UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Anja Petković

Kompaktno dominiran prostor je homotopsko ekvivalenten kompaktu

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2015

Kazalo

Kompaktno dominiran prostor je homotopsko ekvivalenten kompaktu

Povzetek

Spoznali bomo pojma homotopske dominacije in homotopske ekvivalence ter dokazali izrek, da je prostor, ki je homotopsko dominiran z nekim kompaktnim prostorom, homotopsko ekvivalenten nekemu (drugemu) kompaktnemu prostoru. To bomo dosegli s pomočjo kontraktibilnih retrakcij in preslikavnih cilindrov.

Compactly dominated space is homotopy equivalent to a compact space

Abstract

We shall introduce the notion of homotopy domination and homotopy equivalence and prove the following theorem: A topological space, which is dominated by some compact space, is homotopy equivalent to some (other) compact space. This will be achieved by using contractible retractions and mapping cylinders.

Math. Subj. Class. (2010): 55P10

Ključne besede: homotopija, homotopska ekvivalenca, homotopska dominacija, kompaktnost, kontraktibilna retrakcija, preslikavni cilinder

Keywords: homotopy, homotopy equivalence, homotopy domination, compactness, contractible retraction, mapping cylinder

1. Uvod

Dolgo je bilo odprto pomembno vprašanje, ali je topološki prostor, ki je homotopsko dominiran s kompaktnim poliedrom, krajše: končno dominiran (angleško finitely dominated), nujno tudi homotopsko ekvivalenten kakemu kompaktnemu poliedru (natančne definicije homotopske dominacije in ekvivalence se nahajajo v razdelku 4). Vrsto let so matematiki skušali odgovoriti na ta takrat odprt problem in so dokazali tudi mnogo vmesnih in podobnih rezultatov [3]. Končno je na to vprašanje leta 1965 negativno odgovoril Wall. Izkaže pa se, da je vsak končno dominiran prostor homotopsko ekvivalenten nekemu kompaktnemu prostoru (ki ni nujno polieder), kar napoveduje tudi naslov tega diplomskega dela.

Dokaz naslovnega izreka je povzet po članku, ki ga je leta 1980 objavil Steve Ferry [1] in je v tem diplomskem delu razširjen in dodelan. Spoznati se moramo tudi z osnovnimi pojmi geometrijske topologije (kvocientni prostor, zlepek, retrakcija, homotopija), da bodo definicije v nadaljevanju povsem razumljive. Dokaz je konstruktiven, to pomeni, da bomo kompakten prostor, ki je homotopsko ekvivalenten našemu prostoru, zgradili in tako dokazali njegov obstoj. Zanimivo pa je, da konstruirani prostor ne bo lokalno povezan, četudi je kompakt, ki dominira, bil.

2. Homotopija

Preden se lahko osredotočimo na glavni izrek, ki je v naslovu, se moramo spoznati s pojmom *homotopije*. Intuitivno si jo predstavljamo kot zvezno deformacijo ene preslikave v drugo. Če povemo nekoliko ohlapno in nenatančno, zgolj za boljšo predstavo, dodamo časovno dimenzijo in v končnem časovnem intervalu popravimo eno preslikavo (jo raztegnemo, skrivimo) v drugo preslikavo.

Definicija 2.1. Naj bosta X in Y topološka prostora in $f,\ g : X \to Y$ zvezni preslikavi. Zvezna preslikava $H : X \times [0,1] \to Y$, za katero v vsaki točki $x \in X$ velja

$$H(x,0) = f(x)$$

in

$$H(x,1) = g(x),$$

se imenuje *homotopija*, natančneje *homotopija od f do g*. Pravimo, da je f *homotopna g* in označimo $f \simeq g$.

Opomba 2.2. Homotopnost je ekvivalenčna relacija.

Dokaz. Za ekvivalenčnost moramo dokazati refleksivnost, simetričnost in tranzitivnost relacije.

- Refleksivnost: $f \simeq f$, homotopija je konstantna pri f, to pomeni $H(x,t) = f(x)$.
- Simetričnost: če je $H(x,t)$ homotopija od f do g, potem je $H(x,1-t)$ homotopija od g do f.
- Tranzitivnost: Naj bo H^1 homotopija med f in g ter H^2 homotopija med g in h. Potem je

$$H(x,t) = \begin{cases} H^1(x,2t); & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ H^2(x,2t-1); & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

  homotopija med f in h, saj za $t = \frac{1}{2}$ velja

$$H^1(x,2t) = H^1(x,1) = g(x) = H^2(x,0) = H^2(x,2t-1).$$

Preslikava H je zvezna, ker je podana z dvema usklajenima zveznima predpisoma, ki sta definirana na zaprtih množicah. $\square$

Oglejmo si dva preprosta primera homotopij.

Primer 2.3. Vzemimo enotski interval $I = [0, 1]$ ter na njem konstantno preslikavo ter identiteto.

$$f : I \to I,\ f = \mathrm{id}$$
$$g : I \to I,\ g(x) = 1$$

Homotopija med njima bo $H : I \times I \to I,\ H(x, t) = x + t \cdot (1 - x)$. Preslikava je zvezna, kar je očitno iz predpisa (imamo le produkt, vsoto in razliko). Preverimo še, da velja $H(x, 0) = x + 0 \cdot (1 - x) = x$, torej je $H(x, 0) = \mathrm{id}(x)$ in velja

$$H(x, 1) = x + 1 \cdot (1 - x) = x + 1 - x = 1,$$

torej je H res ustrezna homotopija.

Primer 2.4. Niso vse preslikave homotopne. Oglejmo si en ne-primer. Vzemimo preslikavi, ki slikata enodimenzionalno sfero (krožnico) nazaj vase, in sicer zopet poglejmo identiteto in konstantno preslikavo.

$$\begin{aligned} f, g : S^1 &\to S^1, \\ f &= \mathrm{id}, \\ g &= c, \end{aligned}$$

kjer je $c \in S^1$ neka točka in je g konstantna preslikava. Med f in g ne moremo konstruirati homotopije. Problem je v tem, da mora biti homotopija zvezna, intuitivno pa bi morali identično preslikavo nekje strgati, da bi jo potem zvezno poslali v točko. Natančen dokaz, da krožnica kontraktibilna (to pomeni, da ne obstaja homotopija med id in konstantno preslikavo), je v [5, str. 100].

Za krajši zapis bomo uporabljali oznako H_t za zožitev na t-ti nivo homotopije, natančneje je to preslikava $H_t : X \to Y$, za katero velja $H_t(x) = H(x, t)$.

Oglejmo si še t. i. *premočrtno homotopijo*. Gre za eno preprostejših homotopij, ki jo sestavimo z daljicami med preslikavama. Najlažje si jo predstavljamo na primeru.

Primer 2.5. Naj bosta torej f in g poljubni poti v $\mathbb{R}^2$ od $x_0 \in \mathbb{R}^2$ do $x_1 \in \mathbb{R}^2$. Tedaj sta f in g homotopni s homotopijo

$$H : I^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$H(x, t) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x),$$

kjer vidimo, da velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$, ter da so vse vmesne poti res poti med x_0 in x_1:

$$\begin{aligned} H(0, t) &= (1 - t)x_0 + tx_0 = x_0, \\ H(1, t) &= (1 - t)x_1 + tx_1 = x_1. \end{aligned}$$

Vendar pa se moramo zavedati, da je premočrtna homotopija odvisna od ambientnega prostora. Če bi naprimer hoteli konstruirati homotopijo v preluknjani ravnini $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ med potema $f(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s))$ (zgornji lok krožnice) in $g(s) = (\cos(\pi s), -\sin(\pi s))$ (spodnji lok krožnice), premočrtna homotopija ne bi delovala, ker njena slika ne bi ležala v prostoru $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, kar je intuitivno jasno, saj ne moremo zvezno deformirati krivulje preko "luknje".

3. Retrakcija, kontraktibilnost

V nadaljevanju se bomo večkrat srečali s pojmom *retrakcije* in *retrakta*.

Definicija 3.1. Naj bo $A \subset X$. Preslikava $r : X \to A$ je *retrakcija*, če je zožitev r na A identiteta, torej za vsak $a \in A$ velja $r(a) = a$.

Pomembno je, da se zavedamo, da mora biti retrakcija zvezna preslikava, sicer retrakcij ne bi bilo težko najti. Trivialen primer retrakcije je identiteta prostora samega vase. Naslednji trivialen primer retrakta je točka, natančneje, če imamo topološki prostor X in je $c \in X$ točka v tem prostoru, potem je $\{c\}$ retrakt prostora X, retrakcija pa je kar konstantna preslikava $r(x) = c$, ki je očitno identiteta na $\{c\}$. Poglejmo si še netrivialen primer retrakcije.

Primer 3.2. Vzemimo evklidsko ravnino $\mathbb{R}^2$ in v njej zaprto kroglo s središčem v izhodišču ter polmerom 2, označimo jo $\overline{K(0,2)}$. To bo naš prostor X. Za podmnožico A vzemimo $\overline{K(0,1)}$, zaprto kroglo z istim središčem in pol manjšim polmerom. Če želimo konstruirati retrakcijo $f : X \to A$, vemo, da mora biti na manjši krogli identiteta. Preslikavo bomo zlepili. Na manjši krogli bo preslikava identiteta, na preostanku pa bomo projicirali na obod manjše krogle po žarkih proti središču. V polarnih koordinatah se preslikava glasi:

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} (r,\varphi); & (r,\varphi) \in \overline{K(0,1)} \\ (1,\varphi); & (r,\varphi) \in \overline{K(0,2)} \setminus K(0,1). \end{cases}$$

Ta preslikava je po konstrukciji identiteta na podmnožici A. Preslikava je tudi zvezna, saj sta oba predpisa zvezna, na preseku pa se ujemata (namenoma je krožnica $S(0,1)$ s središčem v izhodišču in polmerom 1 vsebovana v obeh predpisih). Sklepamo lahko, da je f res retrakcija.

Zelo pomembni so tudi prostori, ki intuitivno "izgledajo kot točka", kar pomeni, da jih lahko stisnemo v točko. Natančneje s tem mislimo kontraktibilne prostore, ki jih bomo natančno definirali.

Definicija 3.3. Naj bo X topološki prostor. Homotopiji med identiteto id_X in poljubno konstatno preslikavo pravimo *kontrakcija*. Če na nekem prostoru obstaja kontrakcija, pravimo, da je prostor *kontraktibilen*.

Že v primeru 2.4 smo videli, da krožnica ni kontraktibilna, medtem ko je krogla v ravnini $\mathbb{R}^2$ kontraktibilna. Naredimo lahko namreč dokaj preprosto homotopijo med $c_{\{0\}}$ (konstantno preslikavo za točko 0) in $\mathrm{id}_{\overline{K(0,1)}}$, ki je na t-tem nivoju retrakcija na $\overline{K(0,1-t)}$, kot smo preslikavo definirali pri primeru 3.2.

4. Homotopska dominacija, homotopska ekvivalenca

Že v naslovu najdemo pojma *homotopska dominacija* in *homotopska ekvivalenca*, ki ju sedaj lahko dobro definiramo in razložimo.

Definicija 4.1. Naj bosta X in Y topološka prostora. Prostor Y je *homotopsko dominiran s prostorom* X, če obstajata preslikavi $u : Y \to X$ in $d : X \to Y$, da je kompozitum $d \circ u$ homotopen identiteti na Y. Preslikavi d pravimo *homotopska dominacija.*

Oglejmo si preprost primer homotopske dominacije.

Primer 4.2. Vzemimo za prostor Y premico, ki je homotopsko dominirana z ravnino. Natančneje: $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, preslikavi pa sta

$$u : Y \to X,\ u(y) = (y, 0),$$
$$d : X \to Y,\ d(x_1, x_2) = x_1 + 1.$$

Izračunamo kompozitum $d \circ u(y) = d(y, 0) = y + 1$ in ta je homotopen id_Y s homotopijo $H : Y \times I \to Y,\ H(y, t) = y + 1 - t$.

Definicija 4.3. Naj bosta X in Y topološka prostora. Prostor Y je *homotopsko ekvivalenten prostoru* X, če obstajata preslikavi $u : Y \to X$ in $d : X \to Y$, da je kompozitum $d \circ u$ homotopen identiteti na Y in kompozitum $u \circ d$ homotopen identiteti na prostoru X. Preslikavi d rečemo *homotopska ekvivalenca*.

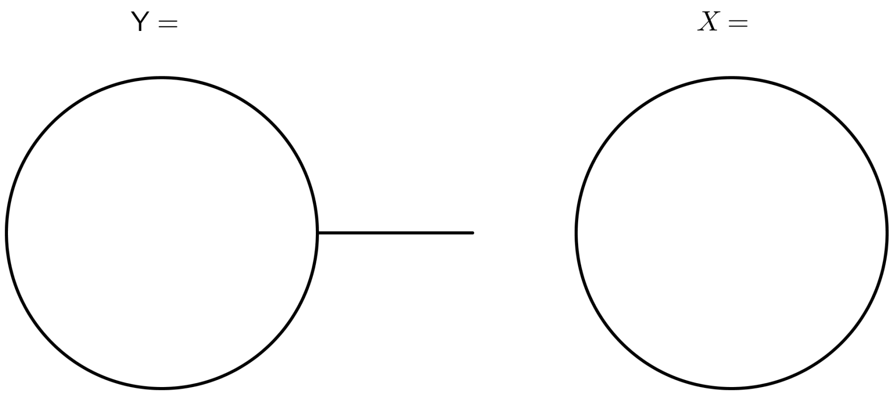
Opomba 4.4. Nekaj opomb o homotopski ekvivalenci:

- To je ekvivalenčna relacija. Refleksivnost in simetričnost sta trivialni, tranzitivnost pa dobimo s podobno homotopijo, kot jo dobimo pri dokazu tranzitivnosti relacije homotopnosti.
- Za pripadnika istega ekvivalenčnega razreda pravimo, da imata isti *homotopski tip*.
- Ne moremo trditi, da če je topološki prostor X homotopsko dominiran s prostorom Y in je Y homotopsko dominiran s prostorom X, sta potem X in Y homotopsko ekvivalentna. Pomembno je namreč, da sta preslikavi d in u enaki v obeh smereh dominacije.

Intuitivno homotopska ekvivalenca pomeni, da čeprav prostoru “izvlečmo” dodaten krak ali pas, bodisi projiciramo pas v točko, še vedno dobimo homotopsko ekvivalenten prostor. Oglejmo si primera homotopsko ekvivalentnih prostorov.

Primer 4.5. Trivialen primer homotopske ekvivalence je kar homeomorfizem. Za preslikavo u potem vzamemo kar inverz d^{-1}. Kompozituma $d \circ d^{-1}$ in $d^{-1} \circ d$ sta kar enaka identiteti, torej lahko vzamemo trivialno homotopijo.

Bolj zanimivo vprašanje je primer netrivialne homotopske ekvivalence. Naj bo $X = S^1$, torej enodimenzionalna sfera (krožnica), za prostor Y pa vzemimo krožnico z izrastkom, natančneje $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \cup [1, 2] \times \{0\}$. Prostora sta shematično prikazana na sliki 1.



