki jo označimo s $st_a f$, smo definirali kot najmanjši $n \in \mathbb{N}$, za katerega je $c_n \neq 0$. Če je torej $st_a f = n$, lahko f v okolici a zapišemo kot

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots \\ &= c_0 + (z-a)^n(c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots) \\ &= c_0 + (z-a)^n g(z), \end{aligned}$$

kjer je $g(a) = c_n \neq 0$, torej g po zveznosti nima ničel na neki okolici a. Pokazali smo tudi, da lahko nekonstantno holomorfno funkcijo, za katero velja $f(0) = 0$, $st_0 f = n$, na okolici 0 zapišemo kot

$$f(z) = (\phi(z))^n,$$

kjer je preslikava ϕ biholomorfna na neki okolici 0 in je $\phi(0) = 0$. To nam pove, da ima za vsako točko $w \neq 0$ enačba $f(z) = w$ natanko n rešitev $z_1, \ldots, z_n \neq 0$ v okolici 0. Geometrijska interpretacija je, da je v prasliki w ravno n točk okoli 0, oziroma da preslikava f identificira po n točk. Koncept stopnje bomo sedaj prenesli na preslikave med Riemannovimi ploskvami.

Imejmo nekonstantno holomorfno preslikavo $f\colon X \to Y$, kjer sta X in Y Riemannovi ploskvi. Naj bo $x_0 \in X$ poljubna točka. Vzemimo karto (U, ϕ) na X, da je $x_0 \in U$ in $\phi(x_0) = 0$, ter karto (V, ψ) na Y, da je $f(x_0) \in Y$ in $\psi(f(x_0)) = 0$. Potem je $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ nekonstantna holomofna funkcija in na okolici 0 jo lahko zapišemo kot

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots ,$$

kjer je $c_n \neq 0$. Če pa karte izberemo malo bolj premišljeno, lahko dobimo dosti lepši lokalni razvoj te funkcije.

Izrek 4.15 (Lokalna normalna oblika holomorfne preslikave)**.** *Naj bo $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava med Riemannovima ploskvama X in Y, kjer je X povezana. Potem za vsako točko $x_0 \in X$ obstajata karti (U, ϕ) na X in (V, ψ) na Y in število $n \in \mathbb{N}$, za katere velja $x_0 \in X$, $\phi(x_0) = 0$, $f(x_0) \in V$, $\psi(f(x_0)) = 0$ in*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^n.$$

Dokaz. Naj bo $x_0 \in X$ poljubna točka. Vzemimo taki karti kot prej, torej (U, ϕ) na X in (V, ψ) na Y, da je $x_0 \in U$, $\phi(x_0) = 0$, $f(x_0) \in V$ in $\psi(f(x_0)) = 0$. Torej imamo v okolici 0 razvoj

$$F(z) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots = z^n g(z),$$

kjer je $g(z)$ holomorfna funkcija na neki okolici 0, $g(0) = c_n \neq 0$. Za funkcijo F torej velja, da je $F(0) = 0$ in $st_0 F = n$, zato jo lahko, po sklepih iz začetka tega podpoglavja, na okolici 0 zapišemo kot

$$F(z) = (\eta(z))^n,$$

kjer je η biholomorfna preslikava na neki okolici 0. Ker velja $\eta(0) = 0$, bo tudi $\phi_1 = \eta \circ \phi$ karta okoli x_0 na X. Če sedaj izberemo karto ϕ_1 namesto karte ϕ, bo na okolici od 0 veljalo

$$(\psi \circ f \circ \phi_1^{-1})(z) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \eta^{-1})(z) = (F \circ \eta^{-1})(z) = z^n. \qquad \square$$

Opazimo lahko, da je število n iz izreka natančno določeno. Če imamo recimo lokalne koordinate na okolici x_0 in $F(x_0)$ ter preslikavo $f(z) = z^n$ na teh okolicah, bodo imele točke v neki okolici $f(x_0)$ natanko n praslik.

Tako smo preko lokalnih kart definicijo stopnje razširili na holomorfne preslikave:

Definicija 4.16. *Stopnja holomorfne preslikave* f v točki x_0 je število $n \in \mathbb{N}$, za katerega na okolici točke 0 velja

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^n,$$

kjer sta (U, ϕ) in (V, ψ) karti iz predpostavke izreka 4.15.

Trditev 4.17. *Naj bo $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava med Riemannovima ploskvama in $st_{x_0} f = n \in \mathbb{N}$ za neki $x_0 \in X$. Potem lahko najdemo taki okolici $U \ni x_0$ in $V \ni f(x_0)$, da ima vsaka točka v $V \setminus \{f(x_0)\}$ natanko n praslik v U.*

Dokaz. Vzemimo taki karti (U, ϕ) in (V, ψ), da velja

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^n.$$

Za poljubno točko $y \in V \setminus \{f(x_0)\}$ nas zanima število praslik $f^{-1}(y)$ v U, torej $|f^{-1}(y) \cap U|$. Naj bo torej $x \in f^{-1}(y) \cap U$. Za tak x bo veljalo

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \iff \psi(y) = \psi(f(x)) = \psi(f(\phi^{-1}(\phi(x)))) = \phi(x)^n.$$

Vemo tudi, da je $\phi(x_0) = 0$, zato je $\psi(y) \neq 0$. Torej ima $\psi(y)$ natanko n praslik na $\phi(U)$, oziroma ker sta ϕ in ψ homeomorfizma, ima y natanko n praslik na U in zato je res $|f^{-1}(y) \cap U| = n$. $\square$

Definicija 4.18. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava med Riemannovima ploskvama X in Y. Točkam $x \in X$, za katere velja $st_x f > 1$, pravimo *kritične točke* oz. *razvejišča* preslikave f. Oznaka za množico vseh razvejišč preslikave f je $\mathrm{br}(f) \subset X$. Če je točka x kritična točka, je $f(x)$ *kritična vrednost* preslikave f. Množico kritičnih vrednosti označujemo s $f(\mathrm{br}(f)) \subset Y$.

Opomba 4.19. V lokalnih koordinatah so razvejišča ravno točke, v katerih je $f'(x) = 0$. Na ta način tudi opazimo, da je množica $\mathrm{br}(f)$ diskretna, če je le f nekonstantna. Res, ker je f holomorfna, je tudi f' holomorfna in $f' \neq 0$, zato so ničle f' (ki so ravno razvejišča) diskretne.

Definicija 4.20. *Razvejiščno število* preslikave $f\colon X \to Y$ je

$$b(f) := \sum_{x \in \mathrm{br}(f)} (st_x f - 1) = \sum_{x \in X} (st_x f - 1) \in \mathbb{N}_0.$$

Opomba 4.21. Razvejiščno število je definirano, če je množica razvejišč $\mathrm{br}(f)$ končna. To se zgodi recimo v primeru, ko je X kompaktna in f nekonstantna, saj je tedaj množica vlaken diskretna na kompaktnem prostoru (glej lemo 4.12).

