

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Aljoša Vodopija
Spleti in homologija Hovanova

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2013

KAZALO

1. Uvod	4
2. Osnovni pojmi	4
2.1. Reidemeistrovi premiki	6
3. Jonesov polinom	7
3.1. Kauffmanov oklepaj	9
3.2. Jonesov polinom	9
4. Stopničasti vektorski prostor	12
5. Homološka algebra	14
5.1. Verižni kompleks in homologija	14
5.2. Verižni kompleks stopničastih vektorskih prostorov	19
5.3. Eulerjeva karakteristika	19
5.4. Poincaréjev polinom	20
6. Homologija Hovanova	21
6.1. Oklepaj Hovanova	21
6.2. Verižni kompleks Hovanova	24
6.3. Invariantnost homologije Hovanova	26
Literatura	35

Spleti in homologija Hovanova

POVZETEK

Pomembno orodje v teoriji vozlov so spletni invariante. Primer take je Jonesov polinom, ki je Laurentov polinom, prirejen spletom v prostoru, in je ena najmočnejših invariant za razlikovanje spleto. Naravna posplošitev Jonesovega polinoma je verižni kompleks Hovanova. Njegova stopničasta Eulerjeva karakteristika je enaka Jonesovemu polinomu. Verižni kompleks Hovanova ni spletna invarianta, je pa to njegova homologija, imenovana homologija Hovanova. Izkaže se, da podaja homologija Hovanova več informacij od Jonesovega polinoma. Obstajajo namreč spleti, ki jih homologija Hovanova loči in za katere je Jonesov polinom enak.

Links and Khovanov homology

ABSTRACT

An important tool in knot theory are link invariants. An example is Jones polynomial, a Laurent polynomial assigned to the links in space, and one of the strongest invariants for distinguishing links. Natural generalisation of the Jones polynomial is Khovanov chain complex. Its graded Euler characteristic is the Jones polynomial. Khovanov chain complex is not a link invariant, but its homology (named Khovanov homology) is. It turns out that Khovanov homology contains more information than Jones polynomial. There exist links that can be distinguished using Khovanov homology, but have the same Jones polynomial.

Math. Subj. Class. (2010): 57T99, 57M25

Ključne besede: Jonesov polinom, homologija Hovanova, Eulerjeva karakteristika

Keywords: Jones polynomial, Khovanov homology, Euler characteristic

1. UVOD

Teorija vozlov se ukvarja s klasifikacijo spletov. Osnovni problem je poiskati metodo, ki bi klasificirala vse splete. Potreba po klasifikaciji spletov se pojavi v drugi polovici 19. stoletja zaradi domneve, da je zgradba atoma vozelo. Od takrat se je teorija vozlov močno razvila in danes poznamo veliko različnih orodij, s katerimi klasificiramo splete. Kljub velikemu prizadevanju matematikov ostaja osnovni problem odprt. Pomembno orodje v teoriji spletov so spletne invariante. Leta 1984 je V. Jones po naključju odkril polinom, ki nosi njegovo ime in je ena najslavnejših in najmočnejših invariant za razlikovanje spletov. Nekaj let kasneje je M. Hovanov na ideji Jonesovega polinoma odkril homološko spletno invarianto imenovano homologija Hovanova. Izkaže se, da je homologija Hovanova naravna posplošitev Jonesovega polinoma, ki vsebuje več informacij od samega polinoma. Pomen obeh invariant sega čez teorijo vozlov. Povezave najdemo v drugih matematičnih vejah (operatorske algebre, teorija kit) in fiziki (statistični modeli, kvantne grupe).

Diplomski seminar je razdeljen v tri večje sklope. V prvem sklopu definiramo in predstavimo osnovne pojme teorije vozlov in Jonesov polinom. Drugi sklop je namenjen predstavitvi osnov homološke algebre in pojmu stopničastih vektorskih prostorov. V zadnjem razdelku predstavimo konstrukcijo homologije Hovanova in navedemo nekaj rezultatov te teorije.

2. OSNOVNI POJMI

V prvem razdelku si bomo ogledali osnovne pojme teorije vozlov. Definicije so v večini usklajene s [6], medtem ko je večina slik iz [1].

Splet si predstavljamo kot skupek tankih elastičnih niti, ki ji lahko zvijamo, raztegujemo in premikamo po prostoru. Ne smemo jih rezati ali lepiti. Dva spleta bomo imeli za *ekvivalentna*, če lahko enega preoblikujemo v drugega z naštetimi potezami.

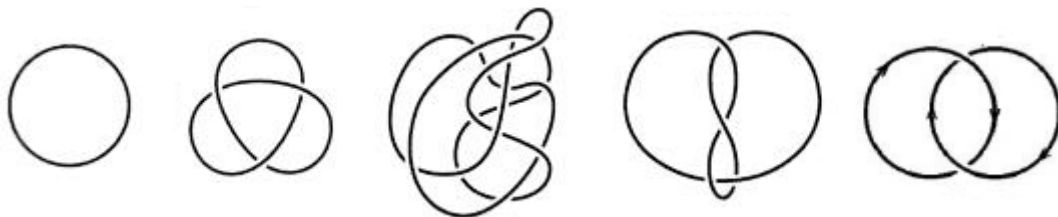
Definicija 2.1. Disjunktna unija enostavnih sklenjenih kosoma linearnih (poligon-skih) krivulj v prostoru je *splet*. Posamezne krivulje so *komponente* spleta. Splet z eno komponento je *vozel*.

Opomba 2.2. Enako teorijo dobimo, če splet definiramo kot disjunktno unijo gladkih enostavnih sklenjenih krivulj. Tako vse definicije in izpeljave postanejo bolj tehnične in temeljijo na dobrem poznavanju diferencialne geometrije, kar pa ni namen diplomskega seminarja. Na vseh slikah bodo spleti narisani kot gladke krivulje. Lahko si predstavljamo, da je splet zgrajen iz številnih in zelo kratkih daljic, tako da je videti gladek.

Splete bomo označevali z L . Ukvarjali se bomo predvsem z *orientiranimi* spleti. Splet orientiramo tako, da vsaki komponenti izberemo smer obhoda. Na slikah bomo orientacijo označevali s puščicami, ki bodo kazale v smeri izbranega obhoda.

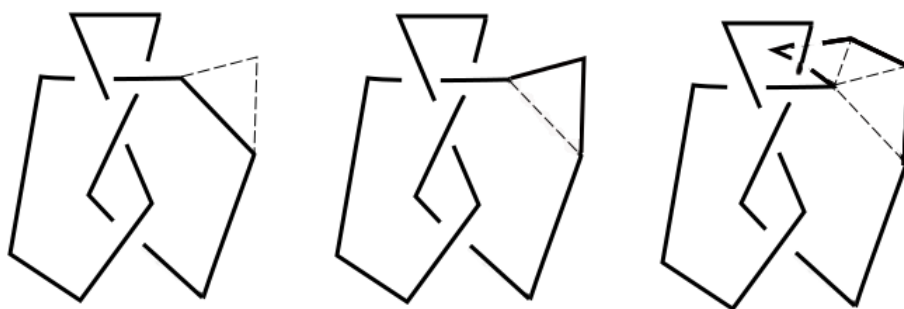
Primer 2.3. Na sliki 1 so primeri spletov (od leve proti desni): nevozel, deteljica, nestandardna predstavitev deteljice, osmica in Hopfov splet. Prvi štirje spleti imajo eno komponento in so zato vsi vozli. Zadnji ima dve komponenti in je primer orientiranega spleta, kjer je posamezna komponenta orientirana v smeri puščic.

Definicija 2.4. Naj bo L splet in ABC tak trikotnik v prostoru, da je $L \cap ABC = AB$. Zamenjavo daljice AB na L z daljicama AC in CB imenujemo *trikotniški pomik spleta*. Obraten proces, kadar je $L \cap ABC = AC \cup CB$ in daljici AC in CB na L zamenjamo z AB , prav tako poimenujemo *trikotniški pomik*.



SLIKA 1. Primeri spleto

Definicija 2.5. Končno zaporedje trikotniških pomikov imenujemo *izotopija spleto*. Dva spleta sta *izotopna* (*ekvivalentna*), če je mogoče enega spremeniti v drugega z izotopijo.



SLIKA 2. Vozel osmica kot poligonska krivulja, trikotniški pomik in primer izotopije

Opomba 2.6. Relacija biti izotopen je očitno ekvivalenčna. Kadar govorimo o konkretnem spletu, mislimo na njegov ekvivalenčni razred.

Primer 2.7. Drugi in tretji splet na sliki 1 sta izotopna spleta. Vsi ostali spleti so paroma neizotopni.

Spleti so v splošnem zapleteni tridimenzionalni objekti in zato slabo obvladljivi. Z njimi lažje operiramo, če jih projiciramo na izbrano ravnino v prostoru. Projekcijo spleta na ravnino poimenujemo *ravninski diagram spleta*. Označujemo jo z D . Vse projekcije niso "dobre". Izogibamo se projekcijam, ki imajo *singularnosti*. Singularnost nastopi, če se dve različni oglišči iz L projicirata v isto točko, če se tri različne točke iz L projicirajo v isto točko in če projekcija daljice iz L vsebuje kako projekcijo oglišča iz L , ki ni njeno krajišče. Projekciji brez singularnosti pravimo *generična projekcija*. V nadaljevanju bomo privzeli, da so vse generične in se s tem ne bomo več ukvarjali.

Opomba 2.8. Primeri spleto na sliki 1 so v bistvu diagrami teh spleto.

Spletni diagram je graf v ravnini, vozlišča imenujemo *križišča* in povezave *loki*. Lok spletnega diagrama je krivulja, ki povezuje dve križišči. Pri križiščih je pomembno, kateri del spleta je zgoraj oziroma spodaj, kar na diagramih primerno označimo. Križišča bomo označevali s števili od 1 do n , kjer je n število križišč, in z $X = \{1, 2, \dots, n\}$ množico križišč.

Vse v zvezi s spleti bomo počeli preko njihovih diagramov. Vsiljuje se nam potreba po karakterizaciji izotopnosti spleto preko diagramov.

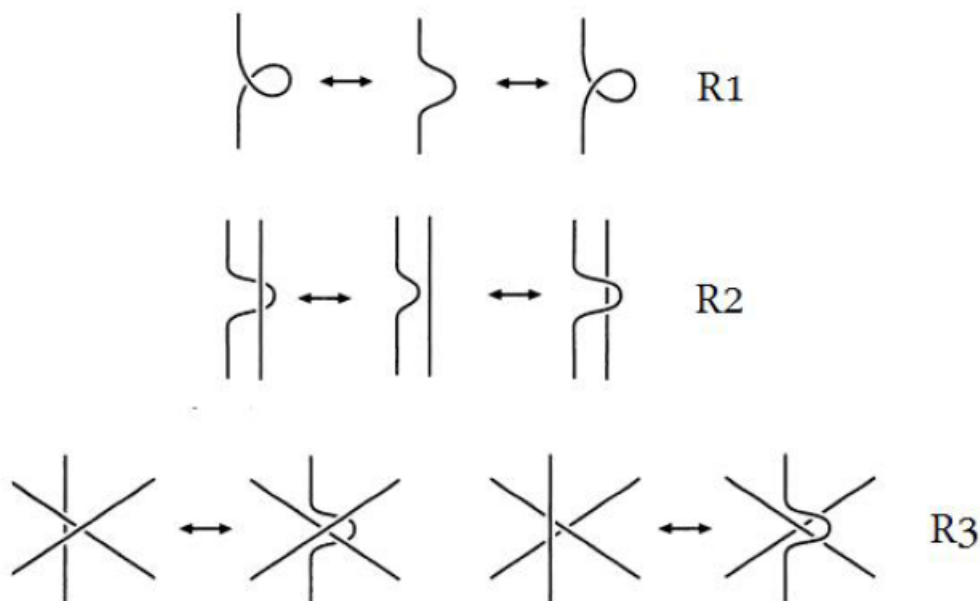
Definicija 2.9. *Ravninska izotopija* je homeomorfna deformacija spletnega diagrama, ki ohranja križišča.



SLIKA 3. Primer ravninske izotopije

Opomba 2.10. V veliko primerih nas ne bo zanimal cel splet, temveč le njegov točno določeni del. V ta namen bomo večkrat uporabili znake, kot so \mathcal{R} , \mathcal{X} in še veliko podobnih, ki označujejo opazovani del. Pri tem si mislimo, da se vsak konec nadaljuje in se nekje sklene v spletno komponento.

2.1. Reidemeistrovi premiki. *Reidemeistrovi premiki* so lokalne spremembe spletnih diagramov, prikazane na sliki 4. Pri tem si predstavljamo, da zamenjamo okolico nekega dela diagrama. Izven te okolice ostane spletni diagram nespremenjen. Premike ločimo na tri tipe in jih označimo z $R1$, $R2$ in $R3$.



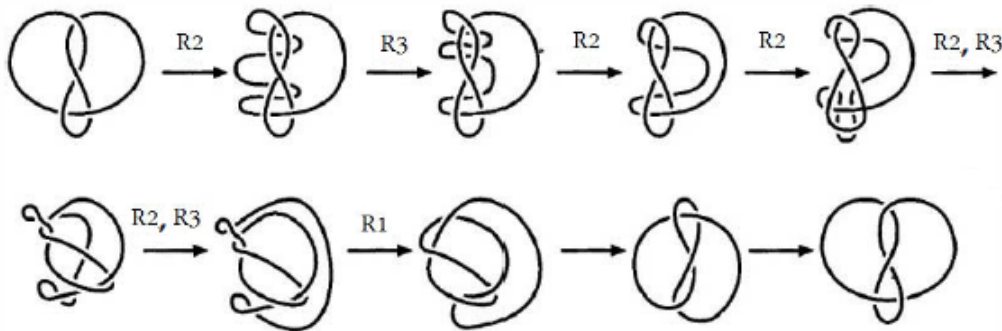
SLIKA 4. Reidemeistrovi premiki

Naslednji izrek karakterizira izotopnost spletov preko diagramov, dokaz najdemo v [5].

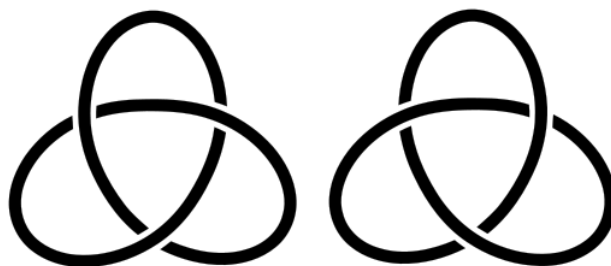
Izrek 2.11 (Reidemeister). *Dva spleta sta izotopna natanko tedaj, kadar obstaja končno zaporedje Reidemeistrovih premikov in ravninskih izotopij, ki diagram enega spremeni v diagram drugega.*

Reidemeistrov izrek prevede problem klasifikacije na iskanje zaporedij Reidemeistrovih premikov in ravninskih izotopij. Iskanje Reidemeistrovih premikov pri spletnih diagramih z velikim številom križišč je zelo zamudno. Še večji problem je, da v primeru, ko spleta nista izotopna, ne obstaja zaporedje premikov, ki bi diagram enega spremenil v diagram drugega. Možnih zaporedij premikov je neskončno in tako nikoli ne ugotovimo, ali sta spleta različna ali še nismo našli pravega zaporedja. Reidemeistrov izrek je kljub temu zelo pomemben. Uporabljamo ga za ugotavljanje invariantnosti preslikav na spletnih diagramih. Kadar definiramo preslikavo na spletnem diagramu in želimo pokazati, da je spletna invarianta, to storimo tako, da pokažemo, da se vrednosti preslikave ne spreminjajo z Reidemeistrovimi premiki.

