UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Naja Bohanec

Število vpetih dreves na hiperkockah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Matjaž Konvalinka

Ljubljana, 2014

Kazalo

1. Uvod in osnovni pojmi 4
1.1. Rodovna funkcija 4
1.2. Osnovni pojmi iz teorije grafov 4
1.3. Hiperkocka 5
2. Kirchhoffov izrek in Cayleyjeva formula 6
2.1. Dokaz s pomočjo linearne algebre 6
2.2. Prüferjeva koda 8
3. Število vpetih dreves na hiperkockah 9
3.1. Dokaz s Kirchhoffovim izrekom 9
3.2. Prvi kombinatorični dokaz 12
3.3. Drugi kombinatorični dokaz 20
4. Posplošitve in zaključek 24
Literatura 25

Število vpetih dreves na hiperkockah

Povzetek

Glavna tema diplomske naloge je formula za število vpetih dreves na hiperkocki poljubne dimenzije. Formula je znana že več kot stoletje, saj se da na preprost način dokazati z uporabo linearne algebre; uporabimo Kirchhoffov izrek, kjer si pomagamo z matriko sosednosti in Laplaceovo matriko.

Dolgo časa pa je bil odprt problem tudi kombinatoričen dokaz te lepe, elegantne formule. Zdaj sta znana kar dva kombinatorična dokaza. Objavil ju je isti avtor, od tega pa je šele dobri dve leti. Glavna tema tega dela sta ravno ta dva dokaza, ki s seboj prineseta tudi nekatere zanimive posplošitve, ki so omenjene v zadnjem razdelku.

The number of spanning trees of the hypercube

Abstract

The main subject of this thesis is a formula for the number of spanning trees of the hypercube of any dimension. The formula has been known for more than a century. A simple way to prove it is with the use of linear algebra; we use Kirchhoff's theorem, where we also use the adjacency matrix and the Laplacian matrix.

For a long time, a combinatorial proof of this beautiful, elegant formula was an open problem. Now there are two known combinatorial proofs. They were submitted by the same author slightly more than two years ago. The main topic of this work are precisely these two proofs. They also prove some interesting generalizations that are mentioned in the last chapter.

Math. Subj. Class. (2010): 05C30, 05A15

Ključne besede: vpeta drevesa, gozdovi, rodovna funkcija, hiperkocka

Keywords: spanning trees, forests, generating function, hypercube

1. Uvod in osnovni pojmi

Veji matematike, ki se ukvarja predvsem z reševanjem preštevalnih in naštevalnih problemov, pravimo klasična oziroma enumerativna kombinatorika in spada v bolj obsežno območje kombinatorike. V našem primeru hočemo prešteti vsa vpeta drevesa na poljubni hiperkocki, z drugimi besedami, hočemo prešteti vse objekte v neki množici. Problema se lahko lotimo na več različnih načinov.

Najstarejši način izpeljave omenjene formule je s pomočjo Kirchhoffovega izreka. Ta izrek se uporablja za preštevanje vpetih dreves na različnih povezanih grafih, med drugim se da z njim dokazati tudi Cayleyjeva formula za število vpetih dreves na polnih grafih. Ta dokaz in dokaz s Prüferjevo kodo, ki je najbolj znan primer dokaza z bijekcijo, sta za motivacijo predstavljena v razdelku 2. Obstaja še veliko drugih dokazov, ki povezujejo različna področja matematike in temeljijo na kombinatoričnih in algebraičnih tehnikah. Nekateri so objavljeni v [1, str. 201].

Dokaz formule za število vpetih dreves na hiperkocki dimenzije n s Kirchhoffovim izrekom je preprost in relativno kratek. Predstavljen je v podrazdelku 3.1. Rezultat je precej lepa formula. V naslednjem izreku je zapisana v treh ekvivalentnih oblikah, kjer oznaka $\tau(G)$ označuje število vpetih dreves na grafu G.

Izrek 1.1. *Število vpetih dreves na hiperkocki Q_n je enako*

$$\tau(Q_n) = \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(2i)^{\binom{n}{i}} = \prod_{i=2}^{n}(2i)^{\binom{n}{i}} = 2^{2^n-n-1}\prod_{i=2}^{n} i^{\binom{n}{i}}. \tag{1}$$

A ker je formula tako lepa, nam intuicija pravi, da bi moral obstajati tudi kakšen kombinatoričen dokaz. To vprašanje je ostalo odprto vse do leta 2012, ko je junija Olivier Bernardi, profesor matematike na Univerzi Brandeis v ameriški zvezni državi Massachusetts, objavil članek z dokazom in nekaterimi posplošitvami, ki jih dokaz prinese s seboj. Omenjeni članek [2] je glavna podlaga te diplomske naloge, s to razliko, da je v tej nalogi večji poudarek na hiperkockah in ne toliko na posplošitvah.

Preden pa se lotimo dokazov, moramo razumeti še nekaj pojmov. V klasični kombinatoriki se velikokrat uporablja rodovna funkcija, ki je glavno orodje pri dokazovanju v tej nalogi. Potrebno pa je poznati tudi nekaj pojmov iz teorije grafov ter podrobneje spoznati osrednji objekt te naloge – hiperkocko.

1.1. **Rodovna funkcija.** Obstaja več različnih rodovnih funkcij, ki se pojavljajo v mnogih vejah matematike, najbolj v kombinatoriki, verjetnosti in statistiki. Za dokaz števila vpetih dreves na hiperkockah bomo potrebovali običajno rodovno funkcijo. Običajna rodovna funkcija zaporedja a_n je formalna potenčna vrsta oblike $G(a_n; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, katere koeficienti nam dajo zaporedje $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$. Poljubnemu zaporedju lahko priredimo rodovno funkcijo. Seveda, če je to zaporedje končno, dobimo kar polinom.

1.2. **Osnovni pojmi iz teorije grafov.** Sledi seznam osnovnih pojmov teorije grafov, ki jih je potrebno poznati pred nadaljnjim branjem. Več o tej temi je dostopno v [8].

Graf G je matematična struktura, ki predstavlja abstraktno upodobitev množice objektov. Sestavljen je iz vozlišč in povezav med njimi. To lahko krajše zapišemo kot $G = (V, E)$, kjer V predstavlja množico vozlišč, E pa množico povezav oblike $e = \{u, v\}$, kjer sta $u, v \in V$. Pogost zapis za povezavo je tudi $e = uv$. V tem primeru rečemo, da sta u in v sosednji vozlišči. Povezave imajo lahko različne lastnosti.

Graf je *regularen stopnje* n, če ima vsako vozlišče natanko n sosednjih vozlišč.

Polni graf je graf, kjer je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi vozlišči. Poln graf na n vozliščih označimo s K_n. Število povezav v takem grafu je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, polni graf K_n pa je tudi regularen graf stopnje $n-1$. Druga skrajnost pa je *prazni graf*, ki ima prazno množico povezav. Prazni graf na n vozliščih označimo z N_n, sestavljen pa je le iz n izoliranih vozlišč. To je regularen graf stopnje 0.

Povezan graf je graf, kjer med poljubnima vozliščema obstaja sprehod. *Cikel* je povezan graf, v katerem ima vsako vozlišče dve sosednji povezavi. Povezan graf brez ciklov je *drevo*. Drevo na n vozliščih ima natanko $n-1$ povezav, hkrati pa velja, da lahko iz vsakega vozlišča pridemo do kateregakoli drugega vozlišča po natanko eni poti.

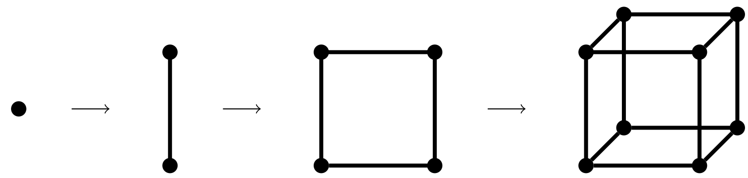
Lok ali *usmerjena povezava* je povezava oblike $e = (u, v)$, kjer je (u, v) urejen par vozlišč in u predstavlja začetek, v pa konec povezave. *Digraf* ali *usmerjen graf* je graf $G = (V, E)$, kjer je vsaka njegova povezava $e \in E$ usmerjena povezava oziroma lok.

Vpeto drevo grafa G je drevo, ki ga sestavljajo vsa vozlišča grafa G in nekatere (ali morda vse) povezave G. Vpeto drevo je lahko tudi digraf, če je G digraf. Graf, ki je sestavljen iz enega ali več dreves, imenujemo *gozd*. Ponavadi ga označimo s F. Vsako drevo predstavlja svojo *povezano komponento* gozda F, število komponent pa označimo s $k(F)$. Prazni graf ima toliko komponent, kot ima vozlišč, drevo pa ima le eno komponento. To sta posebna primera gozdov.

Drevo s korenom je drevo, v katerem je neko vozlišče izpostavljeno in imenovano *koren*. Drevo ima lahko en sam koren. Analogno, *gozd s koreni* je gozd, katerega vsaka komponenta je drevo s korenom.

1.3. **Hiperkocka.** Graf hiperkocke Q_n je regularni graf stopnje n na 2^n vozliščih, kjer n označuje dimenzijo hiperkocke. Množico vozlišč definiramo kot $V(Q_n) = \{0,1\}^n$, množico povezav pa kot $E(Q_n) = \{uv;$ vozlišči $u, v \in V(Q_n)$ se razlikujeta v natanko eni koordinati$\}$.

Hiperkocka dimenzije 0, Q_0, je le eno izolirano vozlišče. Če naredimo kopijo tega vozlišča ter ga povežemo s prvotnim, dobimo hiperkocko dimenzije 1, torej Q_1. Če to ponovimo s Q_1, dobimo Q_2. To lahko posplošimo do poljubno velike dimenzije. Iz dveh kopij hiperkocke Q_{n-1} tako dobimo hiperkocko Q_n. Ta konstrukcija je prikazana na sliki 1.



SLIKA 1. Konstrukcija hiperkocke Q_3.

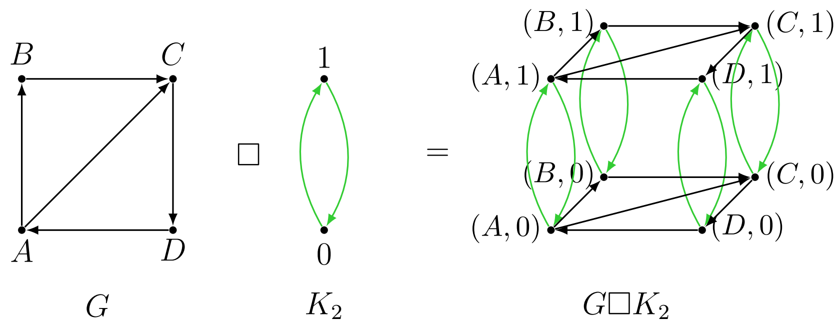
Grafi hiperkock pa imajo še več lepih lastnosti. So dvodelni grafi in Hamiltonovi grafi. Imajo pa še eno zanimivo lastnost, ki odigra pomembno vlogo v dokazu.

Definicija 1.2. Kartezični produkt grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \square G_2$. Množica vozlišč grafa G je $V(G) = V_1 \times V_2$, vozlišči (u_1, v_1) ter (u_2, v_2) pa sta sosednji v dveh primerih: v primeru, ko sta u_1 in u_2 sosednji v G_1 in je $v_1 = v_2$ ali pa v primeru, ko je $u_1 = u_2$ in sta v_1 in v_2 sosednji v G_2.

Velja, da je kartezični produkt dveh hiperkock dimenzij i in j spet hiperkocka dimenzije $i+j$: $Q_i \square Q_j = Q_{i+j}$. Ker je graf hiperkocke Q_1 enak polnemu grafu na dveh vozliščih K_2, velja $Q_n = \underbrace{K_2 \square \cdots \square K_2}_{\text{n faktorjev}}$.