Izrek 4.22. *Naj bo $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava med kompaktnima povezanima Riemannovima ploskvama X in Y. Potem je število*

$$d(y) = \sum_{x \in X, f(x) = y} st_x f$$

neodvisno od točke $y \in Y$. Temu številu $d = d(y)$ rečemo stopnja preslikave *f.*

Točk $y \in Y$, ki imajo v prasliki manj kot d elementov, je končno mnogo.

Dokaz. Dokazali bomo, da je funkcija $y \to d(y)$ lokalno konstantna, ker pa je Y povezana, bo tudi (globalno) konstantna.

Vzemimo poljubno točko $y_0 \in Y$. Množica praslik $f^{-1}(y_0)$ je tedaj diskretna na kompaktnem prostoru X in zato tudi končna (po lemi 4.12). Torej lahko pišemo $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Po trditvi 4.17 lahko za vsako točko x_j najdemo tako okolico U_j, da ima enačba $f(x) = y$ natanko $st_{x_j} f = m_j$ rešitev na U_j za vsak $y \in Y \setminus \{y_0\}$. Te rešitve označimo z $x_{j,1}, \ldots, x_{j,m_j} \in U_j$. Pri izbiri okolic še pazimo na to, da so paroma disjunktne (izberemo dovolj majhne, da bo to veljalo).

Pokažimo, da točke $y \in Y$ dovolj blizu y_0 nimajo praslik zunaj okolic U_j, torej na $K = X \setminus \cup_{j=1}^{n} U_j$. Recimo nasprotno, torej da jih imajo. Potem lahko najdemo neko zaporedje točk $\{p_n\}$ na K, katerih slike konvergirajo k y, torej $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = y$. Ker je prostor X kompakten, lahko preidemo na konvergentno podzaporedje $\{p_{n_k}\}$ zaporedja $\{p_n\}$. Označimo $\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p$. Ker je f zvezna, velja $y = \lim_{k\to\infty} f(p_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} p_{n_k}) = f(p)$. Torej p leži v $f^{-1}(y)$ in je zato neki element iz $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $p = x_i$. Ampak v okolici U_i ni nobenega člena $\{p_{n_k}\}$, saj ti po definiciji ležijo v K. Torej smo prišli do protislovja in v K res ni nobenih točk iz $f^{-1}(y)$ za y dovolj blizu y_0.

Nadalje dokažimo, da imajo vse rešitve $x_{j,1}, \ldots, x_{j,m_j} \in U_j$ enačbe $f(x) = y$, za y blizu y_0, stopnjo ena. Po izreku 4.15 lahko najdemo take karte, centrirane v x_j in okrog y_0, da je f v lokalnih koordinatah podana s funkcijo $z \to z^{d_j}$. Enačba v lokalnih koordinatah $w = z_j^d \neq 0$ ima natanko d_j rešitev. Za razvejišča (torej točke s stopnjo več kot ena) vemo, da imajo ničelni odvod v lokalnih koordinatah. Odvod naše funkcije $z \to z^{d_j}$ je $d_j z^{d_j - 1} \neq 0$, saj $z \neq 0$, torej nobena od naših rešitev ni razvejišče in zato ima stopnjo ena. Torej imajo vse rešitve stopnjo ena. Ker vemo, da zunaj množic U_j ni nobenih drugih rešitev, velja

$$d(y) = \sum_{f(x) = y} st_x f = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d(y_0)$$

za točke y dovolj blizu y_0. Ker je bila izbira točke y_0 poljubna, je funkcija $y \to d(y)$ res lokalno konstantna na povezani množici Y in zato tudi konstantna.

Recimo da imamo točko y, ki ima v prasliki manj kot d elementov. Potem za vsaj eno točko $x \in f^{-1}(y)$ velja $st_x f > 1$. Torej je točka y kritična vrednost preslikave f. Velja tudi obratno, za kritične vrednosti preslikave f velja, da imajo manj kot d elementov v prasliki. Vzemimo sedaj množico vseh kritičnih vrednosti preslikave f, torej množico $f(\mathrm{br} f)$. Ta množica je diskretna, saj iz prejšnjega dela dokaza lahko vidimo, da so točke, ki imajo v prasliki manj kot d elementov, izolirane. Torej je $f(\mathrm{br} f)$ diskretna množica v kompaktu Y in zato je končna. □

Posledica 4.23. *Vsaka meromorfna fukcija na kompaktni Riemannovi ploskvi ima enako število ničel in polov.*

Dokaz. Iz izreka 4.22 vemo, da ima nekonstantna holomorfna preslikava $f\colon X \to Y$ med kompaktnima Riemannovima ploskvama X in Y konstantno stopnjo preslikave. Če sedaj izberemo $Y = \widehat{\mathbb{C}}$, velja $d(0) = d(\infty)$, kjer je $d(0)$ število ničel in $d(\infty)$ število polov. Posledica torej sledi. □

Iz [20, Definition 3.3.18.] vzemimo naslednjo definicijo.

Definicija 4.24. Naj bo S kompaktna, 2-mnogoterost z gladkim robom ali brez roba, torej sklenjena. Potem lahko definiramo naslednje pojme:

- Vrste podmnožic v S: *Oglišče* naj bo točka, *rob* naj bo množica, homeomorfna zaprtemu intervalu, *trikotnik* pa množica, homeomorfna trikotniku $\{(x, y) \in [0, 1]^2; x + y \le 1\}$.
- *Triangulacija* S je razbitje S na oglišča, robove in ploskve, tako da je presek poljubnih dveh ploskev unija robov in je presek poljubnih dveh robov unija oglišč. Pri tem se mora pripadajoča topologija ujemati s topologijo ploskve S.
- Za dano triangulacijo ploskve S označimo število oglišč z V, število robov z E in število ploskev z F. Število
$$\chi(S) = F - E + V$$
imenujemo *Eulerjeva karakteristika* ploskve S.

Opomba 4.25. Oglišča, robovi in trikotniki določajo topologijo podprosta S.

Opomba 4.26. Vsako kompaktno 2-mnogoterost lahko trianguliramo in Eulerjeva karakteristika χ je neodvisna od triangulacije ([20, Theorem 3.3.19.] ali [11, Proposition 4.15.]).

Opomba 4.27 ([25])**.** Ker je Eulerjeva karakteristika homotopska invarianta, ima vsak kontraktibilen prostor enako Eulerjevo karakteristiko kot točka, torej 1.

Izrek 4.28 (Riemann-Hurwitzova formula)**.** *Naj bo $f\colon X \to Y$ nekonstantna holomorfna preslikava stopnje $d \ge 1$ med sklenjenima Riemannovima ploskvama X in Y. Potem velja*
$$\chi(X) = d\chi(Y) - b(f).$$

Pri dokazu si pomagajmo z [11, stran 52].

Dokaz. Naj bo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ množica razvejišč preslikave f. Ploskev Y trianguliramo tako, da so vse kritične vrednosti preslikave f, torej $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} = \mathrm{br}(f) \subset Y$, oglišča triangulacije. Triangulacijo ploskve X naredimo tako, da za oglišča vzamemo praslike oglišč triangulacije Y.