Primer 2.12. Spletu lahko priredimo *zrcalni splet* tako, da ga prezrcalimo čez neko ravnino. To se na diagramu odrazi v zamenjavi nadvozov s podvozi in obratno. Ali sta tako dobljena spleta izotopna? Obstajajo spleti, ki so izotopni svojemu zrcalnemu spletu, na primer osmica, ki je na sliki 1 tretja z leve. V to se prepričamo tako, da poiščemo zaporedje Reidemeistrovih premikov in ravninskih izotopij, da osmico preoblikujemo v zrcalni vozel, kot prikazano na sliki 5. Obstajajo tudi spleti, ki niso izotopni svojemu zrcalnemu spletu. Tak splet je deteljica, zato ločimo deteljico na *levo* in *desno* deteljico.



SLIKA 5. Zaporedje Reidemeistrovih premikov, ki preoblikujejo osmico v osmici zrcalni splet



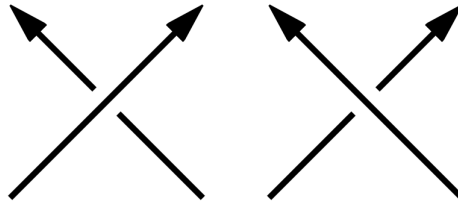
SLIKA 6. Leva deteljica (levo) in desna deteljica (desno)

3. JONESOV POLINOM

Pri razlikovanju spletov si pomagamo z invariantami. To je pravilo, ki spletu priredi nek objekt (število, polinom, itd.), ekvivalentnim spletom pa pripada enak

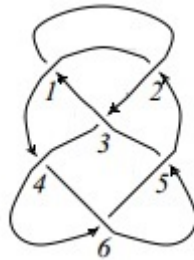
objekt. Jonesov polinom je polinomska invarianta za orientirane splete. Definiramo ga preko spletnega diagrama. V tem razdelku bomo predstavili le pojme in rezultate, ki jih potrebujemo. Več o Jonesovem polinomu najdemo v [4] in [6].

Pri orientiranih spletih ločimo križišča na *pozitivna križišča* in *negativna križišča*. Oglejmo si orientirano križišče. Če nam, ko potujemo v smeri izbrane orientacije po nadvozu, pot po podvozu prihaja z desne, gre za pozitivno križišče, sicer za negativno križišče. Zanimalo nas bo število posameznega tipa križišč. Število pozitivnih križišč označujemo z n_+ , število negativnih križišč z n_- .



SLIKA 7. Pozitivno in negativno križišče

Primer 3.1. Na spodnji sliki je primer orientiranega vozla, ki ima štiri pozitivna in dve negativni križišči.



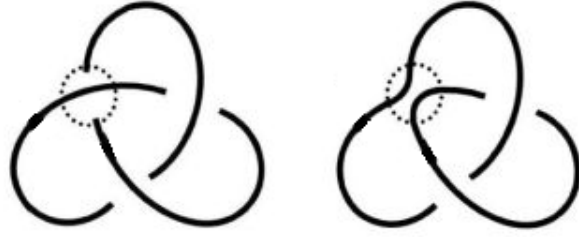
SLIKA 8. Primer orientiranega vozla in tipi križišč

Spletu želimo prirediti polinom. To lahko storimo z odstranjevanjem križišč v spletnem diagramu. Postopek odstranjevanja križišča imenujemo *izgladitev križišča*. To je možno storiti na dva načina, kot prikazuje slika 9. Prvemu načinu, ki je na sliki levo, bomo rekli *0-glajenje* in drugemu, ki je na sliki desno, *1-glajenje*. Pri tem si zamislimo, da odstranimo majhno okolico križišča, tako majhno, da ne vsebuje drugih “pomembnih” delov spleta. Dobimo štiri konce, ki jih lahko na dva načina združimo, ne da bi s tem tvorili križišče.



SLIKA 9. Levo 0-glajenje, desno 1-glajenje

Primer 3.2. Na spodnji sliki sta deteljica (levo) in deteljica (desno), ki smo ji izgladili zgornje levo križišče skladno z 0-glajenjem. Črtkan krogec označuje del spleta, ki smo ga zamenjali. Izven krogca ostane splet nespremenjen.



SLIKA 10. Izgladitev križišča na deteljici

3.1. Kauffmanov oklepaj.

Definicija 3.3. Naj bo D neorientiran diagram spleta. *Kauffmanov oklepaj* je preslikava $\langle \cdot \rangle: D \rightarrow \langle D \rangle$, ki diagramu priredi Laurentov polinom s celimi koeficienti v spremenljivki q ter zadostuje pravilom:

- (1) $\langle \emptyset \rangle = 1$
- (2) $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (q + q^{-1})\langle D \rangle$
- (3) $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle - q\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \rangle$

Kauffmanov oklepaj je preslikava, s katero neorientiranemu spletu z izgladitvijo križišč priredimo polinom. Prvo pravilo pove, da je Kauffmanov oklepaj prazne množice polinom 1. Drugo pravilo pove, kako se Kauffmanov oklepaj spremeni, če spletnemu diagramu D dodamo oziroma odvezamo enostavno sklenjeno krivuljo (nevozel). Tretje, najpomembnejše pravilo pove, kako izgladimo križišča. Na žalost Kauffmanov oklepaj ni spletna invarianta. Da bi dobili spletno invarianto, ga moramo "popraviti". Upoštevati moremo pozitivna in negativna križišča, tako dobimo Jonesov polinom.

Primer 3.4. Izračunajmo Kauffmanov oklepaj za Hopfov splet. Z uporabo Kauffmanovih pravil in ravninskih izotopij dobimo:

$$\begin{aligned}
 \langle \bigcirc \rangle &= \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle - q\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \rangle \\
 &= \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle - q\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \rangle - q(\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle - q\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \rangle) \\
 &= (q^{-1} + q)^2 - q(q^{-1} + q) - q((q^{-1} + q) - q(q^{-1} + q)^2) \\
 &= q^{-2} + 1 + q^2 + q^4
 \end{aligned}$$

3.2. Jonesov polinom.

Definicija 3.5. *Jonesov polinom* $J(L)$ orientiranega spleta L je Laurentov polinom s celimi koeficienti v spremenljivki q , definiran kot

$$J(L) = (-1)^{n-} q^{n+ - 2n-} \langle D \rangle / (q + q^{-1}),$$

kjer je D diagram spleta L .

Opomba 3.6. Večkrat bomo zaradi enostavnosti namesto $J(L)$ uporabljali *nenormaliziran Jonesov polinom* $\hat{J}(L) = (-1)^{n-} q^{n+ - 2n-} \langle D \rangle$.

Primer 3.7. Izračunajmo Jonesov polinom za Hopfov splet, ki je orientiran kot na sliki 1 in ima dve pozitivni križišči. Kauffmanov oklepaj že poznamo, $\langle \bigcirc \rangle = q^{-2} + 1 + q^2 + q^4$. Tedaj je

$$\hat{J}(\bigcirc) = q^2 \langle \bigcirc \rangle = 1 + q^2 + q^4 + q^6 \quad \text{in} \quad J(\bigcirc) = q + q^5.$$

Izrek 3.8. Jonesov polinom je spletna invarianta.

Dokaz. Da bi dokazali invariantnost Jonesovega polinoma, je po Reidemeistrovem izreku dovolj dokazati, da se Jonesov polinom ne spremeni, če na spletnem diagramu izvedemo katerega od Reidemeistrovih pomikov ali če spletni diagram deformiramo z ravninsko izotopijo. Jonesov polinom se očitno ne spremeni, če spletni diagram deformiramo z ravninsko izotopijo, saj slednja ohranja križišča.

Začnimo s premikom R1. Najprej izračunajmo Kauffmanov oklepaj spletnega diagrama \mathcal{R} . Z uporabo Kauffmanovih pravil in ravninskih izotopij dobimo

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{R}' \rangle - q \langle \mathcal{R}'' \rangle = (q^{-1} + q) \langle \mathcal{R}''' \rangle - q \langle \mathcal{R}''' \rangle = q^{-1} \langle \mathcal{R}''' \rangle.$$

Če ima diagram \mathcal{R} n_+ pozitivnih in n_- negativnih križišč, ima diagram \mathcal{R}''' $n_+ - 1$ pozitivnih in n_- negativnih križišč. Zato je

$$\hat{J}(\mathcal{R}) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle \mathcal{R} \rangle = (-1)^{n_-} q^{(n_+ - 1) - 2n_-} \langle \mathcal{R}''' \rangle = \hat{J}(\mathcal{R}''').$$

Oglejmo si premik R2. Podobno kot pri R1 se lahko prepričamo, da je

$$(4) \quad \langle \mathcal{R} \rangle = -q \langle \mathcal{R}' \rangle.$$

Če ima diagram \mathcal{R} n_+ pozitivnih in n_- negativnih križišč, ima diagram \mathcal{R}' $n_+ - 1$ pozitivnih in $n_- - 1$ negativnih križišč. Zato je

$$\hat{J}(\mathcal{R}) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle \mathcal{R} \rangle = (-1)^{(n_- - 1)} q^{(n_+ - 1) - 2(n_- - 1)} \langle \mathcal{R}' \rangle = \hat{J}(\mathcal{R}')$$

Ostane nam premik R3. Če upoštevamo (4), dobimo

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{R}' \rangle$$

in naprej

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{R}' \rangle - q \langle \mathcal{R}'' \rangle = \langle \mathcal{R}''' \rangle - q \langle \mathcal{R}''' \rangle = \langle \mathcal{R}''' \rangle$$

Diagrama imata enako število pozitivnih in negativnih križišč, zato je

$$\hat{J}(\mathcal{R}) = \hat{J}(\mathcal{R}''').$$

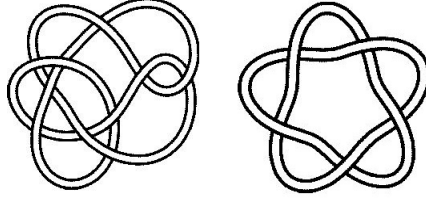
□

Primer 3.9. Zanimiva lastnost, ki jo ima Jonesov polinom, je da ločuje zrcalne splete (seveda ne vseh). Jonesov polinom je prva odkrita invarianta, ki loči deteljici.

$$J(\text{leva deteljica}) = -q^2 - q^6 + q^8 \quad \text{in} \quad J(\text{desna deteljica}) = q^2 + q^6 - q^8$$

Primer 3.10. Oznaka 10_{132} pomeni, da ima vozle 10 križišč in da je 132-ti po vrsti v tabeli na spletni strani [8].

$$J(10_{132}) = J(5_1) = -q^{-14} + q^{-12} - q^{-10} + q^{-8} + q^{-4}$$



SLIKA 11. Levo vozlel 10_{132} , desno 5_1

Jonesov polinom ne loči zgornjih vozlov, ki pa nista izotopna, torej ni popolna invarianta. Slednje je motivacija za iskanje novih, močnejših invariant. Na homologijo Hovanova lahko gledamo kot na posplošitev Jonesovega polinoma, ki je močnejše orodje za razlikovanje spleto. Za konec razdelka si oglejmo še, kako lahko pridemo do Kauffmanovega oklepaja na drugačen način, kar nam bo koristilo v nadaljevanju.

Naj bo D spletni diagram, X množica križišč in $\alpha \in \{0, 1\}^X$ preslikava, ki vsakemu od križišč določi tip glajenja. Taki preslikavi pravimo *stanje spletnega diagrama*. Naj D_α označuje diagram, na katerem smo uporabili α , torej kjer smo vsako križišče izgledali skladno s preslikavo α . Diagram D_α imenujemo *glajenje diagrama D* . Za vsak α je glajenje D_α disjunktna unija enostavnih sklenjenih krivulj (ciklov) v ravnini. Vsakemu stanju α priredimo polinom

$$P_\alpha(D) = q^{r_\alpha} (q + q^{-1})^{k_\alpha},$$

kjer je $r_\alpha := \sum_{i \in X} \alpha(i)$ in k_α število ciklov v glajenju D_α .

Trditev 3.11. *Naj bo D spletni diagram, ki ima vsaj eno križišče. Potem za Kauffmanov oklepaj velja*

$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha} (-1)^{r_\alpha} P_\alpha(D).$$

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na število križišč. Obstajata le dva kombinatorično različna spletna diagrama z enim križiščem, za katera se ni težko prepričati v pravilnost trditve.