Slika 1. Shema prostorov X in Y.

Preslikavo $u : Y \to X$ definiramo s preprosto projekcijo izrastka na krožnico, torej

$$u(x, y) = \begin{cases} (x, y); & x^2 + y^2 = 1 \\ (1, 0); & \text{sicer,} \end{cases}$$

preslikava $d : X \to Y$ pa naj bo kar inkluzija (vložitev). Kompozitum $u \circ d$ je identiteta na prostoru X, zato tukaj uporabimo trivialno homotopijo. Kompozitum $d \circ u$ pa je preslikavi id_Y homotopen s homotopijo $H : Y \times I \to Y$,

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, y); & x^2 + y^2 = 1 \\ (1 + (x - 1) \cdot t, 0); & y = 0 \text{ in } x \neq -1. \end{cases}$$

H je dobro definirana in zvezna, ker v točki $(x, y) = (1, 0)$ velja

$$(1 + (1 - 1) \cdot t, 0) = (1, 0)$$

in se predpisa ujemata, vsak predpis zase pa je zvezna funkcija.

S primerom 4.5 smo videli hkrati tudi netrivialen primer homotopske dominacije. Seveda pa se vprašamo po primeru homotopske dominacije, ki ni hkrati tudi ekvivalenca.

Primer 4.6. Naj bo X nekontraktibilen topološki prostor. Vsaka njegova točka je retrakt prostora X, torej gre za homotopsko dominacijo (preslikava u je potem inkluzija, kompozitum pa je kar enak identiteti). Ker X ni kontraktibilen, točka pa je, ne gre za homotopsko ekvivalenco.

Še en primer družine homotopskih dominacij, ki niso ekvivalence, so produkti. Naj bosta X in Y topološka prostora in naj Y ne bo kontraktibilen. Tedaj je $X \times \{y_0\}$, kjer je $y_0 \in Y$, retrakt prostora $X \times Y$, vendar ker Y ni kontraktibilen, zopet tukaj ni ekvivalence.

Sedaj, ko smo opremljeni s potrebnimi definicijami, lahko formuliramo izrek, ki ga napoveduje naslov te diplomske naloge in ki ga bomo dokazali.

Izrek 4.7 (Glavni izrek). *Naj bo topološki prostor Y homotopsko dominiran s kompaktnim prostorom X. Tedaj je Y homotopsko ekvivalenten nekemu kompaktnemu prostoru.*

Zavedati se moramo, da je topološki prostor Y iz izreka homotopsko ekvivalenten nekemu drugemu kompaktnemu prostoru, ki praviloma ni enak prostoru X (seveda, če vzamemo kompaktna homeomorfna prostora X in Y, bo Y homotopsko dominiran s prostorom X in tudi homotopsko ekvivalenten prostoru X). Dokaz, ki ga bomo podali, je konstruktiven, torej bomo konstruirali kompakten topološki prostor, ki je ekvivalenten prostoru Y.

5. Uvedba novih pojmov - definicije

Za dokaz glavnega izreka bomo potrebovali veliko novih pojmov in definicij s področja geometrijske in algebraične topologije.

5.1. **Predpostavke in oznake.** Kot prostor bomo vedno razumeli Hausdorffov topološki prostor. Preslikava (funkcija) bo pomenila zvezno funkcijo med topološkima prostoroma. Z id_X bomo označili identiteto na topološkem prostoru X. Enotski interval $[0, 1]$ bomo označili z I.

5.2. **Kontraktibilna retrakcija.** V tem razdelku bomo uvedli pojem *kontraktibilne retrakcije*, ki nam bo kasneje pomagala pri konstrukciji homotopskih ekvivalenc. Še prej pa se bomo spoznali s pojmom *prave preslikave*, ki ga bomo potrebovali pri dokazu kompaktnosti v glavnem izreku.

Če je preslikava zvezna, potem vemo, da je slika kompakta tudi kompakt. Kako pa je s praslikami kompaktov? Če je preslikava le zvezna, potem praslike kompaktov niso nujno kompaktne. Primer takšne preslikave je npr. $f : (0,1) \to \{c\}$, kjer je $c \in (0,1)$ poljubna točka. Praslika kompakta $\{c\}$ je $f^{-1}(c) = (0,1)$, kar očitno ni kompakt.

Definicija 5.1. Preslikava $f : X \to Y$ je *prava*, če je za vsak kompakt $K \subset Y$ tudi $f^{-1}(K)$ kompakt.

Trivialen primer prave preslikave je identiteta. Prava preslikava je npr. tudi polinom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $p(x) = x^3$, saj poljuben kompakt $K \subset \mathbb{R}$ lahko zapišemo kot končno disjunktno unijo zaprtih intervalov $K = \cup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ (točko tudi gledamo kot degeneriran zaprti interval), in je praslika $p^{-1}(K)$ enaka uniji $\cup_{i=1}^{n}([\sqrt[3]{a_i}, \sqrt[3]{b_i}])$, kar je tudi kompakt.

Definicija 5.2. Naj bosta X in Y prostora. Pravimo, da je preslikava $r : X \to Y$ *kontraktibilna retrakcija* ali *CR preslikava*, če obstajata preslikava $i : Y \to X$ in homotopija $R : X \times I \to X$, da je

$$\begin{aligned} r \circ i &= \mathrm{id}_Y, \\ R : \mathrm{id} &\simeq i \circ r, \\ r \circ R_t &= r \text{ za vse } t \in I, \\ R_t|i(Y) &= \mathrm{id}_{i(Y)} \text{ za vse } t \in I. \end{aligned}$$

Opazimo, da homotopija R skrči (kontrahira) vsak točkovni inverz $r^{-1}(y)$ na $i(y)$. Pod i vedno predstavljamo inkluzijo, saj je $i(Y)$ homeomorfen prostoru Y s homeomorfizmom $r|i(Y)$ (inverz pa je i). Da je to res homeomorfizem vidimo iz lastnosti preslikave r, saj velja $r \circ i = \mathrm{id}_Y$ po predpostavki in velja $i \circ (r|i(Y)) = \mathrm{id}_{i(Y)}$, kar sledi iz dejstva, da je $R_1|i(Y) = i \circ (r|i(Y)) = \mathrm{id}_{i(Y)}$. Kontraktibilna retrakcija je poseben primer retrakcije, saj če si pod $i(Y)$ predstavljamo kar Y, vidimo, da velja $r \circ i = \mathrm{id}_Y$ oziroma $r|i(Y) = \mathrm{id}_{i(Y)}$ in v tej lastnosti prepoznamo retrakcijo.

Primer 5.3. Poglejmo si nekaj primerov kontraktibilnih retrakcij.

- $\mathrm{id}_X : X \to X$ je CR preslikava. Res, poglejmo po definiciji. Oznčimo našo preslikavo z r in njen inverz, ki je tudi id_X z i.Za homotopijo vzamemo kar konstantno homotopijo $R : X \times I \to X,\ R(x,t) = x$. Preverimo, da veljajo enakosti, ki so zahtevane za CR preslikavo:

$$\begin{aligned} r \circ i &= \mathrm{id}_X, \\ R : \mathrm{id}_X &\simeq i \circ r, \\ r \circ R_t &= r, \\ R_t|i(X) &= \mathrm{id}_{i(X)}\,. \end{aligned}$$

- $\mathrm{proj} : X \times I \to X \times \{0\}$ je CR preslikava. Oglejmo si ostale preslikave v definiciji kontraktibilne retrakcije. Za i vzamemo inkluzijo, saj je $X \times \{0\}$ podprostor prostora $X \times I$. Homotopijo R si predstavljamo, da gre po piramidi, natančneje:

$$R : X \times I \times I \to X \times I$$
$$(x, s, t) \mapsto (x, (1-t)s).$$

Preverimo še lastnosti CR preslikave:
– $r \circ i = \mathrm{id}_{X\times\{0\}}$ saj je kompozitum inkluzije in projekcije,
– $R_0 = \mathrm{id}_{X\times I}$, $R_1(x, s) = (x, 0) = i \circ r(x, s)$,
– $r \circ R_t : (x, s) \mapsto r(x, (1-t)s) = (x, 0) = r(x, s)$ in
– $i(X \times \{0\}) = X \times \{0\}$, zato je tudi

$$R_t(x, 0) = (x, (1-t)\cdot 0) = (x, 0) = \mathrm{id}_{i(X\times\{0\})}(x, 0).$$

Skupaj s preslikavama i in R torej res dobimo CR preslikavo.

Za CR preslikave velja naslednja lema o kompozitumu kontraktibilnih retrakcij.

Lema 5.4. *Naj bosta $r : X \to Y$ in $s : Y \to Z$ kontraktibilni retrakciji. Tedaj je $s \circ r : X \to Y$ tudi CR preslikava. Če sta s in r pravi, je tudi $s \circ r$ prava preslikava.*

Dokaz. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava, zato je $s \circ r$ tudi zvezna preslikava. Ker sta r in s kontraktibilni retrakciji, obstajata preslikavi $i : Y \to X$ in $j : Z \to Y$ (kot kaže diagram) ter homotopiji $R : X \times I \to X$ in $S : Y \times I \to Y$, ki ustrezata potrebnim lastnostim za CR preslikavo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "r"] & Y \arrow[l, bend left, "i"] \arrow[r, bend left, "s"] & Z \arrow[l, bend left, "j"] \end{tikzcd}$$

Konstruirajmo homotopijo $H : X \times [0, 2] \to X$ s predpisom

$$H(x,t) = \begin{cases} R(x,t); & t \in [0,1] \\ i(S(r(x), t-1)); & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Čeprav preslikava H slika iz časovnega intervala $[0, 2]$ in ne iz enotskega intervala, lahko predpis s homeomorfizmom popravimo na enotski interval, a bomo zaradi nazornosti preslikave obdržali obstoječi predpis.

Preverimo, da je H res homotopija, natančneje, da je zvezna. Oglejmo si, kaj se zgodi na preseku intervalov $[0, 1]$ in $[1, 2]$, torej v točki 1.

$$H(x, 1) = R(x, 1) = i \circ r(x) = i(r(x)) = i(S(r(x), 0))$$

Predpisa se na preseku ujemata. Na posameznih intervalih pa je predpis zvezen, ker je R zvezna in je $i \circ S$ kompozitum zveznih preslikav ter je vsaka komponenta preslikave S zvezna preslikava (preslikavi r in $t \mapsto t - 1$ sta zvezni). Homotopija H je zvezna, ker je zvezna na končni uniji zaprtih podmnožic in predpisa se ujemata na preseku.

Preverimo, da za $s \circ r$ skupaj s preslikavo $i \circ j : Z \to X$ in homotopijo H veljajo lastnosti CR preslikav.

(1) Velja $(s\circ r)\circ(i\circ j)(z) = s\circ(r\circ i)\circ j(z) = s\circ j(z) = z$, torej je $s\circ r\circ i\circ j = \mathrm{id}_Z$.
(2) $H(x, 0) = R(x, 0) = x$, torej je $H_0 = \mathrm{id}_X$, $H(x, 2) = i(S(r(x), 1)) = i(j \circ s(r(x))) = i \circ j \circ s \circ r(x)$ in velja $H_2 = i \circ j \circ s \circ r$.
(3) Pokažimo, da je $s\circ r\circ H_t = s\circ r$. Za $t \in [0, 1]$ velja $s\circ r\circ H_t = s\circ(r\circ H_t) = s\circ r$, za $t \in [0, 2]$ pa velja

$$s \circ r \circ H_t(x) = s(r(i(S(r(x), t-1)))) = s(S_{t-1}(r(x))) = s(r(x)) = s \circ r(x).$$

(4) Ali velja $H_t(i \circ j(z)) = i \circ j(z)$? Računamo:

$$H_t(i \circ j(z)) = \begin{cases} i \circ j(z); & t \in [0,1] \\ i(S(r(i \circ j(z)), t-1)) = i(S(j(z), t-1)) = i \circ j(z); & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Pokazali smo, da veljajo vse lastnosti za CR preslikavo, torej je $s \circ r$ res CR preslikava.

Preverimo še, da je $s \circ r$ prava preslikava. Naj bo $K \subset Z$ kompaktna podmnožica. Ker je s prava, je $s^{-1}(K)$ kompakt, ker pa je r prava, je potem tudi $r^{-1}(s^{-1}(K)) = (s \circ r)^{-1}(K)$ kompakt. □

5.3. **Kvocientni prostori.** V nadaljevanju se bomo močno zanašali na *kvocientno topologijo*, zato jo moramo dobro definirati.

Ideja kvocientnega prostora je, da uvedemo topologijo na prostoru, ko neke točke lepimo skupaj (jih identificiramo). To storimo preko ekvivalenčne relacije na topološkem prostoru.

Imejmo topološki prostor (X, τ_X) in na njem definirajmo neko ekvivalenčno relacijo $\sim$. Množica X tako razpade na ekvivalenčne razrede. Označimo z Y množico vseh ekvivalenčnih razredov, $Y = \{[x]; x \in X\}$. To bo naša množica, na kateri želimo narediti topologijo. Lahko bi vzeli kar trivialno topologijo, a želimo, da je novi topološki prostor čim bolj podoben prejšnjemu. Definirajmo surjektivno preslikavo $q : X \to Y$, ki vsakemu elementu priredi njegov ekvivalenčni razred $q(x) = [x] = \{v \in X; v \sim x\}$.

Sedaj lahko definiramo topologijo na množici Y s pomočjo preslikave q tako, da za odprte množice vzamemo natanko tiste, katerih praslika s preslikavo q je odprta v topološkem prostoru X, torej natančneje

$$U^{\text{odp}} \subset Y \iff q^{-1}(U) \in \tau_X.$$

Topološkemu prostoru Y rečemo *kvocientni prostor topološkega prostora X z relacijo* $\sim$ in ga označimo z $X/{\sim}$. Topologiji na Y pravimo *kvocientna topologija.* Poudariti je potrebno, da je kvocientna topologija največja taka topologija, da je *kvocientna projekcija* q zvezna.

Primer 5.5. Oglejmo si naslednji kvocientni prostor: $X = [0,1]$, za vsak x iz X vpeljemo relacijo $x \sim x$, torej vsaka točka je v relaciji s seboj, ter dodamo še dve netrivialni relaciji $1 \sim 0$ in $0 \sim 1$. Predstavljamo si, da smo točki 1 in 0 zlepili v eno točko, dobili smo topološki prostor, homeomorfen krožnici S^1. Homeomorfizem dobimo s pomočjo izreka 5.8, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju in takrat tudi dokazali želeno homeomorfnost.

Kadar pa bi radi povezali dva topološka prostora in ju tako rekoč zlepili skupaj, lahko naredimo *zlepek*, ki je poseben primer kvocientnega prostora. Imejmo topološka prostora X in Y, podmnožico $A \subset X$ ter preslikavo $f : X \to Y$. Uvedimo relacijo $a \sim f(a)$ za vse $a \in A$, ki jo razširimo do ekvivalenčne relacije na disjunktni uniji $X \sqcup Y$ tako, da so točke, ki niso v A ali $f(A)$, v relaciji le same s seboj. Topološkemu prostoru $(X \sqcup Y)/{\sim}$ pravimo *zlepek prostorov X in Y s preslikavo f* in ga označimo $X \cup_f Y$.

