

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Maruša Mohar  
**Cikloidne krivulje**

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: doc. dr. Marjetka Krajnc

Ljubljana, 2014

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Predstavitev cikloidnih krivulj	4
2.1. Definicija cikloidnih krivulj	4
2.2. Opis ravninskih cikloidnih krivulj	6
3. Kubične Bézierove krivulje	8
3.1. Definicija kubičnih Bézierovih krivulj	8
3.2. Osnovne lastnosti kubičnih Bézierovih krivulj	10
4. C-Bézierove krivulje	12
4.1. Definicija C-Bézierovih krivulj	12
4.2. Osnovne lastnosti C-Bézierovih krivulj	17
5. Uporaba C-Bézierovih krivulj	19
5.1. Opis osnovnih geometrijskih oblik	20
5.2. Geometrijsko oblikovanje in posplošitve C-Bézierovih krivulj	24
Literatura	25

## Cikloidne krivulje

### POVZETEK

V delu predstavimo cikloidne krivulje in motivacijo za njihovo uporabo. Po zgledu Bézierove reprezentacije parametričnih kubičnih krivulj definiramo C-Bézierove krivulje, ki predstavljajo geometrijsko predstavljen zapis dela cikloidne krivulje. Obravnavamo osnovne lastnosti C-Bézierovih krivulj, ki so podlaga za uporabo na področju računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja. Ogledamo si, kako lahko z njimi predstavimo osnovne geometrijske oblike, kot so premica, krožni in eliptični lok ter trohoida. Na koncu opišemo nekaj načinov prostega oblikovanja z vpeljano družino krivulj in navedemo možne posplošitve.

## Cycloidal curves

### ABSTRACT

In this work, we introduce cycloidal curves and motivation for their use. Following the representation of parametric cubic curves in a Bézier form, we define the C-Bézier curves which allow us to express parts of a cycloidal curve in a geometrically intuitive way. The main properties of C-Bézier curves which form the basis for their use in computer aided geometric design are presented, and some basic geometric objects, such as a straight line, a circular and elliptical arc and a trochoid are described with these curves. We conclude with some aspects of freeform modelling with C-Bézier curves and a description of their generalizations.

**Math. Subj. Class. (2010):** 65D17

**Ključne besede:** cikloidna krivulja, Bézierova krivulja, C-Bézierova krivulja, modeliranje

**Keywords:** cycloidal curve, Bézier curve, C-Bézier curve, modelling

## 1. UVOD

V delu bomo obravnavali lastnosti in uporabo cikloidnih krivulj. Tema v večji meri spada na področje računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja, ki predstavlja nekakšen presek diferencialne geometrije in numerične matematike.

Cikloidne krivulje so parametrične krivulje, ki jih lahko razumemo kot posplošitev bolj znanih parametričnih kubičnih krivulj. Kubične krivulje so preproste, a izjemno uporabne na področjih praktične matematike. Predstavljajo osnovo za večino orodij, ki se uporabljajo v geometrijskem in industrijskem oblikovanju, znanstvenem raziskovanju in modeliranju ter filmski industriji in industriji računalniških iger. Ključnega pomena za to je Bézierova reprezentacija, ki zagotavlja geometrijsko jasno in numerično stabilno predstavitev kubične krivulje.

Po drugi strani pa kubične krivulje včasih ne nudijo oblikovne svobode, ki bi si jo želeli. Tako se moramo na primer pri risanju že tako osnovnih oblik, kot je krožni lok, zateči k aproksimaciji. Priljubljena rešitev te specifične težave je posplošitev Bézierove reprezentacije polinomskih krivulj v racionalni model. Ta ponuja dodatne oblikovne parametre, ki jih imenujemo uteži in s katerimi je eksaktna predstavitev krožnega loka mogoča. A racionalni model poleg prednosti prinaša tudi večjo računsko obremenitev, včasih pa tudi numerično nestabilnost.

Družino parametričnih kubičnih krivulj zlahka preoblikujemo tako, da vsebuje tudi krožnice in elipse. Če bazni funkciji  $t^2$  in  $t^3$  zamenjamo s  $\cos(t)$  in  $\sin(t)$ , dobimo tako imenovane cikloidne krivulje. Vprašanje, ki se pri tem pojavi, pa je, ali lahko tudi cikloidne krivulje predstavimo na način, ki omogoča preprosto geometrijsko predstavo. Izkaže se, da lahko, in prav temu bomo v delu namenili največ pozornosti.

V drugem razdelku bomo cikloidne krivulje formalno definirali in pokazali, da lahko vsako kubično krivuljo razumemo kot limito zaporedja cikloidnih krivulj. V sklopu drugega razdelka bomo podrobneje opisali tudi oblike ravninskih cikloidnih krivulj. V tretjem razdelku se bomo seznanili z osnovnimi lastnostmi Bézierove reprezentacije kubičnih krivulj, ki jo bomo v četrtem razdelku posplošili na cikloidne krivulje. Cikloidne krivulje, predstavljene na ta način, bomo imenovali C-Bézierove krivulje. V petem razdelku bomo raziskali še njihovo uporabno vrednost. Pokazali bomo, kako lahko z njimi opišemo linearno parametrizacijo daljice in natančno upodobimo krožni in eliptični lok ter del trohoide. Pogledali si bomo še načine prostega oblikovanja s C-Bézierovimi krivuljami in dodali nekaj možnih posplošitev.

## 2. PREDSTAVITEV CIKLOIDNIH KRIVULJ

V tem razdelku bomo spoznali cikloidne krivulje in njihove osnovne lastnosti. Razložili bomo njihovo zvezo s kubičnimi krivuljami in opisali značilne oblike ravninskih cikloidnih krivulj. Pri izpeljavah se bomo opirali na ugotovitve v člankih [6] in [5].

**2.1. Definicija cikloidnih krivulj.** Preden začnemo z obravnavo cikloidnih krivulj, osvežimo osnovne pojme afine geometrije. Pri definicijah se oprimo na [2].

**Definicija 2.1.** Afin prostor nad realnim vektorskim prostorom  $\mathbb{V}$  je množica  $\mathbb{A}$  skupaj z operacijo seštevanja  $+$  :  $\mathbb{A} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A}$ , za katero velja

- (A)  $\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}$  za vsak  $\mathbf{p} \in \mathbb{A}$  in ničelni vektor  $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ ,
- (B)  $(\mathbf{p} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = \mathbf{p} + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$  za vsak  $\mathbf{p} \in \mathbb{A}$  in vsaka  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ ,
- (C) za vsaka  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{A}$  obstaja enolično določen  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ , tako da velja  $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \mathbf{q}$ .

Elementom afinega prostora  $\mathbb{A}$  pravimo točke, elementi vektorskega prostora  $\mathbb{V}$  pa so vektorji. S pomočjo točke (c) definicije 2.1 navadno vpeljemo še operacijo odštevanja  $- : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ , ki točkama  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{A}$  priredi enolično določen vektor  $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ , da velja  $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \mathbf{q}$ . Ta operacija poudarja eno bistvenih razlik med pojmom točke in vektorja. Razlika točk  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{A}$  je enolično določen vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ , medtem ko za  $\mathbf{v}$  obstaja neskončno parov točk, katerih razlika je enaka  $\mathbf{v}$ . Za poljuben vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$  je na primer  $(\mathbf{q} + \mathbf{u}) - (\mathbf{p} + \mathbf{u}) = \mathbf{v}$ .

Pomemben pojem pri delu z afinimi prostori je tako imenovana afina ali tudi baricentrična kombinacija točk.

**Definicija 2.2.** Afina kombinacija točk  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{A}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , je vsaka točka  $\mathbf{p}$  oblike

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{p}_i,$$

kjer za realna števila  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , velja  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ .

Definicija 2.2 je na prvi pogled zavajajoča, saj navidezno vključuje operaciji seštevanja točk in množenja točke s skalarjem, ki ju sploh nismo definirali. A v resnici lahko točko  $\mathbf{p}$  iz definicije 2.2 zapišemo kot

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0),$$

torej kot vsoto točke in vektorja. Afini kombinaciji soroden, a strožji pojem je konveksna kombinacija točk.

**Definicija 2.3.** Konveksna kombinacija točk  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{A}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , je vsaka afina kombinacija  $\sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{p}_i$ , za katero velja, da so  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , nenegativna realna števila.

Množico vseh konveksnih kombinacij danega nabora točk imenujemo konveksna ovojnica teh točk. Konveksna kombinacija je s stališča geometrijskega oblikovanja zanimivejši in bolj uporaben pojem kot afina kombinacija. Vendarle se za trenutek še ustavimo pri slednji.

S pomočjo afine kombinacije točk definiramo razred preslikav med afinima prostoroma.

**Definicija 2.4.** Preslikava  $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  med afinima prostoroma  $\mathbb{A}$  in  $\tilde{\mathbb{A}}$  je afina transformacija, če za poljubno afino kombinacijo  $\sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{p}_i$  točk  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{A}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , velja

$$\Phi \left( \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \Phi(\mathbf{p}_i).$$

V nadaljevanju pojem afinega prostora skrečimo na primer  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Hkrati privzemimo tudi, da je  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ . Zlahka se prepričamo, da operacija seštevanja po komponentah ustreza pogojem v definiciji 2.1. Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  si predstavljamo kot element vektorskega prostora, točko  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  pa kot  $n$ -terico koordinat, ki določa položaj točke v prostoru. S to poenostavitvijo afino transformacijo razumemo kot preslikavo  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , ki jo lahko zapišemo s predpisom  $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ , pri čemer  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  predstavlja linearno preslikavo,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  pa je vektor.

Ker je vektorski prostor  $\mathbb{R}^n$  opremljen z evklidsko normo, ki določa dolžino  $\|\mathbf{v}\|$  vektorja  $\mathbf{v}$ , lahko na afinem prostoru  $\mathbb{R}^n$  vpeljemo pojem razdalje med točkama.

**Definicija 2.5.** Evklidska razdalja  $|pq|$  med točkama  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{q}$  iz  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je enaka evklidski normi vektorja  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ , to je  $|pq| := \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$ .

V nadaljevanju bomo afin prostor povezovali s funkcijskimi prostori. Prvi zgled tega je kubična krivulja  $\mathbf{b}$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ki je podana s parametrizacijo

$$(1) \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{p} + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 t^2 + \mathbf{v}_3 t^3, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n.$$

Prek nabora polinomskih funkcij  $t \mapsto 1$ ,  $t \mapsto t$ ,  $t \mapsto t^2$ ,  $t \mapsto t^3$  smo z realnim parametrom  $t$  opisali povezano podmnožico afinega prostora. Že v uvodu smo izpostavili, da nekaterih pomembnih oblik s tako preprostimi krivuljami ni moč opisati, zato je čas, da njihov predpis posplošimo.