Graf K_2 bomo v nadaljevanju obravnavali kot digraf. To naredimo tako, da neusmerjeno povezavo med vozliščema nadomestimo z dvema usmerjenima povezavama, tako da vsaka kaže v svojo smer. Definicija kartezičnega produkta digrafov je le malce drugačna od zgornje, primer pa je prikazan na sliki 2.

Definicija 1.3. Kartezični produkt digrafov $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \square G_2$. Množica vozlišč digrafa G je $V(G) = V_1 \times V_2$, za množico povezav $E(G)$ pa velja naslednje: za vsako povezavo $(u_1, v_1) \in E_1$ in vsako vozlišče $w_2 \in V_2$ obstaja povezava $((u_1, w_2), (v_1, w_2)) \in E(G)$ in za vsako povezavo $(u_2, v_2) \in E_2$ in vsako vozlišče $w_1 \in V_1$ obstaja povezava $((w_1, u_2), (w_1, v_2)) \in E(G)$.



Slika 2. Primer kartezičnega produkta digrafov G in K_2.

2. Kirchhoffov izrek in Cayleyjeva formula

Problem štetja označenih dreves se je pojavil že v 18. stoletju [1]. Prvi je Cayleyjevo formulo odkril Carl Wilhelm Borchardt leta 1860. Leta 1889 mu je sledil Arthur Cayley, britanski matematik, ki je formulo še dodatno razvil in razširil. Zato ta formula nosi njegovo ime.

Izrek 2.1 (Cayleyjeva formula, 1889)**.** *Število vpetih dreves na polnem grafu K_n je $\tau(K_n) = n^{n-2}$ za $n \geq 1$.*

2.1. Dokaz s pomočjo linearne algebre.

Ta dokaz je izmed vseh dokazov Cayleyjeve formule kronološko prvi. Vsa vpeta drevesa na K_n lahko preštejemo s pomočjo Laplaceove matrike grafa (tudi Kirchhoffova matrika).

Definicija 2.2. Imamo enostavni graf G, torej graf brez zank in vzporednih povezav, na n vozliščih. Elementi *Laplaceove matrike* $L(G)$ so podani kot

$$l_{i,j} := \begin{cases} \deg(v_i) & \text{za } i = j, \\ -1 & \text{za } i \neq j \text{ in je } v_i \text{ soseden z } v_j, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izkaže se, da je Laplaceova matrika pozitivno semidefinitna, kar pomeni, da ima same nenegativne lastne vrednosti. Več lastnosti Laplaceove matrike je dostopnih na [10]. Za povezan graf G ima matrika $L(G)$ natanko eno lastno vrednost enako 0, ostale pa so strogo pozitivne.

Pri štetju vpetih dreves si pomagamo s Kirchhoffovim izrekom. Izrek bomo zapisali v dveh ekvivalentnih verzijah, dokaz obeh verzij in povezava med njima pa je dosegljiva na [6]. Še več dodatnih informacij o Kirchhoffovem izreku najdemo v [9].

Izrek 2.3 (Kirchhoffov izrek [6])**.** *Naj bo G enostavni graf na n vozliščih in naj bo $L(G)$ Laplaceova matrika grafa G. Velja:*

(1) *Število vpetih dreves grafa G je enako absolutni vrednosti determinante matrike, ki jo dobimo iz Laplaceove matrike $L(G)$ tako, da odstranimo poljubno i-to vrstico in i-ti stolpec.*

(2) *Naj bo G povezan graf in naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ neničelne lastne vrednosti $L(G)$. Potem je število vpetih dreves na G enako:*

$$\tau(G) = \frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}.$$

V polnem grafu K_n je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi vozlišči, zato bodo vrednosti v matriki na vseh mestih, razen na diagonali, enake -1. Stopnja vsakega vozlišča $\deg(v_i)$, $i \in [n]$, je $n-1$, te vrednosti pa nastopajo na diagonali. Oznaka $[n]$ označuje množico naravnih števil od 1 do n. Zapišimo Laplaceovo matriko grafa K_n velikosti $n \times n$.

$$L(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}$$

Matriki $L(K_n)$ nato izbrišemo poljubno i-to vrstico in i-ti stolpec. Dobimo matriko $L^*(K_n)$ velikosti $(n-1) \times (n-1)$.

$$L^*(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}$$

Sedaj izračunamo determinanto matrike $L^*(K_n)$. Najprej odštejemo zadnjo vrstico od vseh ostalih vrstic, nato pa prištejemo vsak stolpec zadnjemu stolpcu in dobimo

$$\tau(K_n) = \det(L^*(K_n)) = \begin{vmatrix} n & 0 & \ldots & -n \\ 0 & n & & -n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

Na polnem grafu je torej $\tau(K_n) = n^{n-2}$ vpetih dreves, to pa se ujema s Cayleyjevo formulo.

Ker je K_n povezan graf, lahko uporabimo tudi drugo verzijo Kirchhoffovega izreka, pri katerem potrebujemo lastne vrednosti $L(K_n)$. Izpeljava je dostopna v [7, primer 5.6.9]. Opazimo, da lahko Laplaceovo matriko polnega grafa K_n zapišemo kot zvezo $L(K_n) = n \cdot I_n - J_n$, kjer je I_n enotska matrika velikosti $n \times n$, J_n pa matrika samih enic velikosti $n \times n$.

Naj bodo $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ lastne vrednosti matrike J_n. Hitro se da izračunati, da so lastne vrednosti $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{n-1}$ enake 0 (saj ima J_n rang 1), λ'_n pa je enaka n (z lastnim vektorjem iz samih enic). Naj bo x_i lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ'_i za $i \in [n]$. Za vsak lastni par (λ'_i, x_i) velja enakost $L(K_n)x_i = (n \cdot I_n - J_n)x_i = (n - \lambda'_i)x_i$.

Iz tega vidimo, da so $n-\lambda_1', \ldots, n-\lambda_n'$ lastne vrednosti Laplaceove matrike $L(K_n)$. Zato je $n-1$ lastnih vrednosti matrike $L(K_n)$ enakih n, ena lastna vrednost pa je enaka 0. Neničelne lastne vrednosti zmnožimo ter delimo dobljen produkt s številom vozlišč v K_n. Dobimo $\tau(K_n) = \frac{1}{n}n^{n-1} = n^{n-2}$, kar se zopet ujema s Cayleyjevo formulo.

2.2. **Prüferjeva koda.** Najbolj znan dokaz Cayleyjeve formule je dokaz s Prüferjevo kodo. Prvič jo je že leta 1917 uporabil nemški matematik Heinz Prüfer, po katerem se ta koda tudi imenuje. Omenjeni algoritem se pojavlja tudi v računalništvu za prevajanje zaporedij v drevesa in obratno.

Iščemo povratno enolično preslikavo med množico vseh dreves na n vozliščih in množico zaporedij dolžine $n-2$ oblike $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, kjer velja $1 \leq a_i \leq n$. Tako zaporedje očitno lahko sestavimo na n^{n-2} načinov. Če torej najdemo tako preslikavo, smo dokazali $\tau(K_n) = n^{n-2}$. Ogledali si bomo le konstrukcijo, več podrobnosti pa je dosegljivih v [4, str. 10]. Ker formula velja za $n = 1$ in $n = 2$, privzemimo, da je $n \geq 3$.

Najprej si poglejmo, kako iz drevesa dobimo zaporedje. Imamo označeno drevo z n vozlišči, kjer so vozlišča označena s števili od 1 do n. Oznake se ne ponavljajo. Iz drevesa skonstruiramo zaporedje z naslednjimi tremi koraki, ki jih ponavljamo, dokler ne dobimo zaporedja dolžine $n-2$:

1. korak: Izmed listov v drevesu (vozlišča stopnje 1) izberemo tistega z najmanjšo oznako.
2. korak: Zaporedju dodamo oznako vozlišča, ki je sosednje izbranemu listu.
3. korak: Iz drevesa odstranimo izbrani list in povezavo lista s sosednjim vozliščem.

Poglejmo še konstrukcijo drevesa iz zaporedja $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ dolžine $n-2$. Naj bo $S = [n]$ množica naravnih števil, ki nam predstavljajo vsa vozlišča nekega drevesa. Nato sledimo naslednjim korakom:

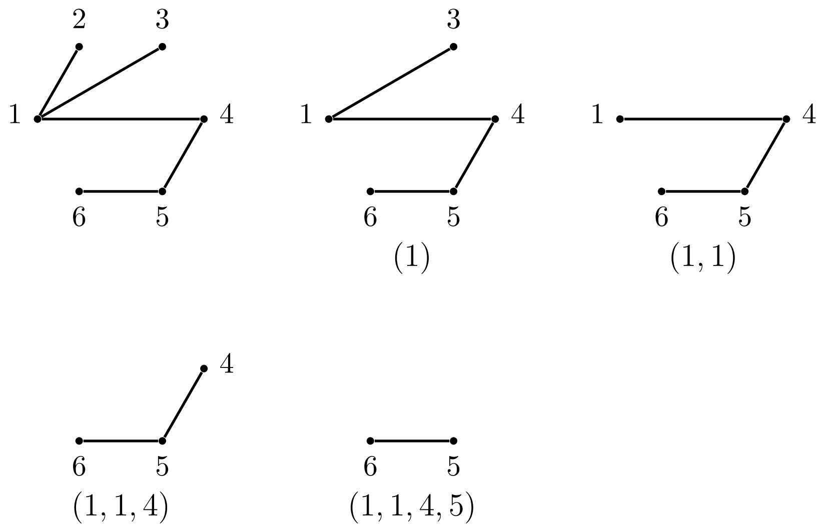
1. korak: V množici S poiščemo najmanjše število, ki ne nastopa v zaporedju.
2. korak: Povežemo vozlišče, označeno s tem najmanjšim številom, z vozliščem, katerega oznaka nastopa na prvem mestu v zaporedju.
3. korak: Iz množice S odstranimo najdeno število in iz zaporedja odstranimo prvi člen.

Primer 2.4. Za primer vzemimo drevo s šestimi vozlišči, torej $n = 6$. Iz drevesa zdaj po prej opisanih korakih razberemo zaporedje, ki bo v tem primeru dolžine 4. Drevo in celoten postopek generiranja zaporedja sta predstavljena na sliki 3.

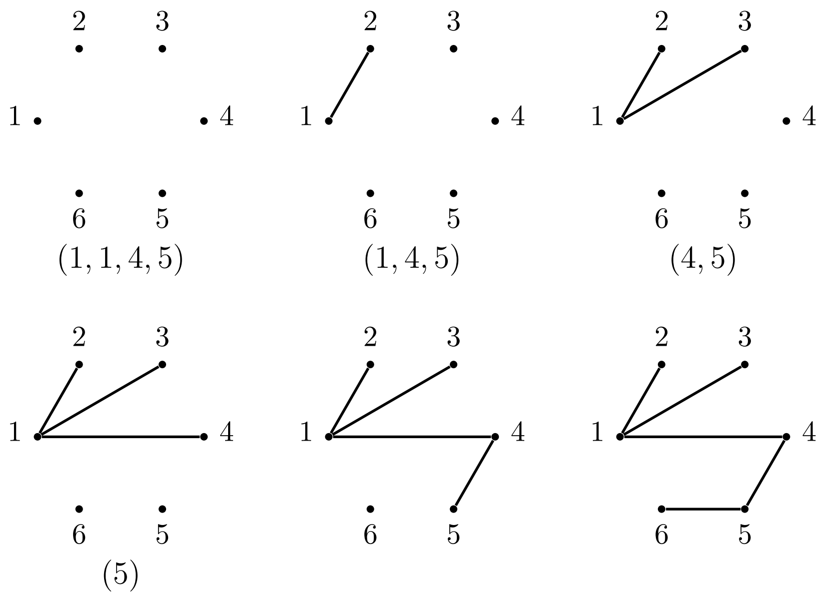
V prvem koraku si ogledamo liste drevesa. Vozlišče 2 je list z najmanjšo oznako, zato na prvo mesto zaporedja zapišemo 1, saj je vozlišče 1 sosednje listu 2. Iz drevesa odstranimo vozlišče 2 in povezavo med vozliščema 2 in 1 ter nadaljujemo z dobljenim drevesom na petih vozliščih. Postopek ponavljamo, dokler v drevesu ne ostaneta le še dve vozlišči.