5.4. **Preslikave med kvocientnimi prostori.** V tem razdelku bomo odgovorili na vprašanje, kako dobro definirati preslikave med kvocientnimi prostori. Kvocientne prostore si je pogosto težko predstavljati, zato si pomagamo s prostori, iz katerih kvocienti izvirajo (preden naredimo identifikacijo točk znotraj ekvivalenčnega razreda).

Denimo, da imamo kvocientna prostora $X/{\sim_1}$ in $Y/{\sim_2}$ ter preslikavo $f : X \to Y$. Kaj mora veljati za to preslikavo, da bo inducirala preslikavo $g : X/{\sim_1} \to Y/{\sim_2}$ med kvocientnima prostoroma? Želimo, da je preslikava g dobro definirana, torej da če se $x \in X$ slika v $y \in Y$, se tudi vse točke v X, ki pripadajo istemu ekvivalenčnemu razredu kot x, s f slikajo v eno izmed točk iz Y, ki pripadajo ekvivalenčnemu razredu od y. Če torej želimo definirati preslikavo med kvocientnima prostoroma, jo lahko podamo s preslikavo med izvornima prostoroma in preverimo, da naredi enake identifikacije, kot ekvivalenčni relaciji.

Naj bo $q : X \to X/\sim$ kvocientna projekcija in naj bo $f : X \to Y$ zvezna preslikava. Če za vsaka $a, b \in X$ velja, da iz $a \sim b$ sledi $f(a) = f(b)$, pravimo, da je f *konstantna na ekvivalenčnih razredih* in določa zvezno preslikavo $\bar{f} : X/{\sim} \to Y$ s predpisom $\bar{f}([x]) = f(x)$, posebej velja $\bar{f} \circ q = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q_1"'] & Y \\
X/{\sim} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Preslikavi $\bar{f}$ pravimo *inducirana preslikava* preslikave f vzdolž q. Preverimo, da je $\bar{f}$ zvezna. Naj bo $V \subset Y$ odprta množica. Množica $\bar{f}^{-1}(V) \subset X/{\sim}$ je odprta natanko tedaj, ko je $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V))$ odprta v prostoru X. Računamo

$$q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = (\bar{f} \circ q)^{-1}(V) = f^{-1}(V),$$

slednja množica pa je odprta v X, ker je f zvezna.

Kako pa je s homotopijami na kvocientnih prostorih? Denimo, da imamo homotopijo $f : X \times [0,1] \to Y$ in želimo konstruirati homotopijo $H : (X/{\sim}) \times [0,1] \to Y$. Če preverimo, da za vsak $t \in I$ in vsaka $x, x' \in X$ velja, da če je $x \sim x'$, potem je $f(x,t) = f(x',t)$, dobimo homotopijo $h : (X \times [0,1])/{\sim_1} \to Y$, kjer je $(x,t) \sim_1 (x',t')$ natanko tedaj, ko je $x \sim x'$ in $t = t'$. Da dobimo homotopijo H, moramo preveriti, da je prostor $(X \times [0,1])/{\sim_1}$ homeomorfen prostoru $(X/{\sim}) \times [0,1]$. Homeomorfizem bomo konstruirali s pomočjo *kvocientne preslikave*, ki jo moramo dobro definirati.

Definicija 5.6. Preslikava $f : X \to Y$ je *kvocientna*, če je surjektivna in za vsako množico $V \subset Y$ velja, da je V odprta v Y natanko tedaj, ko je $f^{-1}(V)$ odprta množica v X.

Opomba 5.7. Nekaj opomb h kvocientni preslikavi:

- Kvocientna preslikava je zvezna, kar sledi iz pogoja, da če je V odprta, je tudi $f^{-1}(V)$ odprta. Nov pogoj je v drugi smeri ekvivalence.
- Kvocientna projekcija q je kvocientna preslikava zaradi definicije kvocientne topologije.
- Če je $f : X \to Y$ zvezna, surjektivna in odprta ali zaprta, je kvocientna. To zlahka pokažemo po definiciji.

S pomočjo kvocientne preslikave konstruiramo homeomorfizme, kot nam pokaže naslednji izrek.

Izrek 5.8. *Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na prostoru X. Naj bo $f : X \to Y$ kvocientna preslikava, ki naredi iste identifikacije kot $\sim$, tj. $f(x) = f(y)$ natanko tedaj, ko je $x \sim y$. Tedaj je inducirana preslikava $\bar{f} : X/{\sim} \to Y$ preslikave f vzdolž kvocientne projekcije q homeomorfizem.*

Dokaz. Ker f naredi iste identifikacije kot ekvivalenčna relacija, pomeni, da je f konstantna na ekvivalenčnih razredih (torej je $\bar{f}$ dobro definirana) in jih loči (torej je $\bar{f}$ injektivna). Ker je f surjektivna, je tudi $\bar{f}$ surjektivna, sledi, da je $\bar{f}$ bijektivna. Ker je f kvocientna, je tudi zvezna in je tudi $\bar{f}$ zvezna. Pokažimo, da je inverz g preslikave $\bar{f}$ zvezen. Naj bo $V \subset X/\sim$ odprta. Tedaj je $g^{-1}(V) = \bar{f}(V) = f(q^{-1}(V))$ in ker je f kvocientna, je ta množica odprta v Y natanko tedaj, ko je $f^{-1}(f(q^{-1}(V)))$ odprta v X. Ker f loči ekvivalenčne razrede, je $f^{-1}(f(q^{-1}(V))) = q^{-1}(V)$, vemo pa, da je $q^{-1}(V)$ odprta v prostoru X zaradi zveznosti q. Sledi, da je $\bar{f}$ zvezna bijekcija z zveznim inverzom, torej homeomorfizem. □

Dokončajmo sedaj primer 5.5 tako, da konstruiramo homeomorfizem med $[0,1]/\sim$ in krožnico S^1. Imejmo preslikavo $f : [0,1] \to S^1$ s predpisom

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Preslikava f je zvezna, ker je vsaka njena komponenta zvezna, je surjektivna, ker je parametrizacija, in je zaprta, ker slika iz kompaktnega prostora v T2 prostor, torej je f kvocientna preslikava. Preveriti moramo, da naredi iste identifikacije kot relacija $\sim$. Opazimo, da je $f(0) = (1,0) = f(1)$. Sedaj moramo preveriti le še, da če velja $f(s) = f(t)$, potem je $s = t$ ali $\{s,t\} = \{0,1\}$. Iz $f(t) = f(s)$ sledi, da je $\cos(2\pi t) = \cos(2\pi s)$ in $\sin(2\pi t) = \sin(2\pi s)$. Iz enakosti sinusov sklepamo, da je $2\pi t = \pi - 2\pi s$, torej je $t = \frac{1}{2} - s$. Za enakost kosinusov obravnavamo 2 primera:

(1) $2\pi t = 2\pi - 2\pi s$, torej je $t = 1 - s$. Vendar, ker je $t = \frac{1}{2} - s$, pridemo do protislovja.
(2) $2\pi t = 2\pi s + 2\pi k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Dobimo tri možne rešitve:
   (a) $t = 1$, $s = 0$ in $k = 1$,
   (b) $t = 0$, $s = 1$ in $k = 1$,
   (c) $t = s$ in $k = 0$,
   vse tri rešitve pa ustrezajo temu, kar želimo pokazati.

Sklepamo, da f res naredi iste identifikacije kot ekvivalenčna relacija in po izreku 5.8 preslikava f inducira homeomorfizem med $[0,1]/\sim$ in krožnico S^1.

Vrnimo se k homotopiji na kvocientnih prostorih in želenemu homeomorfizmu.

Lema 5.9. *Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in naj bo $\sim_1$ ekvivalenčna relacija na $X \times [0,1]$ s predpisom $(x,t) \sim_1 (x',t') \iff x \sim x'$ in $t = t'$. Tedaj sta prostora $(X/\sim) \times [0,1]$ in $(X \times [0,1])/\sim_1$ homeomorfna.*

V dokazu leme 5.9 bomo potrebovali naslednjo lastnost kompaktov in produktne topologije, katere dokaz najdemo v [10].

Lema 5.10. *Naj bosta X in Y topološka prostora. Naj bosta $A \subset X$ in $B \subset Y$ kompaktni podmnožici. Če je $N \subset X \times Y$ odprta množica (v produktni topologiji), ki vsebuje $A \times B$, obstajata taki odprti množici $U \subset X$ in $V \subset Y$, da je $(A \times B) \subset (U \times V) \subset N$.*

Opomba 5.11. Če za A vzamemo enojec $\{x\} \subset X$ in za B vzamemo Y, lahko lemo razumemo na naslednji način. Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo Y kompakten. Če je N odprta množica v $X \times Y$, ki vsebuje $\{x\} \times Y$, potem obstaja takšna odprta množica U v X, ki vsebuje x, da je $U \times Y \subset N$.

Dokaz leme 5.10. Po definiciji produktne topologije za vsak $(a,b) \in A \times B$ obstajata taki odprti množici $U_{a,b} \subset X$ in $V_{a,b} \subset Y$, da velja $(a,b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subset N$. Fiksirajmo $a \in A$. Tedaj je $\{V_{a,b} | b \in B\}$ odprto pokritje prostora B. Ker je B kompakten, obstaja končno podpokritje, torej obstaja taka končna množica $B_0(a) \subset B$, da je $B \subset (\cup_{b\in B_0(a)} V_{a,b})$. Označimo $V'_a = \cup_{b\in B_0(a)} V_{a,b}$ in $U'_a = \cap_{b\in B_0(a)} U_{a,b}$. Ker je V'_a unija odprtih množic, je odprta. Ker je $B_0(a)$ končna, je U'_a končen presek odprtih množic, torej odprta množica. Iz konstrukcije U'_a in V'_a vidimo, da je $\{a\} \times B \subset U'_a \times V'_a \subset N$. Sedaj ponovimo premislek, da dobimo množice, neodvisne od a. Naj bo $A_0 \subset A$ taka končna množica, da je $A \subset \cup_{a\in A_0} U'_a$. Množica A_0 obstaja, ker je $\{U'_a | a \in A\}$ pokritje množice A in je A kompakt, torej obstaja končno podpokritje. Označimo $U'' = \cup_{a\in A_0} U'_a$ in $V'' = \cap_{a\in A_0} V'_a$. Po enakem premisleku kot zgoraj, sta množici U'' in V'' odprti. Sledi, da je $A \times B \subset U'' \times V'' \subset N$. □

Dokaz leme 5.9. Naj bo q kvocientna projekcija za relacijo $\sim$ in q_1 kvocientna projekcija za relacijo $\sim_1$. Oglejmo si naslednji diagram

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "q\times \mathrm{id}_{[0,1]}"] \arrow[d, "q_1"'] & (X/{\sim}) \times [0,1] \\ (X \times [0,1])/{\sim_1} \arrow[ur, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

Če pokažemo, da je preslikava $q \times \mathrm{id}_{[0,1]}$ kvocientna preslikava, potem res dobimo želen homeomorfizem. Preslikava $q \times \mathrm{id}_{[0,1]}$ je surjektivna, ker je produkt dveh surjektivnih preslikav, in je zvezna, ker je produkt dveh zveznih preslikav. Pokazali bomo še, da je kvocientna. Pri tem bomo uporabili lokalno kompaktnost intervala $[0,1]$. Dokaz je povzet po [4, lema 4]. Množica $A \subset X$ je *nasičena*, če je enaka uniji vseh ekvivalenčnih razredov, ki jo sekajo, tj. $A = q^{-1}(q(A))$, kjer je q kvocientna projekcija. Vzemimo množico $A \subset (X/{\sim}) \times [0,1]$. Želimo pokazati, da če je $(q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$ odprta, je tudi A odprta. Konkretneje želimo pokazati, da za vsako točko $(x,t) \in (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$ obstajata nasičena okolica U za x in okolica V za t, da je $U \times V \subset (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. Ker je $U \times V$ nasičena, je $q \times \mathrm{id}_{[0,1]}(U \times V)$ odprta in vsebovana v A, kar implicira, da za vsako točko $(x', t') \in A$ lahko najdemo okolico znotraj A, ki dobimo iz unije okolic točk iz praslike $(q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(x', t')$.

Ker je $(q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$ odprta v produktni topologiji, obstajata okolici U_1 za x in V za t, da je $U_1 \times V \subset (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. Ker je $[0,1]$ lokalno kompakten, lahko privzamemo, da je $\bar{V}$ kompakt in $U_1 \times \bar{V} \subset (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. Opazimo tudi, da je $q^{-1}(q(U_1)) \times \bar{V} \subset (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. Ker je $\bar{V}$ kompakten, ima po lemi 5.10 vsaka točka v $q^{-1}(q(U))$ takšno okolico, da je produkt te okolice z množico $\bar{V}$ vsebovan v $(q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. Naj bo U_2 unija teh okolic. Tedaj velja, da je $q^{-1}(q(U_1)) \subset U_2$ in $U_2 \times \bar{V} \subset (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. Induktivno generiramo zaporedje odprtih množic $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$, da je $q^{-1}(q(U_i)) \subset U_{i+1}$ in $U_{i+1} \times \bar{V} \subset (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. Odprta množica $U = \cup U_i$ je nasičena, ker je $q^{-1}(q(U)) = \cup q^{-1}(q(U_i)) \subset \cup U_{i+1} = U$, torej je tudi $U \times V$ nasičena in je $U \times V \subset \cup U_i \times V \subset (q \times \mathrm{id}_{[0,1]})^{-1}(A)$. □

Oglejmo si naslednjo lemo, ki se nanaša na kontraktibilne retrakcije med zlepki.

Lema 5.12. *Če je $r : X \to Y$ kontraktibilna retrakcija in je $A \subset Y$ zaprta podmnožica v Y ter je $f : A \to Z$ zvezna preslikava, tedaj je inducirana preslikava $X \cup_f Z \to Y \cup_f Z$ kontraktibilna retrakcija. Če sta r in f pravi preslikavi, je tudi inducirana preslikava prava.*

Pri formulaciji te leme smo nekoliko površni. Glede na to, da je funkcija f definirana na $A \subset Y$, kako smo potem definirali zlepek $X \cup_f Z$? Zopet se postavimo na stališče, da Y gledamo kot podprostor prostora X (preslikava i je spet inkluzija), potem pa je množica A definirana tudi v prostoru X in je zlepek $X \cup_f Z$ smiseln.