**Definicija 2.6.** Cikloidna krivulja  $\mathbf{c}$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je krivulja, podana s parametrizacijo

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 \cos(t) + \mathbf{v}_3 \sin(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer je  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  točka,  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pa so vektorji.

Naslednja trditev pove, da so cikloidne krivulje v tesnem sorodstvu s kubičnimi.

**Trditev 2.7.** Vsaka kubična krivulja je limita nekega zaporedja reparametriziranih cikloidnih krivulj.

*Dokaz.* Naj bo  $\mathbf{b}$  kubična krivulja v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ki je podana s parametrizacijo (1). Za  $k \in \mathbb{N}$  definirajmo

$$\alpha_k = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)} \quad \text{in} \quad \beta_k = \frac{1}{\frac{1}{k} - \sin\left(\frac{1}{k}\right)}$$

ter cikloidno krivuljo  $\mathbf{c}_k$  s parametrizacijo

$$\mathbf{c}_k(t) = \mathbf{p} + \alpha_k \mathbf{v}_2 + (k\mathbf{v}_1 + \beta_k \mathbf{v}_3)t - \alpha_k \mathbf{v}_2 \cos(t) - \beta_k \mathbf{v}_3 \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z razvojem v Taylorjevo vrsto se hitro prepričamo, da za vsak  $t \in \mathbb{R}$  velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \left(1 - \cos\left(\frac{t}{k}\right)\right) = t^2 \quad \text{in} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k \left(\frac{t}{k} - \sin\left(\frac{t}{k}\right)\right) = t^3.$$

Od tod sledi, da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{c}_k\left(\frac{t}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mathbf{p} + \mathbf{v}_1 t + \alpha_k \mathbf{v}_2 \left(1 - \cos\left(\frac{t}{k}\right)\right) + \beta_k \mathbf{v}_3 \left(\frac{t}{k} - \sin\left(\frac{t}{k}\right)\right)\right) = \mathbf{b}(t)$$

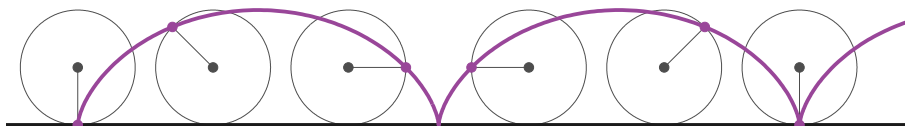
za vsak  $t \in \mathbb{R}$ . □

**2.2. Opis ravninskih cikloidnih krivulj.** Razmislek o obliki ravninskih cikloidnih krivulj začnimo pri tistih, ki predstavljajo osnovne geometrijske objekte.

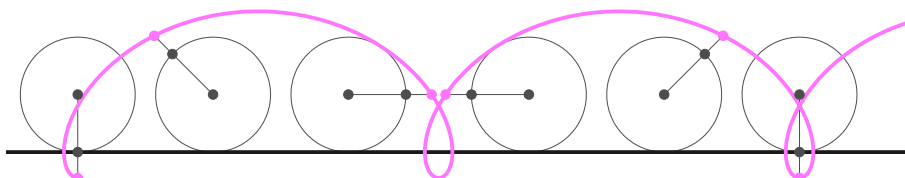
**Trditev 2.8.** Naj bo  $\mathbf{c}$  cikloidna krivulja, definirana v 2.6.

- (a) Če so  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  vsi enaki  $\mathbf{0}$ , je krivulja  $\mathbf{c}$  kar točka.
- (b) Če so  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  linearno odvisni in je vsaj eden različen od  $\mathbf{0}$ , je krivulja  $\mathbf{c}$  premica.
- (c) Če je  $\mathbf{v}_1$  enak  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_2$  in  $\mathbf{v}_3$  pa sta linearno neodvisna, je krivulja  $\mathbf{c}$  elipsa.

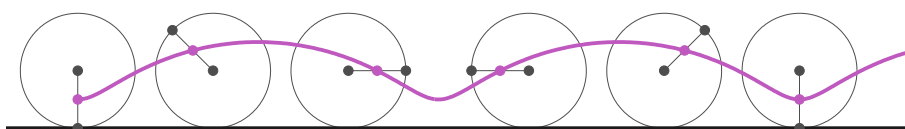
*Dokaz.* Trditev očitno sledi iz definicije 2.6. □



SLIKA 1. Cikloida.



SLIKA 2. Razširjena cikloida.



SLIKA 3. Skrčena cikloida.

Poimenovanje cikloidnih krivulj namiguje, da je tudi cikloida poseben primerek te družine. Cikloida (slika 1) je krivulja, ki jo nariše točka na obodu obroča s polmerom  $a$ , ko tega zakotalimo po ravni črti. Sorodna tipa krivulj dobimo, če točko postavimo izven oziroma znotraj oboda kotalečega se obroča na razdaljo  $b$  od središča (sliki 2 in 3).

Opisane krivulje združimo v formalno definicijo.

**Definicija 2.9.** Trohoida  $\mathbf{c}$  v prostoru  $\mathbb{R}^2$  je krivulja, podana s parametrizacijo

$$\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} at - b \sin(t) \\ a - b \cos(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer sta  $a$  in  $b$  pozitivni realni števili. Če je  $a = b$ ,  $a < b$  oziroma  $a > b$ , krivuljo  $\mathbf{c}$  imenujemo cikloida, razširjena cikloida oziroma skrčena cikloida.

Iz definicije 2.9 je razvidno, da je družina trohoid vsebovana v družini cikloidnih krivulj. Kot je jasno iz trditve 2.8, je vsebovanost stroga. Vendarle pa lahko večino cikloidnih krivulj opišemo s pomočjo trohoid.

Naj bo  $\mathbf{c}$  cikloidna krivulja, definirana v 2.6. Vpeljimo oznake

$$d_1 = \det([\mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]), \quad d_2 = \det([\mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_1]), \quad d_3 = \det([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]).$$

Nadalje naj bo  $b = |d_1|(d_2^2 + d_3^2)^{-\frac{1}{2}}$  ter  $\omega$  tak, da je  $\tan(\omega) = \frac{d_2}{d_3}$  in  $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , če je  $d_1 d_3 \geq 0$ , oziroma  $\omega \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , če je  $d_1 d_3 < 0$ .

**Trditev 2.10.** Naj bo  $\mathbf{c}$  cikloidna krivulja, definirana v 2.6. Če je  $\mathbf{v}_1$  različen od  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_2$  in  $\mathbf{v}_3$  pa sta linearno neodvisna, je krivulja  $\mathbf{c}$  afina slika trohoide.

*Dokaz.* Naj bo  $\mathbf{v}_i = (a_i, b_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Najprej opazimo, da je

$$\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_3 & a_3 \end{bmatrix} (\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} d_3 t - d_1 \sin(t) \\ d_2 t - d_1 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Z nekaj računanja nato izpeljemo

$$\frac{1}{d_2^2 + d_3^2} \begin{bmatrix} d_3 & d_2 \\ -d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 t - d_1 \sin(t) \\ d_2 t - d_1 \cos(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + \omega - b \sin(t + \omega) \\ 1 - b \cos(t + \omega) \end{bmatrix},$$

od koder trditev sledi.  $\square$

S trditvama 2.8 in 2.10 smo opisali skoraj vse cikloidne krivulje. Preostale zajema naslednja trditev.

**Trditev 2.11.** *Naj bo  $\mathbf{c}$  cikloidna krivulja, definirana v 2.6. Če sta  $\mathbf{v}_1$  in  $\mathbf{v}_2$  linearno neodvisna ter  $\mathbf{v}_2$  in  $\mathbf{v}_3$  linearno odvisna, je krivulja  $\mathbf{c}$  afina slika sinusne krivulje.*

*Dokaz.* Pišimo  $\mathbf{v}_i = (a_i, b_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Opazimo, da je

$$\begin{bmatrix} b_3 & -a_3 \\ b_1 \sin(\omega) & -a_1 \sin(\omega) \end{bmatrix} (\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -d_2 t \\ -d_3 \sin(\omega) \cos(t) + d_2 \sin(\omega) \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Nadalje izpeljemo, da je

$$-\frac{1}{d_2} \begin{bmatrix} -d_2 t \\ -d_3 \sin(\omega) \cos(t) + d_2 \sin(\omega) \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + \omega \\ \cos(t + \omega) \end{bmatrix},$$

kar dokazuje trditev.  $\square$

### 3. KUBIČNE BÉZIEROVE KRIVULJE

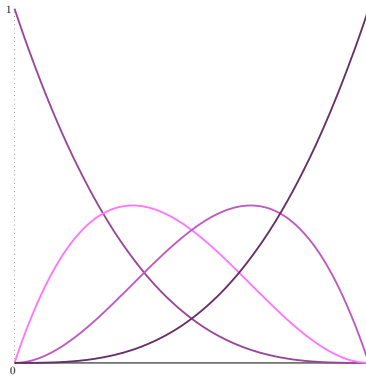
Razdelek bomo namenili predstavitvi Bézierove reprezentacije kubične krivulje. Osnovo zanjo predstavljajo kubični Bernsteinovi bazni polinomi. Ogleдали si bomo njihove najpomembnejše lastnosti, ki so podlaga za geometrijsko predstavljivost kubične krivulje. Na koncu razdelka bomo opisali še učinkovit algoritem za izračun vrednosti krivulje v Bézierovi obliki. Tekom razdelka se bomo opirali na [3] in [1], ki obširneje zajemata teorijo Bernstein-Bézierovih metod.

**3.1. Definicija kubičnih Bézierovih krivulj.** Preden predstavimo kubične Bézierove krivulje, si oglejmo naslednje funkcije.

**Definicija 3.1.** Funkcije  $B_i^3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , podane s predpisom

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i},$$

imenujemo kubični Bernsteinovi bazni polinomi.



SLIKA 4. Kubični Bernsteinovi bazni polinomi.



Povzemimo nekaj lastnosti kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov, ki jih sicer lahko razberemo iz slike 4.

**Trditev 3.2.** Za vsak  $t \in [0, 1]$  velja

$$B_0^3(t) = B_3^3(1-t) \quad \text{in} \quad B_1^3(t) = B_2^3(1-t).$$

*Dokaz.* Po definiciji 3.1 je

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_3^3(t) = t^3 \quad \text{in} \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t),$$

iz česar trditev jasno sledi.  $\square$

Kubični Bernsteinovi bazni polinomi tvorijo particijo enote, kar opisuje sledeča trditev.