Naj trditev velja za vse spletne diagrame, ki imajo $n-1$ križišč. Naj bo D poljuben spletni diagram, ki ima n križišč. Izberimo poljubno križišče v D in ga označimo z $*$. Potem po tretjem pravilu za Kauffmanov oklepaj, če izgledimo križišče $*$, velja

$$\langle D \rangle = \langle \smile \rangle - q \langle \rangle \langle \rangle.$$

Diagrama \smile in \rangle (se razlikujeta od diagrama D v tem, da nimata križišča $*$). Torej imata oba diagrama $n-1$ križišč. Uporabimo indukcijsko predpostavko in dobimo

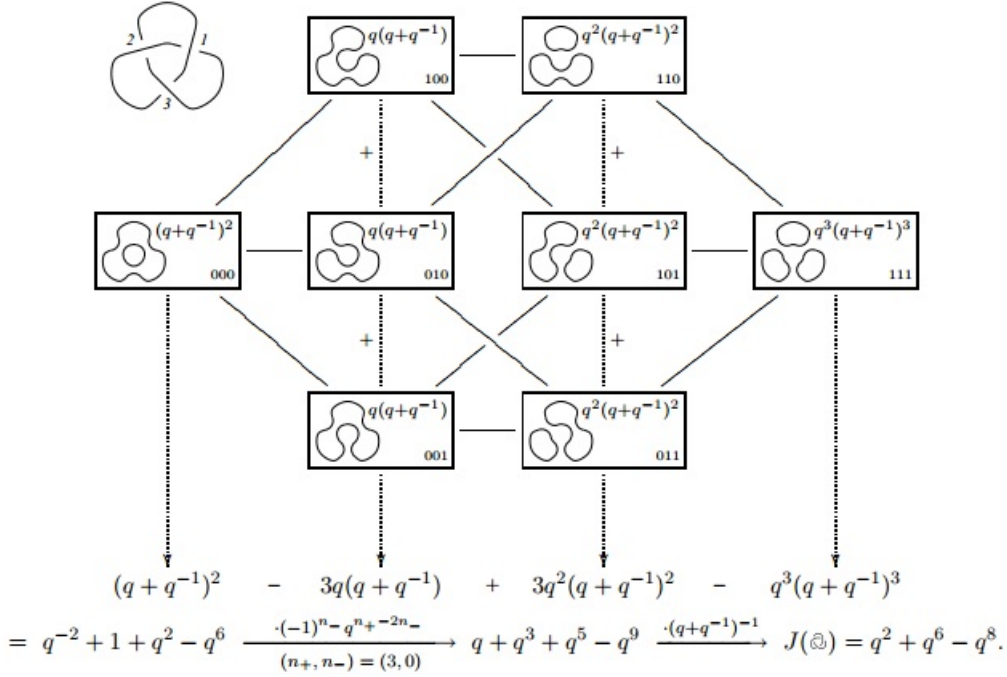
$$\langle \smile \rangle = \sum_{\alpha_1} (-1)^{r_{\alpha_1}} P_{\alpha_1}(\smile) \text{ in } \langle \rangle \langle \rangle = \sum_{\alpha_2} (-1)^{r_{\alpha_2}} P_{\alpha_2}(\rangle \langle).$$

Na stanje α_1 za diagram \smile lahko gledamo kot na stanje diagrama D , kjer smo za križišče $*$ izbrali 0-glajenje. Podobno lahko na stanje α_2 za \rangle (gledamo kot na stanje diagrama D , kjer smo za križišče $*$ izbrali 1-glajenje. Zato je

$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha_1} (-1)^{r_{\alpha_1}} P_{\alpha_1}(\smile) - q \sum_{\alpha_2} (-1)^{r_{\alpha_2}} P_{\alpha_2}(\rangle \langle) = \sum_{\alpha} (-1)^{r_\alpha} P_\alpha(D).$$

□

Primer 3.12. Diagram na sliki 12 prikazuje, kako izračunamo Jonesov polinom za desno deteljico. Pri tem upoštevamo, da ima desna deteljica ne glede na orientacijo tri pozitivna križišča. Vsak pravokotnik na sliki 12 ustreza enemu stanju, ki je določeno z zaporedjem ničel in enic v spodnjem desnem kotu pravokotnika. Število $x \in \{0, 1\}$ na i -tem mestu v zaporedju pomeni, da je $\alpha(i) = x$.



SLIKA 12. Jonesov polinom za deteljico

4. STOPNIČASTI VEKTORSKI PROSTOR

Vektorski prostor opremimo z dodatno strukturo *stopničanja*, tako da ga zapišemo kot direktno vsoto izbranih podprostorov – *stopnic*. Vsaki stopnici pripada stopnja, ki bo v našem primeru celo število.

Definicija 4.1. Vektorski prostor, zapisan v obliki $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, imenujemo *stopničasti vektorski prostor* in V_n njegove *homogene komponente*. Stopničasta dimenzija V je formalna potenčna vrsta v spremenljivki q , definirana kot

$$q\dim V = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^n \dim V_n.$$

Na vsaki stopnji imamo izbran podprostor. Stopničasta dimenzija hrani podatek o dimenziji podprostora, ki se nahaja na tej stopnji. Koeficient pri q^n je dimenzija podprostora na n -ti stopnji. Če poznamo stopničasto dimenzijo vektorskega prostora, poznamo njegovo stopničenje.

Vsak vektorski prostor ima neskončno stopničastih zapisov, ki so seveda vsi izomorfni kot vektorski prostori, razlikuje se njihova organizacija zapisa (stopničenje) in zato tudi stopničasta dimenzija.

Primer 4.2. Naj bodo U, U', U'' enodimenzionalni vektorski prostori in $W = U \oplus U' \oplus U''$. W lahko opremimo s stopničanjem na več načinov. Naj bo $W_1 = U \oplus U'$, $W_4 = U''$ in $W_i = 0$ za $i \neq 1, 4$. Stopničasta dimenzija W je $q\dim W = 2q + q^4$.

$$W = \cdots \oplus 0 \oplus (U \oplus U') \oplus 0 \oplus 0 \oplus U'' \oplus 0 \oplus \cdots$$

Lahko bi izbrali tudi $W_{-1} = U''$, $W_0 = U$, $W_2 = U'$ in $W_i = 0$ za $i \neq -1, 0, 2$. Stopničasta dimenzija je v tem primeru $q\dim W = q^{-1} + 1 + q^2$.

$$W = \cdots \oplus 0 \oplus U'' \oplus U \oplus 0 \oplus U' \oplus 0 \oplus \cdots$$

Definicija 4.3. Naj bo V stopničasti vektorski prostor in l celo število. *Stopničasti premik* $\{l\}$ je operator, ki deluje na stopničasti vektorski prostor V , tako da zviša stopnjo stopnic za $l : V\{l\}_n = V_{n-l}$.

Opomba 4.4. Očitno je $q\dim V\{l\} = q^l q\dim V$.

Primer 4.5. Naj bosta V_- in V_+ enodimenzionalna vektorska prostora nad poljubnim obsegom in $V = V_- \oplus V_+$. Naj bo $V_{-1} = V_-$, $V_1 = V_+$ in $V_i = 0$ za $i \neq -1, 1$. Stopničasta dimenzija V je $q\dim V = q^{-1} + q$.

$$V = \cdots \oplus 0 \oplus V_- \oplus 0 \oplus V_+ \oplus 0 \oplus \cdots$$

Oglejmo si še primer stopničastega premika na tem prostoru. Naj bo $l = 2$. Potem je $V\{2\}_3 = V_1 = V_+$, $V\{2\}_1 = V_{-1} = V_-$ in $q\dim V\{2\} = q + q^3 = q^2 q\dim V$.

Opomba 4.6. Stopničasti vektorski prostor V v zgornjem primeru bomo v nadaljevanju veliko potrebovali. Zaradi krajšega zapisa ga bomo pisali brez trivialnih prostorov: $V = V_- \oplus V_+$. Pri tem naj bosta $v_- \in V_-$ in $v_+ \in V_+$ bazna vektorja.

Potrebovali bomo direktno vsoto in tenzorski produkt nad stopničastimi vektorskimi prostori. Oglejmo si, kako ti dve operaciji uskladimo s stopničanjem.

Naj bodo V_1, V_2, \dots, V_m stopničasti vektorski prostori in $U = \bigoplus_{i=1}^m V_i$. Vektorski prostor U opremimo s stopničanjem, kjer je $U_n = \bigoplus_{i=1}^m (V_i)_n$ in $(V_i)_n$ n -ta homogena komponenta prostora V_i .

Trditev 4.7. Naj bodo V_1, V_2, \dots, V_m stopničasti vektorski prostori. Tedaj je

$$q\dim \bigoplus_{i=1}^m V_i = \sum_{i=1}^m q\dim V_i.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} q\dim \bigoplus_{i=1}^m V_i &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^n \dim \bigoplus_{i=1}^m (V_i)_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^n \left(\sum_{i=1}^m \dim (V_i)_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^n \dim (V_i)_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^m q\dim V_i \end{aligned}$$

□

Poglejmo si tenzorski produkt nad stopničastimi vektorskimi prostori. Naj bodo V_1, V_2, \dots, V_m stopničasti vektorski prostori in $U = \bigotimes_{i=1}^m V_i$. Vektorski prostor U opremimo s stopničenjem, kjer je $U_n = \bigoplus_{k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}: k_1 + \dots + k_m = n} (V_1)_{k_1} \otimes (V_2)_{k_2} \otimes \dots \otimes (V_m)_{k_m}$ in $(V_i)_{k_i}$ k_i -ta homogena komponenta prostora V_i .

Podobno kot prej dokažemo naslednjo trditev.

Trditev 4.8. Naj bodo V_1, V_2, \dots, V_m stopničasti vektorski prostori. Tedaj je

$$q\dim \bigotimes_{i=1}^m V_i = \prod_{i=1}^m q\dim V_i.$$

Primer 4.9. Naj bo $V = V_- \oplus V_+$ kot v zgornjem primeru, $U = V \oplus V \oplus V$ in $W = V^{\otimes 3} = V \otimes V \otimes V$. Zanima nas, kakšno stopničenje imata U in W . Po zgornji definiciji dobimo, da je $U_{-1} = V_- \oplus V_- \oplus V_-$, $U_1 = V_+ \oplus V_+ \oplus V_+$ in $U_i = 0$ za $i \neq -1, 1$. Stopničasta dimenzija U je $q\dim U = 3q^{-1} + 3q = 3 q\dim V$, medtem ko za W dobimo

$$\begin{aligned} W_{-3} &= V_- \otimes V_- \otimes V_- \\ W_{-1} &= (V_- \otimes V_- \otimes V_+) \oplus (V_- \otimes V_+ \otimes V_-) \oplus (V_+ \otimes V_- \otimes V_-) \\ W_1 &= (V_- \otimes V_+ \otimes V_+) \oplus (V_+ \otimes V_- \otimes V_+) \oplus (V_+ \otimes V_+ \otimes V_-) \\ W_3 &= V_+ \otimes V_+ \otimes V_+ \\ W_i &= 0, \text{ za } i \neq -3, -1, 1, 3 \end{aligned}$$

Stopničasta dimenzija W je $q\dim W = q^{-3} + 3q^{-1} + 3q + q^3 = (q^{-1} + q)^3 = (q\dim V)^3$.

Za konec razdelka pogledimo, kako se stopničenje prenaša na kvocientni prostor. Naj bo V stopničasti vektorski prostor in $W \subset V$ podprostor, ki je hkrati tudi stopničast vektorski prostor in za katerega velja, da je $W_n \subset V_n$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Tedaj lahko kvocientni prostor $U = V/W$ opremimo s stopničenjem, kjer je $U_n = V_n/W_n$.

5. HOMOLOŠKA ALGEBRA

V tem razdelku bomo predstavili nekaj osnovnih pojmov in rezultatov homološke algebre, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Večina definicij in rezultatov v tem razdelku je usklajenih s [7].

5.1. Verižni kompleks in homologija.

Definicija 5.1. Verižni kompleks $C = (C^r, d^r)_{r \in \mathbb{Z}}$ je zaporedje končno razsežnih vektorskih prostorov s homomorfizmi

$$\dots \rightarrow C^{r-1} \xrightarrow{d^{r-1}} C^r \xrightarrow{d^r} C^{r+1} \rightarrow \dots,$$

kjer je $C^r \neq 0$ le za končno mnogo r -jev in $d^r d^{r-1} = 0$ za vsak r . Zgornjim homomorfizmom pravimo *robni homomorfizmi*. Za vsak r definiramo r -to *homološko grupo verižnega kompleksa* kot

$$H^r(C) = Z^r(C)/D^r(C),$$

kjer je $Z^r(C) = \ker d^r$ in $D^r(C) = \text{im } d^{r-1}$. Zaporedje homoloških grup $H(C) = (H^r(C))_r$ imenujemo *homologija kompleksa* C .

Naj bo $C = (C^r, d^r)_r$ verižni kompleks. Elemente homoloških grup označujemo z $\{z\} := z + D^r(C)$, kjer je $z \in Z^r(C)$. Vsakemu členu v verižnem kompleksu in homološki grupi pripada stopnja, ki jo imenujemo *homološka stopnja*. Členu C^r in grupi $H^r(C)$ pripada stopnja r .

Opomba 5.2. Običajno za verižne komplekse ne zahtevamo, da je le končno mnogo členov netrivialnih in da so prostori končno razsežni. Tako definicijo izberemo, ker bolj ustreza našim potrebam. Za kompleks C ponavadi $D^r(C) = \text{im } d^{r-1}$ označujemo z $B^r(C)$. V zgornji definiciji robni homomorfizmi višajo homološko stopnjo. Običajno takemu kompleksu pravimo koverižni kompleks, pripadajočo homologijo pa imenujemo kohomologija.

Primer 5.3. Naj bo W vektorski prostor dimenzije n in $W' \subset W$ podprostor dimenzije k . Naj bo $C^1 = W', C^2 = W$ in $C^i = 0$ za $i \neq 1, 2$ ter j inkluzija. Dobimo verižni kompleks C .

$$0 \rightarrow W' \xrightarrow{j} W \rightarrow 0$$

Edina netrivialna homološka grupa v tem primeru je $H^2(C) = \ker 0 / \text{im } j = W/W'$.

Opomba 5.4. Zaradi enostavnejšega zapisa bomo za robni homomorfizem d^r običajno pisali kar d , torej bomo izpustili oznako stopnje.

Med verižnimi kompleksi definiramo preslikavo, ki je v resnici nabor preslikav med členi z enako homološko stopnjo.

Definicija 5.5. Verižna transformacija $\tau : A \rightarrow B$ med verižnima kompleksoma $A = (A^r, d_a^r)$ in $B = (B^r, d_b^r)$ je nabor homomorfizmov $(\tau^r : A^r \rightarrow B^r)_r$, za katere komutira spodnji diagram za vsak r .

$$\begin{array}{ccc} A^r & \xrightarrow{d_a^r} & A^{r+1} \\ \downarrow \tau^r & & \downarrow \tau^{r+1} \\ B^r & \xrightarrow{d_b^r} & B^{r+1} \end{array}$$

Na homologijo lahko gledamo kot na verižni kompleks z ničelnimi preslikavami. Zato je poljuben nabor homomorfizmov med homologijama verižna transformacija, ki jo imenujemo *homomorfizem*.

Opomba 5.6. Podobno kot pri robnih homomorfizmih bomo tudi pri verižnih transformacijah večkrat τ^r označevali kar s τ .

Poljubna verižna transformacija med dvema kompleksoma naravno inducira homomorfizem med homologijama.

Trditev 5.7. Verižna transformacija $\tau : A \rightarrow B$ inducira homomorfizem $\tau^* : H(A) \rightarrow H(B)$ med homologijama, kjer je $(\tau^*)^r \{z\} = \{\tau^r(z)\}$.

Dokaz. Inducirana preslikava τ^* je očitno homomorfizem, če je le dobro definirana. Preveriti moramo, da je $\{\tau^r(z)\} \in H^r(B)$ za vsak $z \in Z^r(A)$ in da je $\{\tau^r(z')\} = \{\tau^r(z'')\}$ za vsaka $z', z'' \in Z^r(A)$, pri čemer velja $\{z'\} = \{z''\}$.

Naj bo $r \in \mathbb{Z}$ in $z \in Z^r(A)$. Tedaj je

$$\tau^{r+1} d_a^r(z) = 0.$$

Zaradi komutativnosti desnega kvadrata v spodnjem diagramu

$$\begin{array}{ccccc}
A^{r-1} & \xrightarrow{d_a^{r-1}} & A^r & \xrightarrow{d_a^r} & A^{r+1} \\
\downarrow \tau^{r-1} & & \downarrow \tau^r & & \downarrow \tau^{r+1} \\
B^{r-1} & \xrightarrow{d_b^{r-1}} & B^r & \xrightarrow{d_b^r} & B^{r+1}
\end{array}$$

je $d_b^r \tau^r(z) = 0$, kar pomeni da je $\tau^r(z) \in Z^r(B)$ in $(\tau^*)^r\{z\} \in H^r(B)$.