Dokaz. Definirajmo preslikavo $s : X \sqcup Z \to Y \sqcup Z$, ki bo inducirala preslikavo med zlepkoma s pomočjo naslednjega diagrama

$$\begin{tikzcd} X \sqcup Z \arrow[r, "s"] \arrow[d, "q_1"'] & Y \sqcup Z \arrow[d, "q_2"] \\ X \cup_f Z \arrow[r, "s_1"'] & Y \cup_f Z. \end{tikzcd}$$

Preslikavo s podamo s predpisom

$$s(x) = \begin{cases} r(x); & x \in X \\ x; & x \in Z. \end{cases}$$

Da bo s inducirala dobro definirano preslikavo s_1, je dovolj preveriti (ker je na Z identiteta), da če za $a \in A$ in $b \in A$ velja $q_1(a) = q_1(b)$, potem velja tudi $q_2(s(a)) = q_2(s(b))$. Izberemo poljubna $a, b \in A$, da velja $f(a) = f(b)$. Ugotoviti želimo, da je $f(s(b)) = f(s(a))$. Računamo $f(s(b)) = f(r(b))$ in $f(s(a)) = f(r(a))$. Ker je $a \in A \subset Y \subset X$, je $r(a) = a$ in $r(b) = b$, saj je $i \circ r|i(Y) = \mathrm{id}_{i(Y)}$ in si vmes mislimo inkluzijo i. Dobimo

$$f(s(a)) = f(r(a)) = f(a) = f(b) = f(r(b)) = f(s(b)).$$

Ker je r CR preslikava, veljajo nasednje lastnosti: obstaja $i : Y \to X$ in $R : X \times I \to X$ je taka homotopija, da je $r \circ i = \mathrm{id}_Y$, $R : \mathrm{id} \simeq i \circ r$, $r \circ R_t = r$ za vse t in $R_t|i(Y) = \mathrm{id}_{i(Y)}$ za vse t.

Preveriti moramo še, da je inducirana preslikava res CR preslikava. Najprej ugotovimo, da je s CR preslikava. Definirajmo preslikavo $j : Y \sqcup Z \to X \sqcup Z$ s predpisom $j(y) = i(y)$, $j(z) = z$. Oznaka $j(y)$ pove, kam se slikajo točke $y \in Y$, oznaka $j(z)$ pa pove, kam se slikajo točke $z \in Z$. To krajšo pisavo bomo uporabljali tudi v nadaljevanju zaradi boljše preglednosti. Definirajmo še homotopijo $S : (X \sqcup Z) \times I \to X \sqcup Z$, $S(x, t) = R(x, t)$, $S(z, t) = z$. Preverimo potrebne lastnosti CR preslikav za preslikavo s:

(1) $s \circ j(y) = s(j(y)) = s(i(y)) = r(i(y)) = y$, $s \circ j(z) = s(z) = z$, torej velja $s \circ j = \mathrm{id}_{Y \sqcup Z}$.
(2) $S(x, 0) = R(x, 0) = x$, $S(z, 0) = z$, $S(x, 1) = R(x, 1) = i(r(x)) = i(s(x)) = j(s(x))$, $S(z, 1) = z = s(z) = j(s(z))$, torej res velja, da je S homotopija med $\mathrm{id}_{X \sqcup Z}$ in $j \circ s$.
(3) Pokažimo, da za poljuben $t \in I$ velja $s \circ S_t = s$: $s \circ S_t(x) = s \circ R_t(x) = r(R_t(x)) = r(x) = s(x)$ in $s \circ S_t(z) = s(z)$.
(4) $S_t \circ j(z) = S_t(z) = z$, $S_t \circ j(y) = S_t(i(y)) = R_t(i(y))$, saj je $i(y) \in X$, potem pa po predpostavki velja $R_t(i(y)) = y$. Pokazali smo, da je $S_t|_{j(Y \sqcup Z)} = \mathrm{id}_{j(Y \sqcup Z)}$.

Tako smo preverili, da je s CR preslikava. Analogni argumenti kot za preslikavo s pokažejo, da tudi preslikava j in homotopija S inducirata dobro definirani ustreznici med zlepkoma. Oglejmo si ju natančneje. Če želimo dobro definiranost preslikave $j_1 : Y \cup_f Z \to X \cup_f Z$, moramo ugotoviti, da za $a, b \in A$, za katera velja $q_2(a) = q_2(b)$, velja $q_1(j(a)) = q_1(j(b))$. To pa seveda drži, saj naredimo le inkluzijo, zožitvi preslikav q_1 in q_2 na $Y \sqcup Z$ pa sta enaki. Ko želimo dobro definirati homotopijo

$\bar{S} : (X \cup_f Z) \times I \to X \cup_f Z$, preverimo, da za vsak $t \in I$ in za poljubna $a, b \in A$, za katera je $f(a) = f(b)$, velja $f(S(a,t)) = f(S(b,t))$. Slednje drži, ker je $f(S(a,t)) = f(S_t(a)) = f(R_t(a))$, zaradi lastnosti $R_t|i(Y) = \mathrm{id}_{i(Y)}$ in $a \in A \subset i(Y)$ pa lahko naprej sklepamo $f(R_t(a)) = f(a)$. Analogno dobimo $f(S(b,t)) = f(b)$. Po predpostavki velja $f(a) = f(b)$, torej smo dokazali dobro definiranost preslikave $\bar{S}$, da pa je to res homotopija, nam zagotavlja lema 5.9. Torej je tudi inducirana preslikava $s_1 : X \cup_f Z \to Y \cup_f Z$ kontraktibilna retrakcija.

Pokažimo še, da je preslikava s_1 prava. Najprej ugotovimo, da je s prava preslikava, saj sta r in id_Z pravi preslikavi. Natančneje, vzemimo kompakt $C \subset (Y \sqcup Z)$. Ker imamo disjunktno unijo, lahko zapišemo $C = (C \cap Y) \sqcup (C \cap Z)$ in obe množici v uniji sta kompakta, saj sta preseka kompaktov in zaprtih množic (gledamo v topologiji disjunktne unije). Ker je r prava, je potem $r^{-1}(C \cap Y)$ kompakt in ker je id_Z prava, je $(C \cap Z)$ kompakt. Sledi, da je $s^{-1}(C) = r^{-1}(C \cap Y) \sqcup (C \cap Z)$ unija dveh kompaktov, torej kompakt. Za pravost preslikave s_1 je dovolj pokazati, da je za kompakt $K \subset Y \cup_f Z$ tudi $s^{-1}(q_2^{-1}(K))$ kompakt. Ker smo pokazali, da je s prava, nam ostane le, da pokažemo, da je q_2 tudi prava. Naj bo O odprto pokritje množice $q_2^{-1}(K)$. Ker je prostor Z kar vložen v zlepek $Y \cup_f Z$ (na Z ne identificiramo točk med seboj), lahko zapišemo $K \cap Z$, ki je v topologiji disjunktne unije $Y \sqcup Z$ kompakt, torej lahko izberemo končno mnogo odprtih množic iz pokritja O, ki pokrijejo $K \cap Z$. Ker je f prava, je $f^{-1}(Z \cap K) \subset A$ kompakt, zato lahko izberemo končno mnogo odprtih množic iz pokritja O, ki pokrijejo $f^{-1}(Z \cap K)$. Sedaj iz odprtega pokritja O tvorimo družino $O' = \{M \setminus A | M \in O\}$. Ker smo odprtim množicam $M \in O$ odšteli zaprto množico A, smo dobili družino odprtih množic. Sedaj tvorimo odprto pokritje $O'' = \{q_2(B) | B \in O'\}$ prostora $Y \cup_f Z$. Množice v O'' so odprte, ker je q_2 na točkah, ki niso v A, kar inkluzija, in pokrijejo cel prostor $Y \cup_f Z$, ker je q_2 surjekcija, točke iz A pa so pokrite s tistimi množicami, ki so v O' z $f(A)$ imele neprazen presek. Ker je K kompakt, obstaja končno podpokritje pokritja O''. Sedaj končno podpokritje pokritja O množice $q_2^{-1}(K)$ sestavimo iz naslednjih množic:

- Za vsako množico M iz končnega podpokritja O'' izberemo eno izmed takšnih množic N v O, da je $q_2(N \setminus A) = M$. Teh množic je končno mnogo, ker izbiramo iz končnega podpokritja pokritja O''.
- Dodamo končno mnogo množic iz O, ki pokrijejo $Z \cap K$, kot smo izbrali prej.
- Dodamo končno mnogo množic iz O, ki pokrijejo $f^{-1}(Z \cap K)$, kot smo izbrali prej.

Dobili smo končno poddružino, ki pokrije $q_2^{-1}(K)$, saj za vse točke $b \in Y \cup_f Z \setminus q_2(f(A))$ velja $q_2^{-1}(\{b\}) = \{b\}$ in so te točke pokrite z množicami iz prve alineje. $\square$

Lema 5.13. *Če je $r : X \to Y$ kontraktibilna retrakcija (z inkluzijo i) in je $s : Z \to Y$ kontraktibilna retrakcija (z inkluzijo j), potem obstajata kontraktibilni retrakciji $X \cup_Y Z \to X$ in $X \cup_Y Z \to Z$, kjer je zlepek $X \cup_Y Z$ dobljen iz prostora $X \sqcup Z$ z identifikacijo $i(Y)$ z $j(Y)$, torej identificiramo obe kopiji Y.*

Opomba 5.14. Če je $r : X \to Y$ CR preslikava z inverzom i, potem bomo uporabljali oznaki $X \searrow Y$ in $Y \nearrow X$. V zgornji lemi 5.13 lahko tako zapišemo $X \nearrow X \cup_Y Z \searrow Z$.

Dokaz. Preslikavi r in s dopolnimo z identiteto, da dobimo ustrezni CR preslikavi. Natančneje $f : X \cup_Y Z \to X$ je podana s predpisom $f(x) = x,\ f(z) = s(z)$ in $g : X \cup_Y Z \to Z$ je podana s predpisom $g(z) = z,\ g(x) = r(x)$. CR inverza sta inkluziji. To je dobro definirano, ker sta $r \circ i$ in $s \circ j$ identiteti na Y. Naj bo R

homotopija, ki pripada CR preslikavi r, in S homotopija, ki pripada s. Homotopijo F, ki pripada f, dobimo s predpisom $F(x,t) = x$, $F(z,t) = S(z,t)$, podobno konstruiramo homotopijo za preslikavo g. Preslikave zadoščajo vsem lastnostim CR preslikave, preverimo le za preslikavo f (za preslikavo g sledi povsem analogno): označimo z ι inkluzijo $X \to X \cup_Y Z$.

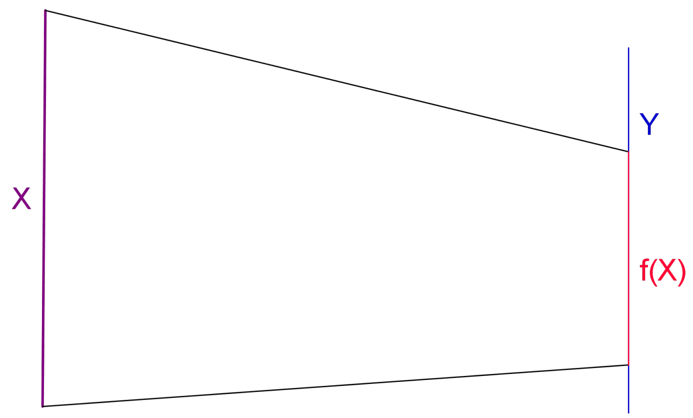
- $f \circ \iota = \mathrm{id}_X$, ker f na X miruje.
- $F_0 = \mathrm{id}_X \cup S(z,0) = \mathrm{id}_X \cup \mathrm{id}_Z$, $F_1 = \mathrm{id}_X \cup j \circ s = \mathrm{id}_X \cup s$.
- Za vsak $t \in I$ velja $f \circ F_t(x) = x$, $f \circ F_t(z) = f(S_t(z)) = s(S_t(z)) = s(z)$, torej je $f \circ F_t = f$.
- Po definiciji F miruje na $\iota(X)$ za vsak $t \in I$.

Homotopija je ustrezno definirana po lemi 5.9. □

6. Preslikavni cilindri in njihove pomembne lastnosti

Pri dokazu naslovega izreka bomo konstruirali kompakten prostor s pomočjo preslikavnih cilindrov, zato jih bomo v tem razdelku bolje spoznali.

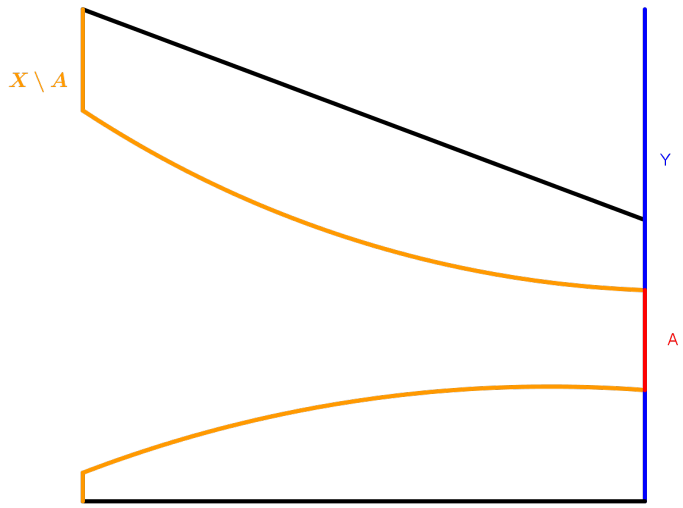
Definicija 6.1. *Preslikavni cilinder* $M(f)$ preslikave $f : X \to Y$ je prostor, ki ga dobimo iz disjunktne unije $X \times [0,1] \sqcup Y$ z identifikacijo $(x,1)$ s $f(x)$. Topologija na preslikavnem cilindru je kvocientna topologija.



Slika 2. Konstrukcija prostora $M(f)$.

Definicija 6.2. Naj bo $A \subset X$ zaprta množica. *Reduciran preslikavni cilinder* $M_A(f)$ preslikave $f : X \to Y$ tvorimo iz preslikavnega cilindra $M(f)$ s projekcijo žarkov $\{a\} \times [0,1], a \in A$ v $f(A)$. Natančneje je to kvocient prostora $X \times I \sqcup Y$ po relaciji $\forall a \in A : (a,s) \sim f(a)$, $\forall x \in X \setminus A : (x,1) \sim f(x)$.

Tako v preslikavnem cilindru kot v reduciranem preslikavnem cilindru bomo identificirali Y z $Y \subset M(f)$ oziroma $Y \subset M_A(f)$, saj je Y vložen v kvocientni prostor, na njem namreč nobenih točk ne identificiramo med seboj. Preslikavni cilinder je tudi reducirani preslikavni cilinder za zaprto množico $A = \emptyset$. V preslikavnem cilindru bomo identificirali prostor X z vloženo kopijo $X \times \{0\} \subset M(f)$. Če je v definiciji reduciranega preslikavnega cilindra $f|A$ vložitev, lahko identificiramo prostor X s podprostorom $X \times \{0\} \subset M_A(f)$, saj zopet ne lepimo točk iz X med seboj. Za reducirane preslikavne cilindre velja naslednja lema.



Slika 3. Shema prostora $M_A(f)$.