**Trditev 3.3.** Za vsak  $t \in [0, 1]$  velja

$$\sum_{i=0}^3 B_i^3(t) = 1 \quad \text{in} \quad B_i^3(t) \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

*Dokaz.* Po definiciji kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov in binomskem izreku velja

$$\sum_{i=0}^3 B_i^3(t) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} = (t + (1-t))^3 = 1$$

za vsak  $t \in [0, 1]$ . Nenegativnost kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov na  $[0, 1]$  je očitna.  $\square$

Naslednja trditev pove, da lahko vsako kubično krivuljo na enoličen način izrazimo s pomočjo kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov.

**Trditev 3.4.** Množica funkcij  $B_i^3, i = 0, 1, 2, 3$ , tvori bazo prostora kubičnih polinomov

$$\mathbb{P}_3 = \{b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; b(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3\}.$$

*Dokaz.* Ker funkcije  $t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3$  tvorijo bazo  $\mathbb{P}_3$ , je dovolj preveriti, da so enolično izrazljive z  $B_i^3, i = 0, 1, 2, 3$ . Opazimo, da je

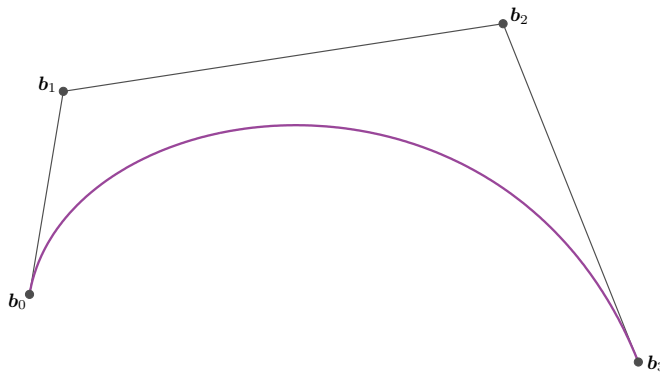
$$\begin{bmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

za vsak  $t \in [0, 1]$ . Prehodna matrika je obrnljiva, zato trditev sledi.  $\square$

**Definicija 3.5.** Kubična Bézierova krivulja  $\mathbf{b}$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je krivulja, podana s parametrizacijo

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t), \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

kjer so  $B_i^3$  kubični Bernsteinovi bazni polinomi, definirani v 3.1,  $\mathbf{b}_i$  pa imenujemo kontrolne točke.



SLIKA 5. Primer ravninske kubične Bézierove krivulje.

**3.2. Osnovne lastnosti kubičnih Bézierovih krivulj.** Prvo pomembno lastnost kubičnih Bézierovih krivulj dobimo z upoštevanjem trditve 3.3. Opazimo namreč, da lahko točko  $\mathbf{b}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , na izbrani Bézierovi krivulji  $\mathbf{b}$  razumemo kot konveksno kombinacijo kontrolnih točk. Drugače povedano, kubična Bézierova krivulja leži v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk. Torej smo z vpeljavo Bézierovega modela pridobili geometrijsko predstavo o krivulji, ki je prej nismo imeli.

Oglejmo si še druge prednosti zapisa kubične krivulje s pomočjo kontrolnih točk. Po trditvi 3.2 za izbrane kontrolne točke  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , za vsak  $t \in [0, 1]$  velja

$$\sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_{3-i} B_i^3(1-t).$$

To pomeni, da sta Bézierovi krivulji, ki sta določeni s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  in  $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0$ , enaki, razlikujeta se zgolj v smeri parametrizacije. Tej lastnosti pravimo simetričnost kubičnih Bézierovih krivulj.

Če zaporedne kontrolne točke kubične Bézierove krivulje  $\mathbf{b}$  povežemo z daljicami, dobimo tako imenovani kontrolni poligon, ki dobro opisuje obliko Bézierove krivulje. To v določeni meri potrjujeta že dejstvi, da je  $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}_0$  in  $\mathbf{b}(1) = \mathbf{b}_3$ , o čemer se zlahka prepričamo z upoštevanjem definicij 3.1 in 3.5. Zvezo med Bézierovo krivuljo in njenim kontrolnim poligonom pa še poglobita vrednosti odvodov  $\mathbf{b}$  v 0 in v 1. Za poljuben  $t \in [0, 1]$  velja

$$\mathbf{b}'(t) = 3((\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)(1-t)^2 + 2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)t(1-t) + (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)t^2).$$

Torej je  $\mathbf{b}'(0) = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  in  $\mathbf{b}'(1) = 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)$ , kar pomeni, da tangentni vektor parametrizacije krivulje  $\mathbf{b}$  pri  $t = 0$  kaže v smeri usmerjene daljice od  $\mathbf{b}_0$  do  $\mathbf{b}_1$ , tangentni vektor pri  $t = 1$  pa v smeri usmerjene daljice od  $\mathbf{b}_2$  do  $\mathbf{b}_3$ .

Iz trditve 3.3 sledi še ena zanimiva lastnost kubičnih Bézierovih krivulj. Naj bo  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  afina transformacija. Po definiciji 2.4 za kubično Bézierovo krivuljo  $\mathbf{b}$  velja

$$\Phi(\mathbf{b}(t)) = \sum_{i=0}^3 \Phi(\mathbf{b}_i) B_i^3(t)$$

za vsak  $t \in [0, 1]$ . Torej je afina transformacija kubične Bézierove krivulje, ki je določena s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , kubična Bézierova krivulja, določena s kontrolnimi točkami, ki so afine transformacije točk  $\mathbf{b}_i$ . Ta ugotovitev

ima praktično vrednost. Če želimo položaj narisane kubične Bézierove krivulje spremeniti z afino transformacijo, ni potrebno transformirati vseh njenih točk. Namesto tega lahko afino transformiramo le kontrolne točke in nato narišemo novo krivuljo. To je računsko učinkoviteje, ker imamo na voljo dober algoritem za izračun vrednosti Bézierove krivulje.

**Algoritem 3.6** (de Casteljauev algoritem). Naj bo  $\mathbf{b}$  kubična Bézierova krivulja, definirana v 3.5, in  $t \in [0, 1]$ . Izračunaj

$$\mathbf{b}_i^k(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{k-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{k-1}(t), \quad k = 1, 2, 3, \quad i = 0, 1, \dots, 3-k,$$

pri čemer je  $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Rezultat algoritma je točka  $\mathbf{b}_0^3(t)$ .

**Trditev 3.7.** Naj bo  $\mathbf{b}$  kubična Bézierova krivulja, definirana v 3.5, in  $t \in [0, 1]$ . Rezultat algoritma 3.6 je vrednost krivulje  $\mathbf{b}$  pri parametru  $t$ .

*Dokaz.* Algoritem 3.6 lahko zapišemo kot zaporedje matričnih operacij. Po korakih dobimo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^1(t) \\ \mathbf{b}_1^1(t) \\ \mathbf{b}_2^1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^2(t) \\ \mathbf{b}_1^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^1(t) \\ \mathbf{b}_1^1(t) \\ \mathbf{b}_2^1(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_0^3(t) = [1-t \quad t] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^2(t) \\ \mathbf{b}_1^2(t) \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$\mathbf{b}_0^3(t) = [1-t \quad t] \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}.$$

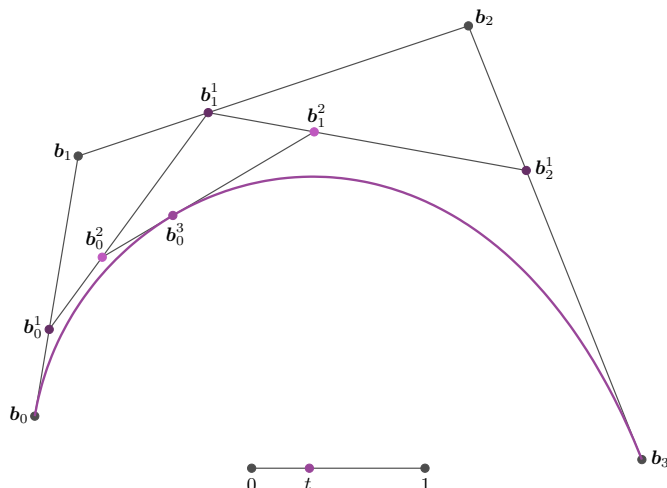
Lahko je preveriti, da je produkt matrik enak

$$[B_0^3(t) \quad B_1^3(t) \quad B_2^3(t) \quad B_3^3(t)],$$

kar dokazuje, da je  $\mathbf{b}_0^3(t) = \mathbf{b}(t)$  točka na Bézierovi krivulji  $\mathbf{b}$  pri parametru  $t$ .  $\square$

De Casteljauev algoritem je učinkovit in numerično stabilen, saj tekom postopka računamo le konveksne kombinacije točk. To se lepo odraža v geometrijski predstavitvi algoritma.

**Primer 3.8.** Slika 6 prikazuje primer izračuna vrednosti Bézierove krivulje  $\mathbf{b}$  z de Casteljauevim algoritmom. Izberimo  $t \in [0, 1]$ . V prvem koraku daljice kontrolnega poligona krivulje  $\mathbf{b}$  razdelimo v razmerju  $t : (1-t)$ . Dobimo točke  $\mathbf{b}_0^1$ ,  $\mathbf{b}_1^1$  in  $\mathbf{b}_2^1$ , ki določajo daljici  $\mathbf{b}_0^1\mathbf{b}_1^1$  in  $\mathbf{b}_1^1\mathbf{b}_2^1$ . V naslednjem koraku ti dve daljici ponovno razdelimo v razmerju  $t : (1-t)$ . Dobljeni točki  $\mathbf{b}_0^2$  in  $\mathbf{b}_1^2$  povežemo v daljico  $\mathbf{b}_0^2\mathbf{b}_1^2$ , ki jo v zadnjem koraku spet razdelimo v razmerju  $t : (1-t)$ , da dobimo točko  $\mathbf{b}_0^3$ . Iz slike je razvidno, da je to točka na Bézierovi krivulji, kot smo pokazali v trditvi 3.7.



SLIKA 6. Grafični prikaz de Casteljaujevega algoritma.