Naj bosta sedaj $z', z'' \in Z^r(A)$ taka, da je $\{z'\} = \{z''\}$. Potem je $y = z' - z'' \in D^r(A)$ in zato obstaja tak $x \in C^{r-1}$, da je $d_a^{r-1}(x) = y$. Zaradi komutativnosti levega kvadrata v zgornjem diagramu sledi

$$\tau^r(z') - \tau^r(z'') = \tau^r(y) = d_b^{r-1} \tau^{r-1}(x) \in D^r(B)$$

in

$$\{\tau^r(z')\} = \{\tau^r(z'')\}. \quad \square$$

Za kompleksa A in B pravimo, da sta *izomorfna*, če obstaja verižna transformacija $\tau : A \rightarrow B$, ki je nabor izomorfizmov. V tem primeru pišemo $A \cong B$. Po zgornji trditvi za izomorfna kompleksa velja $H^r(A) \cong H^r(B)$ za vsak r . Večkrat bomo imeli opravka s kompleksi, ki jih do izomorfnosti loči le homološka stopnja. Če torej zamaknemo homološko stopnjo za primerno število, dobimo izomorfne komplekse.

Definicija 5.8. Naj bo s celo število. *Višinski premik* $[s]$ je operator, ki deluje na verižni kompleks $C = (C^r, d^r)_r$ tako, da vsem prostorom in robnim homomorfizmom zviša homološko stopnjo za s : $C[s] = (C^{r-s}, d^{r-s})_r$.

Definiramo lahko *direktno vsoto kompleksov*, *verižni podkompleks* in *kvocientni verižni kompleks*.

Definicija 5.9. Naj bodo $A_1 = (A_1^r, d_1)_r, A_2 = (A_2^r, d_2)_r, \dots, A_n = (A_n^r, d_n)_r$ verižni kompleksi. *Direktna vsota kompleksov* $\bigoplus_{i=1}^n A_i = (\bigoplus_{i=1}^n A_i^r, d)_r$ je zaporedje prostorov in preslikav, kjer je $d(x_1, x_2, \dots, x_n) = (d_1(x_1), \dots, d_n(x_n))$ za $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n A_i^r$.

$$\dots \xrightarrow{d} \bigoplus_{i=1}^n A_i^r \xrightarrow{d} \bigoplus_{i=1}^n A_i^{r+1} \xrightarrow{d} \dots$$

Direktna vsota kompleksov $\bigoplus_{i=1}^n A_i = (\bigoplus_{i=1}^n A_i^r, d)_r$ je očitno kompleks, saj velja $dd = 0$ za vsak r .

Primer 5.10. Naj bo C kompleks kot v primeru 5.3. Potem je

$$C \oplus C : 0 \rightarrow W' \oplus W' \xrightarrow{j} W \oplus W \rightarrow 0$$

Edina netrivialna homološka grupa je $H^2(C \oplus C) = (W \oplus W)/(W' \oplus W') = (W/W') \oplus (W/W')$.

Definicija 5.11. Naj bo C verižni kompleks. *Verižni podkompleks* $\bar{C} \subset C$ je verižni kompleks, kjer je $\bar{C}^r \subset C^r$ vektorski podprostor in $\bar{d}^r := d^r|_{\bar{C}^r}$. *Kvocientni verižni kompleks* $\hat{C} = C/\bar{C}$ je verižni kompleks, kjer je $\hat{C}^r = C^r/\bar{C}^r$ in \hat{d}^r robni homomorfizem, pri čemer velja $\hat{d}^r(x + \bar{C}^r) = d^r(x) + \bar{C}^{r+1}$.

Primer 5.12. Naj bo $\bar{C} \subset C$ podkompleks in i nabor inkluzij $\{i^r : \bar{C}^r \rightarrow C^r\}$. Tedaj je i verižna transformacija med \bar{C} in C . Podobno je q nabor kvocientnih homomorfizmov $\{q^r : C^r \rightarrow C^r/\bar{C}^r\}$ verižna transformacija med C in C/\bar{C} .

Pomembno vlogo v homološki algebi imajo zaporedja prostorov in preslikav $C = (C^r, d^r)_r$, za katere velja $\text{im } d^{r-1} = \ker d^r$ za vsak r . Za taka zaporedja pravimo, da so *eksaktna*. Homologija v nekem smislu meri, koliko “manjka” verižnemu kompleksu $C = (C^r, d^r)_r$ do eksaktnosti. V primeru, da je homologija kompleksa C trivialna (tj. $H^r(C) = 0$ za vsak r), je verižni kompleks eksakten. Za take komplekse pravimo, da so *aciklični*.

Definicija 5.13. *Kratko eksaktno zaporedje verižnih kompleksov*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

je zaporedje verižnih kompleksov in verižnih transformacij, tako da je za vsak r vrstica

$$0 \rightarrow A^r \xrightarrow{\alpha} B^r \xrightarrow{\beta} C^r \rightarrow 0$$

eksaktna.

Primer 5.14. Naj bo vse kot v zgornjem primeru, tedaj je zaporedje

$$0 \rightarrow \bar{C} \xrightarrow{i} C \xrightarrow{q} C/\bar{C} \rightarrow 0$$

kratko eksaktno zaporedje verižnih kompleksov.

Lema 5.15. *Naj bo*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

kratko eksaktno zaporedje verižnih kompleksov. Tedaj obstaja homomorfizem $((\gamma^)^r : H^r(C) \rightarrow H^{r+1}(A))_r$, kjer je $(\gamma^*)^r\{z\} = \{\alpha^{-1}d_b\beta^{-1}(z)\}$ za $z \in Z^r(C)$.*

Dokaz. Za vsak $r \in \mathbb{Z}$ imamo komutativen diagram, kjer so vrstice eksaktne.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^{r-1} & \xrightarrow{\alpha} & B^{r-1} & \xrightarrow{\beta} & C^{r-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_a & & \downarrow d_b & & \downarrow d_c & & \\ 0 & \longrightarrow & A^r & \xrightarrow{\alpha} & B^r & \xrightarrow{\beta} & C^r & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_a & & \downarrow d_b & & \downarrow d_c & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{r+1} & \xrightarrow{\alpha} & B^{r+1} & \xrightarrow{\beta} & C^{r+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Naj bo $z \in Z^r(C)$ in $y \in B^r$ tak, da je $\beta(y) = z$. Potem je

$$\beta d_b(y) = d_c \beta(y) = d_c(z) = 0.$$

Zato obstaja natanko en $x \in A^{r+1}$, da je $\alpha(x) = d_b(y)$. Naprej je

$$\alpha d_a(x) = d_b \alpha(x) = d_b d_b(y) = 0.$$

Zaradi injektivnosti α je $d_a(x) = 0$, kar pomeni, da je $x \in Z^{r+1}(A)$. Pokazati želimo, da je $\{x\} \in H^{r+1}(A)$ odvisen le od izbire $\{z\} \in H^r(C)$. Tako bomo dobili dobro definiran homomorfizem $((\gamma^*)^r : H^r(C) \rightarrow H^{r+1}(A))_r$. Naj bo še $y' \in B^r$ tak, da je $\{\beta(y')\} = \{z\}$. Potem obstaja tak $w \in C^{r-1}$, da je $\beta(y') = \beta(y) + d_c(w)$. Izberimo tak $v \in B^{r-1}$, da je $\beta(v) = w$. Potem je

$$\beta(y') = \beta(y) + d_c \beta(v) = \beta(y + d_b(v))$$

Zato obstaja tak $t \in A^r$, da je $y' = y + d_b(v) + \alpha(t)$ in

$$d_b(y') = d_b(y) + d_b\alpha(t) = \alpha(x) + \alpha d_a(t) = \alpha(x + d_a(t)).$$

Tedaj je $\alpha^{-1}d_b(y') = x + d_a(t)$ in $\{x + d_a(t)\} = \{x\}$, zato je $\{\alpha^{-1}d_b(y)\} = \{\alpha^{-1}d_b(y')\}$. \square

Homomorfizem γ^* iz zgornje leme imenujemo *vezni homomorfizem*. Po zgornji lemi in trditvi lahko kratkemu eksaktnemu zaporedju verižnih kompleksov priredimo zaporedje homoloških grup. To zaporedje je eksaktno.

Izrek 5.16. *Naj bo*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

kratko eksaktno zaporedje verižnih kompleksov. Tedaj je pripadajoče zaporedje homoloških grup

$$\dots \rightarrow H^r(A) \xrightarrow{\alpha^*} H^r(B) \xrightarrow{\beta^*} H^r(C) \xrightarrow{\gamma^*} H^{r+1}(A) \rightarrow \dots$$

eksaktno.

Dokaz. Naj bo $r \in \mathbb{Z}$. Dokazali bomo eksaktnost le pri $H^r(C)$. Za $H^r(A)$ in $H^r(B)$ je dokaz podoben. Pomagamo si z diagramom v dokazu prejšnje leme.

(a) Dokazujemo $\text{im } \beta^* \subset \ker \gamma^*$. Naj bo $\{y\} \in H^r(B)$. Potem je

$$\gamma^*\beta^*\{y\} = \gamma^*\{\beta(y)\} = \{\alpha^{-1}d_b\beta^{-1}\beta(y)\} = \{\alpha^{-1}d_b(y)\} = \{\alpha^{-1}(0)\} = 0.$$

(b) Dokazujemo $\ker \gamma^* \subset \text{im } \beta^*$. Naj bo $\{z\} \in \ker \gamma^*$. Obstaja tak $y \in B^r$, da je $\beta(y) = z$ in $\alpha^{-1}d_b(y) = d_a(x)$ za neki $x \in A^r$. Za razliko $y - \alpha(x) \in B^r$ velja

$$d_b(y - \alpha(x)) = d_b(y) - \alpha d_a(x) = 0.$$

Zato je $\{y - \alpha(x)\} \in H^r(B)$ in

$$\beta^*\{y - \alpha(x)\} = \{\beta(y) - \beta\alpha(x)\} = \{z\}.$$

\square

Primer 5.17. Naj bo C verižni kompleks, $\bar{C} \subset C$ podkompleks in

$$0 \rightarrow \bar{C} \xrightarrow{i} C \xrightarrow{q} C/\bar{C} \rightarrow 0$$

kratko eksaktno zaporedje verižnih kompleksov. Tedaj je po zgornjem izreku zaporedje

$$\dots \rightarrow H^r(\bar{C}) \xrightarrow{i^*} H^r(C) \xrightarrow{q^*} H^r(C/\bar{C}) \xrightarrow{\gamma^*} H^{r+1}(\bar{C}) \rightarrow \dots$$

eksaktno.

Rezultat homološke algebre, ki ga najbolj potrebujemo, je spodnja posledica. V posebnih primerih je homologija kompleksa C enaka homologiji podkompleksa C' oziroma homologiji kvocientenega kompleksa C/C' . Posledica sledi neposredno iz zgornjega izreka in primera.

Posledica 5.18. *Naj bo C verižni kompleks in $\bar{C} \subset C$ verižni podkompleks. Tedaj je*

- (1) \bar{C} acikličen natanko tedaj, ko je $H(C) = H(C/\bar{C})$.
- (2) C/\bar{C} acikličen natanko tedaj, ko je $H(C) = H(\bar{C})$.

5.2. Verižni kompleks stopničastih vektorskih prostorov. Ukvarjali se bomo z verižnimi kompleksi, kjer so členi stopničasti vektorski prostori. V posebnem primeru so tudi homološke grupe stopničasti vektorski prostori.

Definicija 5.19. Naj bosta V, W stopničasta vektorska prostora in $m \in \mathbb{Z}$. Preslikava $f : V \rightarrow W$ je *stopnje m* , če za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $f|_{V_n} : V_n \rightarrow W_{n+m}$.

Zanimale nas bodo preslikave s stopnjo 0. Naj bo C verižni kompleks, kjer so členi stopničasti vektorski prostori in robni homomorfizmi preslikave stopnje 0. Tedaj sta $Z^r(C), D^r(C)$ stopničasta vektorska prostora, kjer za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $D_n^r(C) \subset Z_n^r(C)$. Zato lahko na homološko grupo gledamo kot na stopničast vektorski prostor, kjer je $H_n^r(C) = Z_n^r(C)/D_n^r(C)$.

Opomba 5.20. V homološki algebri se pojem stopnje uporablja tudi za preslikave med verižnimi kompleksi. V nadaljevanju, kadar govorimo o stopnji robnega homomorfizma, mislimo vselej na stopnjo glede na stopničenje kot v zgornji definiciji.

5.3. Eulerjeva karakteristika.

Definicija 5.21. *Eulerjeva karakteristika* verižnega kompleksa C je

$$\chi(C) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \dim H^r(C).$$

Primer 5.22. Naj bo C verižni kompleks kot v primeru 5.3. Potem je

$$\chi(C) = \dim W/W' = \dim W - \dim W' = n - k.$$

V zgornjem primeru opazimo, da je Eulerjeva karakteristika enaka alternirajoči vsoti dimenzij prostorov kompleksa C . Spodnja trditev pravi, da je to vedno res. Torej lahko Eulerjevo karakteristiko izračunamo, tudi če ne poznamo homologije kompleksa.

Trditev 5.23. *Eulerjeva karakteristika verižnega kompleksa C je*

$$\chi(C) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \dim C^r.$$

Dokaz. Za vsak $r \in \mathbb{Z}$ imamo del verižnega kompleksa.

$$\dots \rightarrow C^{r-1} \xrightarrow{d^{r-1}} C^r \xrightarrow{d^r} C^{r+1} \rightarrow \dots$$

Vemo, da je

$$\dim C^r = \dim Z^r(C) + \dim D^{r+1}(C)$$

in

$$\dim H^r(C) = \dim Z^r(C) - \dim D^r(C).$$

Če upoštevamo zgornji enačbi, dobimo

$$\dim H^r(C) = \dim C^r - \dim D^{r+1}(C) - \dim D^r(C).$$

To enačbo pomnožimo z $(-1)^r$. Seštejemo po r in dobimo, da je

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \dim H^r(C) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \dim C^r. \quad \square$$

Ukvarjali se bomo z verižnimi kompleksi, kjer so členi stopničasti vektorski prostori. Za take komplekse želimo karakteristiko, ki upošteva stopničasto strukturo.

Definicija 5.24. Naj bo C verižni kompleks stopničastih vektorskih prostorov in naj bodo robni homomorfizmi stopnje 0. *Stopničasta Eulerjeva karakteristika* verižnega kompleksa C je

$$\chi_q(C) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q \dim H^r(C).$$

Podobno kot v primeru navadne Eulerjeve karakteristike dobimo trditev, da se stopničasta Eulerjeva karakteristika izraža s členi verižnega kompleksa.