Sedaj pa iz zaporedja $(1, 1, 4, 5)$ skonstruirajmo drevo. Zaporedje ima štiri elemente, zato nam množico vozlišč predstavlja množica $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Najlažje je, če si vozlišča narišemo v krogu ter dodajamo potrebne povezave, kot je predstavljeno tudi na sliki 4.

V množici S poiščemo vozlišče z najmanjšo vrednostjo, ki se ne pojavi v zaporedju. To je vozlišče 2, zato ga povežemo s prvim elementom v zaporedju, ki pa je 1. Nato iz množice S odstranimo uporabljeno vozlišče in iz zaporedja odstranimo prvi člen. Enak postopek nadaljujemo z zaporedjem dolžine 3 ter množico $S \backslash \{2\}$. Na koncu



Slika 3. Primer drevesa na šestih vozliščih ter postopek generiranja zaporedja. V tem primeru dobimo zaporedje $(1, 1, 4, 5)$.



Slika 4. Konstrukcija drevesa iz zaporedja $(1, 1, 4, 5)$.

ne bomo imeli v zaporedju nobenega elementa več, v množici vozlišč pa bosta še dve vozlišči. Postopek zaključimo tako, da med ti dve vozlišči napeljemo povezavo.

3. Število vpetih dreves na hiperkockah

Podali bomo tri dokaze izreka 1.1. Najprej bomo formulo za število vpetih dreves na hiperkocki dokazali s pomočjo Kirchhoffovega izreka. Temu dokazu pa sledita dva neodvisna kombinatorična dokaza.

3.1. **Dokaz s Kirchhoffovim izrekom.** Najstarejši dokaz izreka 1.1 izhaja iz področja linearne algebre. Dostopen je v [3] in v [7, primer 5.6.10].

Laplaceova matrika se da zapisati tudi kot razlika matrike $\Delta(Q_n)$, ki ima na diagonali stopnje ustreznih vozlišč, ter matrike sosednosti $A(Q_n)$, podane tako:

$$a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{za } i \neq j \text{ in je } v_i \text{ soseden z } v_j, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ker ima hiperkocka Q_n 2^n vozlišč, bo njena Laplaceova matrika velikosti $2^n \times 2^n$. Za boljšo predstavo zapišimo Laplaceovo matriko za hiperkocki Q_1 in Q_2.

$$L(Q_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(Q_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

V splošnem velja $L(Q_n) = n \cdot I_{2^n} - A(Q_n)$, kjer je I_{2^n} enotska matrika velikosti $2^n \times 2^n$. Da bi našli lastne vrednosti $L(Q_n)$, je torej dovolj poiskati lastne vrednosti matrike sosednosti $A(Q_n)$.

Lema 3.1. *Naj bodo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike sosednosti grafa G ter $\mu_1, \ldots, \mu_m$ lastne vrednosti matrike sosednosti grafa H. Potem ima matrika sosednosti kartezičnega produkta $G \square H$ lastne vrednosti enake vsotam $\lambda_i + \mu_j$ za $1 \leq i \leq n$ in $1 \leq j \leq m$.*

Dokaz. Naj bosta G in H grafa ter $A(G)$ in $A(H)$ njuni matriki sosednosti. Naj bo (λ, x) lastni par matrike $A(G)$ in (μ, y) lastni par matrike $A(H)$. Velja

$$\begin{aligned} A(G)x &= \lambda x, \\ A(H)y &= \mu y. \end{aligned}$$

Ekvivalentno lahko zapišemo, da za poljubno vozlišče $u_i \in V(G)$ velja

$$\sum_{u_j \sim u_i} x_j = \lambda x_i,$$

kar je razvidno iz definicije matrike sosednosti. Oznaka $u_j \sim u_i$ pomeni, da sta vozlišči u_i in u_j sosednji v grafu G. Analogno, za poljubno vozlišče $v_{i'} \in V(H)$ velja

$$\sum_{v_{j'} \sim v_{i'}} y_{j'} = \mu y_{i'}.$$

Označimo z $z = x \otimes y$ *stolpični vektor* z $m \cdot n$ koordinatami, kjer so koordinate definirane z zvezo $z_{i,i'} = x_i y_{i'}$. Pokazati hočemo, da je $z = x \otimes y$ lastni vektor matrike sosednosti $A(G \square H)$, ki mu pripada lastna vrednost $\lambda + \mu$. Naj bo $(u_i, v_{i'}) \in V(G \square H)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{(u_j,v_{j'})\sim(u_i,v_{i'})} z_{j,j'} &= \sum_{(u_j,v_{j'})\sim(u_i,v_{i'})} x_j y_{j'} \\
&= \sum_{(u_i,v_{j'})\sim(u_i,v_{i'})} x_i y_{j'} + \sum_{(u_j,v_{i'})\sim(u_i,v_{i'})} x_j y_{i'} \\
&= \sum_{v_{j'}\sim v_{i'}} x_i y_{j'} + \sum_{u_j\sim u_i} x_j y_{i'} \\
&= x_i \sum_{v_{j'}\sim v_{i'}} y_{j'} + y_{i'} \sum_{u_j\sim u_i} x_j \\
&= x_i \mu y_{i'} + y_{i'} \lambda x_i \\
&= (\mu+\lambda) z_{i,i'}
\end{aligned}
$$

Zapis je ekvivalenten zapisu $A(G\square H)z = (\lambda+\mu)z$. Pokazali smo, da je $(\lambda+\mu, z_{i,i'})$ res lastni par za matriko $A(G\square H)$. Ker to velja za poljubni lastni vrednosti matrik $A(G)$ in $A(H)$, je lema dokazana. □

Izračunamo lahko, da ima $A(Q_1)$ lastni vrednosti -1 in 1. Z upoštevanjem rekurzivne zveze $Q_n = Q_{n-1}\square Q_1$ ter s pomočjo leme 3.1 lahko lastne vrednosti $A(Q_n)$ izračunamo brez računanja determinante. Te lastne vrednosti so zapisane v tabeli 3.1. V članku [5] pa je predstavljenih še več primerov uporabe leme 3.1.

n	**Paroma različne lastne vrednosti**	**Algebraična večkratnost lastnih vrednosti**
1	-1, 1	1, 1
2	-2, 0, 2	1, 2, 1
3	-3, -1, 1, 3	1, 3, 3, 1
...	...	...
n	$-n, -n+2, \ldots, n-2, n$	$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$

Tabela 1. Lastne vrednosti matrike sosednosti za Q_n.

Iz linearne algebre vemo, da če velja $Ax = \lambda x$, potem velja tudi zveza $(A+\mu\cdot I)x = (\lambda+\mu)x$. Upoštevamo še zvezo $L(Q_n) = n\cdot I_{2^n} - A(Q_n)$. Če ima torej matrika sosednosti $A(Q_n)$ lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^n}$, ima Laplaceova matrika $L(Q_n)$ lastne vrednosti $n-\lambda_1, n-\lambda_2, \ldots, n-\lambda_{2^n}$. Ugotovitev je zapisana v tabeli 3.1.

n	**Paroma različne lastne vrednosti**	**Algebraična večkratnost lastnih vrednosti**
1	0, 2	1, 1
2	0, 2, 4	1, 2, 1
3	0, 2, 4, 6	1, 3, 3, 1
...	...	...
n	$0, 2, \ldots, 2(n-1), 2n$	$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$

Tabela 2. Lastne vrednosti Laplaceove matrike za Q_n.

Sedaj uporabimo Kirchhoffov izrek. Vse neničelne lastne vrednosti zmnožimo, pri čemer upoštevamo število pojavitev vsake izmed njih, ter delimo s številom vozlišč v hiperkocki. Dobimo število vpetih dreves na Q_n:

$$\tau(Q_n) = \frac{2^{\binom{n}{1}}4^{\binom{n}{2}}\cdots(2n)^{\binom{n}{n}}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(2i)^{\binom{n}{i}}.$$

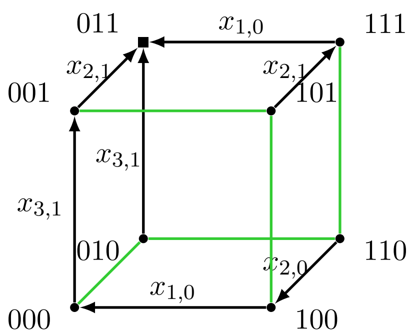
Tako smo zaključili prvi dokaz izreka 1.1.

3.2. **Prvi kombinatorični dokaz.** Pri dokazu se bomo osredotočili predvsem na vpete gozdove s koreni na digrafu $H = (V, E)$, ki ga dobimo kot kartezični produkt digrafov G in K_2, torej $H = G \Box K_2$. Vpeti gozdovi s koreni na H, ponavadi jih označimo s F, so taki podgrafi H, ki vsebujejo vsa vozlišča $v \in V$ in neko podmnožico povezav $e \in E$. Ne vsebujejo ciklov, sestavljeni pa so iz več dreves s koreni. Vsako drevo predstavlja svojo povezano komponento gozda. Vsaka komponenta ima tudi svoj koren in vse povezave v komponenti so usmerjene proti korenu. S $k(F)$ označimo število povezanih komponent gozda F. Krajše takemu gozdu rečemo kar gozd F na H. Iz te definicije opazimo, da je vsako vozlišče v F, ki ni koren, krajišče natanko ene povezave, ki je usmerjena stran od tega vozlišča. Če bi namreč obstajalo vozlišče u v F, ki ima dva sosednja loka usmerjena stran od u, bi bilo to v nasprotju z zahtevo, da so vsi loki usmerjeni proti korenu.

V produktu $G \Box K_2$ nastopata dve kopiji digrafa G. Za gozd F na H rečemo, da vsebuje a-lok za lok $a \in E(G)$, če vsebuje lok a iz ene od kopij digrafa G. Jasno je, da lahko za vsak $a \in E(G)$ gozd F vsebuje največ dva a-loka.

Za posamezen lok e v hiperkocki Q_n definiramo smer $i = \mathrm{dir}(e) \in [n]$ in spin $\varepsilon = \mathrm{spin}(e) \in \{0, 1\}$. Lok $e = (u, v)$ za u, $v \in V(Q_n)$ ima smer $i = \mathrm{dir}(e)$, če vozlišče v dobimo iz vozlišča u tako, da vozlišču u spremenimo i-to koordinato, in spin $\varepsilon = \mathrm{spin}(e)$, če pri tem i-to koordinato spremenimo iz $1 - \varepsilon$ v ε.

Vsakemu loku Q_n lahko tako priredimo utež $x_{\mathrm{dir}(e),\mathrm{spin}(e)}$. Namen takih uteži je predvsem ta, da beležijo število, smer in spin lokov. Primer drevesa s korenom na Q_3 skupaj z utežmi je na sliki 5. Označene so koordinate vozlišč in uteži lokov, ki nastopajo v vpetem drevesu. Loki, ki niso del vpetega drevesa, zaradi preglednosti niso izrisani.