Formulo za moč praslike poljubne točke $y \in Y$ lahko zapišemo kot

$$|f^{-1}(y)| = \sum_{x \in f^{-1}(y)} 1 = d + \sum_{x \in f^{-1}(y)} [1 - st_x f].$$

Vse notranje točke trikotnikov in stranic imajo torej natanko d različnih praslik v množici X. Zato velja $F(X) = dF(Y)$ in $E(X) = dE(Y)$. Vsako oglišče od Y, ki ni razvejišče, bo imelo d praslik, v vsakem razvejišču x_j pa bo vseh d_j praslik sovpadlo. Število oglišč $V(X)$ nam da kratek račun:

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{y \in V(Y)} \left(d + \sum_{x \in f^{-1}(y)} [1 - st_x f] \right) \\ &= dV(Y) - \sum_{y \in V(y)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} [st_x f - 1] \\ &= dV(Y) - \sum_{x \in V(X)} [st_x f - 1] \\ &= dV(Y) - b(f). \end{aligned}$$

Za ta izračun je bilo ključno dejstvo, da je $\mathrm{br}(f) \subset V(Y)$. Če sedaj upoštevamo definicijo Eulerjeve karakteristike, vidimo, da res velja

$$\begin{aligned} \chi(X) &= F(X) - E(X) + V(X) \\ &= dF(Y) - dE(Y) + dV(Y) - b(f) \\ &= d\chi(Y) - b(f), \end{aligned}$$

in s tem smo izrek dokazali. □

Trditev 4.29. *Naj bo $f\colon D_1 \to D_2$ preslikava med odprtima množicama $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ in $D_2 \subset R^m$. Preslikava f je prava natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{x_j\} \subset D_1$ z lastnostjo $x_j \to \partial D_1$ velja $f(x_j) \to \partial D_2$.*

Opomba 4.30. V tej trditvi ∂X označuje topološki rob oz. mejo množice X.

Dokaz. Implikacijo ($\Leftarrow$) dokažimo s protislovjem. Recimo, da praslika neke kompaktne množice $K \subset D_2$ ni kompaktna. Vemo, da je metričen prostor X kompakten, če ima vsako zaporedje točk iz X tako konvergentno podzaporedje, da limitna točka leži v X. V našem primeru prostor $f^{-1}(K)$ ni kompakten, zato obstaja zaporedje $\{x_j\} \subset f^{-1}(K)$, za katerega $x_j \to \partial D_1$, obenem pa je $f(x_j) \subset K$, kar je v nasprotju s predpostavko. Torej je za poljubno kompaktno množico $K \subset D_2$ tudi njena praslika $f^{-1}(K) \subset D_1$ kompaktna in zato je f prava preslikava.

Tudi implikacijo ($\Rightarrow$) dokažemo s protislovjem. Vzemimo poljubno zaporedje $\{x_j\} \subset D_1$ z lastnostjo $x_j \to \partial D$ in predpostavimo, da $f(x_j) \not\to \partial D_2$. Torej obstaja tak kompakt $K \subset D_2$, da ga zaporedje $f(x_j)$ ne zapusti, torej $f(x_j) \subset K$. Ker je preslikava f prava, je tudi $f^{-1}(K) \subset D_1$ kompakt in zanj velja, da ga zaporedje x_j ne zapusti, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da $x_j \to \partial D_1$. Zato res $f(x_j) \to \partial D_2$. □

Trditev 4.31. *Vsaka prava holomorfna preslikava $f\colon \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ je (končen)* Blaschkejev produkt*, torej preslikava oblike*

$$f(z)=e^{i\theta}\prod_{j=1}^{d}\frac{z-a_j}{1-\bar{a}_j z},$$

kjer so $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{D}$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Produkt na desni strani enačbe sestavljajo avtomorfizmi $\mathbb{D}$, ki preslikajo rob nazaj vase, zato je f prava preslikava.

($\Rightarrow$) Naj bo $f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ prava holomorfna preslikava in zato ima končno mnogo ničel, ki jih označimo z $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{D}$. Definirajmo

$$g(z):=\prod_{j=1}^{d}\frac{z-a_j}{1-\bar{a}_j z}$$

in si oglejmo kvocient $h(z):=\frac{f(z)}{g(z)}$. Vidimo, da je h holomorfna funkcija brez ničel na disku $\mathbb{D}$ in da velja $\lim\limits_{|z|\to 1}|h(z)|=1$. Recimo, da h ni konstantna. Po principu maksimuma je h v notranjosti $\mathbb{D}$ kvečjemu manjši kot na robu $\partial\mathbb{D}$, zato velja $|h(z)|<1$ za $z\in\mathbb{D}$. Ker h nima ničel, lahko podobno naredimo za funkcijo $\frac{1}{h(z)}$ in dobimo še $\frac{1}{|h(z)|}<1$, to pa je protislovje s prejšnjim sklepom. Torej je h konstantna in velja $|h(z)|=1$ oz. $h(z)=e^{i\theta}$ za neki fiksen $\theta\in\mathbb{R}$. Potem je res

$$f(z)=h(z)g(z)=e^{i\theta}\prod_{j=1}^{d}\frac{z-a_j}{1-\bar{a}_j z}. \qquad \square$$

4.4. **Uniformizacijski izrek.** V kompleksni ravnini nam Riemannov upodobitveni izrek pove, da je vsako enostavno povezano območje biholomorfno ekvivalentno bodisi enotskemu disku $\mathbb{D}$, bodisi celi kompleksni ravnini $\mathbb{C}$. Izrek ne velja za enostavno povezane Riemannove ploskve, saj je recimo Riemannova sfera $\widehat{\mathbb{C}}$ kompaktna, in zato ne more biti biholomorfno ekvivalentna niti $\mathbb{D}$, niti $\mathbb{C}$. Izkaže pa se, da lahko izrek dopolnimo tako, da bo veljal tudi za povezane in enostavno povezane Riemannove ploskve.

Izrek 4.32 (Uniformizacijski izrek, [17, poglavje 8.5])**.** *Vsaka povezana in enostavno povezana Riemannova ploskev je biholomorfno ekvivalentna Riemannovi sferi, kompleksni ravnini ali enotskemu disku.*

5. Krovni prostori

Teorija krovnih prostorov, ki sodi v področje algebraične topologije, se v glavnem ukvarja s proučevanjem lokalnih homeomorfizmov med prostori. Čeprav je teorija zelo bogata in obširna, se je bomo mi samo dotaknili. Glavni viri, ki nam bodo v pomoč, so [6, 8, 23].

Definicija 5.1. *Krovni prostor* nad topološkim prostorom X je tak prostor Y skupaj z zvezno preslikavo $p\colon Y\to X$, da velja: vsaka točka $x\in X$ ima tako odprto okolico U, da je praslika $p^{-1}(U)$ unija disjunktnih odprtih množic $V_j\subset Y$, vsako od katerih p homeomorfno preslika na U (tj. $p|V_j\colon V_j\to U$ je homeomorfizem). Preslikavi p rečemo tudi *krovna projekcija*, prostoru X *bazni prostor*, prostoru Y pa *totalni prostor* krovnega prostora.