Trditev 5.25. Naj bo C verižni kompleks stopničastih vektorskih prostorov in naj bodo robni homomorfizmi stopnje 0. Potem je

$$\chi_q(C) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q \dim C^r.$$

Dokaz. Robni homomorfizmi so stopnje 0, zato je za vsak n in $r \in \mathbb{Z}$

$$q^n \dim C_n^r = q^n \dim Z_n^r(C) + q^n \dim D_n^{r+1}(C).$$

in

$$q^n \dim H_n^r(C) = q^n \dim Z_n^r(C) - q^n \dim D_n^r(C).$$

Zato dobimo

$$q \dim C^r = q \dim Z^r(C) + q \dim D^{r+1}(C)$$

in

$$q \dim H^r(C) = q \dim Z^r(C) - q \dim D_n^r(C).$$

Od tu naprej je dokaz enak kot v primeru navadne Eulerjeve karakteristike, le da zdaj opazujemo stopničasto dimenzijo. \square

Primer 5.26. Naj bo $V = V_- \oplus V_+$ in C verižni kompleks, kjer je $C^1 = V, C^2 = V^{\otimes 2}\{1\}$ in d^1 preslikava stopnje 0. Potem je

$$\chi_q(C) = q \dim V - q \dim V^{\otimes 2}\{1\} = (q^{-1} + q) - q(q^{-1} + q)^2$$

5.4. Poincaréjev polinom.

Definicija 5.27. Naj bo C verižni kompleks. *Poincaréjev polinom* je polinom v spremenljivki t , definiran kot

$$P_t(C) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} t^r \dim H^r(C).$$

Primer 5.28. Naj bo C verižni kompleks kot v primeru 5.3. Potem je

$$P_t(C) = \dim(H^2(C))t^2 = (n - k)t^2.$$

Podobno kot pri Eulerjevi karakteristiki želimo tudi Poincaréjev polinom, ki upošteva stopničasto strukturo členov verižnega kompleksa.

Definicija 5.29. Naj bo C verižni kompleks stopničastih vektorskih prostorov in naj bodo robni homomorfizmi stopnje 0. *Stopničasti Poincaréjev polinom* je polinom v spremenljivkah q in t , definiran kot

$$P_{(t,q)}(C) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} t^r q \dim H^r(C).$$

Stopničasti Poincaréjev polinom je informacija o stopničasti strukturi homologije. Polinom v spremenljivki q pri členu t^r je stopničasta dimenzija r -te homološke grupe.

Opomba 5.30. Pri $t = -1$ je $P_{-1}(C) = \chi(C)$ in $P_{(-1,q)} = \chi_q(C)$.

Primer 5.31. Naj bo V vektorski prostor dimenzije n . Naj bo C_1 verižni kompleks s $C_1^0 = V$ in $C_1^i = 0$ za $i \neq 0$.

$$C_1 : 0 \rightarrow V \rightarrow 0$$

Edina netrivialna homološka grupa kompleksa C_1 je $H^0(C_1) = V$. Naj bo C_2 verižni kompleks s $C_2^0 = C_2^1 = C_2^2 = V$, $C_2^i = 0$ za $i \neq 0, 1, 2$ in $d^0 = id$, $d^1 = 0$.

$$C_2 : 0 \rightarrow V \xrightarrow{id} V \xrightarrow{0} V \rightarrow 0$$

Edina netrivialna homološka grupa kompleksa C_2 je $H^2(C_2) = V$. Tedaj je

$$\chi(C_1) = \chi(C_2) = P_t(C_1) = n \text{ in } P_t(C_2) = t^2 n.$$

V zgornjem primeru sta Eulerjevi karakteristiki enaki, medtem ko sta Poincaréjeva polinoma različna. Sklepamo, da je Poincaréjev polinom močnejša karakteristika v smislu, da ločuje več kompleksov. Podobno velja za stopničasti Poincaréjev polinom in stopničasto Eulerjevo karakteristiko.

6. HOMOLOGIJA HOVANOVA

6.1. Oklepaj Hovanova. V tem razdelku si bomo ogledali, kako spletnemu diagramu priredimo *verižni kompleks Hovanova*. Začnemo podobno kot na koncu razdelka 3.2, kjer smo računali Jonesov polinom. Vsakemu stanju α smo priredili polinom P_α . Nato smo te polinome primerno sešteli v Kauffmanov oklepaj. Sedaj bomo vsakemu stanju α priredili stopničasti vektorski prostor V_α . Namesto Kauffmanovega oklepaja imamo *oklepaj Hovanova*. Ta je preslikava, ki spletnemu diagramu priredi verižni kompleks, tako da primerno sešteje prostore V_α v člene kompleksa. Oklepaj Hovanova za spletni diagram D označimo z $[[D]]$. Poglejmo, kako ga definiramo.

Naj bo D spletni diagram, X množica križišč in n število križišč. Naj bo $V = V_- \oplus V_+$ stopničast vektorski prostor, kjer sta V_- in V_+ enodimenzionalna vektorska podprostor prostora V , ki jima v stopničastem zapisu prostora V zaporedoma pripadata stopnji -1 in 1 . Vsakemu stanju $\alpha \in \{0, 1\}^X$ priredimo stopničasti vektorski prostor

$$V_\alpha(D) = V^{\otimes k_\alpha} \{r_\alpha\},$$

kjer je $r_\alpha = \sum_{i \in X} \alpha(i)$ in k_α število ciklov v glajenju D_α . Definiramo r -ti člen oklepaja Hovanova kot

$$[[D]]^r = \bigoplus_{\alpha: r_\alpha=r} V_\alpha(D)$$

za $r = 0, 1, \dots, n$ in $[[D]]^r = 0$ za $r \neq 0, \dots, n$.

Primer 6.1. Naj bo D spletni diagram. Izračunajmo $q\dim V_\alpha(D)$ za neko stanje α .

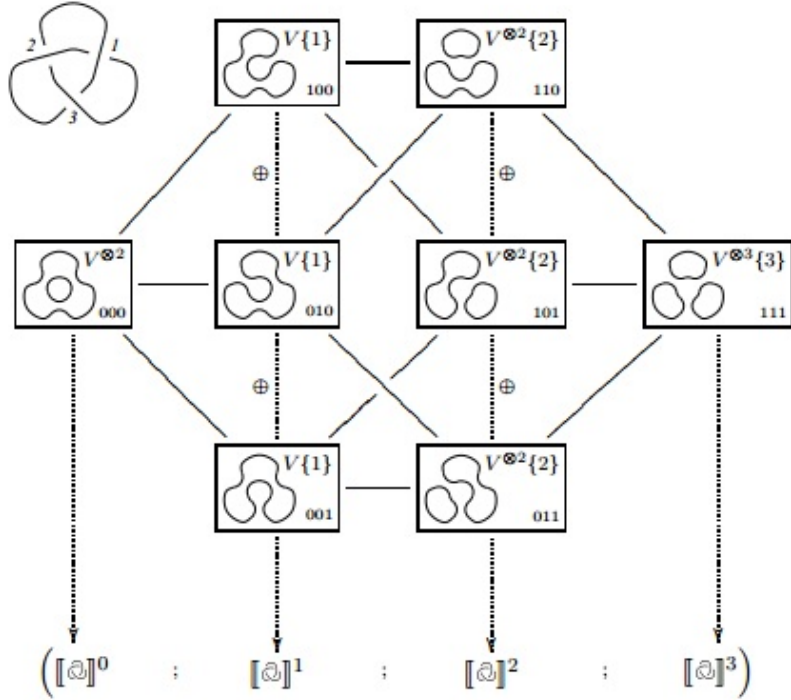
$$q\dim V_\alpha(D) = q\dim V^{\otimes k_\alpha} \{r_\alpha\} = q^{r_\alpha} (q^{-1} + q)^{k_\alpha} = P_\alpha(D).$$

Vektorski prostor V je namenoma tako izbran, da velja zgornje.

Preostane nam definirati robne homomorfizme. Množico stanj $\{0, 1\}^X$ lahko identificiramo z zaporedji ničel in enic dolžine n kot v primeru 3.12. Na vsako zaporedje ničel in enic lahko gledamo kot na oglišče n -dimenzionalne hiperkocke. Torej množica $\{0, 1\}^X$ predstavlja hiperkocko. Rob hiperkocke označimo s ξ in ga predstavimo z n -terico elementov iz $\{0, 1, *\}$, kjer $*$ nastopa natanko enkrat. Rep robu naj bo oglišče, kjer $*$ identificiramo z 0 , glava robu pa oglišče, kjer $*$ identificiramo z 1 . Vsako oglišče hiperkocke pripada nekemu stanju α in vsakemu stanju priredimo

prostor $V_\alpha(D)$. Torej lahko oglišče, ki pripada stanju α , enačimo s prostorom V_α in robove s preslikavami, ki slikajo iz prostora, ki je pri repu robu, v prostor, ki je pri glavi robu.

Primer 6.2. Diagram na sliki 13 prikazuje, kako izračunamo člene oklepaja Hovanova za deteljico.



SLIKA 13. Členi oklepaja Hovanova za deteljico

S $|\xi|$ označimo vsoto $\sum_i \xi_i$, kjer $*$ pripada vrednost 0. S $\hat{\xi}$ označimo vsoto $\sum_{i < j} \xi_i$, kjer je j položaj $*$ v zaporedju, ki določa rob. Preslikavo, ki pripada robu ξ , označimo z d_ξ . Definiramo robni homomorfizem za vsak r kot

$$d^r := \sum_{|\xi|=r} (-1)^{\hat{\xi}} d_\xi.$$

Robni homomorfizmi morajo zadoščati $dd = 0$. Slednjemu pogoju zadostimo, če vsak diagram, ki predstavlja neko ploskev hiperkocke, antikomutira. Lažje je poiskati take preslikave, da diagrami komutirajo, nato nekaterim preslikavam spremeniti predznak, da dosežemo antikomutativnost. Antikomutativnost diagrama dobimo, če spremenimo predznak liho mnogim preslikavam iz diagrama. To dosežemo s tem, da preslikave d_ξ pomnožimo z $(-1)^{\hat{\xi}}$. (Preslikave, za katere je $(-1)^{\hat{\xi}}$ negativen, imajo na sliki 14 pri repu krogec.)

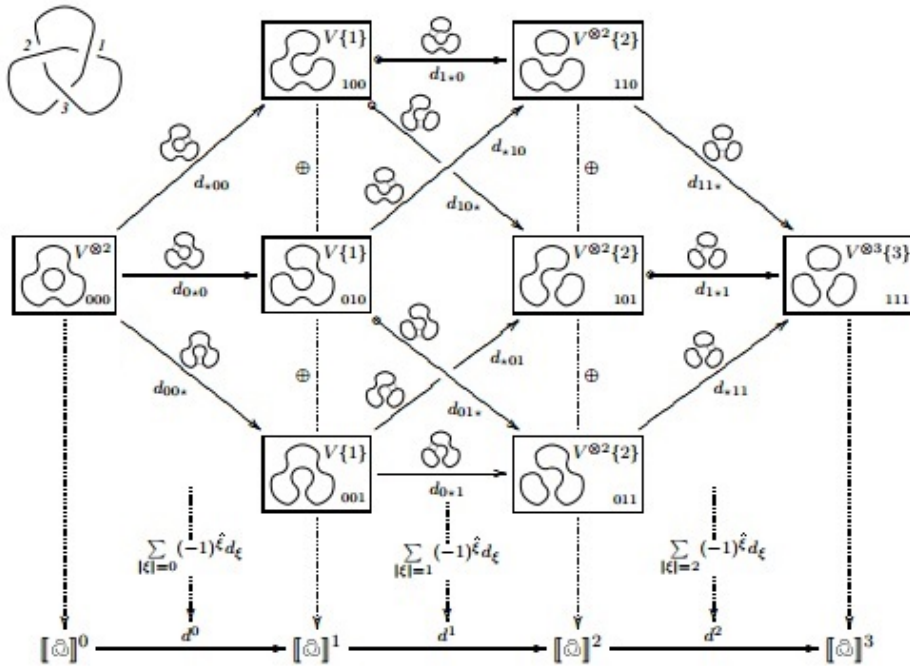
Preostane nam samo še definirati preslikave d_ξ , da bodo vsi diagrami, ki predstavljajo neko ploskev hiperkocke, komutirali. Prostor V_α ima toliko tenzorskih faktorjev, kot je ciklov v D_α . Glajenje diagrama pri repu se od glajenja diagrama pri glavi robu razlikuje le lokalno v okolici križišča, ki ga izgledimo na različna načina. Zamenjava glajenja križišča se na glajenju celotnega diagrama odrazi v dveh oblikah. Lahko se dva cikla spojita v enega, oziroma se en cikel razdeli na dva. Ostali

cikli ostanejo enaki. Torej ima eno od glajenj diagrama en cikel več. Za vsak rob ξ definiramo d_ξ kot identiteto na tenzorskih faktorjih, ki ustrezajo ciklom, ki so enaki pri obeh glajenjih. Preslikavo d_ξ dopolnimo na preostale tenzorske faktorje z linearnima preslikavama $m : V \otimes V \rightarrow V$ in $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$.

$$m : \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow v_+ \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow v_- \\ v_- \otimes v_+ \rightarrow v_- \\ v_- \otimes v_- \rightarrow 0 \end{cases} \quad \Delta : \begin{cases} v_+ \rightarrow v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \rightarrow v_- \otimes v_- \end{cases}$$

Preslikavo m imenujemo *množenje* in ustreza primeru, ko ima glajenje pri repu robu en cikel več od glajenja pri glavi robu. Preslikavo Δ imenujemo *komnoženje* in ustreza primeru, ko ima glajenje pri glavi robu en cikel več od glajenja pri repu robu.

Primer 6.3. Diagram na sliki 14 prikazuje, kako izračunamo oklepaj Hovanova za deteljico.



SLIKA 14. Oklepaj Hovanova za deteljico

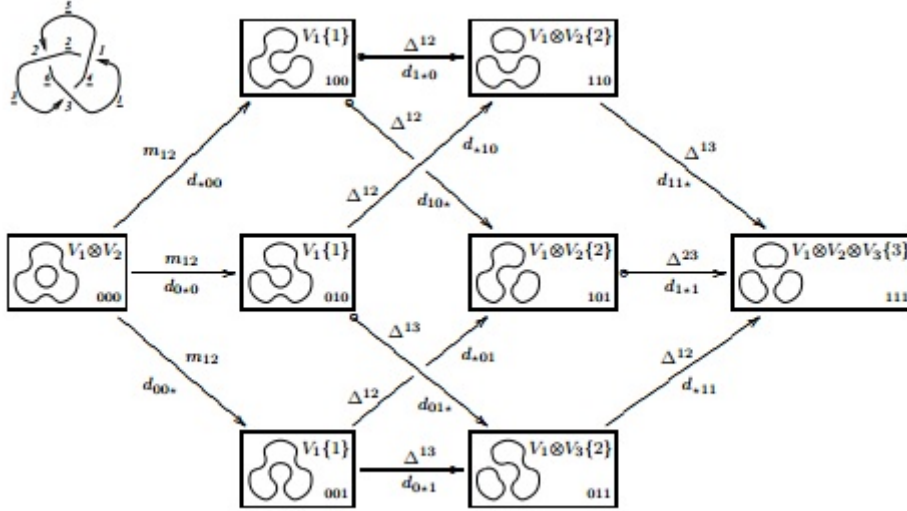
Opomba 6.4. Oklepaj Hovanova je verižni kompleks stopničastih vektorskih prostoro, kjer so robni homomorfizmi stopnje 0. Zato so tudi homološke grupe stopničasti vektorski prostori.