Slika 5. Primer drevesa s korenom na hiperkocki Q_3. Koren je označen s kvadratkom.

Rodovna funkcija za gozdove s koreni na hiperkocki Q_n s spremenljivkama t in $\mathbf{x} = (x_{1,0}, x_{1,1}, \ldots, x_{n,0}, x_{n,1})$ je naslednje oblike:

$$F_{Q_n}(t; \mathbf{x}) := \sum_{F \text{ gozd s koreni na } Q_n} t^{k(F)} \prod_{e \in F} x_{\mathrm{dir}(e),\mathrm{spin}(e)}, \tag{2}$$

kjer je $k(F)$ število povezanih komponent v gozdu F, kar pa je enako številu korenov v F. Če nastavimo vrednosti vseh uteži $x_{\mathrm{dir}(e),\mathrm{spin}(e)}$ na 1, dobimo pred $t^{k(F)}$ koeficient, ki ustreza številu vpetih gozdov na hiperkocki Q_n s $k(F)$ povezanimi komponentami. Število vpetih dreves s koreni nam tako da koeficient pred t^1. Opazimo tudi, da lahko iz rodovne funkcije dobimo število vseh vpetih gozdov na Q_n, če vstavimo $t = 1$.

Primer 3.2. Drevo na sliki 5 v rodovno funkcijo za gozdove na Q_3 doprinese člen $tx_{1,0}^2 x_{2,0} x_{2,1}^2 x_{3,1}^2$.

Primer 3.3. Vzemimo hiperkocko Q_3 ter zapišimo rodovno funkcijo za vsa drevesa na Q_3, ki ne vsebujejo lokov spina $\varepsilon = 1$. Označimo jo s $F'_{Q_3}(t; \mathbf{x})$, odvisna pa je od spremenljivk t ter $\mathbf{x} = (x_{1,0}, 0, x_{2,0}, 0, x_{3,0}, 0)$. Trdimo, da je $F'_{Q_3}(t; \mathbf{x})$ oblike

$$F'_{Q_3}(t; \mathbf{x}) = tx_{1,0}x_{2,0}x_{3,0}(x_{1,0} + x_{2,0})(x_{1,0} + x_{3,0})(x_{2,0} + x_{3,0})(x_{1,0} + x_{2,0} + x_{3,0}).$$

Zapisana funkcija pravzaprav pomeni, da iz vsakega vozlišča, kjer to lahko naredimo, napeljemo izhodni lok s spinom 0. Iz vozlišča $(0, 0, 0)$ ne moremo napeljati nobenega takega loka, saj bi pri tem neko koordinato spremenili iz 1 v 0, tu pa ni take koordinate. Vozlišče $(0, 0, 0)$ bo zato koren vseh dobljenih dreves in zato v rodovno funkcijo prispeva utež t.

V vozliščih, ki imajo samo eno koordinato enako 1 ter ostale 0, imamo samo eno izbiro za izhodni lok, zato ta vozlišča prispevajo uteži $x_{n,0}$, kjer je n neničelna koordinata. Če pa ima vozlišče več neničelnih koordinat, se odločimo, v kateri smeri bomo napeljali izhodni lok. Smemo napeljati le enega. To odločitev v rodovni funkciji zapišemo z operacijo seštevanja. Vozlišče s samimi enicami tako prispeva člen $x_{1,0} + x_{2,0} + x_{3,0}$.

Iz $F'_{Q_3}(t; \mathbf{x})$ lahko razberemo število dreves na Q_3 brez lokov spina $\varepsilon = 1$ tako, da nastavimo vrednosti uteži na 1. Dobimo 24 takih dreves.

Najprej bomo podali kombinatoričen dokaz za naslednji rezultat:

$$F_{Q_n}(t; \mathbf{x}) = \prod_{S \subseteq [n]} \Big(t + \sum_{i \in S} (x_{i,0} + x_{i,1}) \Big). \tag{3}$$

Število vpetih dreves s koreni na Q_n dobimo tako, da se omejimo le na gozdove z eno povezano komponento oziroma gozdove F, za katere velja $k(F) = 1$.

Dokažimo, da je formula (3) posplošitev formule (1). Število vseh vpetih dreves s koreni nam da koeficient pred t^1. Pri $S = \emptyset$ je celoten izraz pomnožen s t, zato lahko formulo (3) zapišemo tako:

$$F_{Q_n}(t; \mathbf{x}) = t \prod_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \neq \emptyset}} \Big(t + \sum_{i \in S} (x_{i,0} + x_{i,1}) \Big).$$

Nastavimo vrednosti uteži na $x_{i,0} = x_{i,1} = 1$ ter se omejimo na koeficient pred t^1. Dobimo

$$\tilde{\tau}(Q_n) = \prod_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \neq \emptyset}} \Big(\sum_{i \in S} 2 \Big) = \prod_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \neq \emptyset}} 2|S|,$$

kjer je $\tilde{\tau}(Q_n)$ število vseh vpetih dreves s koreni na Q_n. Upoštevamo, da je različnih podmnožic moči i ravno $\binom{n}{i}$ in zapišemo

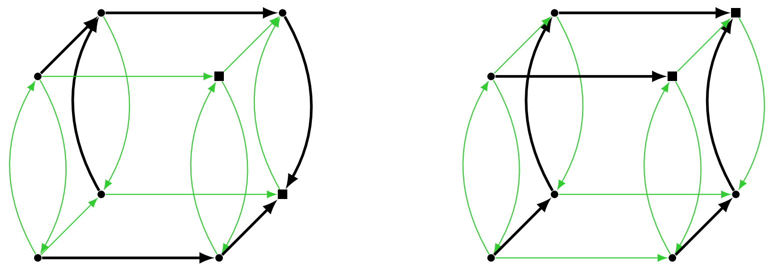
$$\tilde{\tau}(Q_n) = \prod_{i=1}^{n} (2i)^{\binom{n}{i}}, \tag{4}$$

kar pa je že zelo podobno formuli (1). Prešteli smo število vseh vpetih dreves s koreni na Q_n, želimo pa število dreves brez korenov. Za koren imamo izbir toliko, kot je v hiperkocki Q_n vozlišč, to pa je 2^n, zato formulo (4) le še delimo s številom vseh vozlišč in dobimo formulo (1).

Na enak način lahko izračunamo število vseh vpetih gozdov s koreni na Q_n, kar označimo s $\hat{\tau}(Q_n)$. V rodovni funkciji nastavimo vrednosti vseh uteži, vključno s t, na $x_{i,0} = x_{i,1} = t = 1$. Dobimo

$$\hat{\tau}(Q_n) = \prod_{S \subseteq [n]} \Big(1 + \sum_{i \in S} 2\Big) = \prod_{S \subseteq [n]} (1 + 2|S|) = \prod_{i=0}^{n} (1+2i)^{\binom{n}{i}}.$$

Zaradi hitrejšega pisanja poimenujemo dve skupini povezav. Naj bo $G = (V, E)$ in naj bo $e = (u, v) \in E$, $u, v \in V$ ter $\varepsilon \in \{0, 1\}$. *Vodoravni e-loki* so tiste usmerjene povezave $G \square K_2$, ki povezujejo (u, ε) in (v, ε). *Navpični loki spina* ε pa so tiste usmerjene povezave $G \square K_2$, ki povezujejo $(u, 1-\varepsilon)$ in (u, ε).



Slika 6. Primer dveh gozdov s koreni na grafu $G \square K_2$ z enako G-projekcijo. Koreni komponent gozda so označeni s kvadratom.

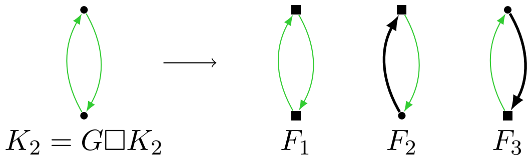
Rečemo, da imata dva gozdova s koreni na $H = G \square K_2$ enako *G-projekcijo*, če vsebujeta enako število vodoravnih e-lokov za $e \in E$ in imata navpične loke, ki nimajo nujno enakih spinov, pri istih vozliščih v G. Primer dveh gozdov z enako G-projekcijo, kjer ima vsak dve povezani komponenti, je na sliki 6.

Izrek 3.4. *Naj bo $G = (V, E)$ digraf in naj bo F_0 gozd s koreni na $H = G \square K_2$. Naj bo $S \subseteq V$ množica tistih vozlišč $u \in V$, ki so krajišča navpičnih lokov v F_0. S $\mathcal{F}_0$ označimo množico vseh gozdov na H, ki imajo enako G-projekcijo kot gozd F_0. Za vsako vozlišče $u \in S$ naj bo $\varepsilon_u \in \{0, 1\}$ spin navpičnega loka ob vozlišču u v gozdu iz $\mathcal{F}_0$. Potem velja, da so spini ε_u, $u \in S$, med seboj neodvisni in enakomerno porazdeljeni na množici $\{0, 1\}$.*

Dokaz. Naj bo F_0 neki gozd na digrafu $H = G \square K_2$. S $\mathcal{F}_0$ označimo množico vseh gozdov na H, ki imajo enako G-projekcijo kot gozd F_0. Dokazati hočemo, da za poljuben gozd $F \in \mathcal{F}_0$ velja, da imajo njegovi navpični loki med seboj neodvisne spine ter da je verjetnost, da ima naključen navpični lok spin 0, enaka verjetnosti, da ima ta lok spin 1.

Naj bo n število vozlišč digrafa G, torej $|V(G)| = n$. Izrek dokažemo z indukcijo po n.

Za $n = 1$ obstajajo le trije gozdovi na H. Prikazani so na sliki 7. Izrek očitno velja za $n = 1$.



Slika 7. Gozdovi s koreni na K_2.

Sedaj predpostavimo, da izrek velja za vsak digraf G' z $n-1$ vozlišči. Dokazati hočemo, da velja tudi za digraf G z n vozlišči.

Naj bo α število vodoravnih lokov v gozdu F_0. Naj bo S množica tistih vozlišč $v \in V(G)$, ki so krajišče kakšnega navpičnega loka iz F_0, in naj bo $\beta = |S|$. Označimo še $\gamma = |V(G) \backslash S| = n - \beta$ število vseh ostalih vozlišč na G. Gozd F_0 ima skupaj $2n$ vozlišč in $\alpha + \beta$ lokov. Gozd F_0 ima strogo manj povezav kot vozlišč. Če bi namreč imeli v gozdu več povezav kot vozlišč, bi dobili cikel, iz definicije gozda pa vemo, da ne sme vsebovati ciklov. Drevo z m vozlišči ima $m-1$ povezav, gozd na enakem številu vozlišč pa ima kvečjemu manj povezav. Zato velja $\alpha + \beta < 2n$ oziroma $\alpha < \beta + 2\gamma$. V gozdu F tako velja vsaj ena od naslednjih dveh možnosti:

(a) V F obstaja neko vozlišče $u \in S$, tako da F ne vsebuje a-loka za $a \in E(G)$, ki bi bil usmerjen proti u.

(b) V F obstaja neko vozlišče $u \in V(G) \backslash S$, tako da F vsebuje največ en a-lok za $a \in E(G)$, ki je usmerjen proti u.