Iz definicije sledi, da je za vsako točko x iz baznega prostora njena praslika $p^{-1}(x)$, ki ji rečemo *vlakno* nad x, diskretna množica v totalnem prostoru.

Lema 5.2. *Naj bo Y krovni prostor nad prostorom X s pripadajočo krovno projekcijo p. Potem je preslikava $f\colon X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, definirana kot $f(x) = |p^{-1}(x)|$, lokalno konstantna.*

Dokaz. Vzemimo poljubno točko $x \in X$ in njeno odprto okolico U iz definicije 5.1. Potem je $p^{-1}(U)$ unija odprtih paroma disjunktnih množic $V_j \subset Y$. Vzemimo še neko točko $w \in U$ dovolj blizu x. Ker je $p|V_j\colon V_j \to U$ homeomorfizem, leži v vsaki od množic V_j neki element, ki ga p preslika v w. Torej je

$$f(w) = |p^{-1}(w)| \geq |\{V_j\}| = |p^{-1}(x)| = f(x).$$

Tudi za w lahko vzamemo isto okolico U kot prej. Če ponovimo sklepe, dobimo še $f(x) \geq f(w)$, torej velja $f(x) = f(w)$. Ker je bila točka $x \in X$ poljubna, sledi, da je f lokalno konstantna. Če prostor X ni povezan, naredimo sklep za vsako komponento povezanosti posebej. Očitno je tudi, da v primeru izolirane točke lema velja. $\square$

Posledica 5.3. *Če je prostor X povezan, je število $|p^{-1}(x)|$ konstantno za vsak $x \in X$. Temu številu tedaj rečemo* število listov *krovnega prostora.*

Pri naslednjem primeru nam bo v pomoč [13, Chapter 8, Theorem 3.1.]

Primer 5.4. Pokažimo, da je $\mathbb{R}$ krovni prostor nad S^1 s krovno projekcijo

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Vzemimo polkrožne loke $U_1 = \{(x,y); x^2+y^2 = 1 \wedge x > 0\}$, $U_2 = \{(x,y); x^2+y^2 = 1 \wedge x < 0\}$, $U_3 = \{(x,y); x^2+y^2 = 1 \wedge y > 0\}$, $U_4 = \{(x,y); x^2+y^2 = 1 \wedge y < 0\}$. V prasliki $p^{-1}(U_1)$ so tiste točke enotske krožnice, za katere je $\cos(2\pi x)$ pozitiven, torej $\cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, kjer je

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$$

odprti interval. Očitno je, da so ti intervali paroma disjunktni.

Radi bi videli še, da je p lokalno homeomorfizem na U_1. Za injektivnost p je dovolj, da je injektivna vsaj ena komponenta. Opazimo, da je na $\overline{V_n}$ injektiven $\sin(2\pi x)$ in zato tudi p. Prostor $\overline{V_n}$ je seveda kompakten. Očitno je tudi, da p slika surjektivno $\overline{V_n} \to \overline{U_1}$ in posebej $V_n \to U_1$. Torej je $p|\overline{V_n}\colon \overline{V_n} \to \overline{U_1}$ bijektivna preslikava iz kompaktnega v Hausdorffov prostor, zato je tudi homeomorfizem. Posebej je tudi $p|V_n\colon V_n \to U_1$ homeomorfizem. Podobno naredimo za ostale množice U_i (na U_2 bo injektivna spet $\sin(2\pi x)$, na U_3 in U_4 pa $\cos(2\pi x)$). Tak krov je očitno neskončno-listen, saj n preteče vsa naravna števila in zato je množic V_n neskončno mnogo.

Na to pa lahko gledamo tudi kot na preslikavo $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ s predpisom

$$p(x) = x + \mathbb{Z}.$$

To preslikavo si lahko predstavljamo tako, da najprej cel $\mathbb{R}$ preslikamo v $[0,1)$, na koncu pa ta interval zvijemo v krožnico. Ekvivalentno bi lahko to preslikavo zapisali tudi kot $p(x) = e^{2\pi i x}$. $\diamondsuit$

Na podoben način lahko pokažemo tudi, da je S^1 krovni prostor nad samim seboj s krovno projekcijo $p(z) = z^n$, ki jo lahko ekvivalentno zapišemo kot

$$p(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

Za poljubno točko $z \in S^1$ tvorijo prasliko $p^{-1}(z)$ ravno n-ti koreni točk z, torej je to n-listen krov.

To preslikavo si lahko predstavljamo tudi z intervali. Očitno sta tako $[0, n]$, kjer identificiramo 0 in n, kot tudi $[0, 1]$, kjer identificiramo 0 in 1, oba homeomorfna S^1. Krovna preslikava je $p\colon \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, podana s predpisom

$$p(x + n\mathbb{Z}) = x + \mathbb{Z},$$

vsak element iz $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pa ima očitno n praslik v $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$.

Definicija 5.5 (povzeto po [24])**.** Preslikava $f\colon X \to Y$ med topološkima prostoroma X in Y je *lokalni homeomorfizem*, če za vsako točko $x \in X$ obstaja taka okolica $x \in U \subset X$, da je $f(U)$ odprta podmnožica v Y in je zožitev $f|_U\colon U \to f(U)$ homeomorfizem.

Izrek 5.6 ([27])**.** *Naj bo X kompakten Haussdorffov prostor, Y povezan Hausdorffov prostor, $f\colon X \to Y$ pa lokalni homeomorfizem. Potem je f krovna projekcija.*

Dokaz. Dokaz bo potekal v treh glavnih korakih.

(i) Najprej pokažimo, da je f surjektivna. Ker je f lokalni homeomorfizem, je odprta preslikava. Množica X je očitno odprta, zato je tudi $f(X) \subset Y$ odprta. Ker je X kompakten in f zvezna, je $f(X)$ kompaktna podmnožica v Hausdorffovem prostoru Y in zato tudi zaprta. Ker je $f(X)$ odprta in zaprta hkrati, je komponenta za povezanost Y. Ker pa je Y povezana, je $f(X) = Y$, torej je f surjektivna.