Za računanje homologije je dobro, da preslikave d_ξ natančneje določimo. Loke spletnih diagramov označimo tako, da za vsako komponento izberemo naraščajoče zaporedje celih števil. Zaporedja naj bodo paroma disjunktna. Komponento začnemo označevati pred križiščem, označenim z najmanjšim številom. Lok pred tem

križiščem označimo s prvim elementom zaporedja, ki smo ga namenili tej komponenti. Potujemo v izbrani smeri po komponenti diagrama spleta in vsakič, ko prečkamo križišče, označimo lok, na katerega smo prispeli, z naslednjim elementom v zaporedju. Ko pridemo do loka, ki smo ga že označili, končamo. Nadaljujemo, dokler ne označimo vseh komponent. Za dano stanje α označimo cikle v D_α z najmanjšim lokom, ki ga cikel vsebuje. Skladno s cikli označimo tenzorske faktorje.

Primer 6.5. Naj bo D spletni diagram deteljice, kjer so loki označeni kot na sliki 15 in $\alpha = 011$. Večji cikel v D_{011} vsebuje lok, označen z 1. Manjši cikel vsebuje lok, označen s 3. Torej je $V_{011} = V_1 \otimes V_3\{2\}$. Pri tem gre samo za oznako prostorov, da lažje določimo preslikave. Seveda velja $V_1 \otimes V_3 = V \otimes V$.

Z Δ^{ij} označimo preslikavo, ki slika iz tenzorskega produkta označenih prostorov V kot identiteta na vseh faktorjih razen na faktorju, označenem z $V_{\min(i,j)}$. Preslikavo dopolnimo na $V_{\min(i,j)}$ z $\Delta : V_{\min(i,j)} \rightarrow V_i \otimes V_j$. Podobno z m_{ij} označujemo preslikavo, ki je identiteta na vseh faktorjih razen na $V_i \otimes V_j$. Na $V_i \otimes V_j$ preslikavo dopolnimo z $m : V_i \otimes V_j \rightarrow V_{\min(i,j)}$.



SLIKA 15. Oznake prostorov in preslikav

6.2. Verižni kompleks Hovanova.

Definicija 6.6. Naj bo D spletni diagram. *Verižni kompleks Hovanova* $C(D)$ je verižni kompleks, ki ga priredimo spletnemu diagramu, definiran kot

$$C(D) = [[D]][-n_-]\{n_+ - 2n_-\}.$$

Homologijo tega kompleksa imenujemo *homologija Hovanova* in jo označimo s $H(D)$.

Opazimo, da stopničasti in višinski premik $[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$ v definiciji verižnega kompleksa Hovanova sovpada z faktorjem $(-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-}$, s katerim pomnožimo Kauffmanov oklepaj v definiciji Jonesovega polinoma. To seveda ni naključje. Tak višinski in stopničasti premik izberemo, ker želimo z verižnim kompleksom Hovanova posplošiti Jonesov polinom. Za invariantnost Jonesovega polinoma je faktor $(-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-}$ igral pomembno vlogo, saj Kauffmanov oklepaj ni spletna invarianta. Podobno se bo izkazalo pri homologiji Hovanova.

Primer 6.7. Izračunajmo kompleks Hovanova za deteljico. V prejšnjih primerih smo že izračunali $[[\textcircled{2}]]$ in $(n_+, n_-) = (3, 0)$. Kompleks Hovanova za deteljico je

$$C(\textcircled{2}) = [[\textcircled{2}]]\{3\}.$$

Pri tem je $C^r(\textcircled{2}) = [[\textcircled{2}]]^r\{3\}$.

Verižni kompleks Hovanova ni spletna invarianta. Naj bosta D in D' spletna diagrama, ki se razlikujeta za Reidemeistrov premik $R1$. Naj bo D' diagram z zanko. Spletni diagram D' ima eno križišče več in zato ima njegov verižni kompleks Hovanova $C(D')$ en netrivialen člen več kot verižni kompleks Hovanova $C(D)$. Poskusimo lahko izračunati homologijo in stopničasto Eulerjevo karakteristiko.

Izrek 6.8. *Naj bo L splet, D njegov diagram in $C(D)$ verižni kompleks Hovanova. Potem je*

$$\chi_q(C(D)) = \hat{J}(L).$$

Dokaz. Robni homomorfizmi verižnega kompleksa Hovanova so stopnje 0, zato lahko po trditvi 5.25 stopničasto Eulerjevo karakteristiko izračunamo kot $\chi_q(C(D)) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q \dim C^r(D)$.

$$\begin{aligned} \chi_q(C(D)) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q \dim C^r(D) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q \dim [[D]]^{r+n_-} \{n_+ - 2n_-\} \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^{r+n_-} q \dim [[D]]^{r+n_-} \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r q \dim \bigoplus_{\alpha: r_\alpha=r} V_\alpha(D) \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \sum_{\alpha: r_\alpha=r} q \dim V_\alpha(D) \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^r \sum_{\alpha: r_\alpha=r} P_\alpha(D) \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_{\alpha} (-1)^{r_\alpha} P_\alpha(D) \\ &= \hat{J}(L) \end{aligned}$$

□

Primer 6.9. Izračunajmo stopničasto Eulerjevo karakteristiko za $C(\textcircled{2})$.

Stopničaste dimenzije posameznih členov so:

$$\begin{aligned} a &= q \dim V^{\otimes 2}\{3\} = q^3(q^{-1} + q)^2 \\ b &= q \dim(V\{1\} \oplus V\{1\} \oplus V\{1\})\{3\} = 3q^4(q^{-1} + q) \\ c &= q \dim(V^{\otimes 2}\{2\} \oplus V^{\otimes 2}\{2\} \oplus V^{\otimes 2}\{2\})\{3\} = 3q^5(q^{-1} + q)^2 \\ d &= q \dim(V^{\otimes 3}\{3\})\{3\} = q^6(q^{-1} + q)^3 \end{aligned}$$

Stopničasta Eulerjeva karakteristika je potem

$$\chi(C(\textcircled{2})) = -a + b - c + d = q + q^3 + q^5 - q^9.$$

6.3. Invariantnost homologije Hovanova. Stopničasta Eulerjeva karakteristika kompleksa Hovanova je po zgornjem izreku spletna invarianta, enaka nenormaliziranemu Jonesovemu polinomu. Preveriti moramo še invariantnost homologije Hovanova.

Izrek 6.10 (Hovanov). *Homologija Hovanova je spletna invarianta.*

Struktura dokaza izreka Hovanova je podobna kot dokaz invariantnosti Jonesovega polinoma. Po Reidemeistrovem izreku je treba preveriti, da se homologija Hovanova ne spremeni, če na spletnem diagramu izvedemo katerega od Reidemeistrovih premikov. Pri Jonesovemu polinomu smo Kauffmanov oklepaj za različne diagrame, ki nastopajo pri Reidemeistrovih premikih, izračunali rekurzivno, tako da smo izgladili križišča in pri tem upoštevali določena pravila. Nekaj podobnega želimo za oklepaj Hovanova.

Trditev 6.11. *Naj bo D spletni diagram. Oklepaj Hovanova zadošča spodnjim pravilom:*

$$(5) \quad [[\emptyset]] = (0 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow 0)$$

$$(6) \quad [[D \cup \bigcirc]] = V \otimes [[D]]$$

$$(7) \quad [[\sphericalangle]] = F(0 \rightarrow [[\smile]] \xrightarrow{\tau} [] [] \{1\} \rightarrow 0)$$

Pravila so zelo podobna pravilom Kauffmanovega oklepaja. Prvo pravilo pove, da je oklepaj Hovanova prazne množice kompleks $0 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow 0$. To pravilo v resnici privzamemo, podobno smo pri Kauffmanovem oklepaju privzeli $\langle \emptyset \rangle = 1$. Drugo pravilo pove, kako se oklepaj spremeni, če spletnemu diagramu D dodamo oziroma odvezamo cikel. Pri tem je $C = V \otimes [[D]]$ tak kompleks, da je $C^r = V \otimes [[D]]^r$ in so robni homomorfizmi razširjeni z identiteto na V . Tretje pravilo pove, kako izgladimo križišča.

Na desni strani v tretjem pravilu imamo v oklepaju kompleks kompleksov (verižni kompleks, kjer so členi verižni kompleksi) in operator F , ki deluje na takih kompleksih. Poglejmo, kaj je preslikava τ med $[[\smile]]$ in $[] []$. Disjunktna unija hiperkock za diagrama \smile in \sphericalangle (je hiperkocka za \sphericalangle . Manjkajo le robovi, ki v hiperkocki za \sphericalangle povezujejo hiperkocki za \smile in \sphericalangle . Ti robovi določajo preslikavo τ , skladno z definicijo oklepaja Hovanova v razdelku 6.1.

Poglejmo, kako deluje operator F . Naj bodo $A_1 = (A_1^r, d_1)_r, A_2 = (A_2^r, d_2)_r, \dots, A_n = (A_n^r, d_n)_r$ verižni kompleksi (lahko tudi kompleksi kompleksov) in za vsak $i = 1, \dots, n$ naj bo τ_i nabor homomorfizmov med A_i in A_{i+1} , za katere antikmutira spodnji diagram za vsak r .

$$\begin{array}{ccc} A_i^r & \xrightarrow{d_i} & A_i^{r+1} \\ \downarrow \tau_i & & \downarrow \tau_i \\ A_{i+1}^r & \xrightarrow{d_{i+1}} & A_{i+1}^{r+1} \end{array}$$

Naj bo $C = (0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\tau_1} A_2 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_{n-1}} A_n \rightarrow 0)$ kompleks kompleksov. Operator $F : C \rightarrow F(C)$ priredi kompleksu C kompleks $F(C)$, kjer je

$$F(C)^r = \bigoplus_{i=1}^n A_i^{r-i+1}$$

in robni homomorfizem

$$d_{F(C)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (d_1(x_1), \tau_1(x_1) + d_2(x_2), \dots, \tau_{n-1}(x_{n-1}) + d_n(x_n))$$

za $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n A_i^{r-i+1}$.

$$\dots \xrightarrow{d_{F(C)}} \bigoplus_{i=1}^n A_i^{r-i+1} \xrightarrow{d_{F(C)}} \bigoplus_{i=1}^n A_i^{r-i+2} \xrightarrow{d_{F(C)}} \dots$$

Da bo $F(C)$ res kompleks, mora veljati $d_{F(C)}d_{F(C)} = 0$. To pa vedno velja zaradi antikomutivnosti zgornjega diagrama.

Opomba 6.12. V nadaljevanju bomo spuščali trivialne prostore in kompleks kompleksov $(0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow 0)$ označevali z $(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n)$.

Dokaz trditve 6.11. Poglejmo si drugo pravilo. Označimo z $D' = D \cup \circlearrowleft$. Za vsako stanje α ima glajenje diagrama D'_α en cikel več od glajenja diagrama D_α , zato je $V_\alpha(D') = V \otimes V_\alpha(D)$. Torej za poljuben r velja

$$[[D']]^r = \bigoplus_{\alpha:r_\alpha=r} V_\alpha(D') = \bigoplus_{\alpha:r_\alpha=r} (V \otimes V_\alpha(D)) = V \otimes \left(\bigoplus_{\alpha:r_\alpha=r} V_\alpha(D) \right) = V \otimes [[D]]^r.$$

Poglejmo si tretje pravilo. Naj bo $C = (C^r, d_c)_r = F([\asymp] \xrightarrow{\tau} [\circlearrowleft] \{1\})$ in $[[\curvearrowright]] = ([[\asymp]]^r, d)_r$. Pokazati želimo, da je $C = [[\curvearrowright]]$. Za vsak r je

$$[[\curvearrowright]]^r = \bigoplus_{\alpha:r_\alpha=r} V_\alpha(\curvearrowright) = \left(\bigoplus_{\alpha:r_\alpha=r} V_\alpha(\asymp) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha:r_\alpha=r-1} V_\alpha(\circlearrowleft) \{1\} \right) = [[\asymp]]^r \oplus [\circlearrowleft] \{1\}^{r-1}.$$

Torej je $[[\curvearrowright]]^r = C^r$ za vsak r . Preveriti moramo še, če se ujemajo robni homomorfizmi. Po definiciji operatorja F je

$$d_c(x, y) = (d_{\asymp}(x), \tau(x) + d_{\circlearrowleft}(y)),$$

kjer je $(x, y) \in C^r$ ter sta d_{\asymp} in d_{\circlearrowleft} robna homomorfizma kompleksov $[[\asymp]]$ in $[\circlearrowleft]$. Preslikavi d_{\asymp} in d_{\circlearrowleft} skoraj določata preslikavo d . Do preslikave d manjkajo le homomorfizmi, ki pripadajo robovom med \asymp in \circlearrowleft , katere določa τ . \square

Spodnja trditev pove, kako lahko konstruiramo podkomplekse in kvocientne komplekse kompleksov oblike $F(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n)$.

Trditev 6.13. Naj bodo A_1, \dots, A_n verižni kompleksi in $A'_i \subset A_i$ verižni podkompleksi za $i = 1, \dots, n$. Naprej naj bo

$$C = F(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n)$$

in

$$C' = F(A'_1 \rightarrow A'_2 \rightarrow \dots \rightarrow A'_n).$$

Potem je C' podkompleks kompleksa C in kvocientni kompleks

$$C/C' = F(A_1/A'_1 \rightarrow A_2/A'_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n/A'_n).$$

Dokaz. Uporabimo dejstvo, da za vektorske prostore W_i in njihove podprostore $W'_i \subset W_i$ velja $\bigoplus_{i=1}^n W'_i \subset \bigoplus_{i=1}^n W_i$ in $\bigoplus_{i=1}^n (W_i/W'_i) = (\bigoplus_{i=1}^n W_i) / (\bigoplus_{i=1}^n W'_i)$. \square

Pomembno vlogo v dokazu imajo aciklični podkompleksi. V podrazdelku 5.1 smo pokazali, da ima za acikličen podkompleks C' kvocientni kompleks C/C' enako homologijo kot kompleks C . Zanima nas le homologija kompleksa C , zato zado-
stuje obravnavati kvocientni kompleks C/C' . Spodnja trditev pove, kdaj je kompleks
oblike $F(A \rightarrow B)$ acikličen.