Lema 6.3. *Naj bo $A \subset X$ zaprta podmnožica in naj bo $f : X \to Y$ taka preslikava, da je $f|A$ vložitev. Potem obstaja taka kontraktibilna retrakcija $r : M_A(f) \to Y$, da je $r|X = f$. Če je f prava, je r prava CR preslikava.*

Dokaz. Konstruirajmo preslikavo $r : M_A(f) \to Y$ s pomočjo naslednjega diagrama.

$$\begin{tikzcd} X \times I \sqcup Y \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "q"] & Y \\ M_A(f) \arrow[ur, "r"] & \end{tikzcd}$$

Preslikava q je kvocientna projekcija, preslikava r_1 pa ima naslednji predpis:

$$r_1(x,t) = f(x),\ \ r_1(y) = y.$$

Preverimo, da preslikava r_1 res dobro definira preslikavo r, ki ji pravimo *kolaps preslikavnega cilindra*: za $(a,t) \in A \times I$ velja $r_1(a,t) = f(a)$ ter za $f(a) \in Y$ velja $r_1(f(a)) = f(a)$. Vse točke, ki jih po relaciji identificiramo, imajo s preslikavo r_1 isto sliko, zato je inducirana preslikava r dobro definirana. Pokažimo še, da je CR preslikava. Definiramo preslikavo

$$i : Y \to M_A(f),\ \ i(y) = q(y),$$

ki predstavlja našo inkluzijo, ter homotopijo $R : M_A(f) \times I \to M_A(f)$ s predpisom $R(q(y),t) = q(y),\ \ R(q(x,s),t) = q(x, s(1-t)+t)$. Predpisa sta vsak zase zvezna, ker sta R in q zvezni preslikavi, na preseku pa se tudi ujemata, tam namreč velja $q(y) = q(x,s)$, kar pomeni, da je $y = f(x)$ in $x \in A$ ali $s = 1$. Če je $x \in A$, potem je $R(q(x,s),t) = q(x, s(1-t)+t) = q(f(x)) = q(y)$, če pa je $s = 1$, potem je $R(q(x,1),t) = q(x, 1\cdot(1-t)+t) = q(x,1) = q(f(x)) = q(y)$. Preverimo lastnosti:

- $r \circ i(y) = r(y) = y = \mathrm{id}_Y(y)$,
- $R_0(q(y)) = q(y),\ \ R_0(q(x,s)) = q(x,s)$, torej $R_0 = \mathrm{id}_{M(f)}$,
  $R_1(q(y)) = q(y) = i \circ r(q(y)),\ \ R_1(q(x,s)) = q(x,1) = i \circ r(q(x,s))$,
- $r \circ R_t(q(y)) = y$, $r \circ R_t(q(x,s)) = f(x) = r(x,s)$,
- $R_t(i(y)) = q(y)$.

Preverimo še pravost. Naj bo $K \subset Y$ kompaktna podmnožica. Tedaj je $r^{-1}(K) = q(K) \cup q(f^{-1}(K) \times I)$. Imamo unijo dveh kompaktov, saj je K kompakt po predpostavki, $f^{-1}(K)$ je kompakt, ker je f prava, kartezični produkt dveh kompaktov ($f^{-1}(K)$ in I) pa je tudi kompakt. Ker je q zvezna, so slike kompakti. Torej je unija kompakt in dokaz je zaključen. □

Potrebovali bomo tudi naslednjo lemo, ki nam nekaj pove o preslikavnih cilindrih homotopije.

Lema 6.4. *Če je $A \subset X$ zaprta in je $f : X \times [0,1] \to X$ taka homotopija, da je $f_t|A = f_0|A$ za vsak t, potem obstaja tak prostor Z_A, da je*

$$M_A(f_0) \nearrow Z_A \searrow M_A(f_1).$$

Če je f prava, sta tudi CR preslikavi pravi.

Dokaz. Označimo z J kopijo enotskega intervala $[0,1]$, da bomo v nadaljevanju lahko razločevali komponente kvadrata $J \times I$. Oglejmo si najprej primer, ko je $A = \emptyset$. Tedaj konstruiramo prostor Z tako, da stisnemo vrh preslikavnega cilindra $M(f)$ v eno samo kopijo prostora X. Natančneje $Z = M(f)/\sim$, kjer je ekvivalenčna relacija $\sim$ podana z $\forall q(x,t,0) \in q(X \times J \times I) \subset M(f) : q(x,t,0) \sim q(x,s,0)$. Sedaj poiščemo CR preslikavi $r_1 : J \times I \to J \times \{0,1\} \cup \{1\} \times I$ in $r_2 : J \times I \to J \times \{0,1\} \cup \{0\} \times I$, ki bosta inducirali željeni preslikavi $Z \to M(f_1)$ in $Z \to M(f_0)$. Podrobneje si oglejmo preslikavo r_1, preslikavo r_2 potem konstruiramo analogno. Predstavljamo si, da je kvadrat $J \times I$ vložen v ravnino $\mathbb{R}^2$ in da preslikava projicira vzdolž žarkov iz točke $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ s predpisom

$$r_1(x,t) = \begin{cases} (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}-x}{\frac{1}{2}-t}, 1); & t \geq \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x \\ (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}-x}{\frac{1}{2}-t}, 0); & t \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x \\ (1, \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-t}{-\frac{1}{2}-x}); & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x \leq t \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x. \end{cases}$$

Ta preslikava je zvezna, saj je posamezen predpis zvezen in zlahka preverimo, da se na presekih vrednosti ujemajo. Preverimo le za $t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x$, za ostale sledi po podobnem računu. Velja

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}-x}{\frac{1}{2}-t} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}-x}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}+3x}{1+2x} = -\frac{1}{2} + \frac{3+6x}{2+4x} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

in

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-t}{-\frac{1}{2}-x} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x}{-\frac{1}{2}-x} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2} - 1 + x}{-1-2x} = \frac{1}{2} + \frac{1+2x}{-2(1+2x)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Vidimo, da se vrednosti na presekih res ujemajo in je preslikava zvezna. Zlahka preverimo tudi, da je to CR preslikava skupaj z inkluzijo in premočrtno homotopijo. S pomočjo preslikave r_1 sedaj želimo konstruirati preslikavo $Z \to M(f_1)$. Konstruirajmo prostor W iz prostora $X \times J \times I \sqcup X$ tako, da vzamemo le del plašča, torej $W = X \times J \times \{0,1\} \cup X \times \{1\} \times I \sqcup X$. Definirajmo preslikavo

$$r : X \times J \times I \sqcup X \to W,$$

ki na vsakem pravokotniku $\{x\} \times J \times I$, za vsak $x \in X$ uporabi preslikavo r_1. Oglejmo si naslednji diagram.

$$\begin{tikzcd} X \times J \times I \sqcup X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"] & W \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "s"] & M(f_1). \end{tikzcd}$$

Preslikava q je kvocientna projekcija za $M(f)$, komponirana s kvocientno projekcijo za stisk vrha preslikavnega cilindra, preslikava $p : W \to M(f_1)$ pa predstavlja projekcijo na kopijo $M(f_1)$, natančneje:

$$\begin{aligned} p(x,t,s) =& q_1(x,1,s), \\ p(x) =& q_1(x), \end{aligned}$$

kjer je q_1 kvocientna projekcija za $M(f_1)$.

Preslikava r tako inducira pravo preslikavo s, kot kaže diagram in kot veli lema 5.12, saj lahko prostora Z in $M(f_1)$ prepoznamo kot zlepka. Natančneje, če v lemi za lepilno preslikavo vzamemo

$$g : (X \times J \times \{1\}) \cup (X \times J \times \{0\}) \to X,$$

kjer domeno gledamo kot zaprt podprostor prostora $X \times J \times \{0,1\} \cup X \times \{1\} \times I$, s predpisom

$$g = f \cup \mathrm{proj}$$

in za prostor "Z" iz leme vzamemo X, za prostor "X" vzamemo $X \times J \times I$ ter za prostor "Y" vzamemo $X \times J \times \{0,1\} \cup X \times \{1\} \times I$, lahko lemo direktno uporabimo za konstrukcijo preslikave s. Za CR inkluzijo moramo $M(f_1)$ prepoznati kot podprostor v Z. To lahko vidimo, če na podprostoru $(X \times \{1\} \times I \sqcup X) \subset (X \times J \times I \sqcup X)$ naredimo preslikavo q. Podobno konstruiramo tudi preslikavo $Z \to M(f_0)$.

Obravnavajmo še primer, ko $A \neq \emptyset$. Tedaj konstruiramo prostor Z_A iz prostora Z z identifikacijo točk $(a,t,s) \in A \times J \times I$ s točkami $f_0(a) \in X$. Analogne CR preslikave kot za $A = \emptyset$ inducirajo preslikavi $Z_A \to M_A(f_0)$ in $Z_A \to M_A(f_1)$. □

Ko vemo, kaj je preslikavni cilinder preslikave, lahko definiramo tudi preslikavni cilinder dveh preslikav (če je seveda kodomena prve preslikave enaka domeni druge) na očiten način – zlepimo kodomeno in domeno preko identitete.

Definicija 6.5. Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ preslikavi. Tedaj je $M(f,g)$ *dvojni preslikavni cilinder*, dobljen iz $M(f) \sqcup M(g)$, ko identificiramo $Y \subset M(f)$ z $Y \subset M(g)$.

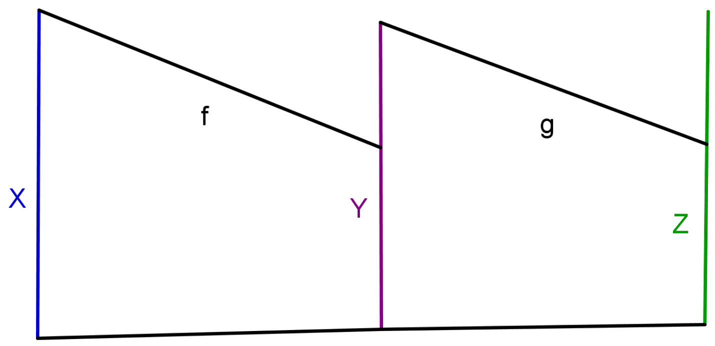
Shematičen prikaz dvojnega preslikavnega cilindra je na sliki 4. Seveda se ponuja vprašanje, kako je preslikavni cilinder kompozituma preslikav povezan z dvojnim preslikavnim cilindrom. Na to vprašanje odgovori naslednja lema.

Lema 6.6. *Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ preslikavi. Tedaj obstaja prostor W, tako da je*

$$M(g \circ f) \nearrow W \searrow M(f,g).$$

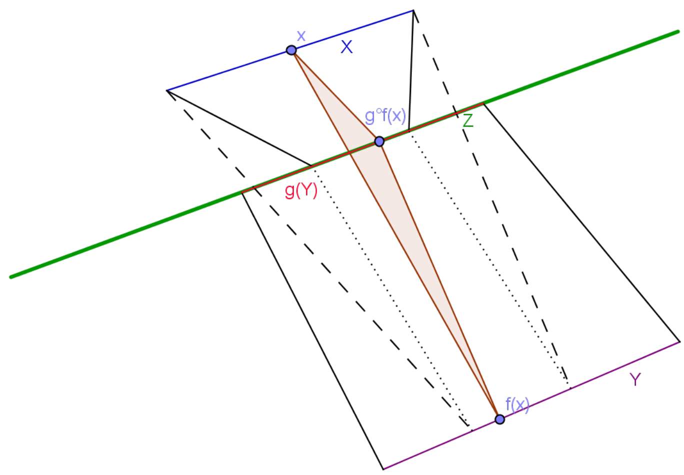
Če sta f in g pravi, sta tudi CR preslikavi pravi.

Dokaz. Definirajmo preslikavo $p : M(f) \to Y$, $p(q(x,t)) = f(x)$, $p(q(y)) = y$. Naj bo $c : M(f) \to Z$ preslikava s predpisom $c = g \circ p$. Trdimo, da za iskani prostor W lahko vzamemo preslikavni cilinder $M(c)$. Ker velja $c|Y = g$, je $M(f,g) =$



SLIKA 4. Konstrukcija prostora $M(f,g)$.

$M(f) \cup_{\mathrm{id}_Y} M(c|Y)$. Velja tudi $c|X = g \circ f$, zato je $M(g \circ f) = M(c|X)$. Obe množici $M(f) \cup_{\mathrm{id}_Y} M(c|Y)$ in $M(c|X)$ sta vloženi v $M(c)$. Če je $x \in X$, si lahko intuitivno predstavljamo "trikotnik" med točkami x, $f(x)$ in $g \circ f(x)$ (kot vidimo na sliki 5). S tem mislimo točko x v spodnji kopiji $M(f) \times \{0\} \subset M(c)$ v podprostoru $X \times \{0\} \subset M(f)$, točko $f(x) \in Y \subset M(f) \times \{0\} \subset M(c)$ in $g \circ f(x) \in Z \subset M(c)$.



SLIKA 5. Konstrukcija prostora $M(c)$.

Na tem trikotniku naredimo CR preslikavo r_1, ki ga splošči na stranici $[x, f(x)] \cup [f(x), g \circ f(x)]$. Preslikavo r_1 konstruiramo podobno kot v dokazu leme 6.4 s projiciranjem vzdolž žarkov (v resnici gledamo prostor $(X \times J \sqcup Y) \times I \sqcup Z$, kjer je naš "trikotnik" še pravokotnik, preden uporabimo kvocientne projekcije). S pomočjo preslikave r_1, ki jo uporabimo na vsakem trikotniku, lahko sestavimo CR preslikavo $r : M(c) \to M(f,g)$, ko jo na ostalih točkah dopolnimo z identiteto. Natančneje, preslikavo r dobimo s pomočjo naslednjega diagrama.

$$\begin{tikzcd}
(X \times J \sqcup Y) \times I \sqcup Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"] & M(f,g) \\
M(c) \arrow[ur, "r"] &
\end{tikzcd}$$

Preslikava r_1 najprej splošči pravokotnik $\{x\}\times J\times I$ na $\{x\}\times J\times\{0,1\}\cup\{x\}\times\{1\}\times I$, nato s projekcijo dobimo prostor $\{x\} \times J \times \{0\} \cup \{x\} \times \{1\} \times I$, nato pridružimo še $f(x) \times I$ in $g(f(x))$ ter naredimo identifikacije $(x, 1, t) \sim (f(x), t)$ ter $(f(x), 1) \sim g(f(x))$. To naredimo za vsak $x \in X$, nato pa še identificiramo $(y, 1) \in Y \times I$ z $g(y)$. Tako dobimo dobro definirano preslikavo u, ki inducira preslikavo r.

Preverjanje, da je dobljena preslikava prava kontraktibilna retrakcija, je podobno kot pri dokazu leme 6.4.