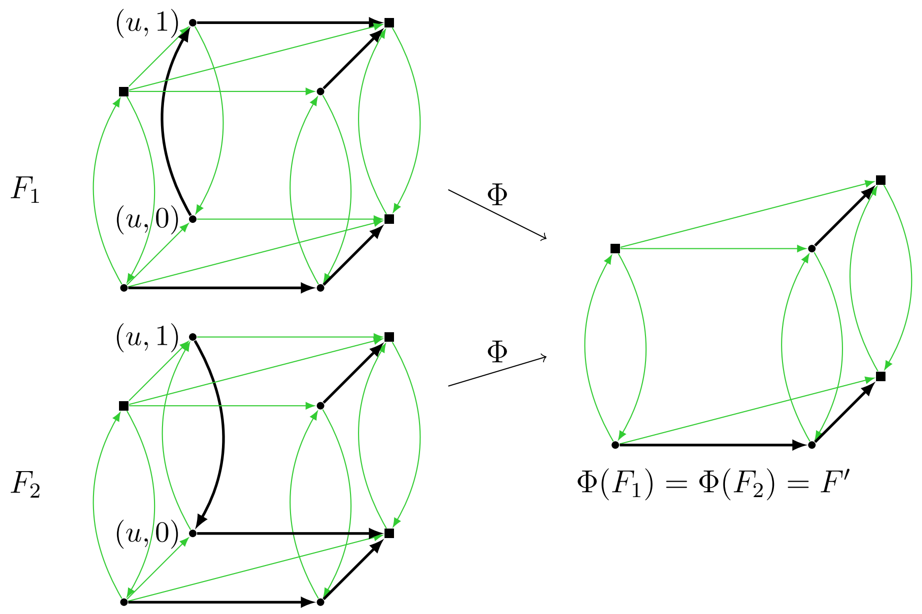
Da vedno velja vsaj ena od naštetih možnosti, se da preprosto preveriti s kratkim izračunom. Prepostavimo, da obstaja neki gozd F' na H, za katerega ne velja nobena od trditev, množica S pa naj bo definirana kot prej, le da jo sedaj označimo s S'.

Prvič, za vsako vozlišče $u \in S'$ velja, da F' vsebuje vsaj en a-lok, $a \in E(G)$, usmerjen proti u. To nam da β navpičnih lokov in še β vodoravnih lokov v F'.

Drugič, za vsako vozlišče $u \in V(G) \backslash S'$ velja, da F' vsebuje vsaj dva a-loka, $a \in E(G)$, usmerjena proti u. To prispeva še dodatnih 2γ lokov v F'. Nobenega loka nismo šteli dvakrat, saj smo šteli le loke, usmerjene proti vozliščem iz dveh disjunktnih množic. Dobimo torej $2\beta + 2\gamma = 2n$ lokov, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je F' gozd.

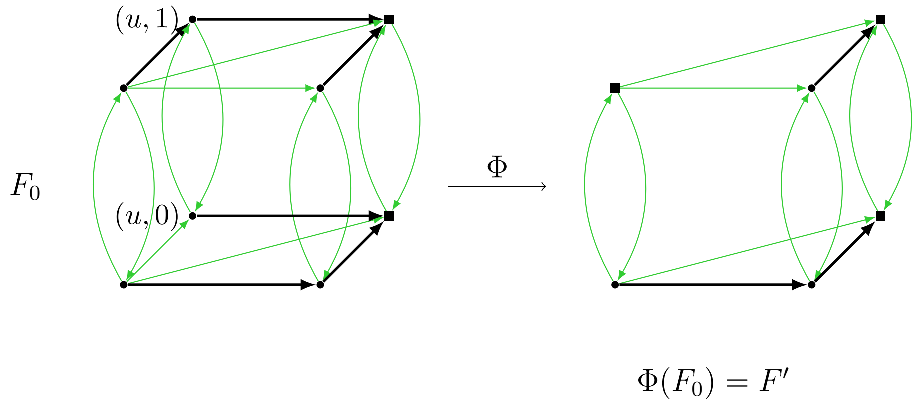
V naslednjem koraku bomo pogledali, kaj se zgodi v primerih (a) in (b), če odstranimo vozlišče u iz digrafa H. Primera sta predstavljena na slikah 8 in 9. Z G' označimo digraf, ki ga dobimo iz G, če odstranimo vozlišče u in temu vozlišču vse sosednje loke. Naj bo $H' = G' \Box K_2$. Za gozd $F \in \mathcal{F}_0$ s $\Phi(F)$ označimo gozd na H', ki ga dobimo iz F, ko odstranimo vozlišči $(u, 0)$ in $(u, 1)$ iz H in tema vozliščema sosednje loke. Nastavimo $F_0' = \Phi(F_0)$. Naj bo $\mathcal{F}_0'$ množica vseh gozdov na H', ki imajo enako G'-projekcijo kot F_0'.

Poglejmo najprej primer (a). Vsak gozd $F' \in \mathcal{F}_0'$ lahko s preslikavo Φ dobimo iz natanko dveh različnih gozdov F_1 in F_2 na H iz $\mathcal{F}_0$. Gozdova F_1 in F_2 imata enako G-projekcijo kot F_0, zato imamo točno določeno število vodoravnih a-lokov za $a \in E(G)$. Prvi izmed teh gozdov ima ob vozlišču u navpičen lok spina 0, drugi pa ima ob vozlišču u navpičen lok spina 1. Za boljšo predstavo je zgled ponazorjen



SLIKA 8. Primer dveh gozdov F_1 in F_2 na poljubnem digrafu $G \square K_2$, ki ju preslikava Φ preslika v enak gozd F' na $G' \square K_2$.

na sliki 8. Ker je $F \in \mathcal{F}_0$ naključno izbran gozd, je tudi $F' = \Phi(F) \in \mathcal{F}_0'$ naključno izbran gozd. Iz indukcijske predpostavke sledi, da so spini navpičnih lokov F' med seboj neodvisni in enakomerno porazdeljeni na $\{0, 1\}$. In ker smo pokazali, da je tudi spin navpičnega loka ob vozlišču u v F naključen in neodvisen od spinov ostalih navpičnih lokov v F', so tudi spini vseh navpičnih lokov v F med seboj neodvisni in enakomerno porazdeljeni na $\{0, 1\}$.



SLIKA 9. Primer gozda F_0 na poljubnem digrafu $G \square K_2$. Na desni je prikazan gozd F', ki ga dobimo iz F_0 po odstranitvi vozlišča u iz digrafa $G \square K_2$.

Obravnavajmo še primer (b), ki pravi, da F_0 vsebuje največ en a-lok za $a \in E(G)$, ki je usmerjen proti u. Hkrati velja, da F_0 vsebuje največ dva a'-loka za $a' \in E(G)$, usmerjena stran od u, vsakega iz ene kopije grafa G. Oba a'-loka seveda ne moreta biti del iste kopije G, saj to ne bi ustrezalo zahtevi, da ima gozd F_0 vse povezave v neki komponenti usmerjene proti korenu. To nam da skupaj šest možnosti. Lahko bi obravnavali vsako posebej, a se bomo izognili dolgovezenju in obravnavali le najbolj zapleten primer, kjer nastopa največ lokov, usmerjenih proti ali stran od vozlišča u.

Označimo z $a_0 \in E(G)$ lok na F_0, usmerjen proti u, ter z a_1 in a_2 različna loka na F_0, usmerjena stran od u. Primer je ponazorjen na sliki 9. Množico $\mathcal{F}_0$ razdelimo na dve disjunktni množici $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, kjer je $\mathcal{F}_1$ množica tistih gozdov $F \in \mathcal{F}_0$, za katere sta si a_0-lok in a_1-lok sosednja, ter $\mathcal{F}_2$ množica tistih gozdov $F \in \mathcal{F}_0$, za katere sta si sosednja a_0-lok in a_2-lok. Dovolj je dokazati, da če je za $i \in \{1,2\}$ F_i poljubno izbran gozd iz $\mathcal{F}_i$ in $\mathcal{F}_i \neq \emptyset$, potem so spini navpičnih lokov F_i neodvisni in enakomerno porazdeljeni na množici $\{0,1\}$.

Naj bo $i \in \{1,2\}$ izbran tako, da $\mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Z G'_i označimo digraf, dobljen iz G tako, da spojimo loka a_0 in a_i v en sam lok b z začetkom v istem vozlišču kot lok a_0 in koncem v istem vozlišču kot lok a_i, vozlišče u pa skupaj s sosednjimi loki odstranimo. Naj bo $H'_i = G'_i \Box K_2$. Za $F \in \mathcal{F}_i$ s $\Phi_i(F)$ označimo gozd na H'_i, dobljen iz F s spojitvijo lokov a_0 in a_i v lok b kot prej in odstranitvijo vozlišč $(u,0)$, $(u,1)$ ter njunih sosednjih lokov. Naj bo $F_{i,0} \in \mathcal{F}_i$ in naj bo $F'_{i,0} = \Phi_i(F_{i,0})$ ter $\mathcal{F}'_i$ množica vseh gozdov na H'_i z enako G'_i-projekcijo kot $F'_{i,0}$. Očitno je Φ_i bijekcija med $\mathcal{F}_i$ in $\mathcal{F}'_i$. Če je torej $F_i \in \mathcal{F}_i$ izbran na slepo, potem je tudi $F'_i = \Phi_i(F_i)$ enakomerno porazdeljen. Po indukcijski predpostavki so spini navpičnih lokov F_i, ki so enaki spinom navpičnih lokov F'_i, med seboj neodvisni in enakomerno porazdeljeni na množici $\{0,1\}$. □

V grobem dokazani izrek pomeni, da če hočemo prešteti vse gozdove s koreni na $H = G \Box K_2$, zadostuje prešteti gozdove s koreni brez navpičnih lokov spina 1. Naslednja posledica to izjavo opredeli bolj natančno.

Posledica 3.5. *Naj bosta $G = (V,E)$ in $H = G \Box K_2$ digrafa. Naj imajo loki v H uteži definirane tako: za $\varepsilon \in \{0,1\}$ naj imajo navpični loki spina ε utež x_ε in za $a \in E$ naj imajo vodoravni loki uteži w_a. Potem velja, da rodovna funkcija za gozdove $F_H(t) = F_H(t; x_0, x_1)$ zadošča enačbi $F_H(t; x_0, x_1) = F_H(t; x_0 + x_1, 0)$.*

Dokaz. Naj bo $H = G \Box K_2$ digraf. Naj bo k celo število in $\mathbf{m} = (m_a)_{a \in E}$ nabor celih števil. S $\mathcal{F}(k, \mathbf{m})$ označimo množico vseh gozdov s koreni na H, ki imajo k navpičnih lokov in m_a vodoravnih a-lokov za $a \in A$. Iz izreka 3.4 lahko zaključimo, da ima število navpičnih lokov spina 0 v poljubnem gozdu $F \in \mathcal{F}(k, \mathbf{m})$ binomsko porazdelitev s parametrom $(k, \frac{1}{2})$, kar pomeni, da ima vsak od k navpičnih lokov enako verjetnost, da je spina 0 oziroma 1.