Trditev 6.14. *Naj bosta A in B izomorfna verižna kompleksa in τ nabor izomor-
fizmov, da za vsak r antikomutira diagram kot zgoraj. Tedaj je verižni kompleks
 $C = F(A \xrightarrow{\tau} B)$ acikličen.*

Dokaz. Verižni kompleks C je acikličen, če za vsak $r \in \mathbb{Z}$ velja $Z^r(C) \subset D^r(C)$.

Naj bo $r \in \mathbb{Z}$ in $(x, y) \in Z^r(C)$. Potem je

$$d_c(x, y) = (d_a(x), \tau(x) + d_b(y)) = (0, 0)$$

in zato

$$\tau(x) = -d_b(y).$$

Preslikava τ je bijekcija, zato obstaja tak $u \in A^{r-1}$, da je $\tau(u) = y$ in

$$\tau(x) = -d_b\tau(u) = \tau d_a(u).$$

Ker je τ injektivna preslikava velja $d_a(u) = x$ in $d_c(u, 0) = (x, y)$. \square

Primer 6.15. Pri dokazu izreka naletimo na diagram \mathcal{R} . Oklepaj Hovanova za \mathcal{R} je po tretjem pravilu

$$[[\mathcal{R}]] = F([\mathcal{R}]) \xrightarrow{m} [[\mathcal{R}]].$$

Nabor preslikav med $[[\mathcal{R}]]$ in $[[\mathcal{R}]]$ označimo z m , ker so vse preslikave med hiper-
kockama za \mathcal{R} in \mathcal{R} množenja.

Pogosto naletimo na diagram, ki ima dodaten cikel. Oklepaju Hovanova za tak
diagram lahko naravno priredimo podkompleks. Naj bo D' spletni diagram in $D =$
 $D' \cup \bigcirc$. Za vsako stanje α ima $V_\alpha(D)$ en tenzorski faktor V , ki pripada ciklu \bigcirc .
Pomembno vlogo imajo podkompleksi, kjer ciklu \bigcirc dodelimo tenzorski faktor $V_+ \subset$
 V oziroma $V_- \subset V$. Definiramo

$$[[D]]_{v_+} := V_+ \otimes [[D']] \text{ in } [[D]]_{v_-} := V_- \otimes [[D']].$$

Očitno sta $[[D]]_{v_-}$ in $[[D]]_{v_+}$ podkompleksa $[[D]]$, pri čemer velja $[[D]]_{v_+} \oplus [[D]]_{v_-} =$
 $[[D]]$. Oba podkompleksa sta izomorfna $[[D']]$, razlikujejo se stopničenja členov.

Primer 6.16. Naj bo $D = D' \cup \bigcirc$ spletni diagram. Izračunajmo homologijo kom-
pleksa $C = F([[D]]_{v_+} \xrightarrow{m} [[D']]\{1\})$. Členi kompleksa $[[D]]_{v_+} = V_+ \otimes [[D']]$ se od
členov kompleksa $[[D']]$ razlikujejo za dodaten tenzorski faktor V_+ , ki premakne sto-
pničenje za ena navzgor. Preslikava $m|_{[[D]]_{v_+}}$ je nabor izomorfizmov med $[[D]]_{v_+}$ in
 $[[D']]\{1\}$, saj je $m(v_+ \otimes v) = v$, kjer je $v_+ \otimes v \in V_+ \otimes [[D']]$. Po zgornji trditvi je
kompleks C acikličen.

Trditev 6.17. *Naj bodo $A = (A^r, d_a)_r, B = (B^r, d_b)_r, C = (C^r, d_c)_r, D = (D^r, d_d)_r$
kompleksi in $\tau : A \oplus B[1] \rightarrow C \oplus D[1]$. Za preslikavo τ naj velja $\tau|_A : A \rightarrow C$ in
 $\tau|_B : B \rightarrow D$. Potem je*

$$F(F(A \xrightarrow{\alpha} B) \xrightarrow{\tau} F(C \xrightarrow{\gamma} D)) = F(F((A \xrightarrow{\alpha} B) \xrightarrow{\tau'} (C \xrightarrow{\gamma} D))),$$

kjer je $\tau' = \{\tau|_A, \tau|_B\}$.

Dokaz. Naj bo

$$E_1 = (E_1^r, d_1)_r = F(F(A \xrightarrow{\alpha} B) \xrightarrow{\tau} F(C \xrightarrow{\gamma} D))$$

in

$$E_2 = (E_2^r, d_2)_r = F(F((A \xrightarrow{\alpha} B) \xrightarrow{\tau'} (C \xrightarrow{\gamma} D))).$$

Po definiciji operatorja F velja

$$E_1^r = E_2^r = A^r \oplus B^{r-1} \oplus C^{r-1} \oplus D^{r-2}.$$

Preveriti moramo, da so robni homomorfizmi d_1 in d_2 enaki. Označimo kompleksa $\bar{A} = (\bar{A}^r, \bar{d}_a)_r = F(A \xrightarrow{\alpha} B)$ in $\bar{C} = (\bar{C}^r, \bar{d}_c)_r = F(C \xrightarrow{\gamma} D)$. Tedaj je

$$E_1 = F(\bar{A} \xrightarrow{\tau} \bar{B}).$$

Po definiciji operatorja F je zato preslikava

$$d_1(x', u') = (\bar{d}_a(x'), \tau(x') + \bar{d}_c(u'))$$

za $x' = (x, y) \in A^r \oplus B^{r-1}$ in $u' = (u, w) \in C^{r-1} \oplus D^{r-2}$. Če upoštevamo, kaj so preslikave \bar{d}_a, \bar{d}_c in τ , dobimo

$$d_1(x, y, u, w) = (d_a(x), \alpha(x) + d_b(y), \tau|_A(x) + d_c(u), \tau|_B(y) + \gamma(u) + d_d(w))$$

Poglejmo, kaj je preslikava d_2 . Uporabimo notranji F v E_2 in dobimo

$$E_2 = F(A \xrightarrow{\hat{d}_1} B \oplus C \xrightarrow{\hat{d}_2} D),$$

kjer je $\hat{d}_1(x) = (\alpha(x), \tau'(x))$ in $\hat{d}_2(y, u) = \gamma(u) + \tau'(y)$. Naj \hat{d} označuje robni homomorfizem kompleksa $B \oplus C$. Uporabimo spet F in dobimo

$$d_2(x, y', w) = (d_a(x), \hat{d}_1(x) + \hat{d}(y'), \hat{d}_2(y') + d_d(w)),$$

kjer je $x \in A^r, y' = (y, u) \in B^{r-1} \oplus C^{r-1}$ in $w \in D^{r-2}$. Če upoštevamo, kaj so preslikave \hat{d}_1, \hat{d}_2 in \hat{d} dobimo

$$d_2(x, y, u, w) = (d_a(x), \alpha(x) + d_b(y), \tau'(x) + d_c(u), \tau'(y) + \gamma(u) + d_d(w)).$$

Upoštevamo, da je $\tau'(x) = \tau|_A(x)$ in $\tau'(y) = \tau|_B(y)$. \square

Po zgornji trditvi lahko $E = F(F(A \xrightarrow{\alpha} B) \xrightarrow{\tau} F(C \xrightarrow{\gamma} D))$ predstavimo z diagramom (zaradi večje preglednosti ne pišemo operatorja F). Prednost diagrama je, da lahko natančneje določimo preslikavo τ .

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\gamma} & D \\ \tau|_A \uparrow & & \uparrow \tau|_B \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Spodnja vrstica $(A \xrightarrow{\alpha} B)$ in zgornja vrstica $(C \xrightarrow{\gamma} D)$ sta kompleksa, med njima imamo homomorfizem τ' . Po zgornji trditvi lahko F namesto na vrsticah uporabimo na diagramu in za E dobimo

$$E = F(F((A \xrightarrow{\alpha} B) \xrightarrow{\tau} (C \xrightarrow{\gamma} D))) = F(A \rightarrow B \oplus C \rightarrow D).$$

Preden se lotimo dokaza o invariantnosti homologije Hovanova, si pogledjmo primer, kako izračunamo oklepaj Hovanova za Hopfov splet.

Primer 6.18. Izračunajmo oklepaj Hovanova za Hopfov splet z uporabo trditve 6.17 in pravil iz trditve 6.11.

$$\begin{aligned} [[\text{⊗}]] &= F([[⊗]] \xrightarrow{\tau} [[\text{⊗}]]\{1\}) = \\ &= F(F([[⊗]] \xrightarrow{m} [[\text{⊗}]]\{1\}) \xrightarrow{\tau} F([[⊗]]\{1\} \xrightarrow{-\Delta} [[\text{⊗}]]\{2\})) \end{aligned}$$

Drugo vrstico lahko zapišemo v obliki spodnjega levega diagrama. Po uporabi prvega in drugega pravila iz trditve 6.11 dobimo desni diagram spodaj.

$$\begin{array}{ccc} [[\text{⊗}]]\{1\} & \xrightarrow{-\Delta} & [[\text{⊗}]]\{2\} \\ \tau = m \uparrow & & \tau = \Delta \uparrow \\ [[\text{⊗}]] & \xrightarrow{m} & [[\text{⊗}]]\{1\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V\{1\} & \xrightarrow{-\Delta} & V^{\otimes 2}\{2\} \\ m \uparrow & & \Delta \uparrow \\ V^{\otimes 2} & \xrightarrow{m} & V\{1\} \end{array}$$

Če sedaj uporabimo F na desnem diagramu, dobimo

$$[[\text{⊗}]] = 0 \rightarrow V^{\otimes 2} \xrightarrow{d^0} V\{1\} \oplus V\{1\} \xrightarrow{d^1} V^{\otimes 2}\{2\} \rightarrow 0,$$

kjer je $d^0(v) = (m(v), m(v))$ in $d^1(v, w) = \Delta(v) - \Delta(w)$.

Dokaz izreka 6.10. Začnimo z $R1$. Izračunajmo oklepaj Hovanova za ⋈ . Po uporabi tretjega pravila za oklepaj Hovanova dobimo

$$A = [[\text{⋈}]] = F([[⋈]] \xrightarrow{m} [[\text{⋈}]]\{1\}).$$

Tedaj ima A podkompleks

$$A' = F([[⋈]]_{v_+} \xrightarrow{m} [[\text{⋈}]]\{1\}),$$

za katerega smo v primeru 6.16 pokazali, da je acikličen. Po posledici 5.18 je $H(A) = H(A/A')$. Zanima nas le homologija kompleksa A , zato zadostuje opazovati kvocientni kompleks A/A' , ki je po trditvi 6.13 enak

$$A/A' = F([[⋈]]_{v_-} \rightarrow 0) = [[\text{⋈}]]_{v_-}.$$

Kompleksa $[[\text{⋈}]]_{v_-}$ in $[[\text{⋈}]]$ sta izomorfna, razlikuje se le stopničenje členov. Po definiciji je $[[\text{⋈}]]_{v_-} = V_- \otimes [[\text{⋈}]]$. Tenzoriranje kompleksa $[[\text{⋈}]]$ s prostorom V_- spremeni člene kompleksa $[[\text{⋈}]]$ tako, da njihovo stopničenje premakne za ena navzdol. Po drugi strani, če ima diagram ⋈ n_+ pozitivnih in n_- negativnih križišč, ima diagram ⋈ $n_+ - 1$ pozitivnih in n_- negativnih križišč. Zato je

$$\begin{aligned} H(\text{⋈}) &= H([[⋈]][-n_-]\{n_+ - 2n_-\}) \\ &= H([[⋈]]_{v_-}[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}) \\ &= H([[⋈]][-n_-]\{(n_+ - 1) - 2n_-\}) \\ &= H(\text{⋈}). \end{aligned}$$

Oglejmo si premik $R2$. Če dvakrat uporabimo tretje pravilo za oklepaj Hovanova dobimo

$$C = [[\text{⋈}]] = F(F([[⋈]] \rightarrow [[\text{⋈}]]\{1\}) \rightarrow F([[⋈]]\{1\} \xrightarrow{m} [[\text{⋈}]]\{2\})),$$

kjer je m nabor množenj. Zgornjo vrstico lahko zapišemo v obliki diagrama na sliki 16, kjer je Δ nabor komnoženj. Kompleks C ima podkompleks

$$C' = F(F(0 \rightarrow 0) \rightarrow F([\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_+}\{1\} \xrightarrow{m} [\![\text{X}\text{C}]\!]\{2\})).$$

Kompleks C' je enak kompleksu $F([\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_+}\{1\} \xrightarrow{m} [\![\text{X}\text{C}]\!]\{2\})[1]$, za katerega vemo, da je acikličen.

$$\begin{array}{ccc} [\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]\{1\} & \xrightarrow{m} & [\![\text{X}\text{C}]\!]\{2\} \\ \uparrow \Delta & & \uparrow \\ [\![\text{D}\text{X}]\!] & \longrightarrow & [\![\text{X}\text{X}]\!]\{1\} \end{array}$$

SLIKA 16. Kompleks C

Po posledici 5.18 je $H(C) = H(C/C')$, zato zadostuje opazovati homologijo kompleksa C/C' . Kompleks C/C' je po trditvi 6.13 enak

$$C/C' = F(F([\![\text{D}\text{X}]\!] \rightarrow [\![\text{X}\text{X}]\!]\{1\}) \rightarrow F([\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_-}\{1\} \rightarrow 0)).$$

Zapišimo ga v obliki spodnjega levega diagrama.

$$\begin{array}{ccc} [\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_-}\{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \Delta & & \uparrow \\ [\![\text{D}\text{X}]\!] & \longrightarrow & [\![\text{X}\text{X}]\!]\{1\} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \Delta & \searrow \tau & \uparrow \\ \alpha & \xrightarrow{d_{*0}} & \tau(\beta) \end{array}$$

SLIKA 17. Kompleks C/C' (levo) in kompleks C'' (desno)

Preslikava Δ v diagramu za C/C' je bijekcija, saj je $\Delta(v) = v_- \otimes v$ za $v \in [\![\text{D}\text{X}]\!]$ in $v_- \otimes v \in V_- \otimes [\![\text{D}]\!]\{1\} = [\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_-}\{1\}$. Zato ima inverz Δ^{-1} . Po komponiranju Δ^{-1} z d_{*0} dobimo preslikavo $\tau : [\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_-}\{1\} \rightarrow [\![\text{X}\text{X}]\!]\{1\}$. Naj bo C'' podkompleks kompleksa C/C' , ki vsebuje vse elemente $\alpha \in [\![\text{D}\text{X}]\!]$ in vse pare $(\beta, \tau(\beta)) \in [\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_-}\{1\} \oplus [\![\text{X}\text{X}]\!]\{1\}$. Uporabimo operator F na diagramu kompleksa C'' in dobimo

$$C'' = F([\![\text{D}\text{X}]\!] \xrightarrow{\Phi} \{(\beta, \tau(\beta)) : \beta \in [\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_-}\{1\}\},$$

kjer je $\Phi(\alpha) = (\Delta(\alpha), d_{*0}(\alpha))$. Ker je Δ bijekcija, je $\Delta^{-1}\Delta(\alpha) = \alpha$ in

$$\Phi(\alpha) = (\Delta(\alpha), d_{*0}(\alpha)) = (\Delta(\alpha), d_{*0}\Delta^{-1}\Delta(\alpha)) = (\Delta(\alpha), \tau\Delta(\alpha)).$$