(ii) Nadalje dokažimo, da so vlakna $f^{-1}(y)$ končna za vsak $y \in Y$. Vzemimo poljubno točko $y \in Y$. Najprej uporabimo dejstvo, da so v Hausdorffovem prostoru vsi enojci zaprti. Torej je $\{y\}$ zaprta. Ker je f zvezna funkcija, je tudi $f^{-1}(y) \subset X$ zaprta podmnožica. V kompaktnem prostoru je vsaka zaprta množica kompaktna. Ker je X kompakten, je torej kompaktna tudi $f^{-1}(y)$. Za vsako izmed točk $x_i \in f^{-1}(y)$ vzemimo odprto okolico U_i. f je lokalni homeomorfizem, torej je na zadosti majhni okolici vsake točke homeomorfizem. Za vsako izmed okolic U_i poglejmo, če je f homeomorfizem. Če je, je ne spreminjamo, sicer pa jo ustrezno zmanjšamo, da bo $f|U_i$ homeomorfizem. Vzemimo odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_i\}$ množice $f^{-1}(y)$. Ker je $f^{-1}(y)$ kompakten obstaja končno podpokritje z množicami iz $\mathcal{U}$; recimo, da so to množice $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Ker je $f|U_i$ homeomorfizem, je tudi bijektiven oz. injektiven. Torej se nobeni dve točki iz U_i ne preslikata v isto točko v Y, kar posebej pomeni, da je v vsaki izmed množic U_i samo en element iz $f^{-1}(y)$. Ker lahko s končno množicami U_i pokrijemo $f^{-1}(y)$, je le-ta končna.

(iii) Za konec pokažimo še, da lahko za vsako točko $y \in Y$ najdemo tako okolico U, da je $f^{-1}(U)$ unija paroma disjunktnih odprtih množic v X. Vzemimo poljuben $y \in Y$. Prej smo videli, da je v vlaknu nad y končno elementov, zato pišimo $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ker je prostor X Hausdorffov, lahko poljubni dve točki v njem ločimo z disjunktnima odprtima okolicama. Vzemimo torej takšne paroma disjunktne okolice U_i za vsak x_i. Podobno kot prej skrčimo te okolice U_i, da jih bo f homeomorfno slikal na neke odprte okolice V_i točke y. Definirajmo množico $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, ki je kot unija odprtih množic tudi sama odprta, U^C pa je posledično zaprta. Množica $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n$ je končni presek odprtih množic in je zato odprta. Ker je f zvezna preslikava iz kompaktnega v Hausdorffov prostor, je tudi zaprta. Zato je $f(U^C)$ zaprta. Definirajmo še množico $W = V \setminus f(U^C)$, ki je očitno odprta. Ker so vse praslike y v U, je $f^{-1}(y) \cap U^C = \emptyset$ in $y \in W$. Opazimo še, da je $f^{-1}(W) \subset U$, zato je

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap U = f^{-1}(W) \cap (U_1 \cup \ldots \cup U_n) =$$
$$= (f^{-1}(W) \cap U_1) \cup \ldots \cup (f^{-1}(W) \cap U_n)$$

unija odprtih (f je zvezna, zato je $f^{-1}(W)$ odprta), paroma disjunktnih (ker so U_i paroma disjunktne) množic. Za vsak i je tudi $f|f^{-1}(W) \cap U_n \colon f^{-1}(W) \cap U_n \to W$ homeomorfizem, saj je zožitev homeomorfizma na odprto množico spet homeomorifzem. Torej je W iskana okolica y. □

Izrek 5.7 ([18, poglavje 11.3.3])**.** *Naj bo B Blaschkejev produkt stopnje n, ki ima vse ničle znotraj $\mathbb{D}$. Potem ima B točno $n-1$ kritičnih točk, ki ležijo znotraj $\mathbb{D}$; ostale kritične točke pa so konjugirane vrednosti teh znotraj $\mathbb{D}$.*

Primer 5.8. Naj bo $B \colon S^1 \to S^1$ Blaschkejev produkt stopnje n, ki ima vse ničle znotraj $\mathbb{D}$. Prostor S^1 je kompakten, Hausdorffov in povezan. Po izreku 5.7 vemo, da B nima razvejišč na S^1, zato je lokalno bijektiven v kompaktu S^1 in posledično je lokalni homeomorfizem. Po izreku 5.6 je B zato krovna projekcija.

Podobno vidimo, da je zvezna preslikava $f(z) = z^n$ (n-listni) krov. Res, tudi f nima razvejišč na S^1 (edino razvejišče ima v 0), zato je lokalni homeomorfizem in po izreku 5.6 krovna projekcija. V $f^{-1}(z)$ so ravno n-ti koreni od z, zato je krov n-listen. ♢

Definicija 5.9. Dva krovna prostora nad isto bazo $f \colon X \to Y$ in $p \colon X' \to Y$ sta *izomorfna*, če obstaja tak homeomorfizem $g \colon X \to X'$, da je $p \circ g = Id \circ f = f$.

Zaradi jasnosti prikažimo to z diagramom.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{Id} & Y \end{array}$$

Primer 5.10. Krovna prostora s krovnima preslikavama $f \colon S^1 \to S^1$ in $B \colon S^1 \to S^1$ iz primera 5.8 sta izomorfna.

Res, če naj bosta izomorfna, mora obstajati tak homeomorfizem $g \colon S^1 \to S^1$, da bo

$$f \circ g = B.$$

Torej je dovolj dokazati, da je preslikava $g = B^{\frac{1}{n}}$ homeomorfizem.

Očitno je, da B nima razvejišč na S^1. Tudi n-ti koren nima razvejišč na S^1, zato je preslikava $B^{\frac{1}{n}}$ na neki okolici S^1 biholomorfizem (nekonstantna holomorfna preslikava stopnje 1), ki preslika krožnico nazaj vase, torej difeomorfizem krožnice. ♢

6. Polinomske lemniskate

Sedaj smo pridobili vso potrebno predznanje, da se lahko pogumno lotimo našega glavnega izreka. Ker nam bo glavno vodilo Younsijeva (in Richardsova) ideja dokaza, bosta seveda temeljna vira [22] in [16], relevanten vir pa bo tudi [3].

Definicija 6.1. Naj bo P polinom stopnje n. *Polinomska lemniskata* $\Gamma(P)$ *stopnje* n je množica

$$\Gamma(P) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon |P(z)| = 1\}.$$

Podobno definirajmo še množici

$$\Omega_-(P) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon |P(z)| < 1\}$$

in

$$\Omega_+(P) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon |P(z)| > 1\}.$$

Opomba 6.2. Očitno je, da je za vsak polinom P točka ∞ v množici $\Omega_+(P)$, saj imajo polinomi pol v točki v neskončnosti.

Recimo, da ima množica $\Omega_+(P)$ omejeno komponento, ki jo označimo s C. Če se omejimo na kompakt $\overline{C}$, $\partial C \subset \Gamma(P)$, mora po principu maksimuma P doseči svoj maksimum na robu ∂C. Vendar po definiciji velja $|P(z)| = 1$ za $z \in \partial C$ in $|P(z)| > 1$ za $z \in C$, torej smo prišli v protislovje. Zato množica $\Omega_+(P)$ nima omejenih komponent, kar pomeni, da je povezana.

Definicija 6.3. Naj bo P polinom stopnje n. $\Gamma(P)$ je *prava* lemniskata stopnje n, če je $\Gamma(P)$ gladka (tj. $P'(z) \neq 0$ na $\Gamma(P)$) in je $\Omega_-(P)$ povezana.