Z $\alpha(F)$ označimo število navpičnih lokov spina 0 v F in z $\beta(F)$ število navpičnih lokov spina 1 v F. Pogledamo vsoto

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(k,\mathbf{m})} x_0^{\alpha(F)} x_1^{\beta(F)}.$$

Ta vsota ignorira vodoravne in upošteva le navpične loke. Iz izreka 3.4 vemo, da so spini teh lokov med seboj neodvisni in enakomerno porazdeljeni na množici $\{0,1\}$. Poljubno izbran lok iz $F \in \mathcal{F}(k, \mathbf{m})$ ima verjetnost $\frac{1}{2}$, da bo njegov spin 0 oziroma 1. Vsi gozdovi imajo k navpičnih lokov, zato zapišemo zvezo

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(k,\mathbf{m})} x_0^{\alpha(F)} x_1^{\beta(F)} = |\mathcal{F}(k,\mathbf{m})| \left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2} \right)^k.$$

Iz tega sledi, da se

$$F_H(t;x_0,x_1)=\sum_{\mathbf{m},k}\prod_{a\in A}w_a^{m_a}\sum_{F\in\mathcal{F}(k,\mathbf{m})}x_0^{\alpha(F)}x_1^{\beta(F)}$$

ne spremeni, če spremenljivki (x_0,x_1) zamenjamo s spremenljivkama $(x_0+x_1,0)$, saj je $\frac{x_0+x_1}{2}+\frac{0}{2}=\frac{x_0}{2}+\frac{x_1}{2}$. Posledica je dokazana. □

Posledica 3.6. *Naj bo $G=(V,E)$ digraf. Naj ima digraf $H=G\Box K_2$ uteži lokov določene tako: za $\varepsilon\in\{0,1\}$ naj imajo navpični loki spina ε utež x_ε in za $a\in E$ naj imajo vodoravni loki uteži w_a. Potem sta rodovni funkciji za G in H povezani z naslednjo enačbo:*

$$F_H(t)=F_G(t)F_G(t+x_0+x_1).$$

Dokaz. Naj bosta $G=(V,E)$ in $H=G\Box K_2$ digrafa. F_H je funkcija spremenljivk t, x_0 in x_1, oziroma $F_H(t)=F_H(t;x_0,x_1)$. Iz posledice 3.5 že vemo, da velja $F_H(t;x_0,x_1)=F_H(t;x_0+x_1,0)$. Dokazati moramo le še naslednje:

$$F_H(t;x_0,0)=F_G(t)F_G(t+x_0).$$

Iz definicije izpeljemo $F_H(t;x_0,0)=\sum_{F\in\mathcal{F}'}w(F)$, kjer je $\mathcal{F}'$ množica gozdov s koreni na H brez navpičnih lokov spina 1. Za $\varepsilon\in\{0,1\}$ naj bo G_ε podgraf H, izomorfen G, generiran z oglišči (u,ε), $u\in V$. Jasno je, da je vsak gozd s koreni iz $\mathcal{F}'$ pridobljen z naslednjimi koraki:

(1) izberemo gozd s koreni F_0 na G_0,
(2) izberemo gozd s koreni F_1 na G_1,
(3) za vsak koren iz F_1 določimo, ali dodamo navpični lok spina 0 iz tega vozlišča ali ne.

Katerakoli izbira pri naštetih korakih nam da gozd s koreni $F\in\mathcal{F}'$. Z dodajanjem navpičnih lokov ni mogoče ustvariti ciklov, zato bomo po izvedenih korakih vedno dobili gozd ali drevo. Še več, $F_G(t)$ je rodovna funkcija vseh možnih izbir v prvem koraku, $F_G(t+x_0)$ pa je rodovna funkcija vseh možnih izbir v drugem in tretjem koraku, saj nam vsota $t+x_0$ predstavlja izbiro v nekem vozlišču, ali to vozlišče določimo za koren ali pa iz njega napeljemo lok spina 0. □

Omenili smo že, da hiperkocko dimenzije n dobimo kot produkt n-kopij grafa K_2. Tako lahko izrek in obe posledici uporabimo na grafih hiperkock in dokažemo formulo (3).

Posledica 3.7. *Hiperkocka Q_n dimenzije n, kjer vsakemu loku e smeri $i\in[n]$ in s spinom $\varepsilon\in\{0,1\}$ priredimo utež $x_{i,\varepsilon}$, ima rodovno funkcijo*

$$F_{Q_n}(t;\mathbf{x})=\prod_{S\subseteq[n]}\Big(t+\sum_{i\in S}(x_{i,0}+x_{i,1})\Big). \tag{5}$$

Dokaz. Posledico 3.7 bomo dokazali na dva načina.

Prvi dokaz sledi iz posledice 3.6 z indukcijo po n. Vemo, da je $Q_n=Q_{n-1}\Box K_2$ in $F_{K_2}(t;x_{1,0},x_{1,1})=F_{Q_1}(t;x_{1,0},x_{1,1})=t^2+t(x_{1,0}+x_{1,1})$, kar se da hitro izpeljati iz formule (2) s pomočjo slike 7. Enako rodovno funkcijo dobimo, če v formulo (5) vstavimo $n=1$. Predpostavimo, da posledica velja za $n-1$. Upoštevamo posledico 3.6 in zapišemo

$$F_{Q_n}(t;\mathbf{x})=F_{Q_{n-1}}(t;\mathbf{x})F_{Q_{n-1}}(t+\mathbf{x};\mathbf{x}).$$

Upoštevamo še indukcijsko predpostavko.

$$F_{Q_n}(t;\mathbf{x}) = \prod_{S\subseteq[n-1]} \Big(t+\sum_{i\in S}(x_{i,0}+x_{i,1})\Big) \times \prod_{S\subseteq[n-1]} \Big(t+x_{n,0}+x_{n,1}+\sum_{i\in S}(x_{i,0}+x_{i,1})\Big)$$

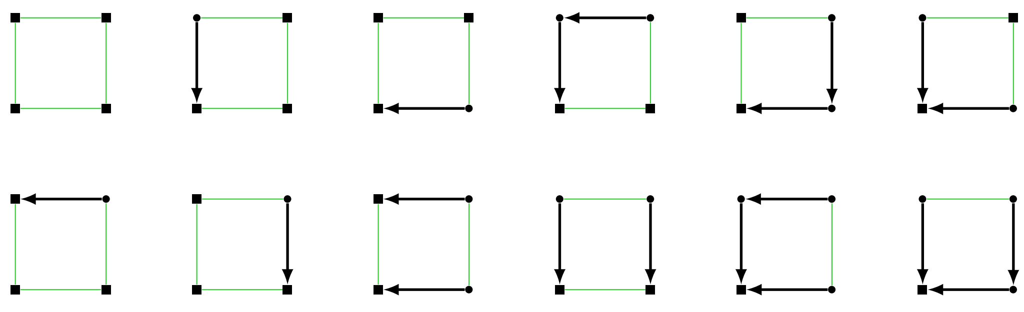
Dobljeni produkt pa je pravzaprav enak formuli (5). Leva stran produkta je produkt po vseh množicah $S \subseteq [n-1]$, desna stran pa produkt po vseh množicah $S \cup \{n\}$ za $S \subseteq [n-1]$. Skupaj pa je to ravno produkt po vseh množicah $S \subseteq [n]$.

Dokažimo posledico 3.7 še na drugačen način, brez uporabe indukcije. S $\mathcal{F}_{Q_n}$ označimo množico vseh vpetih gozdov s koreni na hiperkocki Q_n. Za osnovo vzamemo formulo $F_{Q_n}(t;\mathbf{x}) := \sum_{F\in\mathcal{F}_{Q_n}} t^{k(F)} \prod_{e\in F} x_{\mathrm{dir}(e),\mathrm{spin}(e)}$. Najprej opazimo, da iz posledice 3.5 sledi, da lahko v $F_{Q_n}(t;\mathbf{x}) = F_{Q_n}(t;x_{1,0},x_{1,1},x_{2,0},\ldots,x_{n,0},x_{n,1})$ spremenljivke nekoliko spremenimo. Vsaki spremenljivki $x_{i,0}$ in $x_{i,1}$, $i\in[n]$, lahko zamenjamo s spremenljivkama $x_{i,0}+x_{i,1}$ in 0. Vse, kar moramo še dokazati, je naslednja zveza:

$$F_{Q_n}(t;x_{1,0},0,\ldots,x_{n,0},0) = \prod_{S\subseteq[n]} \Big(t+\sum_{i\in S} x_{i,0}\Big) \tag{6}$$

Na tak način zapisana rodovna funkcija šteje gozdove s koreni na Q_n, ki ne vsebujejo lokov spina $\varepsilon = 1$, saj smo vse uteži $x_{i,1}$, kjer je $i\in[n]$, nastavili na 0. Iz definicije je razvidno, da je ta rodovna funkcija enaka vsoti uteži vseh gozdov iz množice vpetih gozdov s koreni na Q_n brez lokov spina 1, ki jo označimo s $\mathcal{F}'_{Q_n}$. Krajše to zapišemo z enakostjo $F_{Q_n}(t;x_{1,0},0,\ldots,x_{n,0},0) = \sum_{F\in\mathcal{F}'_{Q_n}} w(F)$.

Vsak gozd $F\in\mathcal{F}'_{Q_n}$ dobimo z zaporedjem izbir, ki se nanašajo na vozlišča Q_n. Za vsako vozlišče $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in\{0,1\}^n$ določimo, ali bo to vozlišče koren, s tem v formulo doprinese utež t, ali pa bo to vozlišče začetek loka s spinom 0 in smerjo i za $i\in S_v = \{i\in[n],\ v_i=1\}$ in bo s tem doprineslo utež $\sum_{i\in S_v} x_{i,0}$. Vsako tako zaporedje odločitev nas pripelje do gozda $F\in\mathcal{F}'_{Q_n}$, ki je s tem postopkom enolično določen.



Slika 10. Gozdovi iz $\mathcal{F}'_{Q_2}$.

V primeru 3.3 smo na Q_3 uporabili opisani postopek, le da smo se omejili na drevesa. Na sliki 10 pa so ponazorjeni vsi gozdovi iz množice $\mathcal{F}'_{Q_2}$. V tem primeru dobimo rodovno funkcijo $F'_{Q_2}(t;\mathbf{x}) = t^4+t^3(2x_{1,0}+2x_{2,0})+t^2(3x_{1,0}x_{2,0}+x_{1,0}^2+x_{2,0}^2)+t(x_{1,0}^2x_{2,0}+x_{1,0}x_{2,0}^2)$.

Za vsako posamezno vozlišče v iz Q_n je rodovna funkcija pomnožena z vsoto uteži $t+\sum_{i\in S_v} x_{i,0}$. Upoštevamo še, da so množice S_v pravzaprav vse podmnožice $[n]$. To pa nas pripelje tudi do enačbe (6).

V formuli (6) le še zamenjamo spremenljivke, namesto $x_{i,0}$ vzamemo $x_{i,0} + x_{i,1}$, kjer je $i = 1, 2, \dots, n$, dobimo formulo (3) in s tem rodovno funkcijo za vpete gozdove s koreni na Q_n. $\square$

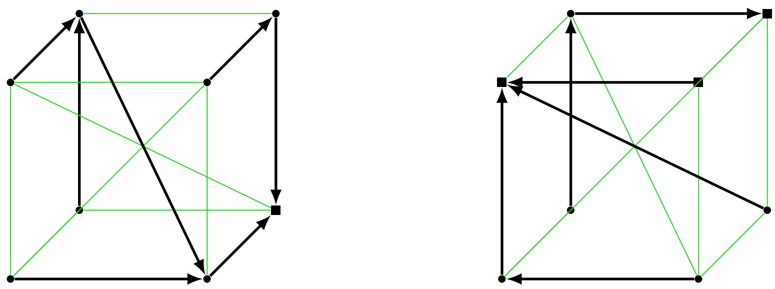
3.3. **Drugi kombinatorični dokaz.** V tem podrazdelku bomo grafu hiperkocke Q_n dodali še diagonalne loke. Diagonalen lok tokrat pomeni lok v smislu telesne diagonale. To je torej lok, ki povezuje vozlišče $(v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ z njegovim nasprotnim oziroma *antipodnim vozliščem* $(1 - v_1, \dots, 1 - v_n) \in \{0,1\}^n$. Tak graf, dobljen iz Q_n, bomo označili z D_n ter na njem šteli vpete gozdove s koreni. Dva primera takih gozdov na D_3 sta prikazana na sliki 11.

Tudi v tem razdelku bomo definirali rodovno funkcijo. Utež diagonalnega loka označimo z y, uteži ostalih lokov pa na že poznani način z $x_{\mathrm{dir}(e),\mathrm{spin}(e)}$, kjer je $\mathrm{dir}(e) \in [n]$ smer in $\mathrm{spin}(e) \in \{0,1\}$ spin loka e. Diagonalnim lokom določimo smer 0.