Kontraktibilno retrakcijo $M(c) \searrow M(g \circ f)$ konstruiramo s pomočjo preslikave u. Zopet si pomagamo s podobnim diagramom.

$$\begin{tikzcd}
(X \times J \sqcup Y) \times I \sqcup Z \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "q"] & M(g \circ f) \\
M(c) \arrow[ur, "r_2"] &
\end{tikzcd}$$

Preslikavo u_2 dobimo tako, da preslikavo u komponiramo s kolapsom preslikavnega cilindra $M(g) \subset M(f, g)$. V dokazu leme 6.3 smo pokazali, da je kolaps preslikavnega cilindra CR preslikava, zato dobimo CR preslikavo kot kompozitum CR preslikav po lemi 5.4. Inducirane preslikave so potem dobro definirane in s podobnimi argumenti kot prej dobimo pravo kontraktibilno retrakcijo r_2. $\square$

V nadaljevanju bomo potrebovali še dve posledici lem 6.4 in 6.6, ki nam bosta ključno pripomogli h konstrukciji homotopskih ekvivalenc med preslikavnimi cilindri.

Posledica 6.7. *Naj bo $f : X \times I \to Y$ homotopija. Tedaj obstajata preslikavi*

$$H : M(f_0) \to M(f_1),$$
$$G : M(f_1) \to M(f_0)$$

ter homotopiji

$$L : \mathrm{id} \simeq G \circ H,$$
$$K : \mathrm{id} \simeq H \circ G$$

da velja

$$\begin{aligned}
H|(X \cup Y) &= \mathrm{id},\\
G|(X \cup Y) &= \mathrm{id},\\
\forall t : L_t|(X \cup Y) &= \mathrm{id},\\
\forall t : K_t|(X \cup Y) &= \mathrm{id}\,.
\end{aligned}$$

Če je f prava, so vse kostruirane preslikave in homotopije prave. Če je $A \subset X$ zaprta in za vsak t velja $f_t|A = f_0|A$, potem lahko konstruiramo analogne preslikave in homotopije med $M_A(f_0)$ in $M_A(f_1)$.

Dokaz. Po lemi 6.4 obstaja prostor W in CR preslikavi $r_0 : W \to M(f_0)$ in $r_1 : W \to M(f_1)$. Naj bosta R^0 in R^1 homotopiji, ki pripadata CR preslikavama r_0 in r_1. Želene preslikave konstruiramo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
H =& r_1 \circ i_0,\\
G =& r_0 \circ i_1,\\
L(x, t) =& r_0 \circ R^1(i_0(x), t)\\
K(x, t) =& r_1 \circ R^0(i_1(x), t).
\end{aligned}$$

Vse navedene preslikave in homotopije so identitete na $X \cup Y$. Pravost sledi iz leme 6.4 in dejstva, da je kompozitum pravih preslikav prava preslikava. $\square$

Posledica 6.8. *Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ preslikavi. Tedaj obstajata preslikavi*

$$\begin{aligned} H &: M(g \circ f) \to M(f, g), \\ G &: M(f, g) \to M(g \circ f) \end{aligned}$$

ter homotopiji

$$\begin{aligned} L &: \mathrm{id} \simeq G \circ H, \\ K &: \mathrm{id} \simeq H \circ G \end{aligned}$$

da velja

$$\begin{aligned} H|(X \cup Z) &= \mathrm{id}, \\ G|(X \cup Z) &= \mathrm{id}, \\ \forall t : L_t|(X \cup Z) &= \mathrm{id}, \\ \forall t : K_t|(X \cup Z) &= \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

Če sta f in g pravi, potem lahko homotopije in preslikave konstruiramo prave.

Dokaz. Po lemi 6.6 obstaja prostor W in CR preslikavi $r_0 : W \to M(f, g)$ in $r_1 : W \to M(g \circ f)$. Preslikave in homotopije nato konstruiramo enako kot v dokazu posledice 6.7. $\square$

6.1. **Konstrukcija in lastnosti prostora $D(\alpha)$.** Naj bo Y homotopsko dominiran z X z dominacijo $d : X \to Y$ in desnim inverzom u. Naj bo $\alpha = u \circ d : X \to X$. Tedaj prostor $D(\alpha)$ konstruiramo na naslednji način:

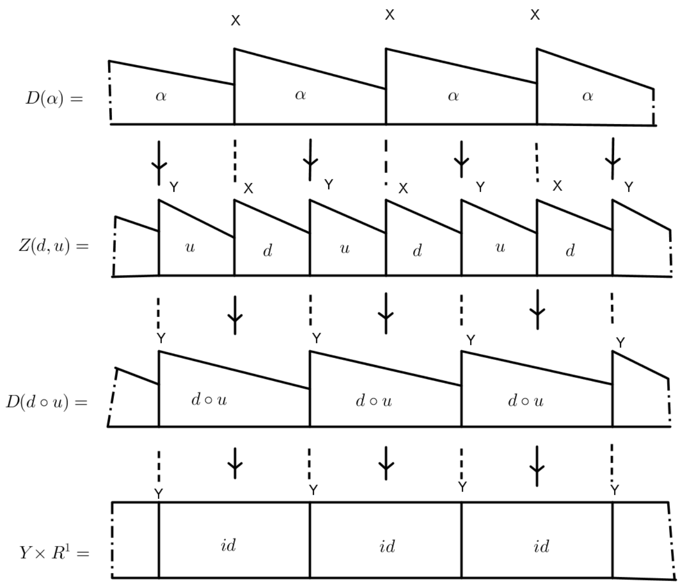
- tvorimo prostor $\sqcup_{i=-\infty}^{\infty} X \times [i, i+1]$,
- identificiramo $(x, i) \in X \times [i-1, i]$ z $(\alpha(x), i) \in X \times [i, i+1]$ za vsak $x \in X$ in $-\infty < i < \infty$.

Ta prostor se imenuje *teleskop* in ima nekaj pomembnih lastnosti, ki jih bomo potrebovali za dokaz glavnega izreka.

Trditev 6.9. *Če je $d : X \to Y$ homotopska dominacija kot zgoraj, potem je $D(\alpha)$ homotopsko ekvivalenten prostoru Y.*

Dokaz. Dokaz poteka po shemi, ki je prikazana na sliki 6.

Začnemo s prostorom $D(\alpha)$. Prostor $Z(d, u)$ dobimo tako, da zlepimo skupaj neskončno mnogo kopij prostorov $M(d, u)$ preko identitete na prostoru X, kot prikazuje slika. Nato uporabimo posledico 6.8, da na vsaki kopiji $M(\alpha) \subset D(\alpha)$ konstruiramo homotopsko ekvivalenco v ustrezno kopijo $M(d, u) \subset Z(d, u)$ – v posledici vzamemo za preslikavo $f = d$ in preslikavo $g = u$. Dobimo homotopsko ekvivalenco $M(\alpha) \to M(d, u)$, posledica nam namreč zagotavlja homotopiji med kompozitumoma in ustreznima identitetama. Ker je homotopska ekvivalenca identiteta na $q(X \times \{0\}) \subset M(\alpha)$ in $q(X) \subset M(\alpha)$, prav tako pa je tam tudi vsak nivo homotopije enak identiteti, lahko homotopske ekvivalence iz vsake kopije $M(\alpha) \subset D(\alpha)$ zlepimo in dobimo dobro definirano homotopsko ekvivalenco $D(\alpha) \to Z(d, u)$. Le-ta homotopska ekvivalenca je na shemi označena s puščico in je identiteta po črtkanih črtah (med ustreznimi kopijami prostora X).



Slika 6. Shema dokaza.

Iz prostora $Z(d,u)$ sestavimo homotopsko ekvivalenco v prostor $D(d \circ u)$ prav tako z uporabo posledice 6.8, le da tokrat za preslikavo f vzamemo preslikavo u, za preslikavo g vzamemo d in konsturiramo homotopsko ekvivalenco $M(u,d) \to M(d \circ u)$ na vsaki kopiji. Te homotopske ekvivalence so na sliki zopet označene s puščico in po črtkanih črtah so identitete.

Na koncu konstruiramo še homotopsko ekvivalenco med prostoroma $D(d \circ u)$ in $Y \times \mathbb{R}^1$. Ker je d homotopska dominacija, obstaja homotopija $R : Y \times I \to I$, za katero je $R_0 = d \circ u$ in $R_1 = \mathrm{id}_Y$. Sedaj se skličemo še na posledico 6.7, kjer za homotopijo f vzamemo kar homotopijo R in dobimo ustrezno homotopsko ekvivalenco $M(R_0) \to M(R_1)$ oziroma $M(d \circ u) \to M(\mathrm{id}_Y)$. Ko to preslikavo uporabimo na vsaki kopiji posebej (spet je na ustreznih podprostorih identiteta, da je sestavljanje preslikav dobro definirano), dobimo iskano homotopsko ekvivalenco. □

Trditev 6.9 ima še dve posledici, ki ju bomo v nadaljevanju potrebovali za dokaz glavnega izreka, zato se moramo najprej spoznati s pojmom *krepkega deformacijskega retrakta.*

Definicija 6.10. Podprostor $A \subset X$ je *deformacijski retrakt*, če obstaja homotopija $H : X \times I \to X$ med id_X in kakšno retrakcijo $r : X \to A$. Homotopijo H imenujemo *deformacijska retrakcija.* Prostor A je *krepki deformacijski retrakt* prostora X, če velja $\forall t \in I : H_t|A = \mathrm{id}_A$ (homotopija H miruje na množici A). V tem primeru je H *krepka deformacijska retrakcija.*

Opomba 6.11. Nekaj opomb k zgornji definiciji:

- Deformacijska retrakcija je poseben primer homotopske ekvivalence.
- Retrakt ni nujno deformacijski retrakt. Če je na primer točka (enojec) deformacijski retrakt, takoj sledi, da je prostor s potmi povezan oziroma celo kontraktibilen. Vemo pa, da je točka vedno retrakt prostora (za retrakcijo vzamemo konstantno preslikavo) ne glede na njegovo povezanost.

- Ponekod smatrajo definicijo krepkega deformacijskega retrakta kot definicijo deformacijskega retrakta (npr. v [2]).
- Definicija je povzeta po [6].

Oglejmo si primer krepkega deformacijskega retrakta.

Primer 6.12. Krožnica S^1 je krepki deformacijsi retrakt preluknjane ravnine $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Konstruirajmo homotopijo $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ s predpisom

$$H(x,t) = \left((1-t) + \frac{t}{||x||}\right) x.$$

Vidimo, da je $H_0(x) = x$, torej je id_X, in $H_1(x) = \frac{x}{||x||} \in S^1$, kar je retrakcija, saj za $s \in S^1$ velja $||s|| = 1$ in $H_1(s) = \frac{s}{||s||} = \frac{s}{1} = s$, torej je H_1 res identiteta na S^1. Iz predpisa za H je očitno, da je H zvezna preslikava. Preveriti moramo le še, da za vsak t preslikava H_t miruje na S^1. Izberimo poljubna $s \in S^1$ in $t \in I$. Računamo

$$H_t(s) = \left((1-t) + \frac{t}{||s||}\right) s = \left((1-t) + \frac{t}{1}\right) s = (1-t+t)s = s.$$

Pokazali smo, da je S^1 res krepki deformacijski retrakt prostora $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Opomba 6.13. Primer je mogoče posplošiti na n-dimenzionalno sfero S^n in prostor $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ s krepko deformacijsko retrakcijo $H(x,t) = \left((1-t) + \frac{t}{||x||}\right) x$.

Sedaj, ko smo spoznali deformacijske retrakte, se vprašamo, kje jih najdemo v preslikavnih cilindrih. Iz trditve 6.3 sledi, da če je $f : X \to Y$ preslikava, potem je Y krepki deformacijski retrakt prostora $M(f)$. Oglejmo si še posledico trditve 6.9.

Posledica 6.14. *Naj bo $f : X \to Y$ homotopska ekvivalenca. Tedaj je X krepki deformacijski retrakt prostora $M(f)$. Če je f prava, je tudi krepka deformacijska retrakcija prava.*

Dokaz. Naj bo $g : Y \to X$ homotopski (izvira iz homotopske ekvivalence) inverz za f. Tvorimo prostor $Z = Z(f,g)$ kot v dokazu trditve 6.9. Ta dokaz nam pokaže, da je vsaka kopija Y v $Z(f,g)$ krepki deformacijski retrakt prostora $Z(f,g)$, saj naredimo deformacijo v $Y \times \mathbb{R}^1$ in jo preko homotopskih ekvivalenc dvignemo na $Z(f,g)$. Na podoben način vidimo, da je X krepki deformacijski retrakt $Z(f,g)$. $\square$

Ko pogledamo teleskop $D(\alpha)$, vidimo, da če je X kompakten, imamo intuitivno dve neskončnosti: $+\infty$ in $-\infty$. Formalneje tem neskončnostim pravimo *konci*. Oglejmo si natančno definicijo, povzeto po [7].

Definicija 6.15. Naj bo X topološki prostor in denimo, da je

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$$

naraščajoče zaporedje kompaktnih podmnožic prostora X, katerih notranjost pokrije X, torej $\cup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Int}(K_i) = X$. Tedaj je vsako zaporedje

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots,$$

kjer je U_n povezana komponenta prostora $X \setminus K_n$, en *konec* prostora X.

Opomba 6.16. Število koncev ni odvisno od konkretnega zaporedja kompaktnih množic K_i, saj obstaja kanonična bijekcija med množicama koncev za poljubni dve taki zaporedji [7].

Intuitivno konec predstavlja neki unikaten način, kako se lahko v prostoru X pomikamo proti neskončnosti. Konci so nekakšne povezane komponente "meje" topološkega prostora.

Primer 6.17. Oglejmo si topološki prostor $\mathbb{R}$. Na njem lahko vidimo dva konca: $+\infty$ in $-\infty$. Preverimo, kako to ustreza definiciji. Za zaporedje kompaktov vzemimo družino zaprtih intervalov $\{[-i,i]; i \in \mathbb{N}\}$, torej $[-1,1] \subset [-2,2] \subset [-3,3] \subset \cdots$ in vidimo, da je $\cup_{i=1}^{\infty}(-i,i) = \mathbb{R}$. Vemo, da ima $X \setminus [-i,i]$ natanko dve povezani komponenti: (i,∞) in $(-\infty,-i)$. Zaporedje

$$(1,\infty) \supset (2,\infty) \supset (3,\infty) \cdots$$

predstavlja konec ∞, zaporedje

$$(-\infty,-1) \supset (-\infty,-2) \supset (-\infty,-3) \supset \cdots$$

pa predstavlja konec $-\infty$. Ker smo porabili vse povezane komponente, vidimo, da ima prostor $\mathbb{R}$ natanko dva konca.

Sedaj lahko formalno zapišemo, da če je X kompakten in je $\alpha : X \to X$ preslikava, ima prostor $D(\alpha)$ dva konca. Sklepanje o tej lastnosti poteka na povsem analogen način kot pri dokazu, da ima $\mathbb{R}$ dva konca.

Kako pa izgledajo okolice koncev?

Definicija 6.18. *Okolica konca* $\{U_i\}$ je takšna odprta množica V, da za neki $n \in \mathbb{N}$ velja vsebovanost $V \supset U_n$.

Opomba 6.19. Ker v definiciji konca velja $U_n \supset U_{n+1} \supset U_{n+2} \supset \cdots$, bo za vsak $m \geq n$ veljalo $V \supset U_m$.