Kritične točke polinoma $P(z)$ so ničle njegovega odvoda $P'(z) = 0$. Ker je P polinom stopnje n, je P' polinom stopnje $n-1$ in ima kot tak $n-1$ ničel. Zato ima P natanko $n-1$ kritičnih točk, ki jih označimo z $z_1, \ldots, z_{n-1}$, pripadajoče kritične vrednosti pa naj bodo $w_1 = P(z_1), \ldots, w_{n-1} = P(z_{n-1})$ Opomnimo samo, da točke $w_1, \ldots, w_{n-1}$ niso nujno različne, saj ima lahko katera izmed kritičnih točk večkratnost večjo od 1.

Trditev 6.4. [3] *Naj bo $P(z)$ polinom stopnje n in $\Gamma(P) = \{z \in \mathbb{C} \colon |P(z)| = 1\}$ gladka krivulja. Potem je ekvivalentno:*

(i) Odprta množica $\Omega_-(P)$ je povezana (tj. $\Gamma(P)$ je prava lemniskata stopnje n).

(ii) Vse kritične vrednosti $w_1, \ldots, w_{n-1}$ polinoma $P(z)$ ležijo znotraj enotskega diska $\mathbb{D}$.

Dokaz. Recimo, da za neko kritično vrednost velja $|w_k| = 1$. Pripadajoča kritična točka zato leži na $\Gamma(P)$. Vendar pa vemo, da je $\Gamma(P)$ gladka, torej brez kritičnih točk in zato smo prišli v protislovje.

Naj bo r število kritičnih točk (štetih z njihovo večkratnostjo), ki ležijo v $\Omega_-(P)$. Trditev (ii) lahko potem ekvivalentno formuliramo kot $r = n-1$. Želeno ekvivalenco bomo dobili s pomočjo Riemann-Hurwitzove formule 4.28.

Naj bodo $\Omega_1(P), \ldots, \Omega_k(P)$ komponente za povezanost množice $\Omega_-(P)$, število ničel in število kritičnih točk P na vsaki od teh komponent $\Omega_j(P)$ pa označimo zaporedoma z d_j in r_j. Ker ima P n ničel, velja $d_1 + \cdots + d_k = n$ in podobno, ker ima P r kritičnih točk, velja $r_1 + \cdots + r_k = r$. Označimo s P_j zožitev P na $\Omega_j(P)$. Vsak $P_j \colon \Omega_j(P) \to \mathbb{D}$ je potem prava preslikava stopnje d_j (saj slika rob v rob), zato je d_j-listen razvejan krov z razvejiščnim številom $b(P_j) = r_j$. Enostavno povezane množice so kontraktibilne, to pomeni da jih lahko skrčimo v točko, zato imajo po definiciji 4.24 Eulerjevo karakteristiko 1. Pri nas so vse množice $\Omega_j(P)$ in $\mathbb{D}$ enostavno povezane in zato kontraktibilne. Če sedaj uporabimo Riemann-Hurwitzovo formulo 4.28 na vsaki množici $\Omega_j(P)$ posebej, dobimo:

$$1 = d_j - r_j.$$

Če seštejemo te enačbe za vse j, dobimo ravno $k = n - r$ oz. $r = n - k$.

($\Rightarrow$): $\Omega_-(P)$ je enostavno povezana. Zato je $k = 1$ in od tod sledi $r = n-1$, kar pa je ekvivalentno trditvi (ii).

($\Leftarrow$): $r = n-1$, torej $k = 1$ in $\Omega_-(P)$ je enostavno povezana. □

Trditev 6.5. [26] *Odprta podmnožica $X \subset \mathbb{C}$ je enostavno povezana natanko tedaj, ko sta množici $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ obe povezani na Riemannovi sferi.*

Dokaz. Obe implikaciji dokažemo s kontrapozicijo.

($\Leftarrow$): Recimo, da odprta povezana množica $X \subset \mathbb{C}$ ni enostavno povezana. Potem obstaja neka Jordanova krivulja $\Gamma \subset X$, ki ni kontraktibilna. Krivulja Γ po Jordan-Brouwerjevem izreku o separaciji razdeli ravnino na dve komponenti za povezanost - na omejeno komponento D_1 in neomejeno komponento D_2. Ker Γ ni kontraktibilna, po Schönfliesovem izreku 2.4 obstaja taka točka $p \in D_1$, da $p \notin X$. Ob prehodu na Riemannovo sfero samo neomejeni komponenti dodamo točko $\{\infty\}$, torej $D_2' = D_2 \cup \{\infty\}$. Vendar to pomeni, da sta točki $p, \infty \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ v različnih komponentah za povezanost in zato množica $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ ni povezana.

($\Rightarrow$): Če množica X ni povezana, potem tudi ni enostavno povezana in implikacija drži. Zato predpostavimo, da je $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ odprta in povezana množica. Recimo, da $Y = \widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ ni povezana. Potem obstajata taki točki $p, q \in Y$ in taka Jordanova krivulja $\Gamma \subset X$, da je vsaka izmed točk p in q v svoji komponenti za povezanost glede na Γ. To pa pomeni, da Γ ni homotopna konstanti v množici $X \subset \mathbb{C}$, ki zato ni kontraktibilna in posledično tudi ni enostavno povezana.

Edini primer, ki ga še nismo zajeli, je, če ima Y samo eno točko, torej če je $Y = \{\infty\}$. Tedaj je $X = \mathbb{C}$, torej enostavno povezana množica. Očitno je, da sta povezani tudi množici $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ter $\{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$. □

V naslednjem izreku predpostavimo, da je lemniskata $\Gamma(P)$ prava, torej da sta obe območji $\Omega_-(P)$ in $\Omega_+(P)$ povezani.

Izrek 6.6. *Naj bo P polinom stopnje $n \in \mathbb{N}$. Prstni odtis $k\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ lemniskate $\Gamma(P)$ je dan s funkcijo*

$$k(z) = B(z)^{1/n},$$

kjer je B Blaschkejev produkt stopnje n

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \quad a_j = \Phi_-^{-1}(\xi_j), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

in so $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ničle P.

Obratno, za dan Blaschkejev produkt B stopnje n obstaja polinom P stopnje n, za katerega je polinomska lemniskata $\Gamma(P)$ prava in ima prstni odtis $k = B^{1/n}$. Pri tem je P določen enolično do predkompozicije s preslikavo oblike $T(z) = az + b$; $a > 0$, $b \in \mathbb{C}$.

Pri dokazu bomo sledili [22, Theorem 2.2].

Dokaz. ($\Rightarrow$): Ker je lemniskata $\Gamma(P)$ prava, je množica $\Omega_-(P)$ enostavno povezana, saj sta Ω_- in Ω_+ povezani na $\widehat{\mathbb{C}}$ (trditev 6.5). Zato po Riemannovem upodobitvenem izreku 2.7 obstaja konformna preslikava $\phi_-'\colon \mathbb{D} \to \Omega_-(P)$, ki se po Carathéodoryjevem izreku 2.10 razširi do zvezne preslikave $\phi_-\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega_-(P)}$, ki slika $\partial\mathbb{D}$ v $\Gamma(P)$. Ker je $\Gamma(P)$ ravno množica točk, ki jih P slika na $\partial\mathbb{D}$, bo kompozitum $P \circ \phi_-\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ slikal $\partial\mathbb{D}$ v $\partial\mathbb{D}$ (rob v rob) in zato bo to prava preslikava stopnje n, ki slika iz $\mathbb{D}$ v $\mathbb{D}$, torej je po trditvi 4.31 to Blaschkejev produkt stopnje n. Zato ga lahko zapišemo v obliki

$$(P \circ \phi_-)(z) = B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \quad a_j = \Phi_-^{-1}(\xi_j), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

kjer so $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ničle P.