Rodovna funkcija za gozdove s koreni na D_n je oblike

$$F_{D_n}(t; \mathbf{x}, y) = \sum_{F \text{ gozd s koreni na } D_n} t^{k(F)} \prod_{e \in F} w(e), \tag{7}$$

kjer je $w(e)$ utež loka e.



Slika 11. Primer dveh vpetih gozdov s koreni na D_3. Koreni so označeni s kvadratom.

Glavni izrek tega razdelka je naslednji izrek, ki pa je pravzaprav posplošitev formule (3), saj pri $y = 0$ dobimo ravno rodovno funkcijo za gozdove na hiperkocki $F_{C_n}(t; \mathbf{x}) = F_{D_n}(t; \mathbf{x}, 0)$.

Izrek 3.8. *Rodovna funkcija za gozdove na hiperkocki z diagonalami D_n je enaka*

$$F_{D_n}(t; \mathbf{x}, y) = \prod_{S \subseteq [n]} \Big(t + 2y \cdot \mathbf{1}_{|S| \text{ liha}} + \sum_{i \in S} (x_{i,0} + x_{i,1}) \Big).$$

Zapis $\mathbf{1}_{|S| \text{ liha}}$ označuje karakteristično funkcijo, ki je enaka 1, če je množica S lihe moči, sicer pa je 0.

To rodovno funkcijo bi se dalo zopet razložiti z besedami. V vsakem vozlišču $v = (v_1, \dots, v_n)$, ki ima koordinate v_i za $i \in S \subseteq [n]$ enake 1, se odločimo, ali bo to vozlišče koren, ali pa bomo iz njega napeljali kakšen lok. Koren v rodovno funkcijo doprinese utež t, diagonalen lok doprinese utež $2y$, ostali loki pa utež $x_{i,\varepsilon}$, odvisno od tega, kakšne smeri in spina so.

Za dokaz tega izreka v celoti potrebujemo tudi izrek 3.4. Za dokaz samo v primeru, ko je $y = 0$, pa izreka 3.4 ne potrebujemo, kar pomeni, da je ta kombinatorični dokaz formule za število vpetih dreves na hiperkocki neodvisen od prejšnjega dokaza.

Dokaz izreka 3.8. Iz definicije je razvidno, da je $F_{D_n}(t;\mathbf{x},y)$ polinom stopnje 2^n v spremenljivki t z vodilnim koeficientom enakim 1. Zato zadošča pokazati, da za vsako podmnožico $S \subseteq [n]$ velja

$$F_{D_n}(-2y \cdot \mathbf{1}_{|S| \text{ liha}} - \sum_{i \in S}(x_{i,0} + x_{i,1}); \mathbf{x}, y) = 0. \tag{8}$$

Vsakemu korenu v gozdu F na D_n priredimo oznako $k \in [n]$. Oznake se lahko ponavljajo. Fiksiramo množico $S \subseteq [n]$ in definiramo S' tako:

$$S' := \begin{cases} S & |S| \text{ sodo število,} \\ S \cup \{0\} & |S| \text{ liho število.} \end{cases}$$

Za gozd s koreni F na D_n rečemo, da je S-*označen*, če je oznaka vsakega korena iz F v S'. Naj bo $\mathcal{F}_S$ množica S-označenih gozdov. Za S-označen gozd F zapišemo utež gozda tako:

$$w(F) = \prod_{e \text{ lok v } F} w(e) \times \prod_{v \text{ koren v } F} \overline{w}(v).$$

Pri tem je $\overline{w}(v) = -2y$, če je koren v označen z 0, in $\overline{w}(v) = -x_{i,0} - x_{i,1}$, če je koren v označen z $i > 0$. Iz tega takoj sledi zapis

$$F_{D_n}(-2y \cdot \mathbf{1}_{|S| \text{ liha}} - \sum_{i \in S}(x_{i,0} + x_{i,1}); \mathbf{x}, y) = \sum_{F \in \mathcal{F}_S} w(F). \tag{9}$$

Dokazati želimo, da je desna stran enačbe (9) enaka nič, torej $\sum_{F \in \mathcal{F}_S} w(F) = 0$.

Definiramo množico $\mathcal{C}$ podgrafov D_n, tako da ima vsako vozlišče D_n v $C \in \mathcal{C}$ natanko en lok, ki je usmerjen stran od tega vozlišča. Iz te definicije je razvidno, da bodo C grafi na 2^n vozliščih, ki bodo sestavljeni iz disjunktnih usmerjenih ciklov ter usmerjenih dreves s koreni na teh ciklih. Vemo, da so cikli disjunktni, saj bi v nasprotnem primeru imeli neko vozlišče, ki bi imelo vsaj dva loka, usmerjena stran od tega vozlišča.

Za gozd $F \in \mathcal{F}_S$, kjer je $\mathcal{F}_S$ množica S-označenih gozdov, naj bo $\overline{F} \in \mathcal{C}$ graf, ki ga dobimo iz F tako, da iz korenov napeljemo lok v smeri, ki jo določa oznaka tega korena. Če je koren označen z 0, iz njega napeljemo lok v diagonalni smeri, če pa je označen z $i \in [n]$, iz njega napeljemo lok v smeri i. Primer je ponazorjen na sliki 12. Prikazana sta dva enaka gozdova na D_3, a z različnimi oznakami korenov. Ko dodamo povezave glede na te oznake, dobimo različna grafa.

Velja enakost

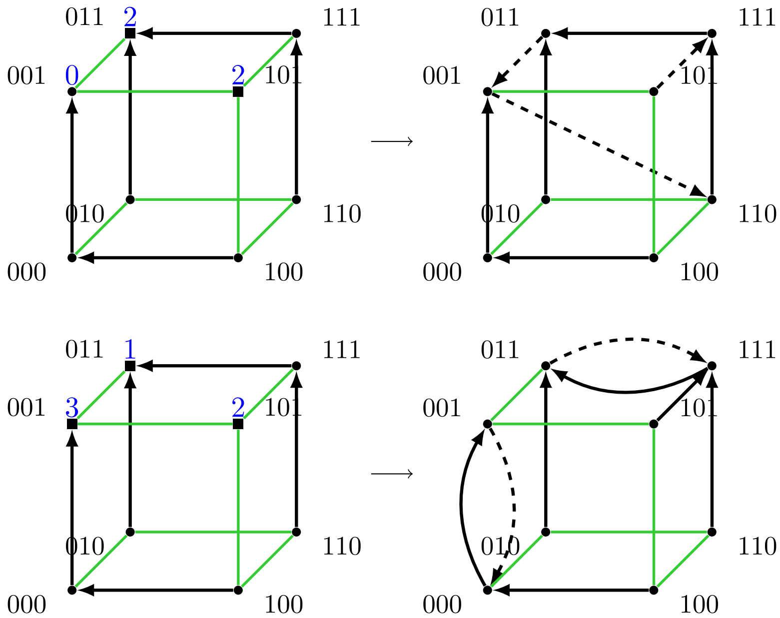
$$\sum_{F \in \mathcal{F}_S} w(F) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{F \in \mathcal{F}_S, \overline{F} = C} w(F).$$

Ta zapis si lahko predstavljamo kot razbitje vseh S-označenih gozdov na ekvivalenčne razrede, saj lahko iz več različnih gozdov dobimo enak graf $C \in \mathcal{C}$. Iz nekega grafa C lahko z odstranjevanjem lokov skonstruiramo vse gozdove F, za katere velja $\overline{F} = C$.

V nadaljevanju si pogledamo, kaj se zgodi z vsoto $\sum_{F \in \mathcal{F}_S, \overline{F} = C} w(F)$ pri nekem grafu C. Pokazati želimo, da je enaka 0.

Vpeljemo še nekaj oznak. Graf $C \in \mathcal{C}$ razbijemo na več delov. Posamezne disjunktne cikle označimo s $C^{(1)}, \ldots, C^{(k)}$. S $C^{(0)}$ pa označimo množico vseh ostalih lokov v C, torej tistih, ki ne nastopajo v nobenem ciklu.

S $C_S^{(j)}$, kjer je $1 \leq j \leq k$, označimo množico tistih lokov iz cikla $C^{(j)}$, katerih smer je iz množice S'. Zapis $\overline{C}_S^{(j)} = C^{(j)} \backslash C_S^{(j)}$ pa seveda označuje množico vseh ostalih lokov iz cikla $C^{(j)}$.



SLIKA 12. Na levi strani sta dva enaka gozdova na D_3 z različnimi oznakami korenov. Ko dodamo povezave glede na oznake, v zgornjem primeru dobimo cikel dolžine 4, v spodnjem pa dva cikla dolžine 2.

Gozd s koreni F, za katerega velja $\overline{F} = C$, dobimo iz grafa C z odstranitvijo nekaterih lokov. In sicer lahko odstranimo poljubno število lokov iz $C_S^{(0)}$ ter najmanj po en lok iz množic $C_S^{(j)}$ za $j = 1, \ldots, k$, saj moramo iz grafa C odpraviti vse cikle, če želimo dobiti gozd.

Sedaj si pogledamo uteži lokov iz C. Če neki lok e iz C pri opisanem postopku ni odstranjen iz grafa, potem prispeva utež $w(e)$ k uteži $w(F)$ dobljenega gozda F. Hkrati velja, da odstranjen lok e iz C, če je to diagonalen lok, prispeva utež $\overline{w}(e) = -2y$, oziroma če lok ni diagonalen, prispeva utež $\overline{w}(e) = -x_{i,0} - x_{i,1}$, kjer je i smer loka.

Vpeljimo še oznako $\widetilde{w}(e) = w(e) + \overline{w}(e)$ ter vsoto $\sum_{F \in \mathcal{F}_S, \overline{F}=C} w(F)$ zapišimo na naslednji način:

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_S \\ \overline{F}=C}} w(F) = \prod_{e \in \overline{C}_S^{(0)}} w(e) \prod_{e \in C_S^{(0)}} \widetilde{w}(e) \times \prod_{j=1}^{k} \prod_{e \in \overline{C}_S^{(j)}} w(e) \Big(\prod_{e \in C_S^{(j)}} \widetilde{w}(e) - \prod_{e \in C_S^{(j)}} w(e) \Big). \tag{10}$$

Ta zapis je videti na prvi pogled zapleten, a po premisleku postane smiseln. Lokov iz $\overline{C}_S^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, ne odstranjujemo, zato bodo ti loki za fiksen C vedno prispevali utež $w(e)$, kjer je e neki lok iz te množice. Loke e iz $C_S^{(j)}$ pa lahko odstranimo ali pa ne in od te izbire bo odvisna tudi utež loka e. Zato na tem mestu v zgornjem izrazu nastopa vsota $\widetilde{w}(e) = w(e) + \overline{w}(e)$. Ker moramo iz cikla $C^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$, nujno odstraniti vsaj en lok, v zadnjem delu izraza še izključimo oziroma odštejemo možnost, pri kateri ne odstranimo nobenega loka.

Poglejmo si še smeri lokov v ciklu $C_S^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$, glede na množico S oziroma S'. Posamezno vozlišče v Q_n označimo z n koordinatami, kar zapišemo $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Gledamo samo tiste koordinate vozlišč, katerih indeksi nastopajo v množici S. Če potujemo od enega do drugega vozlišča in pri tem gledamo samo koordinate v_i za

$i \in S$, kar z drugimi besedami pomeni, da nas zanimajo potovanja samo po lokih s smerjo v S, se te koordinate na poti spreminjajo vzdolž teh lokov. Še več, parnost števila $\sum_{i\in S} v_i$ se spremeni, kadarkoli potujemo po loku s smerjo v S. Vendar pa moramo na koncu priti v prvotno izhodišce. To nam pove, da $C_S^{(j)}$ vsebuje sodo število lokov za vsak $j \in [k]$.