#### 4. C-BÉZIEROVE KRIVULJE

Po zgledu zapisa kubičnih krivulj bomo v obliki, podobni Bézierovi, zapisali še cikloidne krivulje. Najprej bomo uvedli C-Bézierove bazne funkcije, ki predstavljajo analogijo kubičnim Bernsteinovim baznim polinomom. Nato bomo na podoben način kot kubične Bézierove krivulje vpeljali C-Bézierove krivulje in si ogledali njihove osnovne lastnosti. Na koncu bomo utemeljili še posplošitev de Casteljaujevega algoritma, ki omogoča izračun vrednosti C-Bézierove krivulje. Pri izpeljavah se bomo opirali na članka [6] in [4].

**4.1. Definicija C-Bézierovih krivulj.** Naj bo  $\alpha \in (0, \pi]$ . Definirajmo konstanto  $M_\alpha$  kot

$$M_\alpha := \begin{cases} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha - 2K_\alpha}, & \alpha \in (0, \pi) \\ 1, & \alpha = \pi \end{cases},$$

kjer je  $K_\alpha := K(\alpha)$  in je funkcija  $K : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  dana s predpisom

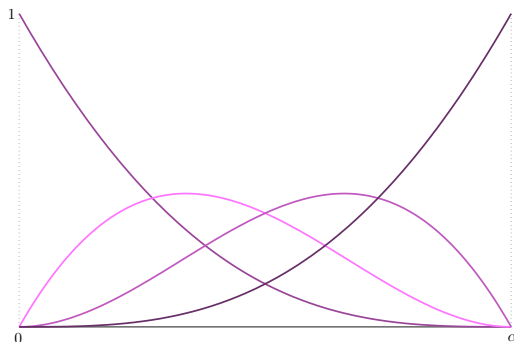
$$K(t) = \begin{cases} \frac{t - \sin(t)}{1 - \cos(t)}, & t \in (0, \alpha] \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Analogijo kubičnim Bernsteinovim baznim polinomom predstavljajo naslednje funkcije.

**Definicija 4.1.** Funkcije  $C_{\alpha,i} : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , definirane s predpisi

$$\begin{aligned} C_{\alpha,0}(t) &= \frac{\alpha - t - \sin(\alpha - t)}{\alpha - \sin(\alpha)}, \\ C_{\alpha,1}(t) &= M_\alpha \left( \frac{1 - \cos(\alpha - t)}{1 - \cos(\alpha)} - \frac{\alpha - t - \sin(\alpha - t)}{\alpha - \sin(\alpha)} \right), \\ C_{\alpha,2}(t) &= M_\alpha \left( \frac{1 - \cos(t)}{1 - \cos(\alpha)} - \frac{t - \sin(t)}{\alpha - \sin(\alpha)} \right), \\ C_{\alpha,3}(t) &= \frac{t - \sin(t)}{\alpha - \sin(\alpha)}, \end{aligned}$$

imenujemo C-Bézierove bazne funkcije.



SLIKA 7. C-Bézierove bazne funkcije.

C-Bézierove bazne funkcije imajo podobne lastnosti kot kubični Bernsteinovi bazni polinomi.

**Trditev 4.2.** Za vsak  $t \in [0, \alpha]$  velja

$$C_{\alpha,0}(t) = C_{\alpha,3}(\alpha - t) \quad \text{in} \quad C_{\alpha,1}(t) = C_{\alpha,2}(\alpha - t).$$

*Dokaz.* Trditev sledi iz definicije 4.1.  $\square$

**Trditev 4.3.** Za vrednosti C-Bézierovih baznih funkcij  $C_{\alpha,i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , v robnih točkah velja  $C_{\alpha,i}(0) = \delta_{i,0}$  in  $C_{\alpha,i}(\alpha) = \delta_{i,3}$ , za vrednosti odvodov v robnih točkah pa

$$C'_{\alpha,i}(0) = -\frac{\delta_{i,0}}{K_\alpha} + \frac{\delta_{i,1}}{K_\alpha}, \quad C'_{\alpha,i}(\alpha) = -\frac{\delta_{i,2}}{K_\alpha} + \frac{\delta_{i,3}}{K_\alpha},$$

pri čemer  $\delta_{i,j}$  označuje Kroneckerjev delta.

*Dokaz.* Vrednosti C-Bézierovih baznih funkcij pri parametrih  $t = 0$  in  $t = \alpha$  so razvidne iz definicije 4.1. Pomagamo si lahko s trditvijo 4.2. Vrednosti odvodov dobimo s pomočjo osnovnih pravil za odvajanje.  $\square$

Ena najpomembnejših lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov je, da tvorijo particijo enote. Enako velja tudi za C-Bézierove bazne funkcije.

**Trditev 4.4.** Za vsak  $t \in [0, \alpha]$  velja

$$\sum_{i=0}^3 C_{\alpha,i}(t) = 1 \quad \text{in} \quad C_{\alpha,i}(t) \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

*Dokaz.* Najprej dokažimo, da se C-Bézierove bazne funkcije seštejejo v 1. Iz definicije 4.1 je razvidno, da so C-Bézierove bazne funkcije linearne kombinacije funkcij  $1$ ,  $t$ ,  $\cos(t)$  in  $\sin(t)$ . Torej je tudi vsota C-Bézierovih baznih funkcij izrazljiva na ta način. To pomeni, da obstajajo realna števila  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , da je

$$C_{\alpha,0}(t) + C_{\alpha,1}(t) + C_{\alpha,2}(t) + C_{\alpha,3}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \cos(t) + \alpha_3 \sin(t).$$

Ta izraz izvrednotimo v  $0$  in v  $\alpha$ , ga odvajamo in tudi odvod izvrednotimo v  $0$  in v  $\alpha$ . S pomočjo trditve 4.3 dobimo neizrojen sistem štirih enačb

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_0 + \alpha_2, \\ 1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha + \alpha_2 \cos(\alpha) + \alpha_3 \sin(\alpha), \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_3, \\ 0 &= \alpha_1 - \alpha_2 \sin(\alpha) + \alpha_3 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

za štiri neznanke  $\alpha_i$ . Rešitev tega sistema je enaka  $\alpha_0 = 1$  in  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . S tem smo dokazali, da je vsota C-Bézierovih baznih funkcij res enaka 1.

Preverimo še, da so C-Bézierove bazne funkcije nenegativne. Pri dokazovanju bomo upoštevali, da za vsak  $t \in [0, \pi]$  veljata neenakosti

$$(2) \quad t - \sin(t) \geq 0,$$

$$(3) \quad \sin(t) - t \cos(t) \geq 0.$$

Zlahka ju izpeljemo z upoštevanjem dejstev, da sta  $t - \sin(t)$  in  $\sin(t) - t \cos(t)$  naraščajoči funkciji na intervalu  $[0, \pi]$ .

Iz (2) takoj sledi  $C_{\alpha,3} \geq 0$  in zaradi simetrije tudi  $C_{\alpha,0} \geq 0$ . Podobno je zaradi simetrije  $C_{\alpha,2}$  in  $C_{\alpha,1}$  dovolj dokazati, da je  $C_{\alpha,2} \geq 0$ . Opazimo, da je

$$C_{\alpha,2}(t) = \frac{1 - \cos(t)}{\alpha - \sin(\alpha)} M_\alpha (K(\alpha) - K(t)).$$

Očitno je  $C_{\alpha,2}(0) = 0$ . Ker za vsak  $t \in (0, \alpha]$ ,  $0 < \alpha \leq \pi$ , velja  $1 - \cos(t) > 0$  in je  $\alpha - \sin(\alpha) > 0$ , je za dokaz nenegativnosti  $C_{\alpha,2}$  dovolj preveriti, da je  $M_\alpha \geq 0$  in da je  $K$  naraščajoča funkcija na intervalu  $(0, \alpha]$ .

Oglejmo si vrednost konstante  $M_\alpha$ . V primeru  $\alpha = \pi$  je  $M_\alpha = 1$ , v nasprotnem pa je

$$M_\alpha = \frac{\sin \alpha (1 - \cos(\alpha))}{2 \sin(\alpha) - \alpha - \alpha \cos(\alpha)} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\alpha} (1 - \cos(\alpha))}{2 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} - 1 - \cos(\alpha)}.$$

Razvidno je, da je števec nenegativen. Z upoštevanjem trigonometrijskih formul

$$\sin(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{in} \quad \cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

imenovalec preoblikujemo v

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} - 1 - \cos(\alpha) &= 2 \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}} - (1 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left( \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}} - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

in s pomočjo (3) zaključimo, da je pozitiven. Torej je  $M_\alpha \geq 0$ .

Preverimo še, da je za  $t > 0$  funkcija  $K$  naraščajoča. Z odvajanjem dobimo

$$K'(t) = \frac{(1 - \cos(t))^2 - (t - \sin(t)) \sin(t)}{(1 - \cos(t))^2}.$$

Dokazati moramo, da je števec nenegativen. To sledi iz

$$\begin{aligned} (1 - \cos(t))^2 - (t - \sin(t)) \sin(t) &= 2 - 2 \cos(t) - t \sin(t) \\ &= 2 - 2(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)) - 2t \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - 4 \frac{t}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) (\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)) \end{aligned}$$

z uporabo (3). S tem je dokaz zaključen.  $\square$

Še eno zvezo med C-Bézierovimi baznimi funkcijami in kubičnimi Bernsteinovimi baznimi polinomi podaja naslednja trditev.

**Trditev 4.5.** Naj bodo  $C_{\alpha,i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , C-Bézierove bazne funkcije, podane v definiciji 4.1, in  $B_i^3$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , kubični Bernsteinovi bazni polinomi, definirani v 3.1. Za vsak  $t \in [0, 1]$  velja

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha,i}(\alpha t) = B_i^3(t).$$

*Dokaz.* Z razvojem v Taylorjevo vrsto izračunamo limiti

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{1 - \cos(\alpha)} = t^2 \quad \text{in} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha t - \sin(\alpha t)}{\alpha - \sin(\alpha)} = t^3,$$

s trikratno uporabo L'Hospitalovega pravila pa še

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)(1 - \cos(\alpha))}{2 \sin(\alpha) - \alpha - \alpha \cos(\alpha)} = 3.$$

Od tod sledi, da je

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha,3}(\alpha t) = t^3 = B_3^3(t)$$

in

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha,2}(\alpha t) = 3(t^2 - t^3) = B_2^3(t).$$

Po simetriji C-Bézierovih baznih funkcij in kubičnih Bernsteinovih baznih polinomov sledi še

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha,0}(\alpha t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha,3}(\alpha - \alpha t) = B_3^3(1 - t) = B_0^3(t)$$

in podobno

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha,1}(\alpha t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\alpha,2}(\alpha - \alpha t) = B_2^3(1 - t) = B_1^3(t).$$

□

Naslednja lema pove, da lahko funkcije  $t$ ,  $\cos(t)$  in  $\sin(t)$  izrazimo s pomočjo C-Bézierovih baznih funkcij.