Podobno definiramo konformno preslikavo $\phi_+ \colon \mathbb{D}_+ \to \Omega_+(P)$ in jo normaliziramo s pogojema $\phi_+(\infty) = \infty$ in $\phi'_+(\infty) > 0$. Po Carathéodoryjevem izreku 2.10 jo razširimo na rob, tako da slika $\partial\mathbb{D} \to \Gamma(P)$. Torej $P \circ \phi_+$ slika $\mathbb{D}_+ \to \mathbb{D}_+$ in $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$, zato je prava preslikava stopnje n oz. Blaschkejev produkt stopnje n, ki ima vse pole v ∞. Torej je $(P \circ \phi_+)(z) = F(z) = cz^n$. Ker vemo, da slika $\partial\mathbb{D}$ v $\partial\mathbb{D}$, mora biti $|c| = 1$. Iz normalizacijskega pogoja $\phi'_+(\infty) > 0$ sledi še, da je $c > 0$ in zato $c = 1$. Torej je $\phi_+^{-1} = F^{-1} \circ P$, kjer je $F^{-1}(z) = z^{\frac{1}{n}}$. Za prstni odtis k potem res velja

$$k = \phi_+^{-1} \circ \phi_- = F^{-1} \circ P \circ \phi_- = F^{-1} \circ B = B^{\frac{1}{n}}.$$

($\Leftarrow$): Ta del dokaza je precej težji, zato si bomo pomagali s sledečo lemo.

Lema 6.7. *Naj bo B Blaschkejev produkt stopnje n. Potem obstajata tak polinom P in konformna preslikava $\Phi_- \colon \mathbb{D} \to \Omega_-(P)$, da velja*

$$B = P \circ \phi_-$$

na $\mathbb{D}$.

Dokaz. B je Blaschkejev produkt, zato slika $\partial\mathbb{D}$ v $\partial\mathbb{D}$. Defiirajmo še preslikavo $A(z) = z^n$. Tudi A slika $\partial\mathbb{D}$ v $\partial\mathbb{D}$. A in B sta torej obe krovni projekciji $\partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$. Iz primera 5.10 sledi, da sta krovna prostora izomorfna in zato obstaja tak homeomorfizem $C \colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$, da velja $A \circ C = B$ na $\partial\mathbb{D}$. V primeru 5.10 smo videli tudi, da je C celo biholomorfizem na neki okolici $\partial\mathbb{D}$. Definirajmo Riemannovo ploskev $X = \overline{\mathbb{D}} \sqcup (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}) / \sim_C$, kjer $\sim_C$ predstavlja zlepek prostorov vzdolž homeomorfizma C. V našem primeru to pomeni, da zlepimo zaprtje enotskega diska $\overline{\mathbb{D}}$ na Riemannovo sfero brez enotskega diska $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ tako, da nalepimo $\partial\mathbb{D}$ iz ene množice na $\partial\mathbb{D}$ druge množice, kot to veleva homeomorfizem C (npr. točko z na eni kopiji $\partial\mathbb{D}$ zlepimo s točko $C(z)$ na drugi kopiji $\partial\mathbb{D}$). Intuitivno gledano smo množici $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ ravno dodali to, kar ji je manjkalo, da bi bila Riemannova sfera. Množica X je zato homeomorfna $\widehat{\mathbb{C}}$. Ker je X enostavno povezana, kompaktna Riemannova ploskev, po uniformizacijskem izreku 4.32 sledi, da obstaja biholomorfna preslikava $g \colon X \to \widehat{\mathbb{C}}$, tako da je $g(\infty) = \infty$. Definirajmo preslikavo $F \colon X \to \widehat{\mathbb{C}}$ kot

$$F(z) = \begin{cases} B(z); & z \in \overline{\mathbb{D}} \\ A(z); & z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}. \end{cases}$$

Najprej moramo za dobro definiranost preveriti, da se pogoja ujemata na preseku množic, na katerih sta definirana. Res, naj bo $z \in \partial\mathbb{D}$. Po definiciji je $F(z) = B(z)$. Po drugi strani pa je taka točka $z \in X$ 'enaka' kot točka $C(z)$ (saj smo ti dve točki zlepili) na $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ iz X, katero F slika enako kot preslikava A, torej je $F(z) = A(C(z))$. Pogoj za dobro definiranost je torej $A \circ C = B$ na $\partial\mathbb{D}$, kar očitno velja. Ker je $\partial\mathbb{D}$ Jordanova krivulja, je funkcija F po Morerovem izreku holomorfna. Kompozitum $R = F \circ g^{-1}$ je meromorfna funkcija na $\widehat{\mathbb{C}}$ in zato je po izreku 4.14 podana z neko racionalno funkcijo. Funkcija F ima v ∞ pol stopnje n, drugih polov pa nima. Ker je g biholomorfna in velja $g(\infty) = \infty$, je $g^{-1}(\infty) = \infty$. Torej ima $R = F \circ g^{-1}$

edini pol v ∞, njegova stopnja je n. Po izreku 4.23 ima vsaka meromorfna funkcija na kompaktni Riemannovi ploskvi enako število ničel in polov, zato ima R tudi n ničel in je posledično polinom stopje n. Da bo notacija bolj sugestivna, pišimo R (racionalna funkcija) $= P$ (polinom). Na $\mathbb{D}$ velja $P \circ g = F = B$ in zato je $g^{-1}(P^{-1}(\mathbb{D})) = F^{-1}(\mathbb{D}) = B^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, kjer zadnja enakost velja, ker je Blaschkejev produkt končen. Posledično je $g(\mathbb{D}) = P^{-1}(\mathbb{D})$, to pa je po definiciji ravno $\Omega_-(P)$. Torej je $g(\mathbb{D}) = \Omega_-(P)$, kjer je g biholomorfizem. Če definiramo $\phi_- := g|_{\mathbb{D}}$, dobimo želeno dekompozicijo $B = P \circ \phi_-$ na $\mathbb{D}$. □