Poglejmo si še eno posledico dokaza trditve 6.9, ki jo bomo v nadaljevanju potrebovali.

Trditev 6.20. *Naj bo $d : X \to Y$ homotopska dominacija z desnim inverzom u, X kompakten prostor in $\alpha = u \circ d$. Potem obstaja prava homotopska ekvivalenca iz $D(\alpha)$ v $D(\alpha)$, ki obrne konca.*

Dokaz. Naj bosta $H : D(\alpha) \to Y \times \mathbb{R}$ in $K : Y \times \mathbb{R} \to D(\alpha)$ homotopski ekvivalenci, ki smo ju konstruirali v dokazu trditve 6.9. Naj bo $T : Y \times \mathbb{R} \to Y \times \mathbb{R}$ involucija (sama sebi inverzna preslikava) s predpisom

$$T(y,t) = (y,-t).$$

Tedaj je želena prava homotopska ekvivalenca $f : D(\alpha) \to D(\alpha)$ enaka $d = K \circ T \circ H$. Da f obrne konca, je očitno, saj za to poskrbi preslikava T (konec $+\infty$ pošlje v konec $-\infty$ in obratno). Preveriti moramo še, da je preslikava res homotopska ekvivalenca. Njen homotopski inverz u bi bil kar enak preslikavi f, saj je to edini smiseln kompozitum, ki slika $D(\alpha) \to D(\alpha)$. Oglejmo si še homotopijo, s katero je kompozitum $f \circ u = u \circ f = f^2$ homotopen $\mathrm{id}_{D(\alpha)}$. Naj bosta F in G homotopiji, ki ju dobimo iz homotopskih ekvivalenc H in K. Natančneje

$$\begin{aligned} F &: D(\alpha) \times I \to D(\alpha), \quad F_0 = K \circ H, \quad F_1 = \mathrm{id}_{D(\alpha)} \\ G &: Y \times \mathbb{R} \times I \to Y \times \mathbb{R}, \quad G_0 = H \circ K, \quad G_1 = \mathrm{id}_{Y \times \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Želeno homotopijo $R : D(\alpha) \times I \to D(\alpha)$ sestavimo na naslednji način:

$$R(x,t) = \begin{cases} K \circ T \circ G(T \circ H(x), 2t); & t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, 2t-1); & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Preverimo, da je R dobro definirana in zvezna:

- Točka $T \circ H(x)$ pripada množici $Y \times \mathbb{R}$, zato je $G(T \circ H(x), 2t)$ dobro definirano za $t \leq \frac{1}{2}$. Nato lahko uporabimo preslikavo $K \circ T$, saj G slika v prostor $Y \times \mathbb{R}$. Ker je $x \in D(\alpha)$, je tudi $F(x, 2t-1)$ dobro definirano za $t \geq \frac{1}{2}$. Preveriti moramo še, da se predpisa ujemata za $t = \frac{1}{2}$. Po drugem predpisu dobimo $F(x, 0) = K \circ H(x)$, po prvem predpisu pa dobimo $K \circ T \circ \mathrm{id}_{Y \times \mathbb{R}}(T \circ H(x)) = K \circ T \circ T \circ H(x)$. Ker je T involucija, velja $T \circ T = \mathrm{id}_{Y \times \mathbb{R}}$, zato je $K \circ T \circ T \circ H(x) = K \circ H(x)$, kar smo želeli pokazati. Torej je preslikava R dobro definirana, zvezna pa je, ker sta predpisa kompozituma zveznih preslikav in se ujemata na preseku.
- Preverimo, da je R res homotopija med f^2 in $\mathrm{id}_{D(\alpha)}$. Ko je $t = 0$, je $R(x, 0) = K \circ T \circ H \circ K \circ T \circ H(x)$, torej je $R_0 = f^2$. Ko je $t = 1$, je $R(x, 1) = F(x, 1) = x$ in velja $R_1 = \mathrm{id}_{D(\alpha)}$.

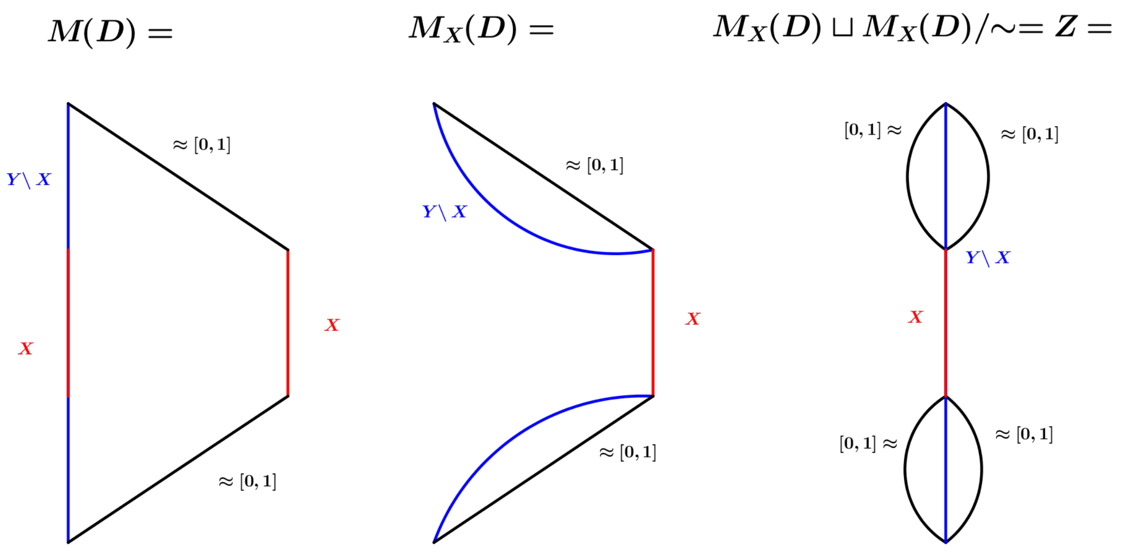
Pokazali smo obstoj vseh lastnosti homotopske ekvivalence za preslikavo f. Preslikava f je prava, ker je kompozitum treh pravih preslikav. $\square$

7. Dokaz glavnega izreka: konstrukcija kompakta

V tem razdelku bomo postopoma dokazali glavni izrek. Najprej potrebujemo naslednjo lemo.

Lema 7.1. *Naj bo X krepki deformacijski retrakt prostora Y. Tedaj obstajata topološka prostora Z in W, ki vsebujeta X, ter obstajata CR preslikavi $W \to Z \cup_X Y$ in $W \to X$. Če je krepka deformacijska retrakcija (retrakcija in homotopija) prava, potem sta tudi CR preslikavi pravi.*

Dokaz. Naj bo $D : Y \to X$ krepka deformacijska retrakcija (torej je $X \subset Y$). Definirajmo prostor Z iz prostora $M_X(D) \sqcup M_X(D)$ tako, da identificiramo obe kopiji prostora Y, kot vidimo na sliki 7.



Slika 7. Skica prostora Z.

Opazimo, da je $M_X(D) \cup_X Y$ reduciran preslikavni cilinder preslikave $i \circ D$ in da je $i \circ D$ homotopna identiteti s homotopijo H, ki miruje na X. Sedaj lahko po lemi 6.4, ko za homotopijo f vzamemo H, konstruiramo prostor W' in CR preslikavi $W' \to M_X(\mathrm{id}_Y)$, $W' \to M_X(D) \cup_X Y$. Ti preslikavi sta identiteti na vrhnji kopiji prostora Y, ko gledamo $Y \subset M_X(D)$. Če tem prostorom dodamo $M_X(D)$ z unijo po vrhnji kopiji Y, dobimo CR preslikavi $W' \cup_Y M_X(D) \to M_X(\mathrm{id}_Y) \cup_Y M_X(D)$ in $W' \cup_Y M_X(D) \to Z \cup_X Y$. Opazimo še, da je $M_X(\mathrm{id}_Y) \cup_Y M_X(D) = M_X(D)$, torej CR preslikava $M_X(D) \to X$, ki jo dobimo po lemi 6.3, dokaže želeno. □

Trditev 7.2. *Naj bo $f : X \to Y$ prava homotopska ekvivalenca. Tedaj obstaja topološki prostor V in pravi CR preslikavi $r_0 : V \to X$ (z inkluzijo i_0) in $r_1 : V \to Y$ (z inkluzijo i_1), da velja $r_1 \circ i_0 = f$.*

Dokaz. Naj bo $P = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ topološki prostor s topologijo podedovano iz $\mathbb{R}$. Po posledici 6.14 je X krepki deformacijski retrakt prostora $M(f)$. Po lemi 7.1 obstajata prostora Z in W ter pravi CR preslikavi $W \to M(f) \cup_X Z$ in $W \to X$. Naj bo $q : X \times P \to X$ projekcija. Ker je X vsebovan kot podprostor v prostorih $M(f)$, Z in W, lahko konstruiramo naslednje prostore:

- $M(f)^* = (M(f) \times P) \cup_q X$,
- $Z^* = (Z \times P) \cup_q X$,
- $W^* = (W \times P) \cup_q X$.

Če CR preslikavi, ki smo ju dobili po lemi 7.1, pomnožimo z id_P, dobimo pravi CR preslikavi $W \times P \to (M(f) \times P) \cup_{X \times P} (Z \times P)$ in $W \times P \to X \times P$, ki inducirata pravi CR preslikavi $W^* \to M(f)^* \cup_X Z^*$ in $W^* \to X$. Opazimo, da je prostor $M(f)^* \cup_X M(f)$ homeomorfen prostoru $M(f)^*$, homeomorfizem preprosto slika n-to kopijo $M(f)$ v $(n+1)$-vo kopijo, natančneje slika $M(f) \times \{\frac{1}{n}\}$ v $M(f) \times \{\frac{1}{n+1}\}$ z identiteto na $M(f)$. Ker je na $X \subset M(f)$ identiteta, je homeomorfizem dobro definiran in zvezen. Sedaj lahko napišemo verigo CR preslikav

$$X \nearrow W^* \searrow M(f)^* \cup_X Z^* = M(f)^* \cup_X Z^* \cup_X M(f) \nearrow W^* \cup_X M(f) \searrow M(f) \searrow Y.$$

Ker je vsaka izmed preslikav v verigi, razen zadnjega kolapsa preslikavnega cilindra, identiteta na X, je kompozitum enak f. Po lemi 5.13 konstruiramo ustrezen prostor V tako, da najprej lemo uporabimo na vsebovani verigi CR preslikav

$$W^* \searrow M(f)^* \cup_X Z^* \nearrow W^* \cup_X M(f)$$

in dobimo

$$W^* \nearrow W^* \cup_{M(f)^* \cup_X Z^*} (W^* \cup_X M(f)) \searrow W^* \cup_X M(f),$$

nato pa naredimo kompozitum CR preslikav (ki je po lemi 5.4 tudi CR preslikava) in dobimo verigo

$$X \nearrow W^* \cup_{M(f)^* \cup_X Z^*} (W^* \cup_X M(f)) \searrow M(f) \searrow Y.$$

Označimo $V = W^* \cup_{M(f)^* \cup_X Z^*} (W^* \cup_X M(f))$, preslikavo $r_0 : V \to X$ vidimo v $X \nearrow W^* \cup_{M(f)^* \cup_X Z^*} (W^* \cup_X M(f))$. Preslikava $r_1 : V \to Y$ je kompozitum CR preslikave $V \searrow M(f)$ in kolapsa preslikavnega cilindra $M(f) \searrow Y$, ki je tudi CR preslikava, kot vidimo v dokazu leme 6.3. □

Zaradi boljše razumljivosti dokaza glavnega izreka si oglejmo še definicijo *potiska* (povzeto po [8]). Definirali ga bomo povsem formalno v okviru teorije kategorij, vendar bomo kasneje v dokazu uporabljali kategorijo *Top*, torej kategorijo, kjer so objekti topološki prostori, morfizmi pa zvezne preslikave med njimi. Definicijo bomo podali s pomočjo univerzalne lastnosti, saj bomo ta pomen tudi potrebovali in se bomo s tem izognili nepotrebnim definicijam.

Definicija 7.3. Naj bosta $f : Z \to X$ in $g : Z \to Y$ morfizma s skupno domeno. *Potisk* morfizmov f in g je tak objekt P skupaj z morfizmoma $i_1 : X \to P$ in $i_2 : Y \to P$, da komutira naslednji diagram

$$\begin{tikzcd}
P & Y \arrow[l, "i_2"'] \\
X \arrow[u, "i_1"] & Z \arrow[u, "g"'] \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

in da je trojica (P, i_1, i_2) univerzalna za ta diagram. Natančneje to pomeni, da za vsak drug (Q, j_1, j_2), za katerega bi zgornji diagram komutiral, obstaja natanko en morfizem $u : P \to Q$, da komutira diagram

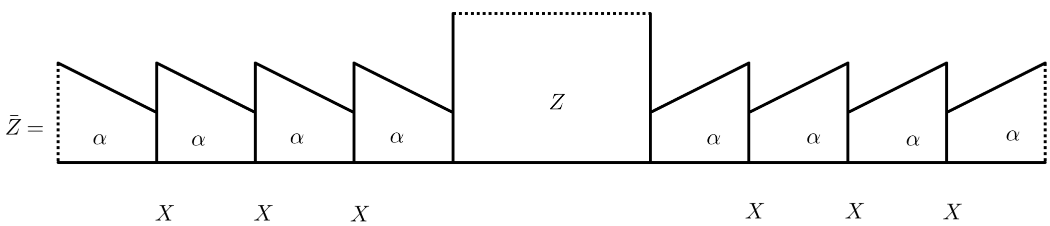
$$\begin{tikzcd}
Q & & \\
& P \arrow[ul, dotted, "u"] & Y \arrow[l, "i_2"'] \arrow[ull, bend right, "j_2"'] \\
& X \arrow[u, "i_1"] \arrow[uul, bend left, "j_1"] & Z. \arrow[u, "g"'] \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

Kot vsak univerzalen objekt je tudi potisk enoličen do izomorfizma natančno.

Sedaj lahko dokažemo glavni izrek.

Dokaz glavnega izreka. Naj bo X kompakten prostor in naj bo $d : X \to Y$ homotopska dominacija z desnim inverzom u. Označimo $\alpha = u \circ d$ in naj bo $f : D(\alpha) \to D(\alpha)$ prava homotopska ekvivalenca, ki obrne konca in je konstruirana po trditvi 6.20. Zaradi večje jasnosti bomo kopijo $D(\alpha)$, ki ima obrnjena konca, označili z $I(\alpha)$, torej $f : D(\alpha) \to I(\alpha)$ ohranja konca.