**Lema 4.6.** Za vsak  $t \in [0, \alpha]$  velja

$$(4) \quad t = K_\alpha C_{\alpha,1}(t) + (\alpha - K_\alpha) C_{\alpha,2}(t) + \alpha C_{\alpha,3}(t),$$

$$(5) \quad \cos(t) = C_{\alpha,0}(t) + C_{\alpha,1}(t) + \left(1 - \frac{1 - \cos(\alpha)}{M_\alpha}\right) C_{\alpha,2}(t) + \cos(\alpha) C_{\alpha,3}(t),$$

$$(6) \quad \sin(t) = K_\alpha C_{\alpha,1}(t) + (\alpha - K_\alpha) C_{\alpha,2}(t) + \sin(\alpha) C_{\alpha,3}(t).$$

*Dokaz.* Vemo, da je

$$K_\alpha C_{\alpha,1}(t) + (\alpha - K_\alpha) C_{\alpha,2}(t) + \alpha C_{\alpha,3}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \cos(t) + \alpha_3 \sin(t)$$

za neke  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Ta nastavek izvednotimo v 0 in v  $\alpha$ . Nato ga odvajamo in tudi odvod izvednotimo v 0 in v  $\alpha$ . Z uporabo trditve 4.3 dobimo sistem štirih enačb

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_2, \\ \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha + \alpha_2 \cos(\alpha) + \alpha_3 \sin(\alpha), \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_3, \\ 1 &= \alpha_1 - \alpha_2 \sin(\alpha) + \alpha_3 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

za štiri neznane koeficiente  $\alpha_i$ . Rešitev sistema je enaka  $\alpha_1 = 1$  in  $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . To dokazuje (4). Ker je

$$\begin{aligned} (1 - \cos(\alpha)) (M_\alpha^{-1}C_{\alpha,2}(t) + C_{\alpha,3}(t)) &= 1 - \cos(t), \\ (\alpha - \sin(\alpha))C_{\alpha,3}(t) &= t - \sin(t), \end{aligned}$$

lahko enakost (5) izpeljemo z upoštevanjem trditve 4.4, enakost (6) pa sledi iz enakosti (4).  $\square$

**Trditev 4.7.** Naj bo  $\alpha \in (0, \pi]$ . Potem C-Bézierove bazne funkcije  $C_{\alpha,i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , tvorijo bazo prostora

$$\mathbb{C}_\alpha = \{c_\alpha : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}; c_\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \cos(t) + \alpha_3 \sin(t), \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3\}.$$

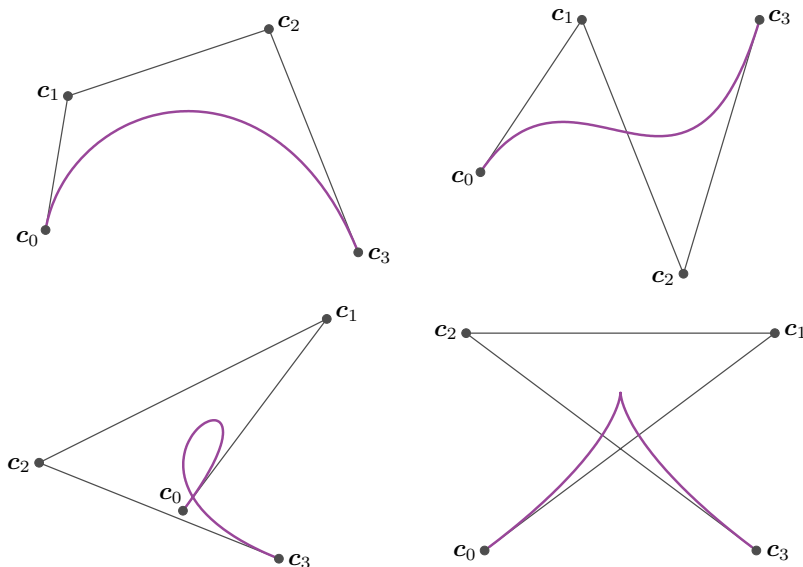
*Dokaz.* Iz definicije 4.1 sledi, da so C-Bézierove bazne funkcije vsebovane v  $\mathbb{C}_\alpha$ . Da je  $\mathbb{C}_\alpha$  vsebovan v linearni ogrinjači C-Bézierovih baznih funkcij, pa je posledica trditve 4.4 in leme 4.6.  $\square$

Ugotovili smo, da imajo C-Bézierove bazne funkcije podobne lastnosti kot kubični Bernsteinovi bazni polinomi. To nas napeljuje k uvedbi tako imenovanih C-Bézierovih krivulj.

**Definicija 4.8.** C-Bézierova krivulja  $c_\alpha$ ,  $\alpha \in (0, \pi]$ , v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je krivulja, podana s parametrizacijo

$$c_\alpha(t) = \sum_{i=0}^3 c_i C_{\alpha,i}(t), \quad t \in [0, \alpha], \quad c_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Točkam  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , iz definicije 4.8 pravimo kontrolne točke C-Bézierove krivulje. Če zaporedne kontrolne točke povežemo z daljicami, dobimo kontrolni poligon C-Bézierove krivulje.



SLIKA 8. Primeri ravninskih C-Bézierovih krivulj.

Zveza med kubičnimi Bernsteinovimi baznimi polinomi in C-Bézierovimi baznimi funkcijami podaja zvezo med kubičnimi Bézierovimi in C-Bézierovimi krivuljami.



**Trditev 4.9.** Za C-Bézierovo krivuljo  $\mathbf{c}_\alpha$ , definirano v 4.8, velja

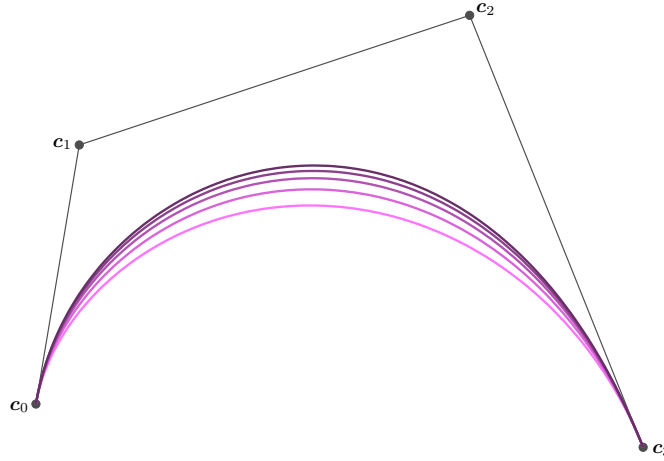
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{c}_\alpha(\alpha t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{c}_i B_i^3(t)$$

za vsak  $t \in [0, 1]$ .

*Dokaz.* Trditev je posledica trditve 4.5. □

Trditev 4.9 pove, da tem manjši je  $\alpha$ , tem bolj se C-Bézierova krivulja prilaga kubični Bézierovi krivulji, ki je določena z istimi kontrolnimi točkami kot C-Bézierova krivulja.

**Primer 4.10.** Na sliki 9 je prikazan primer C-Bézierovih krivulj z istimi kontrolnimi točkami, a različnimi izbirami parametra  $\alpha$ . Od spodaj navzgor si sledijo krivulje za  $\alpha = (1 - \frac{i}{5})\pi$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Zadnja krivulja (narisana z najtemnejšo barvo) je kubična Bézierova krivulja.



SLIKA 9. Limita C-Bézierovih krivulj, ko gre  $\alpha$  proti 0.

**4.2. Osnovne lastnosti C-Bézierovih krivulj.** Ker si kubični Bernsteinovi bazni polinomi in C-Bézierove bazne funkcije delijo podobne lastnosti, so tudi osnovne lastnosti C-Bézierovih krivulj podobne oziroma enake lastnostim kubičnih Bézierovih krivulj.

**Trditev 4.11.** Naj bo  $\mathbf{c}_\alpha$  C-Bézierova krivulja, definirana v 4.8.

- (a) Krivulja  $\mathbf{c}_\alpha$  je vsebovana v konveksni ovojnici kontrolnih točk  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .
- (b) Če je  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  afina transformacija, za vsak  $t \in [0, \alpha]$  velja

$$\Phi(\mathbf{c}_\alpha(t)) = \sum_{i=0}^3 \Phi(\mathbf{c}_i) C_{\alpha,i}(t).$$

- (c) Za vsak  $t \in [0, \alpha]$  je

$$\mathbf{c}_\alpha(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{c}_{3-i} C_{\alpha,i}(\alpha - t).$$

- (d) Za vrednosti na robu definicijskega intervala velja  $\mathbf{c}_\alpha(0) = \mathbf{c}_0$  in  $\mathbf{c}_\alpha(\alpha) = \mathbf{c}_3$  ter  $\mathbf{c}'_\alpha(0) = \frac{1}{K_\alpha}(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0)$  in  $\mathbf{c}'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{K_\alpha}(\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_2)$ .

*Dokaz.* Točki (a) in (b) sledita iz trditve 4.4. Za dokaz točke (c) uporabimo trditev 4.2, za dokaz točke (d) pa trditev 4.3.  $\square$

Iz točke (a) trditve 4.11 sledi, da kontrolni poligon omejuje območje, v katerem leži C-Bézierova krivulja. Po točki (d) se C-Bézierova krivulja začne v prvi in konča v zadnji točki kontrolnega poligona. Poleg tega tangenta krivulje v točki  $\mathbf{c}_0$  leži na nosilki daljice  $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1$ , tangenta krivulje v točki  $\mathbf{c}_3$  pa na nosilki daljice  $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3$ . Kontrolni poligon C-Bézierove krivulje ima torej enake lastnosti kot kontrolni poligon Bézierove krivulje.

Kot učinkovit postopek za izračun vrednosti kubične Bézierove krivulje smo že predstavili de Casteljaujev algoritem. Oglejmo si sedaj še njegovo posplošitev, ki jo uporabimo za izračun vrednosti C-Bézierove krivulje.