Produkt $\prod_{e\in C_S^{(j)}} \widetilde{w}(e)$ je produkt sodega števila uteži, zato se negativni predznaki izničijo. Vemo, da je $\widetilde{w}(e) = y - 2y = -y$, če je e diagonalen lok, oziroma $\widetilde{w}(e) = x_{i,\varepsilon} - x_{i,\varepsilon} - x_{i,1-\varepsilon} = -x_{i,1-\varepsilon}$, če ima lok e smer i ter spin ε. Označimo $\widehat{w}(e) = -\widetilde{w}(e)$, da se znebimo nepotrebnih negativnih predznakov. To vstavimo v enačbo (10) in dobimo

$$\sum_{\substack{F\in\mathcal{F}_S\\ \overline{F}=C}} w(F) = \prod_{e\in\overline{C}_S^{(0)}} w(e) \prod_{e\in C_S^{(0)}} \widetilde{w}(e) \times \prod_{j=1}^{k} \prod_{e\in\overline{C}_S^{(j)}} w(e)\Big(\prod_{e\in C_S^{(j)}} \widehat{w}(e) - \prod_{e\in C_S^{(j)}} w(e)\Big). \tag{11}$$

Zdaj hočemo le še pokazati, da je desna stran te enačbe enaka nič.

Najprej se omejimo na primer, kjer je $y = 0$. Če graf C vsebuje kakšen diagonalen lok, pri čemer ni pomembno, ali je ta lok del cikla ali pa je element množice $C^{(0)}$, se celotna desna stran enačbe (11) pomnoži z 0.

Lahko se zgodi tudi, da C ne vsebuje nobenega diagonalnega loka. Graf D_n brez diagonalnih lokov pa je kar hiperkocka Q_n. Za cikle na hiperkocki vemo, da so sestavljeni iz sodega števila lokov smeri i za vsak $i \in [n]$. Če torej cikel $C^{(j)}$ vsebuje lok smeri i ter spina ε, bo ta cikel vseboval tudi lok smeri i in spina $1-\varepsilon$, število lokov različnih spinov in enakih smeri pa se bo med sabo ujemalo. $C^{(j)}$ je sode dolžine, zato velja enakost

$$\prod_{e\in C_S^{(j)}} \widehat{w}(e) = \prod_{e\in C_S^{(j)}} \widetilde{w}(e) = \prod_{e\in C_S^{(j)}} w(e).$$

Razlika produktov $\prod_{e\in C_S^{(j)}} \widehat{w}(e) - \prod_{e\in C_S^{(j)}} w(e)$ je enaka nič in izrek je za primer $y = 0$ v celoti dokazan. Na enak način kot pri prvem kombinatoričnem dokazu lahko tudi v tem primeru pridemo do formule za število vpetih dreves na Q_n. Nastavimo utež $y = 0$ in vse ostale uteži na 1 ter poračunamo. Pri dokazu nismo uporabili izreka in posledic iz razdelka 3.2, zato nam ta dokaz neodvisno od prvega dokaže formulo (1).

Razmislimo še primer, kjer $y \neq 0$. V splošnem desna stran v enačbi (11) ni enaka nič. A če velja $x_{i,0} = x_{i,1}$ za $i \in S$, potem dobimo enakost $\widehat{w}(e) = x_{i,1-\varepsilon} = x_{i,\varepsilon} = w(e)$ za vsak lok e, katerega smer je v množici S'. Posledično je tudi $\prod_{e\in C_S^{(j)}} \widehat{w}(e) - \prod_{e\in C_S^{(j)}} w(e) = 0$ ter $\sum_{F\in\mathcal{F}_S,\overline{F}=C} w(F) = 0$.

Digraf D_n dobimo iz digrafa $D_{n-1}\Box K_2$ tako, da odstranimo vse diagonalne loke iz D_{n-1} in dodamo diagonalne loke v smislu telesne diagonale digrafu D_n. Ker kartezičnemu produkti odstranjujemo in dodajamo le diagonalne loke, tudi v tem primeru velja posledica 3.5.

Iz posledice 3.5 sledi, da se rodovna funkcija $F_{D_n}(t;\mathbf{x},y)$ ne spremeni, če zamenjamo spremenljivke $(x_{i,0}, x_{i,1})$ s spremenljivkami $(x_{i,0} + x_{i,1}, 0)$ ali pa celo s spremenljivkami $\left(\frac{x_{i,0}+x_{i,1}}{2}, \frac{x_{i,0}+x_{i,1}}{2}\right)$, kjer je $i \in [n]$.

Označimo z $\mathbf{x}' = \left(\frac{x_{1,0}+x_{1,1}}{2}, \frac{x_{1,0}+x_{1,1}}{2}, \ldots, \frac{x_{n,0}+x_{n,1}}{2}, \frac{x_{n,0}+x_{n,1}}{2}\right)$ in zapišemo rodovno funkcijo

$$F_{D_n}(t;\mathbf{x}',y) = \prod_{S\subseteq[n]} \Big(t + 2y\cdot \mathbf{1}_{|S| \text{ liha}} + \sum_{i\in S}(x_{i,0}+x_{i,1})\Big).$$

Velja enakost $F_{D_n}(t;\mathbf{x},y) = F_{D_n}(t;\mathbf{x}',y)$ in s tem je dokaz zaključen. □

Primer 3.9. Graf D_2 je enak polnemu grafu na štirih vozliščih K_4. Število vpetih dreves na polnih grafih šteje Cayleyjeva formula in je oblike $\tau(K_n) = n^{n-2}$. K_4 ima torej 16 vpetih dreves. Poskusimo do tega števila priti tudi z uporabo izreka 3.8. Za uteži vzamemo vrednosti $y = 1$ in $x_{1,0} = x_{1,1} = x_{2,0} = x_{2,1} = 1$. Zanima nas le koeficient pred t^1, zato zapišemo

$$\tilde{\tau}(D_2) = \prod_{\substack{S\subseteq[2]\\ S\neq\emptyset}} \Big(2\cdot \mathbf{1}_{|S| \text{ liha}} + \sum_{i\in S} 2\Big) = 4^3.$$

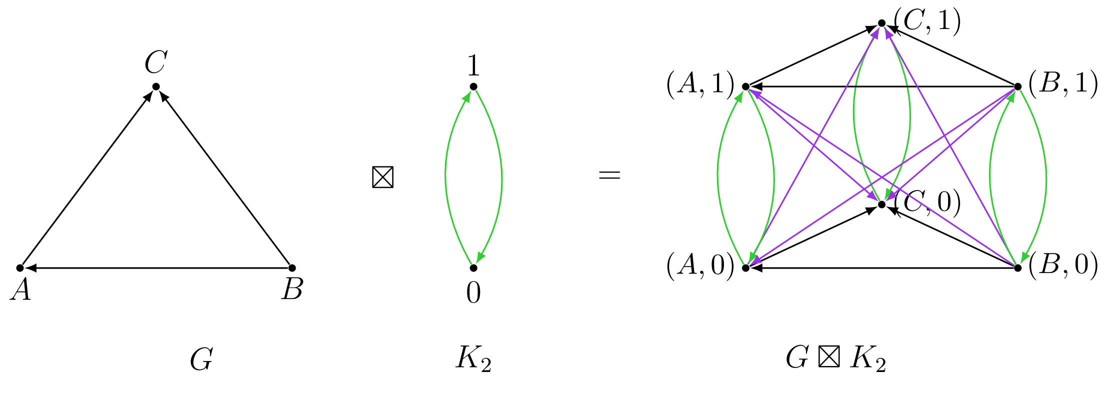
Da dobimo število vpetih dreves, moramo $\tilde{\tau}(D_2)$ deliti s štiri, saj je to število vseh možnih korenov. Dobimo 16 vpetih dreves na D_2, kar se ujema s Cayleyjevo formulo.

4. Posplošitve in zaključek

V članku [2], ki je osnovni članek te naloge, potek prvega kombinatoričnega dokaza poteka nekoliko drugače. Namesto navadnega kartezičnega produkta digrafov se avtor osredotoči na *krepki produkt digrafov.*

Definicija 4.1. Krepki produkt digrafov $H = G \boxtimes K_2$ dobimo iz kartezičnega produkta digrafov $G \square K_2$ tako, da temu digrafu dodamo usmerjene (diagonalne) povezave od $(u,0)$ do $(v,1)$ ter od $(u,1)$ do $(v,0)$ za vsako povezavo $a = (u,v)$ iz grafa G.

Primer omenjenega produkta je predstavljen na sliki 13.



Slika 13. Primer krepkega produkta $G \boxtimes K_2$.

Naj bo $G = (V,E)$ in naj bo $e = (u,v) \in E$, $u,v \in V$ ter $\varepsilon \in \{0,1\}$. *Diagonalni e-loki* v grafu $G\boxtimes K_2$ so torej tiste usmerjene povezave, ki povezujejo (u,ε) in $(v,1-\varepsilon)$. Definicijo enake G-projekcije za take grafe malce spremenimo in rečemo, da imata dva gozdova s koreni na $H = G \boxtimes K_2$ enako *G-projekcijo*, če vsebujeta enako število vodoravnih e-lokov ter enako število diagonalnih e-lokov za $e \in E$ in imata navpične loke, ki nimajo nujno enakih spinov, pri istih vozliščih v G. Paziti je potrebno, da teh diagonalnih lokov ne zamešamo z diagonalnimi loki v smislu telesne diagonale, ki so nastopali v grafih D_n.

Izrek 3.4 in posledica 3.5 veljata tudi za krepke produkte digrafov. Dokaz posledice 3.5 se ne spremeni dosti, potrebno je upoštevati le še uteži diagonalnih lokov, ki jih označimo z w'_e, kjer je e diagonalni lok.

Tudi dokaz izreka 3.4 poteka na enak način kot v tem diplomskem delu. Diagonalne loke pravzaprav obravnavamo na podoben način kot vodoravne loke. Bolj natančno je ta dokaz opisan v članku [2].

Krepki produkt digrafov je za dokaz formule za število vpetih dreves na Q_n nepotreben. Je le dodatna zanimivost, ki jo dokazi prinesejo s seboj.

Literatura

[1] M. Aigner in G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 4th ed., Springer, Berlin, 2010.

[2] O. Bernardi, *On the spanning trees of the hypercube and other products of graphs*, Electr. J. Comb. **19** (2012), članek 51, 16 strani; dostopno tudi na `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00714314`.

[3] S. F. Florkowski, *Spectral graph theory of the hypercube*, magistrsko delo, Naval Postgraduate School, 2008, [ogled 30.11.2013], dostopno na `http://www.dtic.mil/docs/citations/ADA493796`.

[4] D. Jungnickel, *Graphs, networks and algorithms*, Algorithms and Computation in Mathematics **5**, Springer, Berlin, 1999.

[5] L. Lu, *Math 778S Spectral Graph Theory Handout #3: Eigenvalues of Adjacency Matrix*, [ogled 4.9.2014], dostopno na `http://people.math.sc.edu/lu/teaching/2009spring_778S/adjeig.pdf`.

[6] S. Quader, *Kirchhoff's Matrix Tree Theorem for Counting Spanning Trees – A Proof for Beginners*, [ogled 3. 9. 2014], dostopno na `http://saadquader.wordpress.com/2013/03/25/kirchhoffs-matrix-tree-theorem-for-counting-spanning-trees-proof/`.

[7] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[8] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma **63**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1997.

[9] *Kirchhoff's theorem*, Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 28.5.2012], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff's_theorem`.

[10] *Laplacian matrix*, Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 18.9.2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Laplacian_matrix`.