Sedaj preidemo k dejanskemu dokazu. Dan imamo Blaschkejev produkt B stopnje n. Po lemi 6.7 obstajata polinom P stopnje n in biholomorfna preslikava $\phi_- \colon \mathbb{D} \to \Omega_-(P)$ (kam slika vidimo iz dokaza leme), da je $B = P \circ \phi_-$ na $\mathbb{D}$. Brez škode za splošnost naj bo vodilni koeficient v P pozitiven. Ker je ϕ_- biholomorfizem, je $\Omega_-(P)$ povezana in zato je po trditvi 6.4 lemniskata $\Gamma(P)$ prava. Ker je $\Omega_-(P)$ enostavno povezana, je po trditvi 6.5 tudi $\Omega_+(P)$ enostavno povezana. Zato obstaja biholomorfna preslikava $\phi_+ \colon \mathbb{D}_+ \to \Omega_+(P)$, ki je normalizirana s pogojema $\phi_+(\infty) = \infty$ in $\phi_+'(\infty) > 0$. Če ponovimo sklepe iz dokaza prve implikacije, vidimo, da je $\phi_+^{-1} = F^{-1} \circ P$, kjer je $F^{-1}(z) = z^{\frac{1}{n}}$. Podobno kot prej vidimo tudi, da za prstni odtis k velja

$$k = \phi_+^{-1} \circ \phi_- = F^{-1} \circ P \circ \phi_- = F^{-1} \circ B = B^{\frac{1}{n}}.$$

Enoličnost k nam zagotavlja izrek 3.2, ki pravi, da je $\mathcal{F}$ bijekcija. □

7. Dodatek

V dodatku bomo navedli nekaj dejstev o normalnih družinah funkcij, ki so bila obravnavana pri predmetu Kompleksna analiza in nam bodo pomagala samo pri dokazu Riemannovega upodobitvenega izreka. Definicije in izreki so vzeti iz zapiskov s predavanj.

Naj bo M metrični prostor.

Definicija 7.1. Družina zveznih funkcij $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M)$ je *enako-zvezna* na M, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$x, y \in M, \quad d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Definicija 7.2. Družina funkcij $\mathcal{F}$ je *enako omejena* na M, če obstaja tak $c > 0$, da je

$$\sup |f| \leq c, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Izrek 7.3 (Arzela-Ascoli). *Če je M kompakten metrični prostor in $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M)$ neka enako omejena in enako-zvezna druina zveznih funkcij na M, potem za vsako zaporedje funkcij $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ obstaja enakomerno konvergentno podzaporedje $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ in zvezna funkcija $f \in \mathcal{M}$, da je*

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in M} |f_{n_k}(x) - f(x)| = 0.$$

Definicija 7.4. Družina holomorfnih funkcij $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ je *normalna družina*, če ima vsako zaporedje $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ neko konvergentno podzaporedje.

Izrek 7.5 (Montelov izrek). *Naj bo $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ družina holomorfnih funkcij, ki je enako omejena na vsakem kompaktu $K \subset \Omega$. Potem je $\mathcal{F}$ normalna družina.*

Izrek 7.6 (Hurwitzov izrek). *Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ povezana množica in $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zaporedje injektivnih holomorfnih funkcij, ki konvergira k funkciji $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Če funkcija f ni konstantna, potem je injektivna.*

Slovar strokovnih izrazov

complex manifold kompleksna mnogoterost (dimenzije n) – topološka mnogoterost (dimenzije $2n$) skupaj z izborom kompleksne strukture

fingerprint prstni odtis – ekvivalenčni razred določenih difeomorfizmov roba enotskega diska vase, glede na delovanje grupe Möbiusovih avtomorfizmov

polynomial lemniscate polinomska lemniskata – krivulja (v kompleksni ravnini), vzdolž katere je absolutna vrednost polinoma, ki jo definira, enaka 1

proper map prava preslikava – preslikava, za katero je praslika vsakega kompakta spet kompakt

Riemann surface Riemannova ploskev – topološka mnogoterost realne dimenzije 2 skupaj z izborom kompleksne strukture

two-dimensional shape dvodimenzionalna oblika

Literatura

[1] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer-Verlag, New York, 1973.

[2] S. Donaldson, *Riemann surfaces*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **22**, Oxford University Press, Oxford, 2011.

[3] P. Ebenfelt, D. Khavinson in H. S. Shapiro, *Two-dimensional shapes and lemniscates*, verzija 24. 3. 2010, [ogled 20. 2. 2016], dostopno na `arxiv.org/pdf/1003.4567.pdf`.

[4] R. Engelking in K. Sieklucki, *Topology: A geometric approach*, Sigma Series in Pure mathematics **4**, Heldermann Verlag, Berlin, 1992.

[5] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] F. Forstnerič, *Riemannove ploskve in analitična geometrija*, verzija 17. 4. 2014, [ogled 20. 2. 2016], dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~forstneric/datoteke/Riemannove%20ploskve2.pdf`.

[7] R. E. Greene in S. G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics **40**, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[8] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[9] O. D. Kellogg, *Harmonic functions and Green's integral*, Trans. Amer. Math. Soc. **13** (1912) 109–132.

[10] A. A. Kirillov, *Kähler structure on the K-orbits of a group of diffeomorphisms of the circle*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21** (1987) 42–45.

[11] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics **5**, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[12] D. Mumford in E. Sharon, *2D-Shape analysis using conformal mapping*, 2004 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. **2** (2004) 350–357; dostopno tudi na `www.cis.upenn.edu/~cis610/sharon-mumford.pdf`.

[13] J. R. Munkres, *Topology: A first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[14] R. Narasimhan in Y. Nievergelt, *Complex analysis in one variable*, 2nd ed., Birkhäuser , Boston, 2001.

[15] A. Putman, *The generalized Schonflies theorem*, [ogled 16. 7. 2016], dostopno na `www3.nd.edu/~andyp/notes/Schoenflies.pdf`.

[16] T. Richards in M. Younsi, *Conformal models and fingerprints of pseudo-lemniscates*, verzija 16. 6. 2015, [ogled 20. 2. 2016], dostopno na `arxiv.org/pdf/1506.05061v1.pdf`.

[17] W. Schlag, *A course in complex analysis and Riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics **154**, American Mathematical Society, Providence, 2014.

[18] T. Sheil-Small, *Complex polynomials*, Cambridge studies in advanced mathematics **75**, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[19] D. C. Ullrich, *Complex made simple*, Graduate Studies in Mathematics **97**, American Mathematical Society, Providence, 2008.

[20] D. Varolin, *Riemann surfaces by way of complex analytic geometry*, Graduate Studies in Mathematics **125**, American Mathematical Society, Providence, 2011.

[21] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex plane*, American Mathematical Society Colloquium Publications **XX**, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[22] M. Younsi, *Shapes, fingerprints and rational lemniscates*, verzija 23. 6. 2014, [ogled 20. 2. 2016], dostopno na `arxiv.org/pdf/1406.3545v2.pdf`.

[23] *Covering space*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 18. 6. 2016], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Covering_space`.

[24] *Local homeomorphism*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 16. 7. 2016], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Local_homeomorphism`.

[25] *Euler characteristic*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 29. 6. 2016], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic`.

[26] *Simply connected space*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 22. 6. 2016], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Simply_connected_space`.

[27] *When is a local homeomorphism a covering map ?*, v: Mathematics Stack Exchange, [ogled 22. 6. 2016], dostopno na `math.stackexchange.com/questions/45990/when-is-a-local-homeomorphism-a-covering-map`.