Vpeljimo funkcije  $\lambda_{\alpha,i}^{k-1} : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = 0, 1, \dots, 3 - k$ , s predpisi

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha,0}^0(t) &= \frac{K(t)}{K_\alpha}, & \lambda_{\alpha,0}^1(t) &= 1 - \lambda_{\alpha,1}^1(\alpha - t), \\ \lambda_{\alpha,1}^0(t) &= \frac{\frac{t \sin(\alpha) - \alpha \sin(t)}{\sin(\alpha) - \sin(\alpha - t) - \sin(t)} - K_\alpha}{\alpha - 2K_\alpha}, & \lambda_{\alpha,1}^1(t) &= \frac{C_{\alpha,3}(t)}{\lambda_{\alpha,2}^0(t)\lambda_{\alpha,0}^2(t)}, \\ \lambda_{\alpha,2}^0(t) &= 1 - \lambda_{\alpha,0}^0(\alpha - t), & \lambda_{\alpha,0}^2(t) &= \frac{K(t)}{K(t) + K(\alpha - t)}. \end{aligned}$$

To so funkcije, ki podajajo delilna razmerja v algoritmu, ki temelji na isti ideji kot de Casteljaujev.

**Algoritem 4.12** (B-algoritem). Naj bo  $\mathbf{c}_\alpha$  C-Bézierova krivulja, definirana v 4.8, in  $t \in [0, \alpha]$ . Izračunaj

$$\mathbf{c}_i^k(t) = (1 - \lambda_{\alpha,i}^{k-1}(t)) \mathbf{c}_i^{k-1}(t) + \lambda_{\alpha,i}^{k-1}(t) \mathbf{c}_{i+1}^{k-1}(t), \quad k = 1, 2, 3, \quad i = 0, 1, \dots, 3 - k,$$

pri čemer je  $\mathbf{c}_i^0(t) = \mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Rezultat algoritma je točka  $\mathbf{c}_0^3(t)$ .

**Trditev 4.13.** Naj bo  $\mathbf{c}_\alpha$  C-Bézierova krivulja, definirana v 4.8, in  $t \in [0, \alpha]$ . Rezultat algoritma 4.12 je vrednost krivulje  $\mathbf{c}_\alpha$  pri parametru  $t$ .

*Dokaz.* Algoritem 4.12 lahko opišemo kot zaporedje matričnih operacij. V prvem koraku imamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^1(t) \\ \mathbf{c}_1^1(t) \\ \mathbf{c}_2^1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_{\alpha,0}^0(t) & \lambda_{\alpha,0}^0(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_{\alpha,1}^0(t) & \lambda_{\alpha,1}^0(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_{\alpha,2}^0(t) & \lambda_{\alpha,2}^0(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{bmatrix},$$

v drugem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^2(t) \\ \mathbf{c}_1^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_{\alpha,0}^1(t) & \lambda_{\alpha,0}^1(t) & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_{\alpha,1}^1(t) & \lambda_{\alpha,1}^1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^1(t) \\ \mathbf{c}_1^1(t) \\ \mathbf{c}_2^1(t) \end{bmatrix}$$

in v tretjem

$$\mathbf{c}_0^3(t) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_{\alpha,0}^2(t) & \lambda_{\alpha,0}^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^2(t) \\ \mathbf{c}_1^2(t) \end{bmatrix}.$$

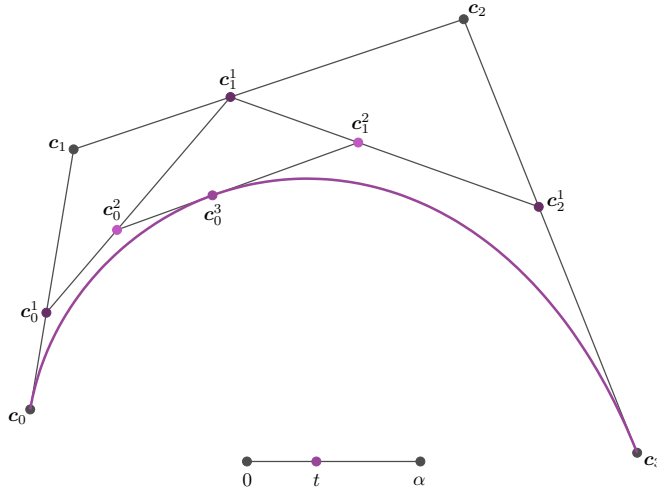
Z uporabo programskega paketa za simbolično računanje je moč preveriti, da je produkt matrik, ki jih dobimo v posameznih korakih, enak

$$\begin{bmatrix} C_{\alpha,0}(t) & C_{\alpha,1}(t) & C_{\alpha,2}(t) & C_{\alpha,3}(t) \end{bmatrix},$$

kar dokazuje, da je  $\mathbf{c}_0^3(t) = \mathbf{c}_\alpha(t)$ . □

Podobno kot de Casteljaujev algoritem je tudi B-algoritem numerično stabilen. Razlog za to se skriva v dejstvu, da je  $0 \leq \lambda_{\alpha,i}^{k-1} \leq 1$  za vsak par indeksov  $k$  in  $i$ , saj to zagotavlja, da se vse vrednosti računajo kot konveksne kombinacije kontrolnih točk. Seveda pa je algoritem zahtevnejši, saj vključuje izračune trigonometrijskih funkcij.

**Primer 4.14.** Na primeru slike 10 za konkretno C-Bézierovo krivuljo vidimo, da je postopek izračuna vrednosti C-Bézierove krivulje z B-algoritmom praktično enak postopku izračuna vrednosti Bézierove krivulje z de Casteljaujevim algoritmom, le da tu daljice med točkami delimo v nekoliko bolj zapletenih in med sabo različnih razmerjih.



SLIKA 10. Grafični prikaz B-algoritma.

B-algoritem nam da še en pomemben rezultat. Prvotno C-Bézierovo krivuljo lahko razdelimo na dva dela. Namreč, točke  $\mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{c}_0^1$ ,  $\mathbf{c}_0^2$  in  $\mathbf{c}_0^3$  predstavljajo kontrolne točke C-Bézierove krivulje, ki je del prvotne C-Bézierove krivulje, na točke  $\mathbf{c}_0^3$ ,  $\mathbf{c}_1^2$ ,  $\mathbf{c}_2^1$  in  $\mathbf{c}_3$  pa lahko gledamo kot na kontrolne točke drugega dela prvotne C-Bézierove krivulje. To opazko izkoristimo, če želimo na primer spremeniti le del prvotne C-Bézierove krivulje, za preostali del pa želimo, da ostane nespremenjen. Temu postopku pravimo delitev ali subdivizija.

## 5. UPORABA C-BÉZIEROVIIH KRIVULJ

Z uvedbo C-Bézierovih krivulj smo cikloidne krivulje predstavili v obliki, ki jo lahko s pridom izkoristimo na področju računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja. Najprej si bomo ogledali, kako lahko s C-Bézierovimi krivuljami upodobimo oblike, ki so motivirale vpeljavo cikloidnih krivulj, nato pa opisali še možnosti prostega oblikovanja s takimi krivuljami. Pri izpeljavah si bomo pomagali z ugotovitvami v [6] in [4].

**5.1. Opis osnovnih geometrijskih oblik.** Sledimo karakterizaciji ravninskih cikloidnih krivulj, ki smo jo predstavili v podrazdelku 2.2. Naj bo  $\mathbf{c}_\alpha$  C-Bézierova krivulja s kontrolnimi točkami  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Krivulja zavzame najpreprostejšo obliko, če za vse kontrolne točke izberemo isto točko  $\mathbf{p}$ . Tedaj namreč po trditvi 4.4 in definiciji 4.8 velja  $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{p}$ . Nadalje denimo, da so kontrolne točke kolinearne. Ker  $\mathbf{c}_\alpha$  leži v konveksni ovojnici kontrolnih točk, C-Bézierova krivulja podaja parametrizacijo daljice, ki jo določajo kontrolne točke na premici.

**Primer 5.1.** Izberimo točki  $\mathbf{c}_0$  in  $\mathbf{c}_3$  v ravnini in vzemimo  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_0$ . C-Bézierovo krivuljo  $\mathbf{c}_\alpha$ , določeno s takimi kontrolnimi točkami, zapišemo kot

$$\mathbf{c}_\alpha(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{c}_0 C_{\alpha,i}(t) + (\mathbf{c}_0 + (\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_0)) C_{\alpha,3}(t).$$

Z upoštevanjem lastnosti particije enote C-Bézierovih baznih funkcij sledi

$$\mathbf{c}_\alpha(t) = \mathbf{c}_0 + (\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_0) C_{\alpha,3}(t),$$

kar je parametrizacija daljice  $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3$  s pomočjo bazne funkcije  $C_{\alpha,3}$ .

Na mestu je vprašanje, kdaj C-Bézierova krivulja določa linearno parametrizacijo daljice. Pogoje za to poda spodnja trditev.

**Trditev 5.2.** Naj bodo  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , kolinearne točke, za katere velja  $|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_i| \leq |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_{i+1}|$ ,  $i = 1, 2$ , in

$$(7) \quad \frac{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1|}{|\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3|} = \frac{|\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3|}{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2|} = \frac{K_\alpha}{\alpha - K_\alpha}.$$

Potem je C-Bézierova krivulja, definirana v 4.8, linearna parametrizacija daljice  $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3$ , to je  $\mathbf{c}_\alpha(t) = \mathbf{c}_0 + \frac{1}{\alpha}(\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_0)t$  za  $t \in [0, \alpha]$ .