Po trditvi 7.2 obstaja prostor Z in pravi CR preslikavi $r_0 : Z \to D(\alpha)$ in $r_1 : Z \to I(\alpha)$, da velja $r_1 \circ i_0 = f$. S pomočjo teh dveh preslikav bomo konstruirali prostor $\bar{Z}$, ki je homotopsko ekvivalenten prostoru Z, izgleda kot $D(\alpha)$ blizu $-\infty$, kot $I(\alpha)$ blizu $+\infty$ in kot Z vmes. Shema tega prostora je na sliki 8. Naš končni kompakt bo krepki deformacijski retrakt prostora $\bar{Z}$ preko kolapsov preslikavnih cilindrov na koncih, kar bomo kasneje natančneje definirali.



Slika 8. Skica prostora $\bar{Z}$.

Izberimo si neko zaprto okolico A konca $-\infty$ v $D(\alpha)$ in neko zaprto okolico B konca $+\infty$ v $I(\alpha)$, tako da velja $r_0^{-1}(A) \cap r_1^{-1}(B) = \emptyset$. Takšni množici res obstajata, saj f ohranja konca. Natančneje, označimo z $M_n(\alpha)$ n-ti preslikavni cilinder v teleskopu $D(\alpha)$. Okolice koncev vsebujejo vse preslikavne cilindre $M_n(\alpha)$ za vse n večje od nekega $n_0 \in \mathbb{Z}$. Izbor okolice konca $+\infty$ je torej le izbor najmanjšega

$n \in \mathbb{Z}$, tako da je $M_n(\alpha)$ še v okolici, analogno za okolico $-\infty$. Izberimo okolici A in B tako, da je $f(A) \cap B = \emptyset$. To lahko naredimo, ker f ohranja konca in izberemo tako pozen najmanjši indeks preslikavnega cilindra, da bo presek res prazen. Torej je tudi $r_1^{-1}(f(A)) \cap r_1^{-1}(B) = \emptyset$. Sedaj lahko izberemo tako okolico konca $E \subset A$, da je $r_0^{-1}(E) \subset r_1^{-1}(f(A))$ in okolico E proglasimo za A. Konstruirajmo $\bar{Z}$ preko identifikacije točk v $r_0^{-1}(A)$ z njihovimi slikami v A in identifikacije točk v $r_1^{-1}(B)$ z njihovimi slikami v B. Torej je $\bar{Z}$ potisk:

$$\begin{tikzcd}
r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_0 \cup r_1"] & Z \arrow[d, "q"] \\
A \cup B \arrow[r] & \bar{Z}
\end{tikzcd}$$

Razlog, da vzamemo potisk, je v tem, da želimo najmanjši tak $\bar{Z}$, da ta diagram komutira. Ne želimo dodajati točk, da ne bi kasneje zašli v težave s kompaktnostjo.

Definirati moramo pravi homotopski inverz kvocientne projekcije q. Izberemo si tako preslikavo $\rho_1 : Z \to [0,1]$, da velja $\rho_1(r_0^{-1}(A)) = 0$ in $\rho_1(r_1^{-1}(B)) = 1$. Takšna preslikava obstaja, če ima prostor Z separacijsko lastnost T_4. Ker je X kompakten T_2 prostor, ima tudi lastnost T_4, vendar ker T_4 ni produktna lastnost, ne moremo sklepati, da ima tudi Z lastnost T_4. Vemo, da ima Z lastnost T_2. V nadaljevanju bomo pokazali, da je $Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))$ relativno kompakten podprostor prostora Z, to pomeni, da je njegovo zaprtje v Z kompaktno. To lastnost zaenkrat privzemimo in označimo $V = \overline{Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))}$. V je kompakten T_2 prostor, torej ima lastnost T_4. Ker sta $r_0^{-1}(A)$ in $r_1^{-1}(B)$ zaprti množici, sta tudi $V_1 = V \cap r_0^{-1}(A)$ in $V_2 = V \cap r_1^{-1}(B)$ zaprti množici. Opazimo, da sta V_1 in V_2 neprazni, množico V smo namreč dobili iz zaprtja relativnega kompakta, pri zapiranju pa smo morali dodati točke iz obeh množic disjunktne unije $r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B)$ (če bi npr. dodali le točke iz $r_0^{-1}(A)$, potem bi bila množica $Z \setminus r_1^{-1}(B)$ zaprta, kar pa ni, ker smo iz zaprte množice Z ven vzeli zaprto množico). Sedaj lahko konstruiramo tako zvezno preslikavo $\rho_1' : V \to [0,1]$, da velja $\rho_1'(V_1) = 0$ in $\rho_1'(V_2) = 1$. Preslikavo ρ_1' nato razširimo do preslikave ρ_1, tako da dodamo predpisa $\rho_1|(r_0^{-1}(A) \setminus V_1) = 0$ in $\rho_1'|(r_1^{-1}(B) \setminus V_2) = 1$. Dobljena preslikava ρ_1 je zvezna, kajti če vzamemo poljubno zaprto množico $W \subset [0,1]$, potem lahko nastopijo naslednje možnosti:

- Če W ne vsebuje niti 0 niti 1, potem je $\rho_1^{-1}(W) = \rho_1'^{-1}(W)$.
- Če W vsebuje 0, ne pa tudi 1, potem je $\rho_1^{-1}(W) = \rho_1'^{-1}(W) \cup r_0^{-1}(A)$.
- Če W vsebuje 1, ne pa tudi 0, potem je $\rho_1^{-1}(W) = \rho_1'^{-1}(W) \cup r_1^{-1}(B)$.
- Če W vsebuje 0 in 1, potem je $\rho_1^{-1}(W) = \rho_1'^{-1}(W) \cup r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B)$.

V vseh primerih dobimo unijo zaprtih množic, torej zaprto množico (zaradi zveznosti ρ_1' je $\rho_1'^{-1}(W)$ zaprta v podprostoru V, ker pa je V zaprta v Z, je $\rho_1'^{-1}(W)$ zaprta tudi v Z). Praslika poljubne zaprte množice je zaprta, torej je ρ_1 zvezna.

Definiramo preslikavo $\rho_2 : [0,1] \to [0,1]$ z naslednjim predpisom:

$$\rho_2(x) = \begin{cases} -3x+1; & x \leq \frac{1}{3} \\ 0; & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3x-2; & x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Kompozitum $\rho = \rho_2 \circ \rho_1 : Z \to [0,1]$ je enak 1 na $q^{-1}(A \cup B)$, saj zaradi identifikacij to pade v množico $r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B)$, in je enak 0 na meji , ki ločuje $q^{-1}(A)$ in $q^{-1}(B)$.

Naj bo R^0 homotopija med id in $i_0 \circ r_0$, ki jo dobimo po definiciji CR preslikave r_0, in naj bo R^1 homotopija med id in $i_1 \circ r_1$, ki jo dobimo iz CR preslikave r_1.

Definiramo preslikavo $v' : Z \to Z$ s predpisom

$$v'(z) = \begin{cases} R^0(z, \rho(z)); & \rho_1(z) \leq \frac{1}{2} \\ R^1(z, \rho(z)); & \rho_1(z) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

To je dobro definirano, saj $\rho_1(z) = \frac{1}{2}$ implicira $\rho(z) = 0$, torej je $R^0(z, \rho(z)) = z = R^1(z, \rho(z))$. Ugotovili smo, da je preslikava v' zvezna. Če je $r_0(z) \in A$, potem je $\rho(z) = 1$ in $R^0(z, \rho(z)) = i_0 \circ r_0(z)$, kar pomeni, da je v' konstantna na točkovnih inverzih $r_0^{-1}(a)$ za $a \in A$. Podobno sklepamo, da je v' konstantna na $r_1^{-1}(b)$ za $b \in B$. Zato je v' konstantna na točkovnih inverzih preliskave q in inducira preslikavo $v : \bar{Z} \to Z$. Kompozitum $v \circ q$ je očitno enak v', ki je homotopna identiteti s homotopijo $V : Z \times I \to Z$ s predpisom

$$V(z, s) = \begin{cases} R^0(z, \rho(z) \cdot s); & \rho(z) \leq \frac{1}{2} \\ R^1(z, \rho(z) \cdot s); & \rho(z) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Posvetimo se še preslikavi $q \circ v : \bar{Z} \to \bar{Z}$. Ker velja $v = v' \circ q^{-1}$, imamo $q \circ v = q \circ v' \circ q^{-1}$, torej diagram spodaj komutira.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ \bar{Z} \arrow[r, "q \circ v"] & \bar{Z} \end{tikzcd}$$

Če je $r_0(z) \in A$, potem je za vsak $s \in [0, 1]$, $r_0 \circ V_s = r_0(z)$. Podobno lahko sklepamo za množico B, torej da je V_s konstantna na točkovnih inverzih preslikave q za vse $s \in [0, 1]$. To pomeni, da V inducira homotopijo med id in $q \circ v$.

Pokazali smo, da sta Z in $\bar{Z}$ homotopsko ekvivalentna. Sedaj iz $\bar{Z}$ tvorimo kompakten prostor tako, da na skoraj vseh preslikavnih cilindrih, ki so v A oziroma B, naredimo kolaps preslikavnega cilindra (končno mnogo jih lahko pustimo, da ne zaidemo v težave tam, kjer se prilepi preostanek prostora Z). Ker je to krepki deformacijski retrakt prostora $\bar{Z}$, ima tudi enak homotopski tip. Pokazati moramo le še, da je dobljeni prostor kompakten.

Če opišemo nekoliko nenatančno, želimo pokazati, da smo pri formaciji prostora $\bar{Z}$ iz prostora Z vso "nekompaktnost" spravili v $r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B)$ in tako po identifikacijah na preostanku prostora Z ostane le še relativno kompakten del. Formalno si želimo pokazati, da je $Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))$ relativno kompakten podprostor prostora Z, to pomeni, da je njegovo zaprtje v Z kompaktno. Oglejmo si nekoliko razširjen naslednji diagram.

$$\begin{tikzcd} r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_0 \cup r_1"] & Z \arrow[d, "q"] \\ A \cup B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\kappa"] & \bar{Z} \\ A' \cup B' & \end{tikzcd}$$

S κ smo označili kolaps preslikavnih cilindrov, tako da sta A' in B' uniji končno mnogo preslikavnih cilindrov in morda še neki relativno kompakten del. Zaprtje te unije je kompaktno. Ker je X kompakten, je tudi kartezični produkt $X \times I$ kompakten. Ko naredimo identifikacije za preslikavni cilinder, prostor ostane kompakten, nato pa naredimo končno unijo kompaktnih preslikavnih cilindrov, kar je tudi kompakt. Če pokažemo relativno kompaktnost prostora $Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))$, lahko zapišemo

$$\bar{Z} = \iota(A \cup B) \cup q(Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))),$$

oziroma, ko naredimo še ustrezne kolapse preslikavnih cilindrov na A in B, dobimo prostor

$$\iota(A' \cup B') \cup q(Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))).$$

Preslikavi ι in q sta zvezni, torej sta $\iota(A' \cup B')$ in $q(\overline{Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))})$ zvezni sliki kompaktov, torej tudi kompaktna prostora. Ko naredimo ustrezno zaprtje $\overline{Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))}$ in unijo dveh množic, dobimo kompakten prostor.

Pokažimo, da je $Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))$ relativno kompakten podprostor v prostoru Z. Zapišimo $Z = r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B) \cup r_0^{-1}(D(\alpha) \setminus A) \cup r_1^{-1}(I(\alpha) \setminus B)$ in

$$Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B)) = (r_0^{-1}(D(\alpha) \setminus A) \cup r_1^{-1}(I(\alpha) \setminus B)) \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B)).$$

Oglejmo si najprej natančneje množico $r_0^{-1}(D(\alpha) \setminus A)$. Vemo, da preslikava f zamenja konca in da so preslikave f, r_1, r_0 prave. Torej lahko sklepamo, da je $f(D(\alpha) \setminus A) \subset (B \cup \text{nekaj rel. kompaktnega})$, saj f slika konec $-\infty$ v konec $+\infty$ in ker je f zvezna, bo preostanek relativno kompakten. Označimo $B^* = f^{-1}(B)$. Velja torej $(D(\alpha) \setminus A) \subset B^* \cup \text{nekaj rel. kompaktnega}$ in

$$r_0^{-1}(D(\alpha) \setminus A) \subset (r_0^{-1}(B^*) \cup \text{nekaj rel. kompaktnega}),$$

saj je preslikava r_0 prava in bodo praslike kompaktov kompaktne. Oglejmo si podrobneje množico $r_0^{-1}(B^*)$. Ker velja $f = r_1 \circ i_0$, lahko zapišemo

$$r_0^{-1}(B^*) = r_0^{-1}(f^{-1}(B)) = r_0^{-1}((r_1 \circ i_0)^{-1}(B)) = (i_0 \circ r_0)^{-1} \circ r_1^{-1}(B).$$

Ker velja, da je na podprostoru $i_0(D(\alpha)) \subset Z$ preslikava $i_0 \circ r_0$ identiteta, to intuitivno pomeni, da ne bo obrnila koncev v prostoru $D(\alpha)$, natančneje obstaja okolica O konca $-\infty$ v $D(\alpha)$, ki v celoti leži v $i_0^{-1}(r_1^{-1}(B))$ in za katero velja

$$r_0^{-1}(O) \subset r_1^{-1}(B),$$

kar implicira, da bo

$$(i_0 \circ r_0)^{-1} \circ r_1^{-1}(B) = r_1^{-1}(B) \cup \text{nekaj \ rel. kompaktnega}$$

in dalje

$$r_0^{-1}(D(\alpha) \setminus A) \subset (r_1^{-1}(B) \cup \text{nekaj rel. kompaktnega}).$$

Podobno sklepamo

$$r_1^{-1}(I(\alpha) \setminus B) \subset (r_0^{-1}(A) \cup \text{nekaj rel. kompaktnega}),$$

le da v tem sklepu upoštevamo še pravost preslikav f in r_1. Tako dobimo, da je

$$r_0^{-1}(D(\alpha) \setminus A) \cup r_1^{-1}(I(\alpha) \setminus B) = r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B) \cup \text{nekaj rel. kompaktnega}$$

in da je prostor $Z \setminus (r_0^{-1}(A) \cup r_1^{-1}(B))$ relativno kompakten. □

Literatura

[1] S. Ferry, *Homotopy, Simple Homotopy and compacta*, Topology **19** (1980) 101–110.

[2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, [ogled 27. 4. 2015], dostopno na `www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`.

[3] M. Mather, *Counting homotopy types of manifolds*, Topology **3** (1965) 93–94.

[4] J. M. Møller, *Solutions to exercises in Munkres*, [ogled 11. 9. 2015], dostopno na `www.math.ku.dk/~moller/e02/3gt/opg/S29.pdf`.

[5] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[6] A. Vavpetič, *Rešene naloge iz algebraične topologije*, samozaložba Aleš Vavpetič, Ljubljana, 2011, prva izdaja, str. 13, [ogled 30. 8. 2015], dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~vavpetic/AT/AT.pdf`.

[7] *End (topology)*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 25. 8. 2015], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/End_(topology)`.

[8] *Pushout (category theory)*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 25. 8. 2015], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Pushout_(category_theory)`.

[9] *Deformation retract*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 26. 8. 2915], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Deformation_retract`.

[10] *Tube Lemma*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 15. 9. 2015], dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Tube_lemma`.