Torej je Φ izomorfizem in je zato po trditvi 6.14 kompleks C'' acikličen. Nadaljujemo z opazovanjem $(C/C')/C''$. Na diagramu kompleksa C/C' uporabimo F in dobimo

$$C/C' = F([\![\text{D}\text{X}]\!] \rightarrow [\![\text{D}\text{O}\text{C}]\!]_{v_-}\{1\} \oplus [\![\text{X}\text{X}]\!]\{1\}).$$

Zato je

$$(C/C')/C'' = F(0 \rightarrow C''') = C'''[1],$$

kjer je

$$C''' = [[\text{D}\text{O}\text{C}]]_{v_-}\{1\} \oplus [[\text{X}]]\{1\}/\{(\beta, \tau(\beta)) : \beta \in [[\text{D}\text{O}\text{C}]]_{v_-}\{1\}\}$$

Kompleks $\{(\beta, \tau(\beta)) : \beta \in [[\text{D}\text{O}\text{C}]]_{v_-}\{1\}\}$ je izomorfen $[[\text{D}\text{O}\text{C}]]_{v_-}\{1\}$, saj je preslikava $(\beta \rightarrow (\beta, \tau(\beta)))$ izomorfizem. Torej je

$$(C/C')/C''[-1] = C''' = [[\text{X}]]\{1\} = [[\text{X}]]\{1\}.$$

Če ima diagram X n_+ pozitivnih in n_- negativnih križišč, ima potem diagram X $n_+ - 1$ pozitivnih in $n_- - 1$ negativnih križišč. Zato je

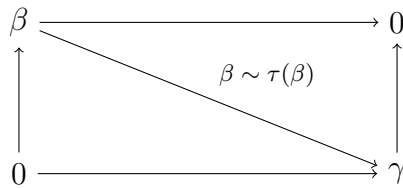
$$\begin{aligned} H(\text{X}) &= H([[\text{X}]][-n_-]\{n_+ - 2n_-\}) \\ &= H((C/C')/C''[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}) \\ &= H([[\text{X}]][1][-n_-]\{1\}\{n_+ - 2n_-\}) \\ &= H([[\text{X}]][-(n_- - 1)]\{(n_+ - 1) - 2(n_- - 1)\}) \\ &= H(\text{X}). \end{aligned}$$

Poglejmo na kompleks $(C/C')/C''$ malo drugače. Zaradi poljubne izbire $\alpha \in [[\text{D}\text{O}\text{C}]]$ ima $(C/C')/C''$ v spodnjem levem kotu trivialni kompleks. Preslikava $\tau = d_{*0}\Delta^{-1}$ identificira vse elemente $\beta \in [[\text{D}\text{O}\text{C}]]_{v_-}\{1\}$ z elementi $\tau(\beta) \in [[\text{X}]]\{1\}$. Definiramo relacijo na $[[\text{D}\text{O}\text{C}]]_{v_-}\{1\} \oplus [[\text{X}]]\{1\}$, kjer velja

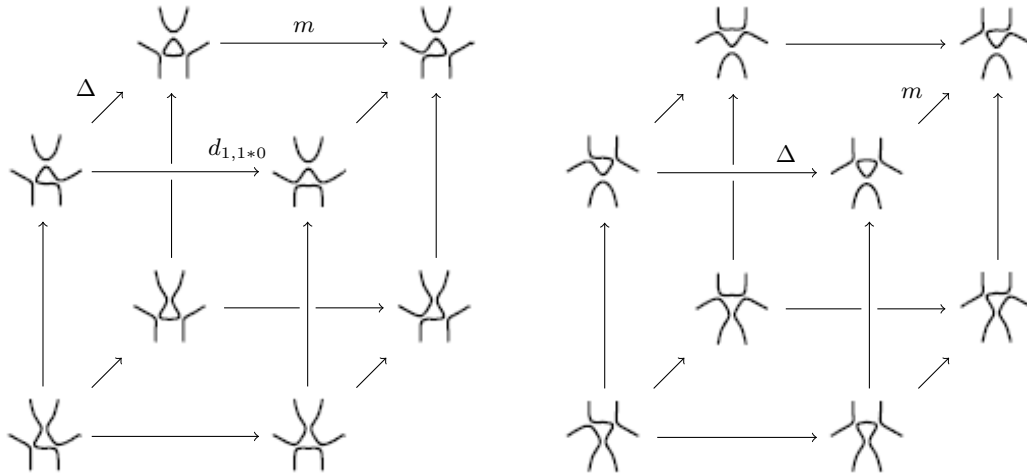
$$(\beta, \gamma) \sim (\beta', \gamma') \Leftrightarrow (0, \tau(\beta) + \gamma) = (0, \tau(\beta') + \gamma')$$




Relacija je očitno ekvivalenčna. (To relacijo na spodnjem diagramu označuje $\beta \sim \tau(\beta)$). Opazimo, da je vsak element oblike (β, γ) v relaciji z nekim elementom oblike $(0, \gamma')$ in da so vsi elementi oblike $(0, \gamma')$ med seboj neekvivalentni. Torej je

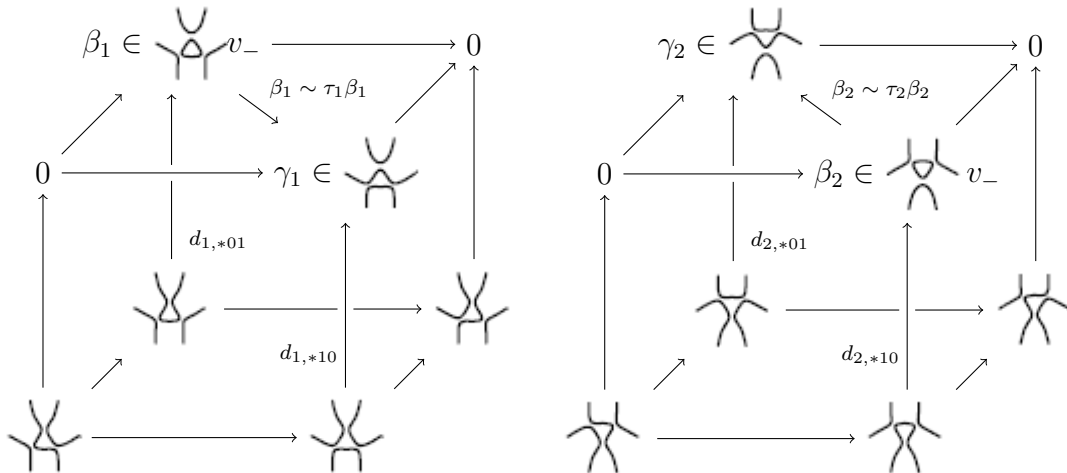
$$[[\text{D}\text{O}\text{C}]]_{v_-}\{1\} \oplus [[\text{X}]]\{1\}/\sim \cong [[\text{X}]]\{1\} \cong (C/C')/C''.$$





Ostane nam premik $R3$. Diagram Y ima enako število pozitivnih in negativnih križišč kot Y , zato je dovolj pokazati, da se ujemata njuna oklepaja Hovanova. Podobno kot pri $R2$, le da tokrat izgledimo tri križišča, dobimo za $[[\text{Y}]]$ spodnji levi diagram in za $[[\text{Y}]]$ spodnji desni diagram. (Zaradi preglednosti bomo v nadaljevanju spuščali oznaki $[[\cdot]]$ in $\{\cdot\}$.)



Zgornja ploskev leve kocke je kompleks, ki ustreza oklepaju Hovanova za diagram , ki je poseben primer diagrama . Zato lahko zgornjo ploskev leve kocke obravnavamo kot kompleks C pri premiku $R2$. Podobno velja za zgornjo ploskev pri desni kocki, saj ustreza oklepaju Hovanova za . Izberemo podkomplekse obeh kock, ki imajo za spodnjo ploskev trivialni kompleks in za zgornjo ploskev kompleks analogen C' oziroma C'' iz dokaza za $R2$. Vsi taki kompleksi so oblike $F(0 \rightarrow \bar{C}) = \bar{C}[1]$, kjer je \bar{C} bodisi C' bodisi C'' in so zato aciklični. Po posledici 5.18 zadostuje opazovati spodnja kompleksa.



Spodnji ploskvi ustrezata ,  in zato določata enaka kompleksa. Kompleks, ki ga določa leva kocka, je enak



$$D_1 = F(\text{---}) \xrightarrow{\Phi_1} (\text{---} v_- \oplus \text{---}) / \sim,$$





medtem ko je kompleks, ki ga določa desna kocka, enak



$$D_2 = F(\text{---}) \xrightarrow{\Phi_2} (\text{---} v_- \oplus \text{---}) / \sim.$$

Členi obeh kompleksov so enaki, ker se pa razlikujeta preslikavi Φ_1 in Φ_2 , imata različne robne homomorfizme. Poiskati želimo verižno transformacijo med D_1 in

D_2 , ki bo nabor izomorfizmov. Definiramo preslikavo Υ kot identiteto na .

Ker imata diagrama  in  isti oklepaj Hovanova, lahko Υ razširimo na


 $v_- \oplus$  z $((\beta_1, \gamma_1) \rightarrow (0, \tau_1\beta_1 + \gamma_1))$, kjer je $(\beta_1, \gamma_1) \in (\text{ $v_- \oplus$ })/\sim$




in $(0, \tau_1\beta_1 + \gamma_1) \in (\text{ \oplus })/\sim$. Preslikava je dobro definirana in injektivna, saj velja




$$(\beta, \gamma) \sim (\beta', \gamma') \Leftrightarrow (0, \tau_1\beta + \gamma) = (0, \tau_1\beta' + \gamma'),$$



ter očitno surjektivna. Da bo Υ res verižna transformacija, mora komutirati z robnimi homomorfizmi. Robne homomorfizme v kompleksih D_1 in D_2 določajo kombinacije preslikav, ki pripadajo robovom v zgornjih kockah. Edine istoležne preslikave, ki se razlikujejo, so navpične preslikave, ki med drugim določajo Φ_1 in Φ_2 . Zadostuje pokazati enakosti

$$\tau_1 d_{1,*01} = d_{2,*01} \text{ in } d_{1,*10} = \tau_2 d_{2,*10}.$$

Naj bo $v \in$  poljuben. Preslikavi $d_{1,1*0}$ in $d_{2,*01}$ sta enaki, saj imata diagrama

 in  enak oklepaj Hovanova in se ujema sprememba glajenj med 

in  s spremembo glajenj med  in . Preslikava $d_{1,*01}$ je komnoženje,

saj ima diagram  en cikel več od diagrama . Torej je

$$\tau_1 d_{1,*01}(v) = \tau_1(v \otimes v_-) = d_{1,1*0}\Delta^{-1}(v \otimes v_-) = d_{1,1*0}(v) = d_{2,*01}(v).$$

Podobno dokažemo drugo enakost. □

Za predstavitev homologije Hovanova uporabimo stopničasti Poincaréjev polinom.

Definicija 6.19. Naj bo L splet, D njegov diagram in $C(D)$ verižni kompleks Hovanova. *Polinom Hovanova* je

$$Kh(L) = P_{(t,q)}(C(D)).$$

Izrek Hovanova velja za vektorski prostor V nad poljubnim obsegom. Kadar želimo poudariti obseg, indeksiramo oznako za polinom Hovanova z izbranim obsegom $(Kh_{\mathbb{F}})$. Neposredno iz izreka Hovanova sledi naslednja trditev.

Trditev 6.20. *Polinom Hovanova je spletna invarianta.*

Računanje homologije Hovanova je zelo zamudno. Imamo spletni diagram z n križišči in zato 2^n stanji. Za vsako stanje α je treba izgladiti vsa križišča, da dobimo D_α . Nato lahko določimo člene kompleksa in robne homomorfizme. Tako dobimo šele kompleks Hovanova. Da izračunamo homologijo, moramo v nadaljevanju izračunati še jedra in slike vseh robnih homomorfizmov, ki jih je $n2^{n-1}$. Algoritem, ki računa homologijo Hovanova, je dokaj preprost, zato si pri računanju pomagamo z računalnikom. Na spletnem naslovu [3] najdemo prosto dostopen program za Mathematico, ki računa polinom Hovanova. Nekaj več o samem programu je možno prebrati v [2]. Vsi zgledi v nadaljevanju so izračunani s tem programom.

Primer 6.21.

$$\begin{aligned}
Kh_{\mathbb{F}_2}(\textcircled{2}) &= q + q^3 + q^5t^2 + q^7t^2 + q^7t^3 + q^9t^3 \\
Kh_{\mathbb{Q}}(\textcircled{2}) &= q + q^3 + q^5t^2 + q^9t^3 \\
Kh_{\mathbb{Q}}(5_1) &= 1/q^5 + 1/q^3 + 1/(q^{15}t^5) + 1/(q^{11}t^4) + 1/(q^{11}t^3) + 1/(q^7t^2) \\
Kh_{\mathbb{Q}}(\textcircled{3}) &= 1 + q^2 + q^4t^2 + q^6t^2 \\
Kh_{\mathbb{Q}}(10_{132}) &= 1/q^3 + 1/q + 1/(q^{15}t^7) + 1/(q^{11}t^6) + 1/(q^{11}t^5) + 1/(q^9t^4) + \\
&\quad + 1/(q^7t^4) + 1/(q^9t^3) + 1/(q^5t^3) + 2/(q^5t^2) + 1/(qt)
\end{aligned}$$

V zgornjem primeru ima vozle 5_1 različni polinomi Hovanova od vozla 10_{132} , medtem ko sta Jonesova polinoma obeh vozlov enaka. Torej je polinom Hovanova in s tem homologija Hovanova strogo močnejša spletna invarianta od Jonesovega polinoma. Več primerov spleto, ki jih homologija Hovanova loči in za katere je Jonesov polinom enak, najdemo v [2]. Opazimo tudi, da ima deteljica za obsega \mathbb{F}_2 in \mathbb{Q} različno homologijo Hovanova.

LITERATURA

- [1] C. C. Adams, *The knot book : an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, American Mathematical Society, Providence, 2004.
- [2] D. Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002) 337–370, dostopno na <http://www.msp.warwick.ac.uk/agt/2002/02/agt-2002-02-016p.pdf>.
- [3] D. Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, dostopno na <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/papers/Categorification/>.
- [4] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate texts in mathematics **175**, Springer, New York, 1997.
- [5] V. O. Manturov, *Knot theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004; dostopno tudi na <http://www.varf.ru/rudn/manturov/book.pdf>.
- [6] A. B. Sosinski, *Vozli : razvoj neke matematične teorije*, Knjižnica Sigma **91**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.
- [7] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer, New York, 1966.
- [8] *The Rolfsen Knot Table*, [ogled 13. 8. 2013], dostopno na http://katlas.math.toronto.edu/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table.