*Dokaz.* Naj bo  $\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|}(\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_0)$  enotski smerni vektor premice, na kateri ležijo kontrolne točke. Pišimo

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_0 + |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1|\mathbf{v}, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_0 + |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2|\mathbf{v}, \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_0 + |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|\mathbf{v}.$$

Iz predpostavke (7) izpeljemo, da je

$$\frac{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|}{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1|} = \frac{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1| + |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3|}{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1|} = \frac{\alpha}{K_\alpha} \quad \text{in} \quad \frac{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|}{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2|} = \frac{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2| + |\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3|}{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2|} = \frac{\alpha}{\alpha - K_\alpha}.$$

Od tod sledi

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_0 + \frac{K_\alpha}{\alpha}|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|\mathbf{v} \quad \text{in} \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_0 + \frac{\alpha - K_\alpha}{\alpha}|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|\mathbf{v}.$$

Če zgornje ugotovitve vstavimo v definicijo C-Bézierove krivulje, dobimo

$$\mathbf{c}_\alpha(t) = \mathbf{c}_0 \left( \sum_{i=0}^3 C_{\alpha,i}(t) \right) + \frac{1}{\alpha}|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|\mathbf{v} (K_\alpha C_{\alpha,1}(t) + (\alpha - K_\alpha) C_{\alpha,2}(t) + \alpha C_{\alpha,3}(t)).$$

Iz trditve 4.4 in enakosti (4) leme 4.6 sledi, da je

$$\mathbf{c}_\alpha(t) = \mathbf{c}_0 + \frac{1}{\alpha}|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3|\mathbf{v}t,$$

kar zaključuje dokaz. □

Ob predpostavkah trditve 5.2 si oglejmo razdaljo  $|\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2|$ . Iz (7) sledi

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2| &= \frac{1}{2} (|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2| - |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1| + |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3| - |\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3|) \\ &= \frac{1}{2} \left( |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2| - \frac{K_\alpha}{\alpha - K_\alpha} |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3| + |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3| - \frac{K_\alpha}{\alpha - K_\alpha} |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2| \right) \\ &= \frac{\alpha - 2K_\alpha}{2(\alpha - K_\alpha)} (|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2| + |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3|). \end{aligned}$$

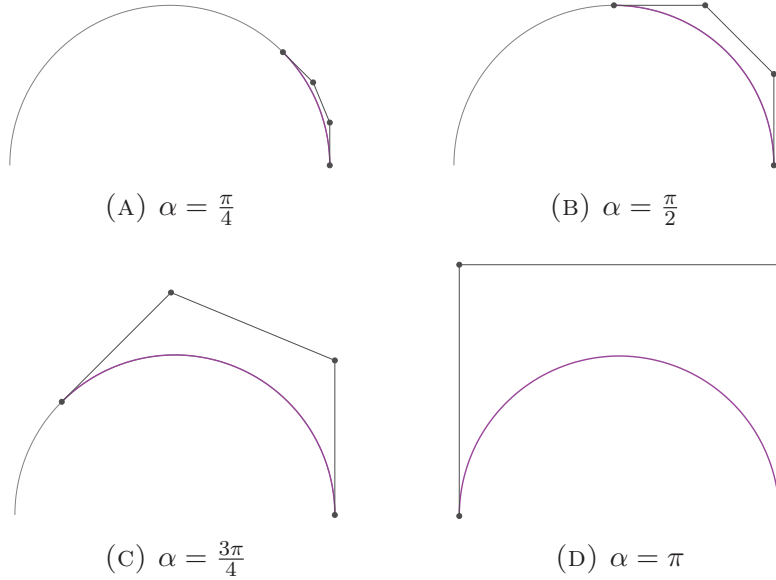
Pri  $\alpha = \pi$  je  $K_\pi = \frac{\pi}{2}$ , zato je  $\pi - 2K_\pi = 0$  in  $\pi - K_\pi = K_\pi$ . Torej v tem primeru kontrolni točki  $\mathbf{c}_1$  in  $\mathbf{c}_2$  C-Bézierove krivulje  $\mathbf{c}_\pi$ , ki podaja linearno parametrizacijo daljice  $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_3$ , sovpadata, kontrolni točki  $\mathbf{c}_0$  in  $\mathbf{c}_3$  pa sta enako oddaljeni od njiju.

Glavna motivacija za obravnavo cikloidnih krivulj v C-Bézierovi obliki izhaja iz želje po eksaktnem opisu krožnega loka. Z uporabo leme 4.6 je določanje kontrolnih točk C-Bézierove krivulje, ki opisuje lok s polmerom 1, preprosta računsko vaja.

**Primer 5.3.** C-Bézierova krivulja  $\mathbf{d}_\alpha$ , podana s kontrolnimi točkami

$$\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ K_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1 - \cos(\alpha)}{M_\alpha} \\ \alpha - K_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix},$$

je krožni lok s središčnim kotom  $\alpha$  in polmerom 1. Elementarni izračuni pokažejo, da zgornje kontrolne točke predstavljajo oglišča enakokrakega trapeza z osnovnim kotom  $\vartheta = \frac{\alpha}{2}$ , osnovnico  $\mathbf{d}_3\mathbf{d}_0$  dolžine  $2\sin(\vartheta)$  ter krakoma  $\mathbf{d}_0\mathbf{d}_1$  in  $\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3$  dolžine  $K_\alpha$ . Torej je razmerje med osnovnico in krakom enako  $\frac{K_\alpha}{2\sin(\vartheta)}$ .



SLIKA 11. C-Bézierove krivulje  $\mathbf{c}_\alpha$ , ki predstavljajo enotske krožne loke z različnimi središčni koti  $\alpha$ .

S pomočjo primera 5.3 pridemo do preprostega kriterija, ki zagotavlja, da C-Bézierova krivulja določa krožni lok.

**Izrek 5.4.** Naj točke  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , določajo enakokraki trapez z osnovnim kotom  $\vartheta$ , osnovnico  $\mathbf{c}_3\mathbf{c}_0$  ter krakoma  $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1$  in  $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3$ , za katerega velja

$$\frac{|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1|}{|\mathbf{c}_3\mathbf{c}_0|} = \frac{K_\alpha}{2 \sin(\vartheta)}, \quad \alpha = 2\vartheta.$$

Potem je C-Bézierova krivulja  $\mathbf{c}_\alpha$ , definirana v 4.8, krožni lok s središčnim kotom  $\alpha$  in polmerom  $\frac{1}{2 \sin(\vartheta)}|\mathbf{c}_3\mathbf{c}_0|$ .

*Dokaz.* Premiki, rotacije, enakomerni raztegi (raztegi z istim faktorjem v obeh koordinatnih smereh) in zrcaljenja ohranjajo kote in razmerja med točkami. Preslikavam, ki so kompozitum takih operacij, pravimo podobnostne transformacije. Po predpostavkah izreka je trapez, določen s točkami  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , podoben trapezu, določenemu s kontrolnimi točkami  $\mathbf{d}_i$  iz primera 5.3. Torej obstaja podobnostna transformacija  $\Phi$ , za katero velja  $\mathbf{c}_i = \Phi(\mathbf{d}_i)$ . Ker je vsaka podobnostna transformacija afina transformacija, je po točki (b) trditve 4.11 C-Bézierova krivulja  $\mathbf{c}_\alpha$  podobnostna transformacija C-Bézierove krivulje  $\mathbf{d}_\alpha$  s preslikavo  $\Phi$ . Ker je  $\mathbf{d}_\alpha$  krožni lok in podobnostne transformacije ohranjajo krožnice, je tudi  $\mathbf{c}_\alpha$  krožni lok. Njegov polmer  $r$  dobimo iz enačbe za dolžino tetive, ki se glasi  $|\mathbf{c}_3\mathbf{c}_0| = 2r \sin(\vartheta)$ .  $\square$

Celo krožnico lahko s pomočjo C-Bézierovih krivulj sestavimo po delih. Narišemo več krožnih lokov, ki se dopolnjujejo in opišejo kot  $2\pi$ . Pri največji možni izbiri  $\alpha$ , to je  $\alpha = \pi$ , C-Bézierova krivulja predstavlja polovico krožnice, njene kontrolne točke pa določajo pravokotnik, katerega pravokotni stranici sta v razmerju  $1 : \frac{\pi}{4}$ .

Eliptične loke dobimo z afinimi transformacijami krožnih lokov. Za zgled transformirajmo krožni lok iz primera 5.3. Prek množenja kontrolnih točk  $\mathbf{d}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , z matriko  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ,  $a, b > 0$ , dobimo kontrolne točke C-Bézierove krivulje, ki določa eliptični lok s središčnim kotom  $\alpha$  ter polosema dolžine  $a$  in  $b$ . Pri izbiri  $\alpha = \pi$  nas podoben razmislek pripelje do spodnjega sklepa.

**Trditev 5.5.** Naj točke  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , določajo pravokotnik s stranicami  $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3$  in  $\mathbf{c}_3\mathbf{c}_0$ . Potem C-Bézierova krivulja  $\mathbf{c}_\pi$ , definirana v 4.8, predstavlja polovico elipse s polosema dolžine  $\frac{1}{2}|\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2| = \frac{1}{2}|\mathbf{c}_3\mathbf{c}_0|$  in  $\frac{2}{\pi}|\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1| = \frac{2}{\pi}|\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3|$ .

*Dokaz.* Naj bo  $u = |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2| = |\mathbf{c}_3\mathbf{c}_0|$  in  $v = |\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1| = |\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3|$ . Koordinatni sistem postavimo tako, da so točke  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , podane kot

$$\mathbf{c}_0 = (\frac{1}{2}u, 0), \quad \mathbf{c}_1 = (\frac{1}{2}u, v), \quad \mathbf{c}_2 = (-\frac{1}{2}u, v), \quad \mathbf{c}_3 = (-\frac{1}{2}u, 0).$$

Oglejmo si pravokotnik z oglišči

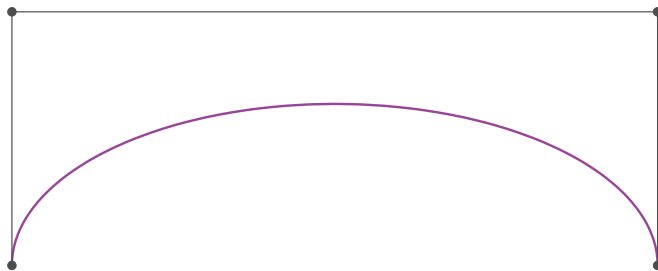
$$\tilde{\mathbf{c}}_0 = (\frac{1}{2}u, 0), \quad \tilde{\mathbf{c}}_1 = (\frac{1}{2}u, \frac{\pi}{4}u), \quad \tilde{\mathbf{c}}_2 = (-\frac{1}{2}u, \frac{\pi}{4}u), \quad \tilde{\mathbf{c}}_3 = (-\frac{1}{2}u, 0).$$

Po izreku 5.4 je C-Bézierova krivulja  $\tilde{\mathbf{c}}_\pi$  s kontrolnimi točkami  $\tilde{\mathbf{c}}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , polovica krožnice s polmerom  $\frac{1}{2}u$ . Opazimo, da za afino transformacijo  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , podano s predpisom

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4v}{\pi u} \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

velja  $\Phi(\tilde{\mathbf{c}}_i) = \mathbf{c}_i$ . Ker je afina transformacija krožnice elipsa, krivulja  $\mathbf{c}_\pi = \Phi(\tilde{\mathbf{c}}_\pi)$  predstavlja polovico elipse s polosema  $\frac{1}{2}u$  in  $\frac{2}{\pi}v$ .  $\square$

S stališča geometrijskega oblikovanja je smotrno poiskati tudi kontrolne točke C-Bézierove krivulje, ki opisuje del trohoide. Spet si pomagamo s trditvijo 4.4 in z lemo 4.6.



SLIKA 12. C-Bézierova krivulja  $\mathbf{c}_\pi$ , ki predstavlja eliptični lok.

**Primer 5.6.** Spomnimo se definicije trohoide 2.9 in njenega predpisa

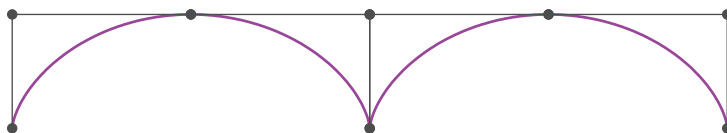
$$\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} at - b \sin(t) \\ a - b \cos(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0.$$

Kontrolne točke C-Bézierove krivulje  $\mathbf{c}_\alpha$ , ki predstavlja del trohoide na definicijskem območju  $[0, \alpha]$ , so dane s

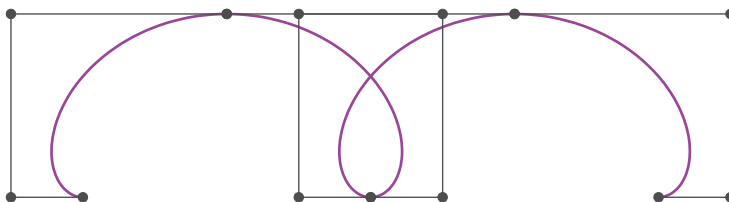
$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= (a - b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{c}_2 &= \begin{bmatrix} (a - b)(\alpha - K_\alpha) \\ a - b(1 - \frac{1 - \cos(\alpha)}{M_\alpha}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_1 &= (a - b) \begin{bmatrix} K_\alpha \\ 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{c}_3 &= \begin{bmatrix} a\alpha - b \sin(\alpha) \\ a - b \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pri izbiri  $a = b$ , ki opisuje del cikloide, se kontrolni točki  $\mathbf{c}_0$  in  $\mathbf{c}_1$  ujemata.

Da bi predstavili trohoido na čim širšem definicijskem območju, izberimo  $\alpha = \pi$  in upoštevajmo, da je del trohoide  $\mathbf{c}$  na intervalu  $[0, a\pi]$  zrcalen delu trohoide na intervalu  $[a\pi, 2a\pi]$ . Z zrcaljenjem kontrolnih točk  $\mathbf{c}_i$  prek premice  $x = a\pi$  in uporabo točke (c) trditve 4.11 tako dobimo C-Bézierovo krivuljo  $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$  s kontrolnimi točkami  $\tilde{\mathbf{c}}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , da velja  $\mathbf{c}_3 = \tilde{\mathbf{c}}_0$ . Ta postopek lahko ponavljamo. Rezultate prikazujejo slike 13, 14 in 15.

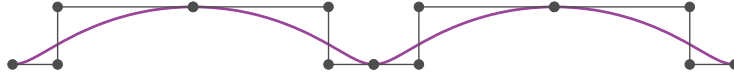


SLIKA 13. Cikloida.



SLIKA 14. Razširjena cikloida.

Če želimo opisati dele trohoide na drugačnih definicijskih intervalih, lahko uporabimo reparametrizacijo. Na izbranem intervalu  $[t_0, t_0 + \alpha]$ ,  $\alpha \in (0, \pi]$ , del trohoide  $\mathbf{c}(t + t_0)$ ,  $t \in [0, \alpha]$ , razvijemo po C-Bézierovih baznih funkcijah. Ta razvoj določa kontrolne točke iskane C-Bézierove krivulje.



SLIKA 15. Skrčena cikloida.

**5.2. Geometrijsko oblikovanje in posplošitve C-Bézierovih krivulj.** Kot smo že poudarili, so C-Bézierove krivulje s svojimi kontrolnimi točkami priročno orodje za prosto oblikovanje, ki se ponaša s praktično vsemi geometrijskimi lastnostmi Bézierovih krivulj. Ob tem nam je na voljo tudi parameter  $\alpha$ , ki ga lahko izkoriščamo v oblikovne namene. Z njegovim manjšanjem dosežemo, da se krivulja pri fiksnih kontrolnih točkah približa kontrolnemu poligonu, z večanjem pa, da se krivulja od kontrolnega poligona oddalji.

Iz trditve 4.9 vemo, da se z manjšanjem parametra  $\alpha$  C-Bézierova krivulja približuje kubični Bézierovi krivulji z istimi kontrolnimi točkami. Ker so računski postopki pri C-Bézierovih krivuljah zaradi trigonometrijskih izrazov zahtevnejši v primerjavi z Bézierovimi, je smiselno pri določeni vrednosti parametra  $\alpha$  postaviti prag, pod katerim C-Bézierove krivulje preprosto nadomestimo z Bézierovimi. Na ta način dodatno oblikovno svobodo C-Bézierovih krivulj izkoriščamo le, kjer je to zares potrebno.

Eden izmed principov, ki se mu pri oblikovanju zahtevnejših oblik ne moremo izogniti, je lepljenje posameznih C-Bézierovih krivulj. Tega smo se že posluževali v prejšnjem podrazdelku, vendar pa zaradi upoštevanja simetrij pogojem gladkosti na stikih nismo posvečali nobene pozornosti. V splošnem obravnavamo dve C-Bézierovi krivulji, prvo,  $\mathbf{c}_\alpha$ , s kontrolnimi točkami  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , in drugo,  $\tilde{\mathbf{c}}_\beta$ , s kontrolnimi točkami  $\tilde{\mathbf{c}}_i$ . Iz točke (d) trditve 4.11 sledi, da mora biti za zveznost zlepljenih krivulj izpolnjen pogoj ujemanja robnih točk, to je  $\mathbf{c}_3 = \tilde{\mathbf{c}}_0$ . Če želimo, da je tangenta na zlepljeno krivuljo v stiku zvezna, temu pogoju dodamo še zahtevo, da so kontrolne točke  $\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{c}_3 = \tilde{\mathbf{c}}_0$  in  $\tilde{\mathbf{c}}_1$  kolinearne. Za zvezno odvedljivost pa mora biti poleg tega izpolnjen še pogoj  $K_\beta |\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3| = K_\alpha |\tilde{\mathbf{c}}_0 \tilde{\mathbf{c}}_1|$ . Vidimo torej, da se vsi pogoji izražajo s kontrolnimi točkami in jih tako lahko upoštevamo že pri konstrukciji kontrolnih poligonov.

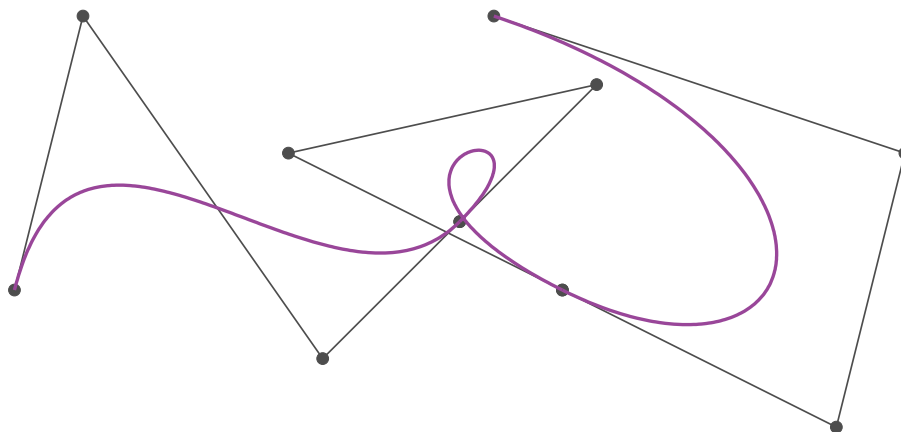
Krivuljo, ki jo dobimo z lepljenjem večjega števila krivulj, imenujemo zlepek. Z večanjem števila krivulj se pogoji na stikih množijo in postajajo vedno težje obvladljivi. Znan pristop pri polinomskih krivuljah je vpeljava tako imenovanih B-zlepkov, ki predstavljajo bazo za vektorski prostor zlepkov. Namesto obravnave zlepkov po kosih tako preidemo na zapis zlepkov v kompaktni obliki, ki olajša tako njihovo obravnavo kot uporabo. Kot opisuje [6], je tak pristop možno posvojiti tudi pri zlepkih C-Bézierovih krivulj.

Na koncu se poraja vprašanje, ali lahko s kombiniranjem polinomskih in trigonometrijskih funkcij definiramo še kakšno s stališča geometrijskega oblikovanja zanimivo družino krivulj. V [4] so poleg prostora, ki določa cikloidne krivulje, obravnavani funkcijski prostori, ki jih razpenjajo funkcije

- (1)  $1, t, t^2, \cos(t), \sin(t)$ ,
- (2)  $1, t, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t)$ ,
- (3)  $1, t, \cos(t), \sin(t), t \cos(t), t \sin(t)$ .

Za vse prostore so definirane tudi bazne funkcije, ki na določenem intervalu tvorijo particijo enote. Krivulje, ki jih s pomočjo tovrstnih prostorov dobimo, se torej da





SLIKA 16. Primer zlepka treh C-Bézierovih krivulj, ki je zvezno odvedljiv.

predstaviti v geometrijskem modelu, podobnem Bézierovim krivuljam. Ker te krivulje vsebujejo družino cikloidnih krivulj, to predstavlja posplošitev predstavljenega C-Bézierovega modela in prinaša še dodatne oblikovne možnosti.

#### LITERATURA

- [1] G. E. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A practical guide*, The Morgan Kaufmann series in computer graphics and geometric modeling, Academic Press, London, 2002.
- [2] J. H. Gallier, *Geometric methods and applications: for computer science and engineering*, Texts in applied mathematics **38**, Springer, New York, 2001.
- [3] G. Jaklič, *Krivulje in ploskve v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju*, verzija 28. 2. 2011, [ogled 25. 6. 2014], dostopno na <http://www.fmf.uni-lj.si/~jaklicg/CAGD.pdf>.
- [4] E. Mainar, J. M. Peña, J. Sánchez-Reyes, *Shape preserving alternatives to the rational Bézier model*, Computer Aided Geometric Design **18** (2001) 37–60.
- [5] Q. Yang, G. Wang, *Inflection points and singularities on C-curves*, Computer Aided Geometric Design **21** (2004) 207–213.
- [6] J. Zhang, *C-curves: An extension of cubic curves*, Computer Aided Geometric Design **13** (1996) 199–217.